

BULLETIN DE LA S. M. F.

LÉON AUTONNE

Sur les groupes linéaires, réels et orthogonaux

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 121-134

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902_30_121_1

© Bulletin de la S. M. F., 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/*

SUR LES GROUPES LINÉAIRES, RÉELS ET ORTHOGONAUX;

Par M. LÉON AUTONNE.

Considérons un groupe G_x de substitutions linéaires n -aires, de déterminant un [$j, k = 1, 2, \dots, n$],

$$A = \left| x_j \sum_k a_{jk} x_k \right| = |x_j A[x_j]| = |x A[x]|.$$

Supposons que les substitutions A soient : 1° réelles, les coefficients a_{jk} étant réels; 2° orthogonales, admettant pour invariant absolu la somme des carrés des variables. On dira que G_x est un groupe linéaire réel et orthogonal.

Changeons de variables, en posant symboliquement $x = r[t]$, c'est-à-dire, en notation ordinaire,

$$x_j = \sum_k r_{jk} t_k.$$

Le nouveau groupe Γ_t , qui est d'ailleurs $r^{-1} G r$, n'est, en général, plus ni réel, ni orthogonal. Γ_t n'est cependant pas quelconque, car, pour un changement convenable de variables, $t = r^{-1}[x]$, il redevient réel et orthogonal. J'exprimerai plus brièvement cette propriété en disant que Γ_t est *réalisable* et admet la substitution r pour *réalisante*.

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un groupe n -aire Γ_t soit réalisable?

La présente Note fournit la réponse complète à la question.

Mon Mémoire *Sur l'Hermitien (Rendiconti du Cercle Matématique de Palerme, 1902)* contient, sur les substitutions linéaires, des considérations d'où la solution de notre problème se déduit assez simplement. Je vais me référer très fréquemment à ce travail; j'y renverrai pour la notation (*loc. cit.*, n° 7), par exemple.

Rappelons brièvement les principales théories dont on va faire usage.

Soit une *matrice* ou Tableau de n^2 coefficients,

$$[j, k = 1, 2, \dots, n],$$

$$A = [a_{jk}] = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ de déterminant } |A| = 1.$$

La matrice $A' = [a_{kj}]$ est la *transposée* de A . \bar{g} étant la conjuguée de l'imaginaire g , on pose $\bar{A} = [\bar{a}_{jk}]$ (*loc. cit.*, n° 1).

La matrice A définit, sans ambiguïté (*loc. cit.*, n° 2), une *forme bilinéaire*

$$A(x, y) = \sum_{jk} A_{jk} y_j x_k$$

et une *substitution*

$$A = \left| x_j \quad \frac{\partial A(x, y)}{\partial y_j} \right| = |x - A[x]|.$$

La matrice

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

définit la forme bilinéaire $E(x, y) = \sum xy$ et la substitution *unité*.

La même lettre A peut désigner la matrice, la forme bilinéaire et la substitution. Les formules du calcul symbolique (FROBENIUS, *J. f. r. u. a. m.*, t. 84, p. 1) sont ainsi susceptibles (*loc. cit.*, n° 4) d'une triple interprétation.

Si l'on pose $x = L[\xi]$, $y = M[\eta]$, les formes bilinéaires

$$A(x, y) \text{ et } A(x, \bar{x})$$

deviennent respectivement (*loc. cit.*, n° 5)

$$M'AL(\xi, \eta) \text{ et } \bar{L}'AL(\xi, \bar{\xi}).$$

Une matrice, forme bilinéaire ou substitution, A est

symétrique, si $A' = A$;
réelle, si $\bar{A} = A$;
orthogonale, si $A'A = E$;
unitaire, si $\bar{A}'A = E$;
enfin hermitienne, si $A' = A$,

l'expression $A(x, \bar{x})$ devant être, de plus, dans ce dernier cas, un *hermitien*, c'est-à-dire toujours positive.

Les matrices réelles, orthogonales ou unitaires forment évidemment un groupe réel, orthogonal ou unitaire.

Si A est hermitienne, il existe (*loc. cit.*, n° 25) une, et une seule, hermitienne $a = A^{\frac{1}{2}}$ telle que $a^2 = A$. Si un groupe G admet pour invariant absolu un hermitien $H(x, \bar{x})$, le groupe transformé

$$H^{\frac{1}{2}}GH^{-\frac{1}{2}}$$

par l'hermitienne $H^{-\frac{1}{2}}$ est unitaire (*loc. cit.*, n° 31).

Tout cela rappelé, voici la proposition qui résout le problème :

THÉORÈME. — *Pour qu'un groupe n-aire Γ_t puisse, par un choix convenable de variables, être rendu réel et orthogonal, les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes :*

I. Γ_t possède deux invariants absolus, un hermitien $H(t, \bar{t})$ et une forme quadratique n-aire

$$[p_{jk} = p_{kj}] \quad P = \sum_{jk} p_{jk} t_j t_k$$

de déterminant un.

II. Γ_t ayant été rendu unitaire (en le transformant par

l'hermitienne $H^{-\frac{1}{2}}$), dans l'expression transformée P la matrice $P = [p_{jk}]$ symétrique est unitaire.

Si Γ_t possède plus d'une réalisante, les divers groupes G_x , G_y , ... réels et orthogonaux, auxquels on ramène Γ_t , sont les transformés l'un de l'autre par des substitutions réelles et orthogonales. On peut donc ne pas considérer G_x , G_y , ... comme distincts. Il suffira de se procurer, d'une manière quelconque, une seule réalisante.

Je construis effectivement cette dernière dans le cas particulier, assez étendu du reste, où, dans le groupe Γ_t , une substitution A au moins a toutes les racines de son équation caractéristique

$$|\rho E - A| = 0$$

distinctes.

Un résumé des présentes recherches a été inséré aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 17 mars 1902.

Je passe maintenant à la démonstration du théorème.

1. Je ne considère pas comme distincts deux groupes réels et orthogonaux, transformés l'un de l'autre par une substitution réelle et orthogonale.

Je nomme *réalisable* tout groupe n -aire qui devient réel et orthogonal après transformation par une substitution *réalisante* convenablement choisie. Je vais poursuivre la construction des groupes réalisables.

2. **LEMME I.** — *Des trois propriétés, réalité, unitarité, orthogonalité, que possède éventuellement une matrice A, deux quelconques assurent toujours la troisième.*

En effet, des trois relations

$$\begin{aligned}\bar{A} &= A, \text{ réalité,} \\ A'A &= E, \text{ orthogonalité,} \\ \bar{A}'A &= E, \text{ unitarité,}\end{aligned}$$

deux quelconques assurent toujours la troisième.

LEMME II. — *Toute matrice est le produit d'une unitaire par une hermitienne.*

Soit la matrice A . La matrice $\bar{A}'A$ est hermitienne (*loc. cit.*, n° 27) et sa racine carrée h (*loc. cit.*, n° 25) aussi est hermitienne. On a

$$\bar{A}'A = h^2 \quad \text{et} \quad h^{-1}\bar{A}'A h^{-1} = E \quad \text{ou} \quad (\bar{A}h^{-1})'A h^{-1} = E.$$

La matrice $Ah^{-1} = u$ est donc unitaire et il vient

$$A = uh.$$

C. Q. F. D.

On a du reste aussi

$$A^{-1} = h^{-1}u^{-1}.$$

h^{-1} est hermitienne (*loc. cit.*, n° 24) et u^{-1} est unitaire. On peut donc dire aussi que toute matrice est le produit d'une hermitienne par une unitaire.

3. Considérons maintenant un groupe Γ_t , exprimé en n variables t_1, t_2, \dots, t_n . Par hypothèse, Γ_t est réalisable et, posant

$$t = r^{-1}[x],$$

on a un groupe G_x , exprimé en n variables x_1, \dots, x_n , lequel G_x est réel et orthogonal. La substitution r^{-1} sera dite *réalisante*.

G_x , étant réel et orthogonal, admet deux invariants absolus, savoir :

I. L'hermitien $E(x, \bar{x}) = \sum x\bar{x}$ (car toute substitution de G_x , étant réelle et orthogonale, est aussi unitaire, par le lemme 1 du 2°);

II. Le polynome quadratique $E(x, x) = \sum x^2$.

En vertu de la relation précédente

$$t = r^{-1}[x] \quad \text{ou} \quad x = r[t],$$

l'hermitien $E(x, \bar{x})$ devient l'hermitien $\bar{r}'r(t, \bar{t})$ et le polynome quadratique $E(x, x)$ devient le polynome quadratique

$$r'r(t, t) = \sum_{jk} p_{jk} t_j t_k = P(t, t),$$

où P désigne la matrice symétrique

$$\{k, j = 1, 2, \dots, n\} \quad P = [p_{jk}] = [p_{kj}].$$

4. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant : *Tout groupe réalisable Γ_t possède deux invariants absous, un hermitien et une forme quadratique.*

Cherchons si la réciproque est vraie.

5. Je dis que l'on peut, sans restreindre la généralité, n'envisager que des groupes réalisables Γ_t unitaires.

r étant une réalisante, posons, conformément au lemme II du n° 2,

$$r = uh.$$

L'invariant absolu hermitien, qui est, d'après le n° 3, $\bar{r}'r(t, \bar{t})$, devient

$$h^2(t, \bar{t}).$$

Transformons Γ_t par l'hermitienne h^{-1} . L'hermitien $h^2(t, \bar{t})$ devient l'hermitien $E(t, \bar{t})$ et, par conséquent, Γ_t devient unitaire.

C'est ce que je supposerai toujours dorénavant.

Cela revient à supposer unitaires la réalisante r , pour que $\bar{r}'r$ puisse être identique à E , et aussi la matrice symétrique $P = r'r$ (n° 3).

6. Nous allons montrer que *tout groupe unitaire Γ_t qui admet pour invariant absolu une forme quadratique*

$$\sum_{jk} p_{jk} t_j t_k, \quad p_{jk} = p_{kj},$$

où la matrice symétrique

$$P = [p_{jk}]$$

est unitaire, est réalisable.

Il suffira évidemment de construire une réalisante.

Cette proposition est bien la réciproque de celle du n° 4, car le second invariant absolu est déjà, par unitarité, l'hermitien $E(t, \bar{t})$.

7. La matrice unitaire symétrique P admet une canonisante (*loc. cit.*, n° 22) unitaire λ et a pour forme canonique P_0 ,

$$\begin{aligned} P &= \lambda^{-1} P_0 \lambda, \\ P_0 &= |t_j, \quad c_j t_j|, \end{aligned}$$

où $|c_j| = 1$ (*loc. cit.*, n° 20, *in fine*).

Mettons en évidence les c_j égaux; on écrira, $i = \sqrt{-1}$,

$$\begin{aligned} c_1 &= c_2 = c_3 = \dots = c_m = e^{i\varphi}, \\ c_{m+1} &= c_{m+2} = \dots = c_{m+m'} = e^{i\psi}, \\ c_{m+m'+1} &= \dots = c_{m+m'+m''} = e^{i\omega}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

$\varphi, \psi, \omega, \dots$ étant des arcs réels, tous distincts, compris entre 0 et 2π .

On vérifiera sans peine la proposition suivante :

LEMME. — *Pour qu'une substitution n-aire Λ soit échangeable à P_0 , il faut et il suffit que l'on ait*

$$\Lambda = L_m L_{m'} L_{m''} \dots,$$

où $L_m, L_{m'}, L_{m''}, \dots$ sont respectivement une m -aire, une m' -aire, une m'' -aire, ... quelconques, effectuées, savoir, respectivement,

$$\begin{aligned} L_m &\text{ sur } t_1, t_2, \dots, t_m; \\ L_{m'} &\text{ sur } t_{m+1}, \dots, t_{m+m'}; \\ L_{m''} &\text{ sur } t_{m+m'+1}, \dots, t_{m+m'+m''}; \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Ce lemme résulte immédiatement de théories, bien connues, de M. Jordan.

8. Sont symétriques : P par hypothèse et P_0 comme canonique. Il vient (n° 7)

$$P = \lambda^{-1} P_0 \lambda = P' = \lambda' P_0 \lambda'^{-1}, \quad P_0 = \lambda \lambda' P_0 (\lambda \lambda')^{-1};$$

$\lambda \lambda'$ est échangeable à P_0 et l'on écrira

$$\Lambda = \lambda \lambda',$$

Λ ayant l'expression qui figure au lemme du n° 7.

9. Considérons maintenant la canonique unitaiee

$$\theta_0 = |t_j, d_j t_j|,$$

où (voir n° 7)

$$d_1 = d_2 = \dots = d_m = e^{\frac{ip}{2}},$$
$$d_{m+1} = d_{m+2} = \dots = d_{m+m'} = e^{\frac{i\Psi}{2}},$$
$$d_{m+m'+1} = \dots = d_{m+m'+m''} = e^{\frac{i\omega}{2}},$$
$$\dots \dots \dots$$

les arcs $\frac{\varphi}{2}, \frac{\psi}{2}, \frac{\omega}{2}, \dots$ sont tous inégaux.

On a évidemment $\Theta_0^2 = P_0$ et Λ est échangeable à Θ_0 .

Posons

$$\Theta = \lambda^{-1} \Theta_0 \lambda, \text{ comme } P = \lambda^{-1} P_0 \lambda;$$

on a aussi

$$\Theta^2 = P.$$

Je dis que Θ est *symétrique*.

Considérons, en effet,

$$\Theta' \Theta^{-1} = \lambda' \Theta_0 \lambda'^{-1} \lambda^{-1} \Theta_0^{-1} \lambda = \lambda' \Theta_0 \Lambda^{-1} \Theta_0^{-1} \lambda$$

et, comme $\Lambda = \lambda \lambda'$ est échangeable à Θ_0 ,

$$\Theta' \Theta^{-1} = \lambda' \Lambda^{-1} \lambda = E \text{ et } \Theta' = \Theta. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

10. On reprendra donc un groupe unitaire Γ_t ayant pour invariant absolu quadratique l'expression

$$P(t, t),$$

où la matrice unitaire symétrique $P = \Theta^2$.

Posons

$$t = \Theta^{-1}[x] \text{ ou } x = \Theta[t];$$

Γ_t se transforme en un groupe unitaire G_x , lequel admet pour invariant quadratique l'expression

$$\Theta'^{-1} P \Theta^{-1}(x, x) = \Theta'^{-1} \Theta^2 \Theta^{-1}(x, x) = E(x, x) = \sum x^2.$$

G_x est orthogonal; il est déjà unitaire, donc (lemme I du n° 2) G_x est réel. Γ_t est réalisable et Θ est une réalisante.

11. Nous avons, au n° 5, rendu Γ_t unitaire, en le transformant par l'hermitienne h^{-1} , h étant la racine carrée de son hermitien,

invariant absolu,

$$H(t, \bar{t}) = \bar{r} r(t, \bar{t}).$$

Nous pouvons donc résumer toute la discussion précédente dans un théorème qui est la proposition annoncée au commencement du présent travail.

THÉORÈME. — Pour qu'un groupe n -aire Γ_t puisse, par un choix convenable de variables, être rendu orthogonal et réel, les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes :

1° Γ_t possède deux invariants absous, un hermitien $H(t, \bar{t})$ et une forme quadratique n -aire, de déterminant un,

$$P = \sum_{jk} p_{jk} t_j t_k, \quad p_{jk} = p_{kj};$$

2° Γ_t ayant été rendu unitaire (en le transformant par l'hermitienne $H^{-\frac{1}{2}}$) dans l'expression transformée, P , la matrice n -aire symétrique

$$P = [p_{jk}]$$

est unitaire.

12. Γ_t satisfaisant aux conditions du théorème, nous avons construit la réalisante Θ , laquelle est connue dès qu'on possède la matrice P et une de ses canonisantes.

Existe-t-il pour Γ_t encore d'autres réalisantes?

Supposons qu'il en existe deux, r et s , de façon qu'en posant

$$x = r[t], \quad y = s[t],$$

on obtienne deux groupes G_x et G_y , tous deux réels et orthogonaux.

On aura (n° 3)

$$P(t, t) = r' r(t, t) = s' s(t, t), \quad r'^{-1} s' s r^{-1} = (s r^{-1})' s r^{-1} = 1;$$

la matrice $u = s r^{-1}$ est orthogonale. D'ailleurs, $y = u[x]$.

Je dis que u est réelle. Il suffira (lemme I du n° 2) de montrer que u est unitaire. Or, cela est évident, car u , transformant l'un dans l'autre les groupes réels et orthogonaux G_x et G_y , transforme l'un dans l'autre les deux hermitiens $E(x, \bar{x})$, et $E(y, \bar{y})$.

u étant réelle et orthogonale, les groupes G et \mathfrak{G} ne sont pas distincts (n° 1).

Il est donc inutile de chercher d'autres réalisantes que Θ .

Il suffira même de se procurer une réalisante r quelconque.

La manière la plus simple d'avoir r est de poser $x = r(t)$ de façon que l'expression $\sum x^2$ s'identifie avec le polynôme quadratique P en t_1, \dots, t_n . r , bien entendu, doit être unitaire.

Alors, en effet, en transformant Γ_t par r^{-1} , on a un groupe G_x qui est unitaire, comme Γ_t , et, de plus, orthogonal; donc, G_x est aussi réel.

13. Le calcul effectif d'une réalisante unitaire ne présente aucune difficulté dans un cas particulier, assez étendu du reste. C'est lorsque le groupe réalisable unitaire Γ_t possède au moins une substitution A , pour laquelle l'équation caractéristique

$$f(\rho) = |\rho E - A| = 0$$

a ses n racines distinctes. Le polynôme $f(\rho)$ est évidemment à coefficients réels.

Ces racines sont, par unitarité, de la forme $e^{i\alpha}$. À cause de la réalité du polynôme $f(\rho)$, s'il y a une racine $e^{i\alpha}$, il y aura une racine $e^{-i\alpha}$. Tous les arcs réels α et $-\alpha$ sont distincts. Aucun d'eux n'est égal à π , car l'équation caractéristique, en vertu de $|A|=1$, possède la racine -1 avec un degré pair de multiplicité.

Nous supposerons A mise sous forme canonique et nous distinguerons deux cas :

$$\begin{aligned} n = 2m &= \text{pair,} \\ n = 2m + 1 &= \text{impair.} \end{aligned}$$

14. Prenons $n = 2m$. En égard à ce qui vient d'être dit, on peut écrire

$$A = \begin{vmatrix} y_l & y_l e^{i\alpha_l} \\ z_l & z_l e^{-i\alpha_l} \end{vmatrix} \quad l = 1, 2, \dots, m,$$

où

$$t_1 = y_1, \quad t_2 = z_1, \quad t_3 = y_2, \quad t_4 = z_2, \quad \dots;$$

les arcs α sont tous distincts; aucun d'eux n'est ni 0 ni π .

Le polynôme quadratique P est un invariant absolu vis-à-vis

de A. On vérifie de suite que

$$P = 2 \sum_l p_l y_l z_l$$

et l'on a la matrice symétrique

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ p_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & p_2 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse,

$$(1) \quad \begin{aligned} 1 &= |P| = (-1)^m \prod_l p_l^2, \\ \prod_l p_l^2 &= (-1)^m. \end{aligned}$$

Par unitarité on a, par un calcul facile,

$$\begin{aligned} \bar{P}' P &= \begin{pmatrix} |p_1|^2 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & |p_2|^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & |p_3|^2 & \dots \end{pmatrix} = E \\ 1 &= |p_1| = |p_2| = \dots = |p_m|, \end{aligned}$$

$$(2) \quad p_l = e^{i\varpi_l},$$

ϖ_l = arc réel compris entre 0 et 2π . En égard à (1), on a

$$2 \sum_l \varpi_l = m\pi = 2M\pi, \quad M = \text{entier.}$$

15. Introduisons maintenant une transformation

$$t = q[x], \quad |q| = 1$$

en posant

$$y_l = \mu_l \frac{x_l + ix'_l}{\sqrt{2}}, \quad z_l = \mu_l \frac{ix_l + x'_l}{\sqrt{2}}.$$

La condition $|q| = 1$ donne

$$(3) \quad \prod_l \mu_l^2 = 1,$$

et l'unitarité donne, par un calcul aisé,

$$1 = \mu_l \bar{\mu}_l = |\mu_l|^2, \quad |\mu_l| = 1, \quad \mu_l = e^{i\varphi_l}.$$

Le polynome P devient

$$P_1 = \sum_l p_l \mu_l^2 (x_l^2 + x_l'^2).$$

q est une réalisante dès que P_1 est, à un facteur constant K près, la somme des carrés des variables x et x' (n° 12). Il faut donc déterminer les paramètres μ par la condition

$$(4) \quad K = p_l \mu_l^2 = e^{i(\omega_l + 2\varphi_l)};$$

sous le bénéfice de (3), (4) donne

$$\prod_l p_l = K^m,$$

et, eu égard à (1),

$$(5) \quad K^{2m} = (-1)^m.$$

Si m est pair, on prendra, pour avoir (4),

$$K = 1, \quad \varphi_l = -\frac{\omega_l}{2}.$$

Si m est impair, on prendra, à cause de (4),

$$K = i, \quad \varphi_l = -\frac{\omega_l}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

La réalisante est construite.

16. Supposons enfin que n est impair, $n = 2m + 1$.

On écrira, eu égard aux explications du n° 13, et remarquant que 1 est racine de l'équation caractéristique,

$$A = \begin{vmatrix} t_0 & t_0 \\ y_l & y_l e^{i\alpha_l} \\ z_l & z_l e^{-i\alpha_l} \end{vmatrix} \quad l = 1, 2, \dots, m,$$

$y_1 = t_1, z_1 = t_2, y_2 = t_3, \dots$; les arcs réels α sont tous distincts, compris entre 0 et 2π et $\neq 0, 2\pi$ ou π .

Comme au n° 14, on voit que le polynome P est

$$P = p_0 t_0^2 + 2 \sum_l p_l y_l u_l;$$

la matrice P est

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & p_1 & \dots \\ 0 & p_1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$1 = |P| = p_0 (-1)^m \prod_l p_l^2,$$

$$(6) \quad \prod_l p_l^2 = (-1)^m p_0^{-1}.$$

Par unitarité,

$$1 = p_0 \bar{p}_0 = |p_0|^2 = p_l \bar{p}_l = |p_l|^2, \\ |p_0| = |p_l| = 1, \quad p_0 = e^{i\varpi_0}, \quad p_l = e^{i\varpi_l},$$

les arcs ϖ étant compris entre 0 et 2π . En regard à (6),

$$\varpi_0 + 2 \sum_l \varpi_l = m\pi + 2M\pi, \quad M = \text{entier}.$$

17. Introduisons maintenant une transformation

$$t = q[x], \quad |q| = 1,$$

en posant

$$t_0 = \mu_0 x_0, \\ y_l = \mu_l \frac{x_l + ix'_l}{\sqrt{2}}, \quad z_l = \mu_l \frac{ix_l + x'_l}{\sqrt{2}}.$$

La condition $|q| = 1$ donne

$$(7) \quad 1 = \mu_0 \prod_l \mu_l^2, \quad \prod_l \mu_l^2 = \mu_0^{-1}.$$

L'unitarité donne

$$1 = \mu_0 \bar{\mu}_0 = |\mu_0|^2 = \mu_l \bar{\mu}_l = |\mu_l|^2, \\ |\mu_0| = |\mu_l| = 1; \quad \mu_0 = e^{i\varphi_0}, \quad \mu_l = e^{i\varphi_l}.$$

Le polynôme P devient

$$P_1 = p_0 \mu_0^2 x_0^2 + i \sum_l p_l \mu_l^2 (x_l^2 + x_l'^2).$$

q est une réalisante dès que

$$(8) \quad p_0 \mu_0^2 = i p_l \mu_l^2 = e^{i(\varpi_0 + 2\varphi_0)} = i e^{i(\varpi_l + 2\varphi_l)}.$$

Eu égard à (6) et (7), il vient

$$(9) \quad p_0^m \mu_0^{2m} = i^m \mu_0^{-1} \prod_l p_l, \quad i^m \prod_l p_l = p_0^m \mu_0^{2m+1},$$
$$(p_0 \mu_0^2)^{2m+1} = 1.$$

On prendra $p_0 \mu_0^2 = 1$, et, pour satisfaire à (8),

$$\varphi_0 = -\frac{\pi_0}{2}, \quad \varphi_l = -\frac{\pi_l}{2}.$$

18. Si, dans toute substitution du groupe réalisable, l'équation caractéristique a des racines multiples, le calcul d'une réalisante est analogue, mais beaucoup plus compliqué.
