BULLETIN DE LA S. M. F.

E. LANDAU

Sur quelques problèmes relatifs à la distribution des nombres premiers

Bulletin de la S. M. F., tome 28 (1900), p. 25-38

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__25_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR QUELQUES PROBLÈMES RELATIFS A LA DISTRIBUTION DES NOMBRES PREMIERS;

Par M. E. Landau.

1. Le théorème, regardé comme exact depuis longtemps, que la somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs à x est asymptotique à x, c'est-à-dire que son quotient par x tend, pour $x = \infty$, vers l'unité, a été démontré pour la première fois indé-

pendamment par M. Hadamard (1) et par M. de la Vallée-Poussin (2), de même que le théorème plus général que la somme des logarithmes des nombres premiers q, inférieurs à x et compris dans une progression arithmétique déterminée de raison k (première au terme initial), est asymptotique à $\frac{x}{\varphi(k)}$.

Je désigne, dans ce qui suit, l'égalité asymptotique par le signe $\backsim$; j'entends, en outre, par $\{G(x)\}$ une fonction telle que son quotient par une fonction déterminée $G(x)$ tend, pour $x = \infty$, vers o, et par $O[G(x)]$ une fonction telle que son quotient par $G(x)$ reste compris, pour $x = \infty$, entre deux limites finies; dans le cas particulier où elles coïncident, le quotient tend vers o ou vers une autre limite finie.

Les remarques qui forment le point de départ des pages suivantes se rattachent à la méthode employée par M. Hadamard pour arriver au résultat mentionné plus haut. M. Hadamard établit d'abord, pour $\mu > 1$, l'équation asymptotique

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_{q \leq x} \log q \log^{\mu-1} \frac{x}{q} \backsim \frac{x}{\varphi(k)} \tag{1}$$

et en déduit le théorème énoncé, qui correspond au cas $\mu = 1$. Mais il ne croit pas (3) que l'équation générale (1) puisse se déduire inversement de la relation correspondant à $\mu = 1$ et pose le problème de rechercher quels renseignements la relation générale (1) fournit sur l'erreur commise en remplaçant $\sum_{q \leq x} \log q$ par sa valeur asymptotique, c'est-à-dire sur l'ordre de grandeur de la différence

$$\sum_{q \leq x} \log q - \frac{x}{\varphi(k)}.$$

On verra cependant, dans la suite, qu'il est possible de déduire

---

(1) *Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques* (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXIV; 1896).

(2) *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers* (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XX, 2e Partie; 1896).

(3) *Loc. cit.*, p. 219.

l'équation asymptotique (1) de la seule équation

$$\sum_{q \leq x} \log q \backsim \frac{x}{\varphi(k)}, \tag{2}$$

de sorte qu'il faut donner à la question posée par M. Hadamard la réponse que l'équation (1) ne saurait fournir aucun renseignement sur la fonction $\sum_{q \leq x} \log q - \frac{x}{\varphi(k)}$, vu que l'équation (1) subsiste non seulement pour les nombres premiers de la progression arithmétique, mais aussi pour toute classe de nombres q satisfaisant à la seule condition que la somme des logarithmes de tous les nombres q inférieurs à x soit asymptotique à $\frac{x}{\varphi(k)}$.

Il suffit de considérer la suite naturelle des nombres au lieu d'une progression arithmétique quelconque; car, abstraction faite du facteur $\varphi(k)$ entrant dans toutes les formules, les considérations sont, dans le cas général, littéralement les mêmes.

2. Je pars donc de la relation

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \backsim x \tag{3}$$

et je me propose d'en déduire

$$\sum_{p \leq x} \log p \log^{\mu-1} \frac{x}{p} \backsim x \Gamma(\mu) \qquad (\mu > 1), \tag{4}$$

où les sommes s'étendent à tous les nombres premiers qui ne sont pas supérieurs à x.

Déjà Tchebycheff a appliqué l'artifice de la sommation partielle, dû à Abel, à la considération de sommes étendues aux nombres premiers d'un intervalle donné. On se convainc facilement que les développements du septième Chapitre de son *Mémoire sur les nombres premiers* (1), de même que ceux de Hargreave (2) et de Polignac (3) sont, *mutatis mutandis,* valables aussi dans le cas

(1) *Journal de Mathématiques*, 1re série, t. XVII, p. 382; 1852.

(2) *Analytical researches concerning numbers* (*Philosophical Magazine*, third series, t. XXXV, p. 49; 1849).

(3) *Recherches nouvelles sur les nombres premiers* (*Comptes rendus*, t. XLIX, p. 350; 1859).

que le terme général $F(\nu)$ de la somme dépend non seulement de ν, mais aussi des limites de la sommation.

En combinant ces considérations avec le théorème (3), on obtient comme corollaire la proposition suivante :

Si une fonction réelle de deux arguments positifs $F(\nu, x)$ *satisfait aux trois conditions suivantes :*

1° $$F(\nu, x) \geqq 0 \text{ pour } 1 \leqq \nu \leqq x,$$

2° $$\frac{F(\nu, x)}{\log \nu} \geqq \frac{F(\nu', x)}{\log \nu'} \text{ pour } 2 \leqq \nu \leqq \nu' \leqq x,$$

3° *en donnant à* ν *une valeur déterminée quelconque,*

$$F(\nu, x) = \left\{ \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u}\, du \right\},$$

ces conditions sont suffisantes pour pouvoir énoncer l'égalité asymptotique

$$\sum_{p \leqq x} F(p, x) \backsim \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u}\, du.$$

Démonstration. — En définissant une fonction $\varepsilon(x)$ au moyen de l'équation

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqq x} \log p = x + x\varepsilon(x)$$

[$\varepsilon(0)$ doit signifier 0], et en tenant compte de ce que

$$1 + \nu\varepsilon(\nu) - (\nu - 1)\varepsilon(\nu - 1) = \vartheta(\nu) - \vartheta(\nu - 1) = \log \nu \text{ ou } 0,$$

suivant que le nombre ν est premier ou composé, on a

$$\sum_{p \leqq x} F(p, x) = \sum_{\nu=2}^{x} \frac{\vartheta(\nu) - \vartheta(\nu - 1)}{\log \nu} F(\nu, x)$$

$$= \sum_{\nu=2}^{x} \frac{F(\nu, x)}{\log \nu} + \sum_{\nu=2}^{x} \frac{\nu\varepsilon(\nu) - (\nu - 1)\varepsilon(\nu - 1)}{\log \nu} F(\nu, x),$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{p \leqq x} F(p, x) = \sum_{\nu=2}^{x} \frac{F(\nu, x)}{\log \nu} + \sum_{\nu=2}^{x-1} \nu\varepsilon(\nu) \left[\frac{F(\nu, x)}{\log \nu} - \frac{F(\nu + 1, x)}{\log(\nu + 1)} \right] \\ + x\varepsilon(x) \frac{F(x, x)}{\log x} + \frac{F(2, x)}{\log 2}. \end{aligned} \right.$$

Comme la fonction $\frac{F(\nu, x)}{\log \nu}$ va en décroissant si ν augmente (deuxième hypothèse), on peut remplacer la somme $\sum_{\nu=2}^{x} \frac{F(\nu, x)}{\log \nu}$ par l'intégrale correspondante avec une erreur d'ordre

$$F(2, x) = \left\{ \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du \right\}$$

(troisième hypothèse). On a donc

$$\sum_{\nu=2}^{x} \frac{F(\nu, x)}{\log \nu} = \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du + \left\{ \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du \right\}.$$

Soit δ un nombre positif donné. On peut déterminer un nombre ϖ tel que, pour $\nu \geqq \varpi$,

$$|\varepsilon(\nu)| < \frac{\delta}{2}.$$

Donc

$$\left| \sum_{\nu=2}^{x-1} \nu\varepsilon(\nu) \left[\frac{F(\nu, x)}{\log \nu} - \frac{F(\nu+1, x)}{\log(\nu+1)} \right] + x\varepsilon(x) \frac{F(x, x)}{\log x} \right|$$

$$\leqq \left| \sum_{\nu=2}^{\varpi-1} \nu\varepsilon(\nu) \left[\frac{F(\nu, x)}{\log \nu} - \frac{F(\nu+1, x)}{\log(\nu+1)} \right] \right|$$

$$+ \frac{\delta}{2} \sum_{\nu=\varpi}^{x-1} \nu \left[\frac{F(\nu, x)}{\log \nu} - \frac{F(\nu+1, x)}{\log(\nu+1)} \right] + \frac{\delta}{2} x \frac{F(x, x)}{\log x}.$$

La première somme du second membre se compose d'un nombre fini de termes d'ordre inférieur à $\int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du$ (troisième hypothèse); donc le second membre

$$\leqq \left\{ \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du \right\} + \frac{\delta}{2} \sum_{\nu=2}^{x} \frac{F(\nu, x)}{\log \nu} [\nu - (\nu - 1)]$$

$$= \left\{ \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du \right\} + \frac{\delta}{2} \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du,$$

c'est-à-dire, pour x suffisamment grand,

$$\leqq \frac{\delta}{2} \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du + \frac{\delta}{2} \int_2^x \frac{F(u, x)}{\log u} du = \delta \int^x \frac{F(u, x)}{\log u} du;$$

le quotient par $\int_2^x \frac{F(u,x)}{\log u}\,du$ tend donc, pour $x=\infty$, vers o, et il résulte de (5) que

$$(6)\qquad \sum_{p\leq x} F(p,x) = \int_2^x \frac{F(u,x)}{\log u}\,du + \left\{\int_2^x \frac{F(u,x)}{\log u}\,du\right\},$$

ce qu'il fallait démontrer.

3. En prenant

$$F(\nu,x) = \log\nu \log^{\mu-1}\frac{x}{\nu},$$

on obtient

$$\sum_{p\leq x} \log p \log^{\mu-1}\frac{x}{p} \backsim \int_2^x \log^{\mu-1}\frac{x}{u}\,du \backsim \int_1^x \log^{\mu-1}\frac{x}{u}\,du,$$

d'où, en posant $x = ue^y$,

$$\sum_{p\leq x} \log p \log^{\mu-1}\frac{x}{p} \backsim -x\int_{\log x}^0 e^{-y}y^{\mu-1}\,dy = x\int_0^{\log x} e^{-y}y^{\mu-1}\,dy$$

$$= x\int_0^\infty e^{-y}y^{\mu-1}\,dy - x\int_{\log x}^\infty e^{-y}y^{\mu-1}\,dy = x\,\Gamma(\mu) + \{x\} \backsim x\,\Gamma(\mu),$$

ce qui constitue le théorème (4) de M. Hadamard.

4. Je résoudrai, dans ce qui suit, en n'appliquant pas d'autres ressources transcendantes que le théorème (3), le problème :

Trouver la valeur asymptotique du nombre $\pi_k(x)$ de tous les nombres inférieurs à x et composés de k nombres premiers, tous différents.

Ce problème a été énoncé par Hargreave (1), mais je crois qu'on ne s'en est pas occupé jusqu'à présent.

On a d'abord

$$\pi_1(x) = \pi(x) \backsim \frac{x}{\log x};$$

cette égalité asymptotique a été déduite par M. von Mangoldt

(1) *Loc. cit.*, p. 53.

et par M. de la Vallée-Poussin (¹) du théorème (3) et est, du reste, un cas particulier de (6), pour $F(\nu, x) = 1$.

$\pi_2(x)$ est égal au nombre des paires de nombres premiers p, q tels que

$$pq \leq x$$

et

$$p < q.$$

En ne tenant compte que de la première de ces deux inégalités, on obtient deux fois tout nombre pq si p et q sont différents et une fois tout nombre p^2; donc

$$2\pi_2(x) = \sum_{p \leq x} \pi\left(\frac{x}{p}\right) - \pi(\sqrt{x}),$$

identité connue.

On peut appliquer à la somme

$$\sum_{p \leq x} \pi\left(\frac{x}{p}\right)$$

la proposition du n° 2, ce qui donne

$$\sum_{p \leq x} \pi\left(\frac{x}{p}\right) \backsim \int_2^x \frac{\pi\left(\frac{x}{u}\right)}{\log u}\, du = \int_2^{\frac{x}{2}} \frac{\pi\left(\frac{x}{u}\right)}{\log u}\, du$$

$\left[\text{car } \pi\left(\frac{x}{u}\right) = 0 \text{ pour } u > \frac{x}{2}\right]$. Soit δ une grandeur positive donnée; ϖ étant convenablement choisi, on a, pour $\frac{x}{u} \geq \varpi$, c'est-à-dire pour $u \leq \frac{x}{\varpi}$,

$$\left| \pi\left(\frac{x}{u}\right) - \frac{x}{u(\log x - \log u)} \right| \leq \delta \frac{x}{u(\log x - \log u)},$$

donc

$$\left| \int_2^{\frac{x}{\varpi}} \frac{\pi\left(\frac{x}{u}\right)}{\log u}\, du - x \int_2^{\frac{x}{\varpi}} \frac{du}{u \log u (\log x - \log u)} \right|$$

$$\leq \int_2^{\frac{x}{\varpi}} \frac{du}{\log u} \left| \pi\left(\frac{x}{u}\right) - \frac{x}{u(\log x - \log u)} \right| \leq \delta x \int_2^{\frac{x}{\varpi}} \frac{du}{u \log u (\log x - \log u)}.$$

(¹) Von Mangoldt, *Über eine Anwendung der Riemannschen Formel für die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (*Journal de Crelle*, t. 119, p. 65-71; 1898).

Or

$$\log x \int_2^{\frac{x}{\varpi}} \frac{du}{u \log u (\log x - \log u)}$$
$$= \int_2^{\frac{x}{\varpi}} \left(\frac{1}{\log u} + \frac{1}{\log x - \log u} \right) d \log u$$
$$= [\log \log u - \log(\log x - \log u)]_2^{\frac{x}{\varpi}}$$
$$= \log \log \frac{x}{\varpi} - \log \log \varpi - \log \log 2 + \log \log \frac{x}{2}$$
$$= 2 \log \log x + O(1),$$

et

$$\int_{\frac{x}{\varpi}}^{\frac{x}{2}} \frac{\pi\left(\frac{x}{u}\right)}{\log u} du \leqq \pi(\varpi) \int_{\frac{x}{\varpi}}^{x} \frac{du}{\log u} \leqq \pi(\varpi) \operatorname{Li}(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right);$$

donc

$$\int_2^{\frac{x}{2}} \frac{\pi\left(\frac{x}{u}\right)}{\log u} du = \int_2^{\frac{x}{\varpi}} \frac{\pi\left(\frac{x}{u}\right)}{\log u} du + \int_{\frac{x}{\varpi}}^{\frac{x}{2}} \frac{\pi\left(\frac{x}{u}\right)}{\log u} du$$
$$= \frac{2x \log \log x}{\log x} + \left\{ \frac{x \log \log x}{\log x} \right\},$$

d'où, en tenant compte de ce que

$$\pi(\sqrt{x}) = O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right),$$

$$\pi_2(x) \backsim \frac{x \log \log x}{\log x}. \tag{7}$$

En suivant ce chemin, on parvient au théorème

$$\pi_k(x) \backsim \frac{1}{(k-1)!} \frac{x (\log \log x)^{k-1}}{\log x}. \tag{8}$$

Je suppose qu'il soit déjà démontré pour les valeurs 1, 2, ..., k et je l'établirai pour $k+1$.

Chacun des $\pi_{k+1}(x)$ nombres composés de $k+1$ nombres premiers, tous différents, peut être mis, de $k+1$ manières, sous la forme $p.n$, p désignant un nombre premier; n sera composé de k nombres premiers, tous différents entre eux et différents de p. Donc

$$(k+1)\pi_{k+1}(x) = \sum_{p \leqq x} \pi_k\left(\frac{x}{p}\right) - q(x), \tag{9}$$

où $q(x)$ désigne le nombre des nombres inférieurs à x et qui contiennent $k-1$ nombres premiers une seule fois et un $k^{\text{ième}}$ deux fois. On a, comme $\pi_{k-1}\left(\frac{x}{p^2}\right)$ égale o pour $p > \sqrt{\frac{x}{2}}$,

$$q(x) = \mathrm{O}\sum_{p \leq \sqrt{\frac{x}{2}}} \pi_{k-1}\left(\frac{x}{p^2}\right) = \mathrm{O}\int_2^{\sqrt{\frac{x}{2}}} \pi_{k-1}\frac{\frac{x}{u^2}}{\log u}\,du$$

$$= \mathrm{O}\int_2^{\sqrt{x}} \frac{x(\log\log x)^{k-2}}{u^2(\log x - 2\log u)}\,\frac{du}{\log u}$$

$$= x(\log\log x)^{k-2}\,\mathrm{O}\int_2^{\sqrt{\frac{x}{2}}} \frac{du}{u^2\log u(\log x - 2\log u)}.$$

Or, si l'on pose $u = \frac{1}{v}$, cette intégrale

$$= -\int_{\sqrt{\frac{2}{x}}}^{\frac{1}{2}} \frac{dv}{\log v(\log x + 2\log v)}$$

$$= -\frac{1}{\log x}\int_{\sqrt{\frac{2}{x}}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\log v} - \frac{2}{\log x + 2\log v}\right) dv$$

$$= -\frac{1}{\log x}\left(\int_{\sqrt{\frac{2}{x}}}^{\frac{1}{2}} \frac{dv}{\log v} - \frac{1}{\sqrt{x}}\int_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} \frac{dw}{\log w}\right)$$

$$= \mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x}\log x}\,\mathrm{O}\left(\mathrm{Li}\,\frac{1}{2}\sqrt{x}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Donc

$$q(x) = \mathrm{O}\left[\frac{x(\log\log x)^{k-2}}{\log x}\right],$$

ce qui est d'ordre inférieur à $\pi_k(x)$ et, *a fortiori*, à $\pi_{k+1}(x)$. L'équation (9) donne donc

$$(k+1)\pi_{k+1}(x) \backsim \sum_{p \leq x} \pi_k\left(\frac{x}{p}\right) \backsim \int_2^x \frac{\pi_k\left(\frac{x}{u}\right)}{\log u}\,du \backsim \int_2^x \frac{\pi_k\left(\frac{x}{u}\right)}{\log u}\,du,$$

a désignant une constante quelconque (¹). Comme dans le cas spécial $k = 2$ traité plus haut, on commet une erreur asymptotiquement inférieure à la valeur de l'intégrale en remplaçant

$$\pi_k\left(\frac{x}{u}\right)$$

par

$$\frac{1}{(k-1)!}\,\frac{x[\log(\log x - \log u)]^{k-1}}{u(\log x - \log u)}.$$

Donc

$$(10)\quad (k-1)!\,(k+1)\pi_{k+1}(x) \backsim x\int_2^{\frac{x}{a}} \frac{[\log(\log x - \log u)]^{k-1}\,d\log u}{\log u(\log x - \log u)}.$$

a doit être pris $\geq e$, pour que $\log(\log x - \log u)$ soit ≥ 0.

Il faut maintenant calculer la valeur asymptotique de cette intégrale qui, en mettant

$$\log x = \xi, \qquad \log u = \eta,$$

se transforme en

$$\int_{\log 2}^{\xi - \log a} \frac{\log^{k-1}(\xi - \eta)}{\eta(\xi - \eta)}\,d\eta.$$

En prenant $a = e$ et en remplaçant la limite inférieure par 1, on ne commet qu'une erreur d'ordre $\frac{(\log\log x)^{k-1}}{\log x}$. Or,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_1^{\xi-1} \frac{\log^{k-1}(\xi - \eta)}{\eta(\xi - \eta)}\,d\eta \Big| \\ &\quad = \frac{1}{\xi}\int_1^{\xi-1} \frac{\log^{k-1}(\xi - \eta)}{\xi - \eta}\,d\eta + \frac{1}{\xi}\int_1^{\xi-1} \frac{\log^{k-1}(\xi - \eta)}{\eta}\,d\eta. \end{aligned}\right.$$

La première de ces deux intégrales s'évalue directement :

$$(12)\quad \int_1^{\xi-1} \frac{\log^{k-1}(\xi - \eta)}{\xi - \eta}\,d\eta = \frac{1}{k}\left[-\log^k(\xi - \eta)\right]_1^{\xi-1} = \frac{1}{k}\log^k(\xi - 1).$$

(¹) Car la différence de ces deux intégrales est d'ordre

$$\int_{\frac{x}{a}}^{x} \frac{du}{\log u} = O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

et les intégrales mêmes sont d'ordre plus élevé.

On trouve la valeur asymptotique de la seconde en tenant compte de ce que

$$\int_{\frac{\xi}{2}}^{\xi} \frac{\log^{k-1}(\xi-\eta)}{\eta}\,d\eta = \log^{k-1}\xi\, O\int_{\frac{\xi}{2}}^{\xi}\frac{d\eta}{\eta} = O(\log^{k-1}\xi),$$

et que, pour $\eta \leq \frac{\xi}{2}$,

$$\log^{k-1}(\xi-\eta) = \left[\log\xi + \log\left(1-\frac{\eta}{\xi}\right)\right]^{k-1} = [\log\xi + O(1)]^{k-1}$$
$$= \log^{k-1}\xi + O(\log^{k-2}\xi);$$

on obtient

$$(13)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_1^{\xi-1} \frac{\log^{k-1}(\xi-\eta)}{\eta}\,d\eta \\ \quad = \log^{k-1}\xi \displaystyle\int_1^{\frac{\xi}{2}} \frac{d\eta}{\eta} + \log^{k-2}\xi\, O\int_1^{\frac{\xi}{2}}\frac{d\eta}{\eta} + O(\log^{k-1}\xi) \\ \quad = \log^{k}\xi + O(\log^{k-1}\xi). \end{cases}$$

De (10), (11), (12), (13), on conclut

$$(k-1)!\,(k+1)\pi_{k+1}(x) \backsim \frac{x}{\log x}\left(\frac{1}{k}+1\right)(\log\log x)^k,$$
$$\pi_{k+1}(x) \backsim \frac{1}{k!}\,\frac{x(\log\log x)^k}{\log x},$$

ce qu'il fallait démontrer.

5. L'erreur commise, en remplaçant, dans les hypothèses du n° 2, la somme

$$\sum_{p\leq x} F(p,x)$$

par sa valeur asymptotique, peut être appréciée, avec plus ou moins de succès, au moyen du théorème récemment établi par M. de la Vallée-Poussin (1), que

$$\varepsilon(x) = O\left(e^{-a\sqrt{\log x}}\right),$$

a désignant une constante positive.

---

(1) *Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée* (*Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique*, t. LIX, p. 54; 1899).

On tire de (5)

$$\sum_{p\leq x} F(p,x) = \int_2^x \frac{F(u,x)}{\log u}\,du + O[F(2,x)] + O\sum_{\nu=2}^{x-1} \nu e^{-a\sqrt{\log\nu}}\left[\frac{F(\nu,x)}{\log\nu} - \frac{F(\nu+1,x)}{\log(\nu+1)}\right] + O\left[x e^{-a\sqrt{\log x}} F(x,x)\right].$$

Pour

$$F(\nu,x) = 1,$$

on a

$$\sum_{\nu=2}^{x-1} \nu e^{-a\sqrt{\log\nu}}\left[\frac{1}{\log\nu} - \frac{1}{\log(\nu+1)}\right] = \sum_{\nu=2}^{x-1} e^{-a\sqrt{\log\nu}} \frac{\nu\log\left(1+\frac{1}{\nu}\right)}{\log\nu\log(\nu+1)} < \sum_{\nu=2}^{x-1} e^{-a\sqrt{\log\nu}}\nu\cdot\frac{1}{\nu} < \sum_{\nu=1}^{x} e^{-a\sqrt{\log\nu}} = O\int_1^x e^{-a\sqrt{\log\nu}}\,d\nu = O\left(x e^{-a\sqrt{\log x}}\right).$$

L'erreur commise en remplaçant le nombre $\pi(x)$ des nombres premiers $\leq x$ par le logarithme intégral

$$\mathrm{Li}(x) = \lim_{\delta=0}\left(\int_0^{1-\delta}\frac{du}{\log u} + \int_{1+\delta}^{x}\frac{du}{\log u}\right)$$

est donc

$$O\left(x e^{-a\sqrt{\log x}}\right).$$

Ce résultat n'est pas nouveau; il a été établi par M. de la Vallée-Poussin dans le cinquième Chapitre de son Mémoire cité (1); mais les développements précédents font voir que, le théorème

$$\sum_{p\leq x}\log p = x + O\left(x e^{-a\sqrt{\log x}}\right)$$

une fois établi, on n'a pas besoin de remonter à la théorie de la fonction $\zeta(s)$ pour démontrer que

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\left(x e^{-a\sqrt{\log x}}\right).$$

---

(1) *Loc. cit.*, p. 63.

Pour la fonction désignée plus haut par $\pi_k(x)$, on obtient, par la même méthode,

$$(14)\quad \pi_k(x) = \frac{1}{(k-1)!}\,\frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x} + O\left[\frac{x(\log\log x)^{k-2}}{\log x}\right] \quad (^1).$$

La même formule (14) donne aussi la valeur asymptotique du nombre $\varrho_k(x)$ des nombres $\leqq x$ qui sont divisibles par k nombres premiers différents pouvant être affectés d'exposants supérieurs à 1, de même que celle du nombre $\sigma_k(x)$ des nombres $\leqq x$ qui sont composés de k nombres premiers, les facteurs multiples étant comptés selon leur degré de multiplicité.

En effet, ceci est évident pour $k = 1$, où les deux fonctions $\sigma_1(x)$ et $\pi_1(x)$ coïncident, tandis que $\varrho_1(x) - \pi_1(x)$ est le nombre des solutions de

$$p^m \leqq x \qquad (m \geqq 2),$$

donc d'ordre $\frac{\sqrt{x}}{\log x}$.

Supposons que le théorème soit déjà démontré pour les indices $1, 2, \ldots, k$; il s'agit de l'établir pour l'indice $k+1$. Vu que

$$0 \leqq \sigma_{k+1}(x) - \pi_{k+1}(x) \leqq \varrho_1(x) + \varrho_2(x) + \ldots + \varrho_k(x) = O\left[\frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}\right]$$

(car tout nombre composé de $k+1$ facteurs premiers, pas tous différents, en a 1 ou 2, ..., ou k différents), il suffit de le prouver pour $\varrho_{k+1}(x)$. Tout nombre divisible par $k+1$ nombres premiers, dont un au moins est affecté d'un exposant supérieur à 1, est de la forme

$$n = p^\alpha m \leqq x,$$

où $\alpha \geqq 2$ et où m est un nombre composé de k nombres premiers différents entre eux, mais affectés d'exposants quelconques. Or, le

---

(1) Pour $k = 1$, le théorème de M. de la Vallée-Poussin donne l'approximation plus grande

$$\pi_1(x) = \mathrm{Li}(x) + O(xe^{-a\sqrt{\log x}}) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

nombre des solutions de

$$p^{\alpha} \leqq \frac{x}{m} \qquad (\alpha \geqq 2$$

est

$$\rho_1\left(\frac{x}{m}\right) - \pi_1\left(\frac{x}{m}\right),$$

donc, *a fortiori,*

$$= O\sqrt{\frac{x}{m}}.$$

Par conséquent,

$$0 \leqq \rho_{k+1}(x) - \pi_{k+1}(x) = O\sum_m \sqrt{\frac{x}{m}} = \sqrt{x}\, O\sum_m \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Le nombre des valeurs que m peut prendre

$$= \rho_k(x) = O\left[\frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}\right].$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_m \frac{1}{\sqrt{m}} &= \sum_{\nu=1}^{x} \frac{\rho_k(\nu) - \rho_k(\nu-1)}{\sqrt{\nu}} = \sum_{\nu=1}^{x} \rho_k(\nu)\left[\frac{1}{\sqrt{\nu}} - \frac{1}{\sqrt{\nu+1}}\right] + \frac{\rho_k(x)}{\sqrt{x+1}} \\
&= O\sum_{\nu=2}^{x} \frac{\nu(\log\log\nu)^{k-1}}{\log\nu} \frac{1}{\nu^{\frac{3}{2}}} + O\left[\frac{\sqrt{x}(\log\log x)^{k-1}}{\log x}\right] \\
&= O\int_2^x \frac{(\log\log u)^{k-1}}{\log u} \frac{du}{\sqrt{u}} + O\left[\frac{\sqrt{x}(\log\log x)^{k-1}}{\log x}\right] \\
&= O\left[\frac{\sqrt{x}(\log\log x)^{k-1}}{\log x}\right];
\end{aligned}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}
\rho_{k+1}(x) &= \pi_{k+1}(x) + O\left[\frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}\right] \\
&= \frac{1}{k!}\frac{x(\log\log x)^k}{\log x} + O\left[\frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}\right],
\end{aligned}$$

ce qui prouve que le second membre de l'équation (14) représente aussi les valeurs des fonctions $\rho_k(x)$ et $\sigma_k(x)$ pour de grands arguments.