BULLETIN DE LA S. M. F.

A. DEMOULIN

Sur la torsion d'une courbe définie par son plan osculateur

Bulletin de la S. M. F., tome 28 (1900), p. 180-183

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__180_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LA TORSION D'UNE COURBE DÉFINIE PAR SON PLAN OSCULATEUR;

Par M. A. DEMOULIN.

I.

Soient $y_1, \ldots, y_n$, n fonctions d'une variable x. Désignons par $W(y_1, \ldots, y_n)$ leur wronskien, c'est-à-dire le déterminant

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Le signe W jouit d'une remarquable propriété qui se traduit par la formule

$$(A) \qquad W(\lambda y_1, \ldots, \lambda y_n) = \lambda^n W(y_1, \ldots, y_n),$$

où l'on désigne par λ une fonction arbitraire de x. En particulier, si l'on fait $\lambda = \frac{1}{y_1}$, il viendra

$$(A') \qquad W(y_1, \ldots, y_n) = y_1^n W\left(D\frac{y_2}{y_1}, \ldots, D\frac{y_n}{y_1}\right).$$

Cette notation des wronskiens et la formule (A) permettent de présenter de la manière suivante une partie des résultats contenus dans le n° 376 des *Leçons* de M. Darboux (II^e^ Partie, p. 101 et suiv.) :

Soient $z_1, \ldots, z_n$ les mineurs du déterminant (1) par rapport aux éléments de la dernière ligne.

On a

$$(B) \qquad W(z_1, \ldots, z_n) = [W(y_1, \ldots, y_n)]^{n-1},$$

puis

$$(C) \quad y_i = (-1)^{i-1} \lambda W(z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

avec

$$(D) \qquad \lambda = \frac{1}{|W(y_1, \ldots, y_n)|^{n-2}}.$$

II.

Les formules qui précèdent trouvent une application immédiate dans la recherche de la torsion d'une courbe définie par son plan osculateur.

Soient x, y, z les coordonnées cartésiennes d'une courbe, ce sont des fonctions d'un paramètre t. La torsion en un point quelconque M de cette courbe a pour expression

$$\frac{1}{\tau} = \frac{W(x', y', z')}{\sqrt{W(x', y')^2 + W(y', z')^2 + W(z', x')^2}},$$

les accents désignant des dérivées par rapport à t.

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées homogènes du point M. Si on les introduit dans l'expression de $\frac{1}{\tau}$, il viendra, en faisant usage de la formule (A'),

$$\frac{1}{\tau} = \frac{x_4^2 W(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\sqrt{W(x_1, x_2, x_4)^2 + W(x_2, x_3, x_4)^2 + W(x_3, x_1, x_4)^2}}.$$

Soit maintenant

$$(\omega) \qquad y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 + y_4 x_4 = 0$$

l'équation du plan osculateur en M; y_1, y_2, y_3, y_4 sont des fonctions connues de t. Les coordonnées du point M vérifient l'équation (ω) et les deux suivantes

$$(\omega') \qquad y'_1 x_1 + y'_2 x_2 + y'_3 x_3 + y'_4 x_4 = 0,$$
$$(\omega'') \qquad y''_1 x_1 + y''_2 x_2 + y''_3 x_3 + y''_4 x_4 = 0.$$

Ces trois équations montrent que x_1, x_2, x_3, x_4 sont proportionnelles aux mineurs du wronskien de y_1, y_2, y_3, y_4 par rapport aux éléments de la dernière ligne. Si on les prend égales à ces mineurs, c'est-à-dire (d'après les notations adoptées au paragraphe I) à z_1, z_2, z_3, z_4, on pourra écrire

$$\frac{1}{\tau} = \frac{z_4^2 W(z_1, z_2, z_3, z_4)}{\sqrt{W(z_1, z_2, z_4)^2 + W(z_2, z_3, z_4)^2 + W(z_3, z_1, z_4)^2}}.$$

Les formules (B), (C), (D) deviennent ici

$$W(z_1, z_2, z_3, z_4) = [W(y_1, y_2, y_3, y_4)]^3,$$

$$\begin{cases} y_1 = \lambda W(z_2, z_3, z_4), \\ y_2 = -\lambda W(z_1, z_3, z_4), \\ y_3 = \lambda W(z_1, z_2, z_4), \\ y_4 = -\lambda W(z_1, z_2, z_3), \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{1}{[W(y_1, y_2, y_3, y_4)]^2}.$$

D'ailleurs

$$z_4 = -W(y_1, y_2, y_3).$$

En tenant compte de ces différentes relations, on obtient l'expression définitive de $\frac{1}{\tau}$:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\overline{W(y_1, y_2, y_3)}^2}{(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)\, W(y_1, y_2, y_3, y_4)}.$$

Cette formule conduit à une relation très simple entre les torsions de deux courbes qui se correspondent dans une corrélation quelconque. (Voir *Comptes rendus*, séance du 29 janvier 1898.) Nous réservons pour une autre occasion la démonstration des propriétés énoncées dans cette Note; nous nous contenterons ici d'établir une relation entre les torsions de deux courbes polaires réciproques par rapport à une sphère. Soient Γ et Γ' les deux courbes en question et O le centre de la sphère directrice. Appelons τ et τ' les rayons de torsion de Γ et Γ' en deux points correspondants M et M'. Si l'on écrit l'équation du plan osculateur de Γ en M sous la forme

$$ux + vy + wz = 1,$$

les coordonnées cartésiennes du point M' seront (u', v', w'), pourvu qu'on prenne pour unité de longueur le rayon de la sphère directrice.

Si l'on fait dans la formule ci-dessus $y_1 = u$, $y_2 = v$, $y_3 = w$, $y_4 = -1$, on obtiendra l'expression de $\frac{1}{\tau}$:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\overline{W(u, v, w)}^2}{(u^2 + v^2 + w^2)\, W(u', v', w')}.$$

On a ensuite

$$\frac{1}{\tau'} = \frac{W(u', v', w')}{\sqrt{W(u', v')^2 + W(v', w')^2 + W(w', u')^2}},$$

d'où, par multiplication,

$$\frac{1}{\tau\tau'} = \frac{W(u, v, w)^2}{W(u', v)^2 + W(v', w')^2 + W(w', u')^2} \cdot \frac{1}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Soit P′ la projection orthogonale du point O sur le plan osculateur de Γ′ en M′. On a

$$\overline{OP'}^2 = \frac{W(u, v, w)^2}{W(u', v')^2 + W(v', w')^2 + W(w', u')^2},$$

$$\overline{OM'}^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

Par suite

$$\tau\tau' = \frac{\overline{OM'}^2}{\overline{OP'}^2}.$$

Or, si l'on désigne par φ l'angle des plans osculateurs en M et M′,

$$\frac{OP'}{OM'} = \cos\varphi$$

et il vient finalement

$$\tau\tau' \cos^2\varphi = 1,$$

ou, en appelant a le rayon de la sphère directrice,

$$\tau\tau' \cos^2\varphi = a^2.$$

Cette relation, jointe au théorème d'Enneper concernant la torsion des asymptotiques, conduit immédiatement à la relation

$$R_1 R_2 R'_1 R'_2 \cos^4\varphi = a^4$$

qui lie les rayons de courbure principaux de deux surfaces polaires réciproques par rapport à une sphère. Nous avons fait connaître ces deux formules dans une Note insérée aux *Comptes rendus* (séance du 16 mai 1892). M. Rouquet les a retrouvées récemment (*Bulletin de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse,* tome I, année 1898).