BULLETIN DE LA S. M. F.

J. LE ROUX

Extension de la méthode de Laplace aux équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre supérieur au second

Bulletin de la S. M. F., tome 27 (1899), p. 237-262
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1899__27__237_0>

EXTENSION DE LA MÉTHODE DE LAPLACE AUX ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR AU SECOND;

Par M. J. Le Roux.

PREMIÈRE PARTIE.

1. La méthode de Laplace constitue pour les équations linéaires du second ordre une méthode générale d'intégration, en ce sens qu'elle permet de déterminer toutes les intégrales explicites dépendant d'une fonction arbitraire. On peut l'étendre facilement aux équations d'ordre supérieur. Considérons en effet l'équation du second ordre

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

admettant une intégrale particulière de la forme d'Euler (¹)

$$(1)\qquad z = u_0 X^{(n)} + u_1 X^{(n-1)} + \ldots + u_n X,$$

où X désigne une fonction arbitraire de x. En appliquant à l'expression (1) la première transformation de Laplace, on a

$$z_1 = \frac{\partial z}{\partial y} + az = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + a u_0\right) X^{(n)} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + a u_1\right) X^{(n-1)} + \ldots + \left(\frac{\partial u_n}{\partial y} + a u_n\right) X.$$

Or, on sait que u_0 satisfait à l'équation

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} + a u_0 = 0;$$

z_1 est donc une expression de même forme que z, mais contenant un terme de moins. La transformation de Laplace se présente donc à nous comme destinée à faire disparaître le premier terme dans les intégrales de la forme d'Euler, et c'est à ce point de vue que nous la considérerons dans les équations d'ordre supérieur.

La répétition de cette transformation conduira à une équation admettant une intégrale à un seul terme, qui se calculera par une équation du premier ordre.

(¹) Dans le Mémoire de l'auteur sur les équations linéaires (*Journal de Math.*: 1898), la forme considérée est appelée la *forme d'Euler*.

2. Prenons maintenant une équation d'ordre n pour laquelle x soit une variable caractéristique

$$(2)\qquad D(z) = \sum \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,(n-\alpha-\beta)!} A_{\alpha,\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta} z}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = 0.$$

Supposons que le plus haut indice de dérivation par rapport à x figurant dans l'équation (2) soit égal à $n-p$. L'ensemble des termes contenant les dérivées de cet indice sera de la forme

$$a \frac{\partial^{n-p+i} z}{\partial x^{n-p} \partial y^i} + b \frac{\partial^{n-p+i-1} z}{\partial x^{n-p} \partial y^{i-1}} + \ldots + g \frac{\partial^{n-p} z}{\partial x^{n-p}}.$$

Nous dirons que l'expression

$$a \frac{\partial^i}{\partial y^i} + b \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} + \ldots + g$$

est le *multiplicateur* différentiel de $\frac{\partial^{n-p} z}{\partial x^{n-p}}$, et nous supposerons toujours le premier coefficient a égal à l'unité.

Si l'équation (2) admet une intégrale particulière de la forme d'Euler

$$(3)\qquad z = u_0 X^{(m)} + u_1 X^{(m-1)} + \ldots + u_m X,$$

les coefficients $u_0, u_1, \ldots, u_m$ satisfont à une loi de récurrence que nous avons donnée dans un précédent Mémoire [1]. Nous la rappelons ici rapidement.

Regardons D (z) comme un polynôme dont les variables soient $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$, et désignons par $D_{x^p y^q}^{(p+q)}(z)$ l'expression différentielle obtenue en prenant la dérivée, par rapport à $\frac{\partial}{\partial x}$, p fois et, par rapport à $\frac{\partial}{\partial y}$, q fois; cette dérivée $(p+q)^{\text{ième}}$ du terme

$$A_{\alpha,\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta} z}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$$

sera égale à

$$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-p+1)\,\beta(\beta-1)\ldots(\beta-q+1)\, A_{\alpha,\beta} \frac{\partial^{\alpha-p+\beta-q} z}{\partial x^{\alpha-p} \partial y^{\beta-q}},$$

---

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées;* 1898.

de sorte que l'on aura

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} D^{(p+q)}_{x^p y^q}(z) &= n(n-1)\ldots(n-p-q+1) \\ &\times \sum \frac{(n-p-q)!}{(\alpha-p)!(\beta-q)!(n-\alpha-\beta)!} A_{\alpha,\beta} \frac{\partial^{\alpha-p+\beta-q}}{\partial x^{\alpha-p}\,\partial y^{\beta-q}}. \end{aligned}\right.$$

Cela posé, nous aurons, pour définir les coefficients (u), les équations suivantes :

$$\frac{1}{(n-p)!} D^{(n-p)}_{x^{n-p}}(u_0) = 0,$$

$$\frac{1}{(n-p)!} D^{(n-p)}_{x^{n-p}}(u_1) + \frac{1}{(n-p-1)!} D^{(n-p-1)}_{x^{n-p-1}}(u_0) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{(n-p)!} D^{(n-p)}_{x^{n-p}}(u_i) + \frac{1}{(n-p-1)!} D^{(n-p-1)}_{x^{n-p-1}}(u_{i-1}) + \ldots = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nous voyons immédiatement que, pour faire disparaître le premier terme de l'expression (3), il suffira d'effectuer sur z l'opération $D^{(n-p)}_{x^{n-p}}$. Nous prendrons donc dans le cas des caractéristiques simples, comme définition de notre transformation asymptotique,

$$(5)\qquad z_1 = \frac{1}{(n-1)!} D^{(n-1)}_{x^{n-1}}(z) = \frac{\partial z}{\partial y} + n A_{n-1,0}\, z.$$

Nous examinerons plus loin le cas des caractéristiques multiples.

3. Pour obtenir plus facilement l'équation transformée en z_1, posons d'abord

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{z}{u_0} &= z e^{\int n A_{n-1}\,dy} = v, \\ \frac{z_1}{u_0} &= z_1 e^{\int n A_{n-1}\,dy} = v_1 = \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}\right.$$

L'équation en v sera de même forme que celle qui définit z; mais le coefficient de $\frac{\partial^{n-1} v}{\partial x^{n-1}}$ étant nul, la transformation asymptotique s'obtiendra en posant simplement

$$\frac{\partial v}{\partial y} = v_1.$$

D'après cela, écrivons l'équation en v en faisant passer dans le second membre tous les termes qui ne contiennent aucun symbole de dérivation par rapport à y. On trouve un résultat de la forme

$$(7) \qquad \Delta(v_1) = \lambda_0 \frac{\partial^p v}{\partial x^p} + \lambda_1 \frac{\partial^{p-1} v}{\partial x^{p-1}} + \lambda_2 \frac{\partial^{p-2} v}{\partial x^{p-2}} + \ldots + \lambda_p v,$$

$\Delta(v_1)$ désignant une expression différentielle d'ordre $(n-1)$ dans laquelle le coefficient de $\frac{\partial^{n-1} v_1}{\partial x^{n-1}}$ est égal à l'unité.

Les coefficients λ du second membre sont donnés par la formule

$$(8) \qquad \lambda_i = e^{\int n A_{n-1}\, dy} \frac{1}{(p-i)!} D_{x^{p-i}}^{(p-i)}(u_0) = \frac{1}{u_0} \frac{1}{(p-i)!} D_{x^{p-i}}^{(p-i)}(u_0).$$

Il en résulte que ces coefficients, comme aussi ceux de $\Delta(v_1)$, dépendent de la détermination particulière qu'on choisira pour u_0. Les diverses valeurs possibles de u_0 s'obtiennent en multipliant l'une quelconque d'entre elles par une fonction arbitraire X de x. Cette opération transforme $D_{x^r}^{(r)}(u_0)$ en

$$(9) \quad D_{x^r}^{(r)}(u_0 X) = X\, D_{x^r}^{(r)}(u_0) + \frac{X'}{1} D_{x^{r+1}}^{(r+1)}(u_0) + \frac{X''}{1.2} D_{x^{r+2}}^{(r+2)}(u_0) + \ldots.$$

En désignant par λ'_i la nouvelle valeur de λ_i, on a donc

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} \lambda'_i &= \frac{1}{u_0 X} \frac{1}{(p-i)!} D_{x^{p-i}}^{(p-i)}(u_0 X) \\ &= \lambda_i + C_{p+1-i}^1 \frac{X'}{X} \lambda_{i-1} + C_{p+2-i}^2 \frac{X''}{X} \lambda_{i-2} + \ldots. \end{aligned} \right.$$

L'ordre p de la plus haute dérivée figurant dans le premier membre de l'équation (7) est, en général, égal à $n-2$; il peut être moindre si l'on a

$$D_{x^{n-2}}^{(n-2)}(u_0) = 0.$$

Mais, quelle que soit la détermination choisie pour u_0, l'ordre p restera inaltéré. C'est en quelque sorte un invariant de l'équation proposée.

On voit que les valeurs générales des λ dépendent d'une fonction arbitraire X; mais on peut, en ayant égard à l'équation (10), former avec ces quantités d'autres expressions qui ne contiennent plus aucune indéterminée et qui s'exprimeront par suite directement à l'aide des coefficients de $D(z)$ et de leurs dérivées. Ce sont les déterminants de la forme

$$(11) \qquad h_i = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_i \\ \frac{\partial \lambda_0}{\partial y} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^i \lambda_0}{\partial y^i} & \frac{\partial^i \lambda_1}{\partial y^i} & \dots & \frac{\partial^i \lambda_i}{\partial y^i} \end{vmatrix}$$

qui sont au nombre de $p+1$, en y comprenant $h_0 = \lambda_0$.

Si les λ, regardés comme fonctions de y, ne sont pas linéairement indépendants, les déterminants h_i sont tous nuls à partir d'un certain ordre. Nous dirons dans ce cas que la chaîne des λ est *brisée;* si, de plus, on a

$$p < n - 2,$$

nous dirons que la chaîne est *raccourcie*. Dans ces conditions, il faut modifier un peu l'expression des déterminants h_i. Désignons par λ_{α_1} le premier λ linéairement indépendant de λ_0, par λ_{α_2} le premier après λ_{α_1} qui soit linéairement indépendant de A_0 et de λ_{α_1}, etc. Les déterminants (11) seront alors remplacés par les suivants :

$$(11') \qquad h_i = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_{\alpha_1} & \dots & \lambda_{\alpha_i} \\ \frac{\partial \lambda_0}{\partial y} & \frac{\partial \lambda_{\alpha_1}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial \lambda_{\alpha_i}}{\partial y} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^i \lambda_0}{\partial y^i} & \frac{\partial^i \lambda_{\alpha_1}}{\partial y^i} & \dots & \frac{\partial^i \lambda_{\alpha_i}}{\partial y^i} \end{vmatrix}.$$

Nous aurons fréquemment à considérer dans la suite des chaînes limitées ou illimitées de fonctions. Nous appellerons *éléments principaux* de la chaîne les éléments tels que chacun d'eux soit linéairement indépendant de ceux qui le précèdent : tels sont λ_0, λ_{α_1}, λ_{α_2}, ... pour la chaîne des λ, ces éléments étant regardés comme des fonctions de y.

4. Nous avons trouvé les transformations que subissent les quantités λ quand on change la détermination de u_0. Nous allons maintenant étudier les transformations qu'elles éprouvent quand on effectue un changement de fonction et de variables indépendantes

conservant à la fois la forme linéaire de l'équation et les caractéristiques $x = \text{const.}$,

$$(12) \qquad \begin{cases} z = z'f(x, y), \\ x = \varphi(x'), \\ y = \psi(x', y'). \end{cases}$$

La première de ces transformations est manifestement sans influence sur la valeur de v, car elle change u_0 en

$$u'_0 = \frac{u_0}{f(x, y)}.$$

On a donc

$$\frac{z'}{u'_0} = \frac{z}{u_0}.$$

Occupons-nous donc seulement des transformations de variables indépendantes.

Les deux termes suivants de l'équation en z

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\, dy} + \frac{n}{1} A_{n-1,0} \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}$$

donnent dans la transformée

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^{n-1} \frac{\partial y'}{\partial y} \left(\frac{\partial^n z}{\partial x'^{n-1} \partial y'} + n A_{n-1,0} \frac{\partial y}{\partial y'} \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x'^{n-1}}\right) + \ldots,$$

les termes non écrits ne contenant les dérivées de z par rapport à x qu'aux ordres inférieurs à $n - 1$.

Les intégrales de l'équation

$$\frac{\partial \theta}{\partial y'} + n A_{n-1,0} \frac{\partial y}{\partial y'} \theta = 0$$

sont les mêmes que celles de

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} + n A_{n-1,0} \theta = 0,$$

et comme v s'obtient en divisant z par une intégrale quelconque de cette équation, il en résulte que les valeurs de v relatives à l'équation (2) sont les mêmes que les valeurs de la fonction analogue relatives à la transformée. Nous pourrons donc effectuer le changement de variables sur l'équation en v, pourvu que nous joignions à la transformation effectuée l'une des substitutions

$$(13) \qquad | \, u_0, \; u_0 X \, |.$$

En désignant par T_z et T_v les transformations (12) effectuées respectivement sur z et sur v, et par S les substitutions (13), nous avons l'équivalence

$$T_z = T_v S.$$

Effectuons le changement de variables indépendantes dans l'équation (7), après y avoir remplacé v_1 par sa valeur $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Tout terme qui contient un symbole de dérivation par rapport à y donnera dans la transformée des termes contenant un symbole de dérivation par rapport à y'. Les dérivées prises par rapport à x seul donneront deux sortes de termes d'après l'identité

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y'}.$$

Mais on voit que les dérivées prises par rapport à la seule variable x' se déduiront des dérivées par rapport à x en négligeant tout ce qui contient le symbole $\frac{\partial}{\partial y'}$. Donc, si nous faisons passer dans le premier membre de la transformée tous les termes où figure une dérivation par rapport à y', on trouvera un résultat de la forme suivante:

$$(7') \qquad \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^{n-1}\frac{\partial y'}{\partial y}\Delta_1\left(\frac{\partial v}{\partial y'}\right) = \mu_0\frac{\partial^p v}{\partial x^p} + \mu_1\frac{\partial^{p-1} v}{\partial x^{p-1}} + \ldots,$$

$\Delta_1\left(\frac{\partial v}{\partial y'}\right)$ désignant une expression de même forme que $\Delta(v_1)$, dans laquelle le coefficient de $\frac{\partial^n v}{\partial x'^n \partial y'}$ est égal à l'unité. Les quantités $\mu_0, \mu_1, \ldots$ sont des fonctions linéaires et homogènes des λ, de la forme

$$\mu_i = \lambda_i\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^{p-i} + \rho_1\lambda_{i-1} + \rho_2\lambda_{i-2} + \ldots,$$

$\rho_1, \rho_2, \ldots$ désignant des fonctions de x.

Enfin, pour ramener la transformée (7') à la forme normale de l'équation (7), il faut multiplier ses deux membres par

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^{n-1}\frac{\partial y}{\partial y'},$$

et poser en outre

$$\frac{\partial v}{\partial y'} = v'_1 = v_1\frac{\partial y}{\partial y'}.$$

On trouve ainsi

$$(14)\qquad \Delta_1(v'_1) = \lambda'_0 \frac{\partial^p v}{\partial x'^p} + \lambda'_1 \frac{\partial^{p-1} v}{\partial x'^{p-1}} + \ldots$$

Les nouveaux coefficients λ' sont liés aux λ par des relations de la forme suivante :

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda'_0 = \lambda_0 \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^{n-1-p} \frac{\partial y}{\partial y'}, \\ \lambda'_1 = \frac{\partial y}{\partial y'} \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^{n-1-p+1} (\lambda_1 + \theta_{11}\lambda_0), \\ \lambda'_2 = \frac{\partial y}{\partial y'} \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^{n-1-p+2} (\lambda_2 + \theta_{21}\lambda_1 + \theta_{20}\lambda_0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

les coefficients θ dépendant seulement de x. On voit immédiatement que la forme de ces relations n'est pas altérée par les substitutions dérivées de (13).

5. Le simple examen des formules (15) conduit aux conclusions suivantes :

1° Les indices des éléments principaux de la chaîne des λ ne sont pas altérés par la transformation (15);

2° Les déterminants h_i n'éprouvent d'autre modification que la multiplication par des puissances de $\frac{\partial x}{\partial x'}$ et $\frac{\partial y}{\partial y'}$.

Pour démontrer la seconde proposition, nous nous appuierons sur cette propriété bien connue des déterminants wronskiens : Si l'on multiplie, dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_n \\ \frac{d\omega_1}{dt} & \frac{d\omega_2}{dt} & \ldots & \frac{d\omega_n}{dt} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots. \\ \frac{d^{n-1}\omega_1}{dt^{n-1}} & \frac{d^{n-1}\omega_2}{dt^{n-1}} & \ldots & \frac{d^{n-1}\omega_n}{dt^{n-1}} \end{vmatrix},$$

les fonctions ω par une même fonction arbitraire $\varphi(t)$, le déterminant est multiplié par $\varphi(t)^n$.

On a donc, dans le cas de la chaîne non brisée,

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
\lambda'_0 & \dfrac{\partial\lambda'_0}{\partial y'} & \cdots & \dfrac{\partial^i\lambda'_0}{\partial y'^i} \\
\lambda'_1 & \dfrac{\partial\lambda'_1}{\partial y'} & \cdots & \dfrac{\partial^i\lambda'_1}{\partial y'^i} \\
\cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots\cdot \\
\lambda'_i & \dfrac{\partial\lambda'_i}{\partial y'} & \cdots & \dfrac{\partial^i\lambda'_i}{\partial y'}
\end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial y}{\partial y'}\right)^{i+1} \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^{\frac{(i+1)(i+2n-2-2p)}{2}} \times
\begin{vmatrix}
\lambda_0 & \dfrac{\partial\lambda_0}{\partial y'} & \cdots & \dfrac{\partial^i\lambda_0}{\partial y'^i} \\
\lambda_1 & \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial y'} & \cdots & \dfrac{\partial^i\lambda_1}{\partial y'} \\
\cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots\cdot \\
\lambda_i & \dfrac{\partial\lambda^i}{\partial y'} & \cdots & \dfrac{\partial^i\lambda_i}{\partial y'^i}
\end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial y}{\partial y'}\,\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^{\frac{(i+1)(i+2)}{2}} \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^{(n-2-p)(i+1)} h_q.
\end{aligned}
\right.
$$

En général, on a $p = n - 2$ et la relation précédente se réduit à

$$h'_i = \left(\frac{\partial y}{\partial y'}\cdot\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^{\frac{(i+1)(i+2)}{2}} h_i,$$

en désignant par h'_i la nouvelle valeur de h_i. Donc *le déterminant h_i se reproduit multiplié par la puissance $\frac{(i+1)(i+2)}{2}$ du déterminant fonctionnel de la transformation.*

Dans le cas de la chaîne raccourcie ou brisée, il faut joindre à cette puissance du déterminant fonctionnel une puissance de $\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)$.

Ces propriétés justifient le nom d'*invariants* que nous donnerons aux déterminants h_i.

On voit que, dans une équation d'ordre n, à chaque système de caractéristiques simples correspondent, en général, $n - 1$ invariants h_i. Pour que l'équation (2) admette une intégrale à un seul terme $z = u_0 X$, il faut et il suffit que tous ces invariants soient nuls.

Nos invariants h_i constituent donc une première généralisation des invariants de M. Darboux. Mais la suite de nos calculs nous conduira à en introduire d'autres.

6. Nous allons maintenant former le système transformé en v_1. Nous obtiendrons ce système en cherchant les conditions de compatibilité des deux équations en v :

$$(17)\quad \begin{cases} \lambda_0 \dfrac{\partial^p v}{\partial x^p} + \lambda_1 \dfrac{\partial^{p-1} v}{\partial x^{p-1}} + \ldots + \lambda_p v = \Delta(v_1), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{\partial v}{\partial y} = v_1. \end{cases}$$

Soit $q+1$ le nombre des éléments principaux de la chaîne des λ : $\lambda_0, \lambda_{\alpha_1}, \ldots, \lambda_{\alpha_q}$. Prenons les dérivées de (7) par rapport à y, jusqu'à l'ordre $(q+1)$.

En désignant par $\varphi(\theta)$ l'expression

$$\lambda_0 \frac{\partial^p \theta}{\partial x^p} + \lambda_1 \frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}} + \ldots + \lambda_p \theta,$$

et par $\varphi_i(\theta)$ l'expression analogue obtenue en remplaçant les λ par leurs dérivées d'ordre i, $\dfrac{\partial^i \lambda}{\partial y^i}$, nous aurons

$$(18)\quad \begin{cases} \varphi\ (v) = \Delta(v_1) = F_0(v_1), \\ \varphi_1(v) = \dfrac{\partial}{\partial y}\ \Delta(v_1) - \varphi(v_1) = F_1(v_1), \\ \varphi_2(v) = \dfrac{\partial^2}{\partial y_2}\ \Delta(v_1) - \dfrac{\partial}{\partial y}\ \varphi(v_1) - \varphi_1(v_1) = F_2(v_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_{q+1}(v) = \dfrac{\partial^{q+1}}{\partial y^{q+1}} \Delta(v_1) - \dfrac{\partial^q}{\partial y^q} \varphi(v_1) - \ldots - \varphi_q(v_1) = F_{q+1}(v_1). \end{cases}$$

Entre ces équations, nous pouvons éliminer v et ses dérivées par rapport à x, ce qui donne pour v_1 l'équation

$$(19)\quad \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_{\alpha_1} & \ldots & \lambda_{\alpha_q} & F_0 \\ \dfrac{\partial \lambda_0}{\partial y} & \dfrac{\partial \lambda_{\alpha_1}}{\partial y} & \ldots & \dfrac{\partial \lambda_{\alpha_q}}{\partial y} & F_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^{q+1} \lambda_0}{\partial y^{q+1}} & \dfrac{\partial^{q+1} \lambda_{\alpha_1}}{\partial y^{q+1}} & \ldots & \dfrac{\partial^{q+1} \lambda_{\alpha_q}}{\partial y^{q+1}} & F_{q+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est d'ordre $n+q$ et admet les mêmes caractéristiques que la proposée, mais l'ordre de multiplicité de la caractéristique x se trouve augmenté de q. Nous l'appellerons la *transformée principale*. En général, q étant égal à $n-2$, l'ordre de la transformée principale est égal à $n+n-2$, l'ordre de multiplicité de la caractéristique x pour cette équation étant $n-1$. Mais la nouvelle inconnue v_1 doit satisfaire encore à un certain nombre d'autres conditions que nous obtiendrons de la manière suivante :

Résolvons par rapport aux dérivées de v les $q+1$ premières équations (17). On pourra résoudre le système par rapport aux dérivées dont les coefficients sont les éléments principaux de la chaîne des λ. Désignons par δ_{ik} le déterminant obtenu en remplaçant dans h_q l'élément principal λ_{α_i} par λ_k.

Tout déterminant δ_{ik} pour lequel on a $k<\alpha_i$ est nul, car les éléments de la $(i+1)^e$ colonne y sont des combinaisons linéaires de ceux des précédentes; tout déterminant δ_{ik} pour lequel on a $k>\alpha_i$ est égal au produit de h_q par une fonction de x. Soit, en effet,

$$\lambda_k = X_{0k}\lambda_0 + X_{1k}\lambda_{\alpha_1} + \ldots + X_{rk}\lambda_{\alpha_r}\ (\alpha_r < k);$$

on a évidemment

$$\delta_{ik} = X_{ik} h_q. \tag{20}$$

Cette formule est générale, pourvu que l'on pose

$$X_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{pour } k<\alpha_i, \\ 1 & \text{pour } k=\alpha_i, \\ \text{quelconque} & \text{pour } k>\alpha_i. \end{cases}$$

Désignons aussi par R_i le quotient par h_q du déterminant obtenu en remplaçant dans h_q les éléments de la $(i+1)^e$ colonne par $F_0, F_1, \ldots$. Nous trouvons :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^p v}{\partial x^p} + X_{01}\frac{\partial^{p-1} v}{\partial x^{p-1}} + \ldots \qquad\qquad + X_{0,p} v = R_0, \\ &\frac{\partial^{p-\alpha_1} v}{\partial x^{p-\alpha_1}} + X_{1,\alpha_1+1}\frac{\partial^{p-\alpha_1-1} v}{\partial x^{p-\alpha_1-1}} + \ldots + X_{1,p} v = R_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\frac{\partial^{p-\alpha_q} v}{\partial x^{p-\alpha_q}} + X_{q,\alpha_{q+1}}\frac{\partial^{p-\alpha_{q-1}} v}{\partial x^{p-\alpha_{q-1}}} + \ldots + X_{q,p} v = R_q. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Ces équations ont une forme très remarquable : les premiers membres ne contiennent que des dérivées prises par rapport à x

et les coefficients dépendent de x seulement. La recherche des conditions de compatibilité de ces équations rentre donc dans le cadre de la théorie des équations différentielles ordinaires.

Supposons que les premiers membres des équations (21) égalés à zéro n'admettent d'autre solution commune que $v = 0$. Dans ce cas, le système (21), auquel on aura joint les dérivées prises par rapport à x des équations qui y figurent, pourra être remplacé par un système de la forme

$$v = T_0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = T_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial^p v}{\partial x^p} = T_p,$$

et les nouvelles équations en v_1 seront

$$(22) \qquad \frac{\partial T_0}{\partial x} = T_1, \qquad \frac{\partial T_1}{\partial x} = T_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial T_{p-1}}{\partial x} = T_p.$$

Supposons, au contraire, que les équations obtenues en égalant à zéro les premiers membres de (21) aient en commun toutes les intégrales d'une équation linéaire $\Phi(v) = 0$. On pourra donner alors au système la forme suivante :

$$\Phi(v) = T_0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\Phi(v) = T_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial^r}{\partial x^r}\Phi(v) = T_r,$$

et les conditions de compatibilité prendront encore la forme

$$\frac{\partial T_i}{\partial x} = T_{i+1}.$$

Il est d'ailleurs évident que ces conditions ne sont pas nécessairement toutes distinctes.

7. Dans le cas général où la chaîne des λ n'est pas brisée, le système (21) se réduit à

$$(21') \qquad \frac{\partial^p v}{\partial x^p} = R_0, \qquad \frac{\partial^{p-1} v}{\partial x^{p-1}} = R_1, \qquad \ldots, \qquad v = R_p,$$

et les conditions de compatibilité à

$$(22') \qquad \frac{\partial R_p}{\partial x} = R_{p-1}, \qquad \frac{\partial R_{p-1}}{\partial x} = R_{p-2}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial R_1}{\partial x} = R_0.$$

Aucune de ces équations n'est une conséquence de (19), car cette dernière contient une dérivation par rapport à y d'un ordre plus élevé que celles qui figurent dans (22').

Nous allons montrer qu'elles sont aussi toutes distinctes.

Soit $h_p l_i^{(j)}$ le coefficient de l'élément $\frac{\partial^j \lambda_i}{\partial y^j}$ dans le déterminant h_p. On a

$$R_i = l_i F_0 + l'_i F_1 + \ldots + l_i^{(p)} F_p.$$

Les équations (22') sont donc de la forme

$$(23)\quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_j \left(\frac{\partial l_i^{(j)}}{\partial x} - l_{i-1}^{(j)} \right) F_j + l_i \frac{\partial F_0}{\partial x} + l'_i \frac{\partial F_1}{\partial x} + \ldots + l_i^{(p)} \frac{\partial F_p}{\partial x} = 0 \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, p). \end{array} \right.$$

Désignons par Z_i le premier membre de (23) et supposons qu'il existe entre $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$, une relation linéaire et homogène à coefficients non tous nuls

$$m_1 Z_1 + m_2 Z_2 + \ldots + m_p Z_p \equiv 0.$$

En égalant à zéro successivement les coefficients des dérivées

$$\frac{\partial^{n+p} v_1}{\partial x^n \partial y^p}, \frac{\partial^{n+p-1} v_1}{\partial x^n \partial y^{p-1}}, \ldots, \frac{\partial^{n+1} v_1}{\partial x^n \partial y},$$

on trouve les relations

$$m_1 l_1^{(j)} + m_2 l_2^{(j)} + \ldots + m_p l_p^{(j)} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

qui ne peuvent être vérifiées par des valeurs non toutes nulles de $m_1, m_2, \ldots, m_p$, puisque le déterminant

$$| l_1^{(1)} l_2^{(2)} \ldots l_p^{(p)} | = \lambda_0 h_p^{-1}$$

est différent de zéro.

Nous appellerons *système auxiliaire* le système (22) ou (22').

Contrairement à ce qui a lieu pour le second ordre, pour lequel la transformation de Laplace fait correspondre à une équation donnée une équation unique, nous trouvons ici un système de plusieurs équations, comprenant la transformée principale et le système auxiliaire.

Le nombre total de ces équations ne dépasse d'ailleurs pas $n - 1$, par conséquent il n'y a pas contradiction.

8. Soit v une intégrale du système transformé. En transportant cette valeur dans les équations (21) et celles qui en dérivent on aura un système compatible. Il existera donc une ou plusieurs fonctions v satisfaisant à ces équations et, par conséquent, aussi à la première des équations (17). Cette fonction est, en général, unique, parce que l'équation $\Phi(v) = 0$ considérée au n° 6 se réduit à $v = 0$. Il reste à examiner si elle satisfait à la seconde des équations (17). En posant

$$\frac{\partial v}{\partial y} - v_1 = \theta,$$

et tenant compte des équations (18), on trouve

$$\begin{gathered}
\lambda_0 \frac{\partial^p \theta}{\partial x^p} + \lambda_1 \frac{\partial^{p-1} \theta}{\partial x^{p-1}} + \ldots + \lambda_p \theta = 0, \\
\frac{\partial \lambda_0}{\partial y} \frac{\partial^p \theta}{\partial x^p} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} \frac{\partial^{p-1} \theta}{\partial x^{p-1}} + \ldots + \frac{\partial \lambda_p}{\partial y} \theta = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{\partial^q \lambda_0}{\partial y^q} \frac{\partial^p \theta}{\partial x^p} + \frac{\partial^q \lambda_1}{\partial y^q} \frac{\partial^{p-1} \theta}{\partial x^{p-1}} + \ldots + \frac{\partial^q \lambda_p}{\partial y^q} \theta = 0.
\end{gathered}$$

Or, par hypothèse, ces équations n'admettent d'autre solution commune que $\theta = 0$ car elles sont équivalentes aux équations (21) où l'on aurait $R_0 = R_1 = \ldots = R_q = 0$.

Dans les cas exceptionnels où $\Phi(v) = 0$ serait une véritable équation différentielle, nous trouverions seulement

$$\Phi(\theta) = 0,$$

ce qui montre que le système (21), tout en étant compatible, est encore plus général que le système (17).

Supposons que $\Phi(v)$ soit d'ordre i. Dans ce cas toute intégrale de l'équation $\Phi(\theta) = 0$ sera déterminée quand on connaîtra les valeurs de

$$\theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{i-1} \theta}{\partial x^{i-1}}$$

pour $x = x_0$. Si ces valeurs initiales sont nulles il en sera de même de θ, quel que soit x, puisque l'équation $\Phi(\theta) = 0$ est linéaire et homogène.

D'autre part, pour intégrer l'équation

$$\Phi(v) = T_0(v_1),$$

on pourra se donner arbitrairement les valeurs de

$$v, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{i-1} v}{\partial x^{i-1}},$$

en fonction de y pour $x = x_0$; mais si l'on doit avoir en même temps

$$\frac{\partial v}{\partial y} = v_1,$$

les dérivées de ces valeurs initiales par rapport à y sont égales aux valeurs de

$$v_1, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{i-1} v_1}{\partial x^{i-1}},$$

pour $x = x_0$, et chacune d'elles ne dépend plus que d'une constante arbitraire : ces constantes sont, par exemple, les valeurs de

$$v, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{i-1} v}{\partial x^{i-1}},$$

en un point x_0, y_0. Si nous assujettissons les fonctions initiales de v à ces conditions, les valeurs initiales de

$$\theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{i-1} \theta}{\partial x^{i-1}}$$

sont nulles, et l'on a par conséquent $\theta \equiv 0$.

Il en résulte que le système

$$\Phi(v) = T_0(v_1), \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = v_1$$

est compatible et admet une intégrale dépendant de i constantes arbitraires, quand la fonction v_1 est une solution quelconque du système transformé. En particulier, si l'on prend $v_1 = 0$, on trouve pour v une intégrale quelconque de l'équation $\Phi(v) = 0$. Cette intégrale ne dépend que de x, car les arbitraires introduites par l'intégration sont de véritables constantes, et non pas des fonctions de y.

Les résultats précédents auraient pu s'établir par l'application des méthodes générales de MM. Bourlet, Delassus, Riquier, etc. Mais la nature particulière de la question en rendait l'étude directe plus simple et plus commode.

En résumé, nous sommes arrivés aux conclusions suivantes : *Quand tous les coefficients* λ *ne sont pas nuls, la nouvelle inconnue* v_1 *est définie, en général, non pas par une équation unique, mais par un système de plusieurs équations linéaires. A toute intégrale de ce système correspond, en général, une seule valeur de* v. *S'il en existe plusieurs, la différence de deux quelconques d'entre elles est une fonction de la seule variable* x *satisfaisant à l'équation* $\Phi(v) = 0$.

9. Pour que l'équation considérée (2) admette une intégrale à un seul terme $u_0 X$, il faut et il suffit que tous les λ soient nuls.

Ce dernier résultat était presque évident *a priori*.

En effet, nous avons

$$D(u_0 X) = X\,D(u_0) + \frac{X'}{1} D'_x(u_0) + \frac{X''}{1.2} D''_{x^2}(u_0) + \ldots + \frac{X^{(n-1)}}{(n-1)!} D^{n-1}_{x^{n-1}}(u_0) = 0.$$

Pour que le second membre de cette identité s'annule, quelle que soit la fonction arbitraire X, il faut et il suffit que l'on ait

$$D(u_0) = D'_x(u_0) = D''_{x^2}(u_0) = \ldots = 0,$$

ce qui établit notre proposition.

10. Avant de continuer cette étude, il est indispensable de définir la transformation de Laplace pour les caractéristiques multiples. Remarquons cependant que nous aurons à transformer toutes les équations du système obtenu, que chacune d'elles conduira vraisemblablement à un nouveau système d'ordre plus élevé et que par suite le nombre des équations à considérer augmentera très rapidement en même temps que leur ordre. Nous serions donc conduits, dans la moindre application, à d'inextricables difficultés, si l'étude de ces systèmes était indispensable.

Mais il suffit de se reporter aux équations du second ordre pour s'apercevoir que le rôle des transformées est à peu près nul, quand on a en vue seulement la détermination des intégrales explicites. Il suffit que l'on puisse définir la suite des transformations, et ce problème, M. Darboux l'a complètement résolu par l'introduction des invariants. Un fait analogue se présente pour les équations d'ordre supérieur. C'est pourquoi nous n'insisterons pas sur l'étude complète du système transformé.

DEUXIÈME PARTIE.

11. Dans le cas où x est une variable caractéristique multiple, le multiplicateur différentiel de la plus haute dérivée par rapport à x peut être d'ordre o; mais alors il n'y a pas d'intégrales explicites dépendant d'une fonction de x. Pour que ces intégrales existent, il faut nécessairement que ce multiplicateur soit au moins du premier ordre par rapport à $\frac{\partial}{\partial y}$. S'il est du premier ordre, il n'y a rien de changé aux calculs des numéros précédents. Nous allons nous occuper du cas où il est d'ordre supérieur.

Écrivons l'équation sous la forme

$$(1) \qquad D(z) = \varphi_0 \frac{\partial^{n-m} z}{\partial x^{n-m}} + \varphi_1 \frac{\partial^{n-m-1} z}{\partial x^{n-m-1}} + \ldots = 0,$$

$\varphi_0, \varphi_1 \ldots$ désignant des multiplicateurs différentiels

$$\varphi_0 = \frac{\partial^r}{\partial y^r} + a_1 \frac{\partial^{r-1}}{\partial y^{r-1}} + a_2 \frac{\partial^{r-2}}{\partial y^{r-2}} + \ldots \qquad (r \leqq m).$$

Toute intégrale principale par rapport à x de l'équation considérée admet comme premier terme de son développement une solution particulière de l'équation

$$(2) \qquad \frac{1}{(n-m)!} D_{x^{n-m}}^{(n-m)}(u) = \varphi_0(u) = \frac{\partial^r u}{\partial y^r} + a_1 \frac{\partial^{r-1} u}{\partial y^{r-1}} + \ldots = 0.$$

Il en est de même de toute intégrale explicite

$$(3) \qquad z = u_0 X^{(\mu)} + u_1 X^{(\mu-1)} + u_2 X^{(\mu-2)} + \ldots + u_\mu X.$$

Si l'on connaît l'intégrale particulière de (2) par laquelle commence le développement (3), on fera disparaître le premier terme en posant

$$(4) \qquad z_1 = u_0 \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{u_0}.$$

A toute intégrale de l'équation (2) on fera ainsi correspondre une transformation de Laplace.

Mais si rien n'indique l'intégrale particulière u_0, nous serons obligés, pour faire disparaître avec certitude le premier terme, de prendre pour transformation, à un facteur près,

$$(5)\qquad z_1 = \varphi_0(z).$$

Nous dirons que cette transformation

$$z_1 = \frac{\partial^r z}{\partial y^r} + a_1 \frac{\partial^{r-1} z}{\partial y^{r-1}} + \ldots$$

est d'ordre r.

Supposons que l'on ait décomposé φ_0 en facteurs différentiels symboliques

$$(6)\qquad \varphi_0(z) = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{r-1} u_0 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\alpha_{r-1}} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\alpha_{r-2}} \cdots \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{u_0}.$$

Il est évident que l'on obtiendra la transformation (5) par la répétition des transformations du premier ordre

$$z_1 = u_0 \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{u_0},$$

$$z_2 = \alpha_1 u_0 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{u_0} = \alpha_1 u_0 \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_1}{\alpha_1 u_0},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pour que cette décomposition en transformations du premier ordre soit complètement justifiée, il suffira de faire voir que les facteurs symboliques de φ_0 non utilisés dans la transformation appartiennent aussi aux multiplicateurs différentiels de la plus haute dérivée par rapport à x dans les équations du système transformé.

C'est ce qui va résulter de la suite de notre étude. La transformation du premier ordre constitue donc le type essentiel et élémentaire des transformations asymptotiques les plus générales.

12. L'étude que nous avons faite de la transformation du premier ordre dans le cas des caractéristiques simples s'applique sans modification importante aux caractéristiques multiples.

Nous poserons d'abord

$$(7)\qquad v = \frac{z}{u_0}, \qquad v_1 = \frac{z_1}{u_0} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

L'équation (1) prend alors la forme

$$(8)\qquad \Delta(v_1) = \lambda_0 \frac{\partial^p v}{\partial x^p} + \lambda_1 \frac{\partial^{p-1} v}{\partial x^{p-1}} + \ldots + \lambda_p v = \chi(v).$$

L'ordre p de $\chi(v)$ est au plus égal à $n-m-1$; $\Delta(v_1)$ est une expression différentielle d'ordre $n-1$:

$$(9) \qquad \Delta(v_1)=\psi_0\frac{\partial^{n-m}v_1}{\partial x^{n-m}}+\psi_1\frac{\partial^{n-m-1}v_1}{\partial x^{n-m-1}}+\ldots,$$

le multiplicateur différentiel ψ_0 se déduisant de φ_0 par la suppression du premier facteur à droite. Si l'on a

$$\varphi_0(\theta)=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{r-1}u_0\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\alpha_{r-1}}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\alpha_{r-2}}\cdots\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\theta}{u_0},$$

on trouve

$$\psi_0(\theta)=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{r-1}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\alpha_{r-1}}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\alpha_{r-2}}\cdots\frac{\partial}{\partial y}\frac{\theta}{\alpha_1}.$$

A l'aide des coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ du second membre de (8) on peut encore former des invariants $h_0, h_1, \ldots$, analogues à ceux que nous avons déjà considérés. La propriété d'invariance de ces expressions se démontre exactement de la même façon en remarquant : 1° que tout changement de variables indépendantes de la forme

$$x=\varphi(x'), \qquad y=\psi(x',y')$$

conserve les intégrales de l'équation $\varphi_0(u)=0$ (ou les multiplie par une fonction de x);

2° Que lorsqu'on multiplie z par une fonction $k(x,y)$, ces intégrales se trouvent multipliées par la même fonction.

Il importe d'observer que les invariants ainsi formés dépendent de l'intégrale particulière u_0 qui a défini la transformation; cependant, ils restent inaltérés quand on multiplie u_0 par une fonction de x.

Moyennant ces remarques, on voit immédiatement que la transformée principale et le système auxiliaire conservent la même forme qu'au Chapitre précédent. Il arrive seulement que dans $\Delta(v_1)$ la dérivée de l'ordre le plus élevé par rapport à x, $\frac{\partial^{n-m}v_1}{\partial x^{n-m}}$, au lieu d'avoir un coefficient numérique, est affectée d'un multiplicateur différentiel ψ_0; mais ce fait n'altère en aucune façon la forme extérieure de nos équations.

13. Cherchons maintenant le multiplicateur différentiel de la

plus haute dérivée par rapport à x dans les équations du système transformé.

Dans la transformée principale

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_{\alpha_1} & \dots & \lambda_{\alpha_q} & F_0 \\ \dfrac{\partial\lambda_0}{\partial y} & \dfrac{\partial\lambda_{\alpha_1}}{\partial y} & \dots & \dfrac{\partial\lambda_{\alpha_q}}{\partial y} & F_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \\ \dfrac{\partial^{q+1}\lambda_0}{\partial y^{q+1}} & \dfrac{\partial^{q+1}\lambda_{\alpha_1}}{\partial y^{q+1}} & \dots & \dfrac{\partial^{q+1}\lambda_{\alpha_q}}{\partial y^{q+1}} & F_{q+1} \end{vmatrix} = 0,$$

les dérivées d'ordre le plus élevé se trouvent évidemment dans le dernier élément de la dernière colonne, auquel correspond le terme $h_q F_{q+1}$. Il en résulte que les caractéristiques sont les mêmes que dans l'équation proposée mais que l'ordre de multiplicité de la variable caractéristique x se trouve augmenté de q.

Le multiplicateur différentiel de la plus haute dérivée prise par rapport à x, $\dfrac{\partial^{n-m}v_1}{\partial x^{n-m}}$, est égal à

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_{\alpha_1} & \dots & \lambda_{\alpha_q} & \psi_0 \\ \dfrac{\partial\lambda_0}{\partial y} & \dfrac{\partial\lambda_{\alpha_1}}{\partial y} & \dots & \dfrac{\partial\lambda_{\alpha_q}}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial y}\psi_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial^{q+1}\lambda_0}{\partial y^{q+1}} & \dfrac{\partial^{q+1}\lambda_{\alpha_1}}{\partial y^{q+1}} & \dots & \dfrac{\partial^{q+1}\lambda_{\alpha_q}}{\partial y^{q+1}} & \dfrac{\partial^{q+1}}{\partial y^{q+1}}\psi_0 \end{vmatrix} = h_q \Phi_0.$$

Les intégrales de l'équation $\Phi_0(u) = 0$ sont données par le système d'ordre $r - 1$:

$$(12)\qquad \begin{cases} \psi_0(u) = 0, \\ \psi_0(u) = \lambda_0 X_0, \\ \psi_0(u) = \lambda_{\alpha_1} X_1, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ \psi_0(u) = \lambda_{\alpha_q} X_q. \end{cases}$$

Leur détermination ne comporte d'autre difficulté que l'intégration complète de l'équation $\varphi_0(u) = 0$.

Dans les transformées auxiliaires, les résultats sont semblables. Les seules intégrales communes à tous les facteurs différentiels analogues à Φ_0 sont données par les deux équations

$$\psi_0(u) = 0, \qquad \psi_0(u) = \lambda_0 X_0.$$

ou par l'équation unique

$$\lambda_0 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\lambda_0} \psi_0(u) = 0.$$

14. Mais, dans le problème qui nous occupe, ce n'est pas précisément l'expression des intégrales de $\Phi_0(u)$ qui importe, c'est plutôt la décomposition du multiplicateur différentiel Φ_0 en facteurs symboliques du premier ordre. Ce résultat s'obtient facilement par l'introduction des invariants.

Considérons une suite de fonctions $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_p$, telle que l'on ait

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \beta_0, \\ \theta_1 &= \beta_0 \int \beta_1 \, dy, \\ \theta_2 &= \beta_0 \int \beta_1 \, dy \int \beta_2 \, dy, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

chaque signe d'intégration portant sur tout ce qui suit.

Formons avec ces quantités les invariants

$$(13) \qquad h_0 = \theta_0, \qquad h_1 = \begin{vmatrix} \theta_0 & \frac{\partial \theta_0}{\partial y} \\ \theta_1 & \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \end{vmatrix}, \qquad h_2 = \begin{vmatrix} \theta_0 & \frac{\partial \theta_0}{\partial y} & \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial y^2} \\ \theta_1 & \frac{\partial \theta_1}{\partial y} & \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} \\ \theta_2 & \frac{\partial \theta_2}{\partial y} & \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^2} \end{vmatrix},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On a évidemment

$$h_0 = \beta_0, \qquad h_1 = \beta_0^2 \beta_1, \qquad h_2 = \beta_0^3 \beta_1^2 \beta_2, \qquad \ldots, \qquad h_i = \beta_0^{i+1} \beta_1^i \beta_2^{i-1} \ldots \beta_i;$$

et par conséquent

$$\beta_0 = h_0, \qquad \beta_1 = \frac{h_1}{h_0^2}, \qquad \ldots, \qquad \beta_i = \frac{h_i h_{i-2}}{h_{i-1}^2}.$$

Donc, toutes les opérations qui laissent inaltérées les fonctions h jouissent de la même propriété relativement aux fonctions β. Si l'on prend pour $\theta_0, \theta_1, \ldots$ les termes principaux de la suite des λ : $\lambda_0, \lambda_{\alpha_1}, \ldots$, les invariants h sont précisément ceux que nous avons déjà considérés. Les équations différentielles qui admettent comme systèmes fondamentaux de solutions les coefficients λ_i

seront donc

$$\lambda_0 = \beta_0 \qquad \text{pour } \lambda_0,$$

$$\beta_0 \frac{\partial}{\partial y}\frac{\lambda}{\beta_0} = \beta_0\beta_1 \qquad \text{pour } \lambda_0,\ \lambda_{\alpha_1},$$

$$\beta_1\beta_0 \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\beta_1}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\lambda}{\beta_0} = \beta_0\beta_1\beta_2 \qquad \text{pour } \lambda_0,\ \lambda_{\alpha_1},\ \lambda_{\alpha_2},$$

ou bien

$$\beta_0\beta_1\beta_2 \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\beta_2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\beta_1}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\lambda}{\beta_0} = 0.$$

Pour l'ensemble des λ nous aurons

$$\beta_0\beta_1\ldots\beta_q \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\beta_q}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\beta_{q-1}}\cdots\frac{1}{\beta_1}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\lambda}{\beta_0} = 0.$$

Le multiplicateur Φ_0 défini par l'équation (12) prend donc la forme

$$\Phi_0(u) = \beta_0\beta_1\beta_2\ldots\beta_q \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\beta_q}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\beta_{q-1}}\cdots\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\beta_1}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\beta_0}\psi_0(u).$$

Si ψ_0 a été décomposé préalablement en facteurs différentiels symboliques, la décomposition de Φ_0 est elle-même complètement achevée. En particulier, quand le multiplicateur différentiel φ_0 relatif à l'équation donnée est du premier ordre, on a pour la transformée principale

$$(14) \qquad \Phi_0(u) = \beta_0\beta_1\ldots\beta_q \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\beta_q}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\beta_{q-1}}\cdots\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\beta_1}\frac{\partial}{\partial y}\frac{u}{\beta_0} = 0.$$

Quand φ_0 est d'ordre supérieur, tous les facteurs symboliques qu'il contient appartiennent également à Φ_0, sauf le premier à droite, qui a été utilisé dans la transformation. C'est le résultat que nous avions annoncé.

Les considérations précédentes sont encore applicables aux équations du système auxiliaire. En effet, si nous prenons l'une des expressions R définies au Chapitre précédent on voit qu'elle est de même forme que le premier membre de la transformée principale, mais contient un λ de moins. De plus, dans la dérivée $\frac{\partial^i R}{\partial x^i}$, le multiplicateur différentiel de la plus haute dérivée prise par rapport à x est le même que dans R.

15. Revenons maintenant au cas des caractéristiques simples. Nous avons déjà dit que la considération des systèmes transformés successifs n'est pas nécessaire pour définir la suite des transformations. C'est ce point que nous allons étudier.

Considérons une intégrale explicite

$$(15)\qquad z = u_0 f^m(x) + u_1 f^{m-1}(x) + \ldots + u_m f(x).$$

$f(x)$ désignant une fonction arbitraire.

Nous savons que les coefficients u sont déterminés par une suite d'équations différentielles déjà indiquées au n° 2.

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{l} D_{n-1}(u_0) = 0, \qquad D_{n-1}(u_1) + D_{n-2}(u_0) = 0, \\ D_{n-1}(u_p) + D_{n-2}(u_{p-1}) + D_{n-3}(u_{p-2}) + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array}\right.$$

en posant pour abréger D_{n-i} au lieu de $\frac{1}{(n-i)!} D_{x^{n-i}}^{(n-i)}$. On a en particulier

$$D_{n-1}(u) = u_0 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{u_0}\right).$$

Supposons qu'on ait déterminé un premier système d'intégrales

$$u_0, \quad u_1, \quad \ldots$$

de ces équations et cherchons l'expression la plus générale des autres intégrales U_0, U_1, ...

Il est évident que l'on a

$$U_0 = X_0 u_0,$$

X_0 désignant une fonction arbitraire de x. Nous avons ensuite, pour déterminer U_1, l'équation

$$D_{n-1}(U_1) + X_0 D_{n-2}(u_0) + X'_0 D_{n-1}(u_0) = 0,$$

ou, en tenant compte de la valeur de u_0,

$$D_{n-1}(U_1) + X_0 D_{n-2}(u_0) = 0.$$

L'intégrale la plus générale de cette équation est

$$U_1 = X_0 u_1 + X_1 u_0,$$

X_1 désignant une nouvelle fonction arbitraire. On est donc conduit à prendre

$$\mathrm{U}_p = \mathrm{X}_0 u_p + \mathrm{X}_1 u_{p-1} + \mathrm{X}_2 u_{p-2} + \ldots + \mathrm{X}_p u_0.$$

La méthode ordinaire de l'induction générale permet de démontrer l'exactitude de cette loi. On aurait, en la supposant vérifiée jusqu'à l'ordre p :

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{D}_{n-1}(\mathrm{U}_{p+1}) + \mathrm{X}_0\,&[\mathrm{D}_{n-2}(u_p) + \mathrm{D}_{n-3}(u_{p-1}) + \ldots]\\
&+ \frac{\mathrm{X}'_0}{1}[\mathrm{D}_{n-1}(u_p) + \mathrm{D}_{n-2}(u_{p-1}) + \ldots]\\
&+ \frac{\mathrm{X}''_0}{1.2}[\mathrm{D}_{n-1}(u_{p-1}) + \mathrm{D}_{n-2}(u_{p-2}) + \ldots]\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \mathrm{X}_1[\mathrm{D}_{n-2}(u_{p-1}) + \mathrm{D}_{n-3}(u_{p-2}) + \ldots]\\
&+ \frac{\mathrm{X}'_1}{1}[\mathrm{D}_{n-1}(u_{p-1}) + \mathrm{D}_{n-2}(u_{p-2}) + \ldots]\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.
\end{aligned}\right.$$

On voit immédiatement que les dérivées des fonctions arbitraires, $\mathrm{X}'_0, \mathrm{X}''_0, \ldots, \mathrm{X}'_1, \ldots$ ont leurs coefficients nuls. Il reste donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{n-1}(\mathrm{U}_{p+1}) + \mathrm{X}_0\,&[\mathrm{D}_{n-2}(u_p) + \mathrm{D}_{n-3}(u_{p-1}) + \ldots]\\
&+ \mathrm{X}_1[\mathrm{D}_{n-2}(u_{p-1}) + \mathrm{D}_{n-3}(u_{p-2}) + \ldots]\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.
\end{aligned}$$

et cette équation donne immédiatement, en introduisant une nouvelle fonction arbitraire X_{p+1},

$$(18)\qquad \mathrm{U}_{p+1} = \mathrm{X}_0 u_{p+1} + \mathrm{X}_1 u_p + \mathrm{X}_2 u_{p-1} + \ldots + \mathrm{X}_p u_1 + \mathrm{X}_{p+1} u_0.$$

La formule (17) définit en quelque sorte le groupe des transformations des fonctions u. Toute fonction des u et de leurs dérivées qui reste inaltérée par les transformations du groupe devra s'exprimer à l'aide des coefficients de l'équation et de leurs dérivées.

16. Soient $u_0, u_{p_1}, u_{p_2}, \ldots$ les termes principaux de la suite des u : les fonctions

$$k_1 = \frac{1}{u_0^2}\begin{vmatrix} u_0 & \dfrac{\partial u_0}{\partial y}\\ u_{p_1} & \dfrac{\partial u_{p_1}}{\partial y}\end{vmatrix},\qquad k_2 = \frac{1}{u_0^3}\begin{vmatrix} u_0 & \dfrac{\partial u_0}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\\ u_{p_1} & \dfrac{\partial u_{p_1}}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 u_{p_1}}{\partial y^2}\\ u_{p_2} & \dfrac{\partial u_{p_2}}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 u_{p_2}}{\partial y^2}\end{vmatrix},\qquad \ldots,$$

sont évidemment des invariants pour toutes les transformations du *groupe des fonctions u* et s'expriment par conséquent, rationnellement, à l'aide des coefficients de l'équation et de leurs dérivées. Il est facile de voir qu'elles jouissent également de cette propriété d'invariance relativement aux transformations ponctuelles, définies au premier Chapitre, qui conservent à la fois les caractéristiques $x =$ const. et la forme linéaire de l'équation.

En effet, nous remarquons d'abord que, pour multiplier z par une fonction $\lambda(x, y)$, il suffit de multiplier tous les coefficients u_0, u_1, ... par λ, ce qui ne modifie pas les invariants k. En second lieu, si l'on effectue un changement de variables indépendantes

$$x = \varphi(x'),$$
$$y = \psi(x', y'),$$

l'expression (15) se change en une autre de même forme

$$u'_0 f^{(m)}(x') + u'_1 f^{(m-1)}(x') + \ldots + u'_m f(x'),$$

dans laquelle les coefficients u'_0, u'_1 ... sont liés aux coefficients u_0, u_1, ... par des relations linéaires de la forme

$$u'_p = \theta_0 u_p + \theta_1 u_{p-1} + \ldots + \theta_p u_0,$$

les θ désignant des fonctions de x seul, et θ_0 étant essentiellement différent de zéro, puisqu'il est égal à une puissance de $\frac{\partial x}{\partial x'}$. Il en résulte que les fonctions k_1, k_2, ... n'éprouvent d'autre modifications par les transformations considérées que la multiplication par des puissances de $\frac{\partial x}{\partial x'}$ et de $\frac{\partial y}{\partial y'}$. Ce sont donc des invariants analogues aux fonctions h déjà définies.

17. A l'aide des invariants k nous pouvons former les équations successives qui admettent pour solutions les diverses valeurs des coefficients u.

Posons

$$l_i = \frac{k_i k_{i-2}}{k_{i-1}^2}.$$

L'équation

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{l_i}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{l_{i-1}}\cdots\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{l_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{u_0}\right) = 0$$

admet comme solutions les valeurs de u_{p_i} et de tous les coefficients u d'indices inférieurs à p_i.

Cela posé, la suite des transformations est facile à définir. Nous poserons

$$(19)\quad \begin{cases} z_1 = u_0 \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{z}{u_0}\right), \\ z_2 = u_0 l_1 \dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{1}{l_1} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{z}{u_0}\right) = u_0 l_1 \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{z_1}{u_0 l_1}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_i = u_0 l_1 l_2 \ldots l_{i-1} \dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{1}{l_{i-1}} \dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{1}{l_{i-2}} \cdots \dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{1}{l_1} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{z}{u_0}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Ces transformations sont entièrement rationnelles par rapport aux coefficients de l'équation proposée et à leurs dérivées.

Lorsque la chaîne des u n'est pas brisée, la suite des invariants sera définie par les équations

$$(20)\quad \begin{cases} D_{n-2}(u_0) = l_1 u_0, \\ l_1 u_0 \dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{1}{l_1} \left[\dfrac{D_{n-2}(u_1) + \ldots + D_{n-3}(u_0)}{u_0} \right] = l_1 l_2 u_0, \\ l_1 l_2 u_0 \dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{1}{l_2} \dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{1}{l_1} \left[\dfrac{D_{n-2}(u_2) + D_{n-3}(u_1) + D_{n-4}(u_0)}{u_0} \right] = l_1 l_2 l_3 u_0. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Les quantités u_0, u_1, ... ne figurent qu'en apparence dans ces équations; tous calculs faits, elles doivent disparaître, les invariants l s'exprimant directement à l'aide des coefficients de l'équation proposée.

On voit l'analogie qui existe entre les équations (19) et celles que M. Darboux a données pour le second ordre. Lorsqu'il existe une intégrale particulière de la forme d'Euler, les invariants l s'annulent tous à partir d'un certain rang. D'après les résultats du n° 8, il en sera de même dans d'autres cas, où la solution sera donnée par certaines équations différentielles linéaires ordinaires dont l'ordre ne surpassera pas $n - 2$ et dont les coefficients dépendront seulement de la variable caractéristique x.