BULLETIN DE LA S. M. F.

L. RAFFY

Sur certaines équations différentielles d'ordre supérieur analogues à l'équation de Clairaut

Bulletin de la S. M. F., tome 25 (1897), p. 71-72

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__71_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1897, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR ANALOGUES A L'ÉQUATION DE CLAIRAUT;

Par M. L. RAFFY.

Après avoir fait connaître (*Bull. de la Soc. mathém. de France,* t. XXIII, p. 57 et suiv.) une classe étendue d'équations du premier ordre qu'on intègre, à la façon des équations de Clairaut, en y remplaçant la dérivée par une constante arbitraire, j'ai remarqué (*ibid.*, p. 63) qu'une propriété analogue appartient à l'équation linéaire

$$\varphi \equiv y - xy' + \frac{x^2}{2!}y'' - \ldots + (-1)^m \frac{x^m}{m!}y^{(m)} = 0,$$

puisque son intégrale générale est

$$y - C_1 x + \frac{C_2}{2!}x^2 - \ldots + (-1)^m \frac{C_m}{m!}x^m = 0.$$

Je me propose actuellement de retrouver et d'étendre ce résultat. Considérons, à cet effet, l'expression différentielle φ et formons ses dérivées successives, en traitant $y, y', \ldots, y^{(m)}$ comme des constantes. Je dis d'abord que *l'équation différentielle*

$$(1) \quad y - xy' + \frac{x^2}{2!}y'' - \ldots + (-1)^m \frac{x^m}{m!}y^{(m)} = F\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^m \varphi}{\partial x^m}\right)$$

où F *est une fonction arbitraire, a pour intégrale générale*

$$(2) \quad y + C_1 x - \frac{C_2}{2!}x^2 + \ldots - (-1)^m \frac{C_m}{m!}x^m = F(C_1, C_2, \ldots, C_m).$$

En différentiant l'équation (1), on trouve un résultat de la forme

$$y^{(m+1)}\Psi(x, y, y', \ldots, y^{(m)}) = 0,$$

ce qui est une analogie avec l'équation de Clairaut. D'après cela, posons

$$y = C_0 - C_1 x + \frac{C_2}{2!} x^2 - \ldots + (-1)^m \frac{C_m}{m!} x^m.$$

L'application répétée de la formule de Taylor à ce polynôme donne

$$\frac{\partial^r \varphi}{\partial x^r} = (-1)^r y^{(r)}(x - x) = (-1)^r y^{(r)}(0) = C_r$$
$$(r = 1, 2, \ldots, m).$$

Substituant ces expressions dans l'équation (1), on trouve

$$C_0 = F(C_1, C_2, \ldots, C_m),$$

ce qui démontre la proposition. Mais il y a plus. L'identité

$$y = \varphi(0) = \varphi(x - x) = \varphi(x) - x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{x^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \ldots + (-1)^m \frac{x^m}{m!} \frac{\partial^m \varphi}{\partial x^m}$$

donne visiblement

$$\varphi(x) = y + x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{x^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \ldots - (-1)^m \frac{x^m}{m!} \frac{\partial^m \varphi}{\partial x^m}.$$

Si donc on écrit l'équation (1) sous la forme

$$\Phi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^m x}{\partial x^m}\right) = F\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^m \varphi}{\partial x^m}\right),$$

on voit, par comparaison avec la relation (2), qu'*on obtient son intégrale générale*

$$\Phi(C_1, C_2, \ldots, C_m) = F(C_1, C_2, \ldots, C_m)$$

en y remplaçant les dérivées successives de φ par des constantes arbitraires.

Ainsi se trouve généralisée la propriété des équations de Clairaut.