BULLETIN DE LA S. M. F.

A. GRÉVY

Équations fonctionnelles avec second membre

Bulletin de la S. M. F., tome 25 (1897), p. 57-63

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__57_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1897, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES AVEC SECOND MEMBRE;

Par M. GRÉVY.

1. L'équation fonctionnelle

$$p_0(z)f(z)+p_1(z)f(z_1)+\ldots+p_n(z)f(z_n)=0,$$

dans laquelle les coefficients $p_i(z)$ sont holomorphes dans le domaine d'un point limite x pour la substitution $z_{i+1}=\varphi(z_i)$, admet des solutions dont la forme, au point limite, dépend de l'équation caractéristique (1)

$$p_0(x)+p_1(x)t+\ldots+p_n(x)t_n=0.$$

En particulier, si cette équation admet la racine simple 1, et n'admet aucune racine de la forme $[\varphi'(x)]^m$, m étant entier, positif, l'équation fonctionnelle a une solution holomorphe dans le

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, 1894, p. 267.

domaine du point x et non nulle en ce point; cette fonction est définie à un facteur constant près.

2. Ces résultats rappelés, considérons l'équation fonctionnelle avec second membre

$$(1) \qquad p_0(z)f(z)+p_1(z)f(z_1)+\ldots+p_n(z)f(z_n)=q(z),$$

dans laquelle $p_0(z)$, ..., $p_n(z)$, $q(z)$ sont des fonctions holomorphes dans le domaine du point x, $p_0(x)$ et $p_n(x)$ étant différents de zéro.

Soient $f(z)$, $f'(z)$ deux solutions de l'équation (1) avec second membre; leur différence vérifiant l'équation sans second membre

$$\begin{aligned} &p_0(z)[f'(z)-f(z)] \\ &\quad +p_1(z)[f'(z_1)-f(z_1)]+\ldots+p_n(z)[f'(z_n)-f(z_n)]=0, \end{aligned}$$

la solution générale de l'équation (1) se déduira de la solution générale de l'équation sans second membre par l'addition d'une solution particulière de l'équation (1); pour obtenir une telle solution, faisons sur l'équation (1) la substitution z, $\varphi(z)$:

$$(2) \qquad p_0(z_1)f(z_1)+p_1(z_1)f(z_2)+\ldots+p_n(z_1)f(z_{n+1})=q(z_1).$$

Multipliant l'équation (1) par $q(z_1)$ et l'équation (2) par $q(z)$, et retranchant, il vient

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &q(z_1)p_0(z)f(z)+[q(z_1)p_1(z)-q(z)p_0(z_1)]f(z_1)+\ldots \\ &\quad +[q(z_1)p_n(z)-q(z)p_{n-1}(z_1)]f(z_n)-q(z)\,p_n(z_1)fz_{n+1})=0, \end{aligned} \right.$$

équation d'ordre $n+1$ sans second membre, que doit vérifier la fonction $f(z)$.

3. $q(x)\neq 0$. L'équation caractéristique est alors

$$p_0(x)+[p_1(x)-p_0(x)]t+\ldots+[p_n(x)-p_{n-1}(x)]t^n-p_n(x)t^{n+1}=0$$

ou

$$(1-t)[p_0(x)+p_1(x)t+\ldots+p_n(x)t^n]=0.$$

Cette équation admet la racine 1 et les racines de l'équation caractéristique relative à l'équation fonctionnelle obtenue en supprimant le second membre de l'équation (1).

Si l'on suppose que cette équation caractéristique n'admet ni la racine 1, ni une racine $[\varphi'(x)]^m$, m entier positif, $[\varphi'(x)]$ étant différent de zéro, l'équation fonctionnelle (3) a une solution holomorphe non nulle au point x; soit $f(z)$; nous allons voir que cette solution vérifie l'équation (1).

Désignant, pour abréger, par $F(z)$ le premier membre de (1), l'équation (3) est

$$F(z)\,q(z_1) - F(z_1)\,q(z) = 0$$

ou

$$\frac{F(z_1)}{q(z_1)} = \frac{F(z)}{q(z)},$$

équation fonctionnelle relative à $\frac{F(z)}{q(z)}$, qui n'a pas de solution holomorphe dans le domaine du point x, si ce n'est une constante; comme la solution $f(z)$ considérée est holomorphe, il en est de même de $F(z)$; on doit avoir

$$F(z) = kq(z),$$

k étant une constante arbitraire.

La valeur de $f(z)$ étant définie à un facteur constant près, on peut le choisir de façon que cette fonction vérifie l'équation (1)

$$F(z) = q(z);$$

$f(z)$ est donc bien une solution particulière de (1).

4. La détermination du facteur qui entre dans $f(z)$ n'est plus possible si 1 est solution de l'équation caractéristique

$$p_0(x) + p_1(x)\,t + \ldots + p_n(x)\,t^n = 0,$$

le premier membre de l'équation fonctionnelle (1) étant nul au point x, sans que le second membre le soit; supposons que 1 soit racine d'ordre α de l'équation caractéristique; nous pouvons employer le même procédé que pour l'équation sans second membre (1).

Soit Y une solution de l'équation sans second membre, cette solution étant holomorphe et non nulle en x, correspondant à la

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, 1894, p. 278.

racine 1 de l'équation caractéristique; posons

$$f(z) = YV.$$

L'équation (1) devient

$$p_0(z)\,YV + p_1(z)\,Y_1V_1 + \ldots + p_n(z)\,Y_nV_n = q(z),$$

$Y_1, Y_2, \ldots$; $V_1, V_2, \ldots$ étant les transformées de Y et V par la substitution $[z, \varphi(z)]$.

Tenant compte de la relation

$$p_0(z)\,Y + p_1(z)\,Y_1 + \ldots + p_n(z)\,Y_n = 0,$$

et, prenant pour fonction inconnue

$$V_1 - V = U,$$

on a

$$\begin{aligned} &p_0\,YU + (p_0Y + p_1Y_1)\,U_1 + \ldots \\ &\quad + (p_0Y + p_1Y_1 + \ldots + p_{n-1}Y_{n-1})\,U_{n-1} = -q(z), \end{aligned}$$

équation de même forme que l'équation (1), mais dont l'équation caractéristique ne renferme la racine 1 qu'à l'ordre $\alpha - 1$.

Si l'on répète les mêmes transformations, on trouvera finalement une équation fonctionnelle

$$P_0(z)\,T(z) + P_1(z)\,T(z_1) + \ldots + P_{n-\alpha}T(z_{n-\alpha}) = q(z),$$

dont l'équation caractéristique n'admet plus la racine 1 et admet toutes les autres racines de l'équation caractéristique primitive; l'équation fonctionnelle en $T(z)$ a donc une solution non nulle au point x et holomorphe dans le domaine de ce point.

De cette solution, on déduit pour l'équation (1) une solution de la forme

$$Y[kb^{\alpha}(z) + \lambda_1(z)\,b^{\alpha-1}(z) + \ldots + \lambda_{\alpha}(z)],$$

Y étant une fonction holomorphe dans le domaine du point x et non nulle en ce point, k étant une constante différente de zéro et $\lambda_1(z), \ldots, \lambda_{\alpha}(z)$ des fonctions holomorphes dans le domaine du point x.

Ces résultats subsistent si $\varphi'(x) = 0$; il suffit de remplacer $b(z)$ par $c(z)$.

5. Il reste à examiner le cas où, $\varphi'(x)$ étant différent de zéro, l'équation caractéristique admet des solutions de la forme $\varphi'(x)^m$ (m entier positif); pour simplifier, je supposerai qu'il n'existe que deux telles racines $[\varphi'(x)]^{m_1}$, $[\varphi'(x)]^{m_2}$, $(m_1 > m_2)$.

Si l'on pose

$$f(z) = [B(z)]^{m_1} Y,$$

l'équation (1) devient

$$[B(z)]^{m_1}\left\{p_0(z)Y + p_1(z)[\varphi'(x)]^{m_1}Y_1 + \ldots + p_n(z)[\varphi'(x)]^{nm_1}Y_n\right\} = q(z).$$

L'équation caractéristique

$$p_0(x) + p_1(x)[\varphi'(x)]^{m_1}t + \ldots + p_n(x)[\varphi'(x)]^{nm_1}t^n = 0$$

a les racines $[\varphi'(x)]^{m_2-m_1}$ et 1.

A la racine 1 correspond, pour l'équation fonctionnelle

$$p_0(z)Y + \ldots + p_n(z)[\varphi'(x)]^{nm_1}Y_n = 0,$$

une solution holomorphe non nulle au point x; soit Y'.

Si l'on pose

$$Y = Y'V, \qquad V_1 - V = U,$$

l'équation (1) prend la forme

$$[B(z)]^{m_1}[p'_0(z)U + p'_1(z)U_1 + \ldots + p'_{n-1}(z)U_{n-1}] = q(z),$$

l'équation caractéristique

$$p'_0(x) + p'_1(x)t + \ldots + p'_{n-1}(x)t^{n-1} = 0$$

n'ayant plus la racine 1, mais ayant la racine $[\varphi'(x)]^{m_2-m_1}$.

Posons

$$U = [B(z)]^{m_2-m_1}T,$$

il vient

$$[B(z)]^{m_1+m_2-m_1}\left\{p'_0.T + p'_1.[\varphi'(x)]^{m_2-m_1}T_1 + \ldots + p'.[\varphi'(x)]^{(n-1)(m_2-m_1)}T_{n-1}\right\} = q(z).$$

L'équation, obtenue en égalant à zéro la quantité entre crochets, a une solution holomorphe, non nulle en x, car son équation caractéristique a la racine 1; soit T'.

Posant

$$T = T'R, \qquad R_1 - R = S,$$

on forme une équation

$$[B(z)]^{m_2}[p_0'' S + p_1'' S_1 + \ldots + p_{n-2}'' S_{n-2}] = q(z),$$

l'équation caractéristique de la quantité entre crochets n'ayant plus la racine 1.

Pour ramener cette équation au type étudié au début, il suffit de prendre pour nouvelle fonction inconnue

$$S = S'.[B(z)]^{-m_2}.$$

Il existera alors une solution S' holomorphe en x et non nulle.

A la solution

$$S = S'B^{-m_2},$$

correspondent

$$R = \frac{P(z)}{(z-x)^{m_2}} + \mu b(z), \qquad T = \frac{P'(z)}{(z-x)^{m_2}} + Q(z)b(z),$$

$P'(z)$ étant holomorphe et non nulle en x, $Q(z)$ étant holomorphe en x.

On a de même

$$U = \frac{P''(z)}{(z-x)^{m_1}} + \frac{Q'(z)b(z)}{(z-x)^{m_1-m_2}},$$

$$Y = \frac{P'''(z)}{(z-x)^{m_1}} + \frac{P_1(z)b(z)}{(z-x)^{m_1-m_2}} + Q''(z)b^2(z),$$

$$f(z) = F_1(z)(z-x)^{m_1}b^2(z) + F_2(z)(z-x)^{m_2}b(z) + F_3(z),$$

F_1, F_2, F_3 étant des fonctions holomorphes au point x.

Ce qui précède suffit pour montrer la forme de cette solution particulière dans le cas général; le résultat concorde avec celui qui a été trouvé pour les équations sans second membre; on peut résumer ces résultats comme il suit :

L'équation fonctionnelle avec second membre non nul au point limite a une solution de la forme

$$f_0(z) + (z-x)^{m_1}f_1(z)\,b(z) + \ldots + (z-x)^{m_\alpha}f_\alpha(z)\,b^\alpha,$$

$f_0, f_1, \ldots, f_\alpha$ étant des fonctions holomorphes dans le domaine du point limite, $m_1, \ldots, m_\alpha$ étant les exposants des puissances de $\varphi'(x)$, qui sont solutions de l'équation caractéristique, plusieurs de ces quantités pouvant être égales.

6. Le cas de $q(x) = 0$ se ramène au précédent; supposons que x soit racine d'ordre k; si l'on pose

$$f(z) = [B(z)]^k Y,$$

on a

$$[B(z)]^k \left\{ p_0 Y + p_1 [\varphi'(x)]^k Y_1 + \ldots + p_n [\varphi'(x)]^{nk} Y_n \right\} = q(z);$$

$$p_0 Y + p_1 [\varphi'(x)]^k Y_1 + \ldots + p_n [\varphi'(x)]^{nk} Y_n = \frac{q(z)}{[B(z)]^k}.$$

Cette dernière équation est du type étudié plus haut; son équation caractéristique se déduit de l'équation caractéristique primitive par la multiplication des racines par $\frac{1}{[\varphi'(x)]^k}$.

7. La même transformation permet d'étudier les équations pour lesquelles $q(z)$ n'est pas holomorphe au point x, mais est de la forme

$$(z - x)^\alpha \theta(z),$$

α étant quelconque et $\theta(z)$ une fonction holomorphe; il suffit de remarquer que le quotient

$$\frac{q(z)}{[B(z)]^\alpha}$$

est une fonction holomorphe dans un domaine du point x, qui ne renferme aucun zéro de $q(z)$ ou de $B(z)$.

8. Remarquons que la marche que nous avons suivie montre que la connaissance d'une solution d'une équation sans second membre permet d'abaisser l'ordre de l'équation avec second membre.