BULLETIN DE LA S. M. F.

H. GODEFROY

Relation entre les rayons de courbure des développées des courbes réciproques

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 109-113
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__109_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Relation entre les rayons de courbure des développées des courbes réciproques; par M. R. Godefroy.

Suivant M. Habich [*Sur un système particulier de coordonnées,* etc. (*Annali di Matematica,* t. II, 1868)], deux courbes (A), (B) sont dites *réciproques par rapport à une courbe* (C), si elles coupent constamment sous des angles supplémentaires les tangentes de (C). Les centres de courbure de ces courbes en deux points correspondants sont en ligne droite avec le point où la droite mobile touche son enveloppe. Ce théorème a été déduit par M. Habich de la formule

$$\frac{n}{r} + \frac{n'}{r'} = 2$$

(r, r' rayons de courbure des deux courbes; n, n' longueurs des normales limitées aux points où elles coupent la normale à l'enveloppe de la droite) dont il a donné la démonstration pour le cas plus général où la somme des angles de la droite avec les deux courbes est constante.

Cette formule avait été établie par M. Nicolaidès dans le cas particulier de courbes réciproques par rapport à un point (*Nouv. Ann.*, 2e série, t. IV; 1865).

Voici d'abord une démonstration directe fort simple, et sans doute connue, de la propriété des centres de courbure de deux courbes réciproques. Les triangles formés par deux éléments d'arcs correspondants des courbes (A), (B) et par les normales à leurs extrémités sont homologiques. La tangente au lieu du point de rencontre de deux normales correspondantes passe en effet au point de concours des tangentes correspondantes de (A) et (B). D'où il suit immédiatement que les centres de courbure en A et B et le point où AB touche son enveloppe sont en ligne droite.

Si R, R′ sont les rayons de courbure et L, L′ les distances des centres de courbure au point où AB touche son enveloppe, on peut dire que la liaison entre les rayons de courbure et le point de l'enveloppe est exprimée par la relation

$$\frac{R}{L} = \frac{R'}{L'}. \tag{1}$$

Nous nous servirons tout à l'heure du théorème qui vient d'être rappelé, pour démontrer la relation existant entre les rayons de courbure des développées des courbes réciproques et celui de la courbe enveloppe de la droite mobile.

Mais, auparavant, nous nous occuperons du problème suivant [1] :

Les tangentes en deux points L, L_1 *des courbes* (L), (L_1) *se*

[1] Le lecteur est prié de faire les figures.

coupent en A. *La droite* LL_1 *enveloppant une courbe* (M) *qu'elle touche en* M, *le point* A *décrit une courbe* (A) *dont la normale est* AP. *Trouver la relation existant entre les rayons de courbure* r, r_1 *en* L, L_1, *les longueurs* $LM = l$, $L_1M = l_1$ *et les angles*

$$ALM = \lambda, \qquad AL_1M = \lambda_1, \qquad LAP = \alpha, \qquad L_1AP = \alpha_1.$$

Une formule bien connue, due à Newton, donne

$$\frac{l}{l_1} = \frac{dL}{dL_1}\frac{AL_1}{AL}; \tag{2}$$

mais

$$dL = r\varepsilon, \qquad dL_1 = r_1\varepsilon_1,$$

ε, ε_1 étant les angles de contingence de (L) et (L_1) en L et L_1.

Par suite

$$\frac{dL}{dL_1} = \frac{r}{r_1}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}.$$

Le rapport $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$ est égal au rapport des segments de la normale AP compris entre A et les normales en L_1 et L. Or ces segments sont égaux à

$$\frac{AL_1}{\cos\alpha_1} \quad \text{et} \quad \frac{AL}{\cos\alpha};$$

on a donc

$$\frac{dL}{dL_1} = \frac{rAL_1\cos\alpha}{r_1AL\cos\alpha_1}.$$

La formule (2) devient alors

$$\frac{l}{l_1} = \frac{r\overline{AL_1}^2\cos\alpha}{r\overline{AL}^2\cos\alpha_1},$$

ou

$$\frac{l}{l_1} = \frac{r\sin^2\lambda\cos\alpha}{r_1\sin^2\lambda_1\cos\alpha_1},$$

que nous écrirons

$$\frac{r\sin^2\lambda\cos\alpha}{l} = \frac{r_1\sin^2\lambda_1\cos\alpha_1}{l_1}.$$

C'est la relation que nous avions en vue.

Tout ceci est, en somme, parfaitement connu (Aoust, *Analyse infinitésimale des courbes planes,* Livre II, Chap. IV, p. 294).

Ce n'est, au surplus, que l'application au cas considéré du théorème général de M. Mannheim sur le déplacement infiniment petit des figures polygonales de forme variable (*Sur les polygones plans inscrits et circonscrits,* à la suite des *Applications d'Analyse et de Géométrie* de Poncelet et *Géométrie descriptive,* 15^e^ Leçon, Supplément).

On remarquera, en passant, l'usage qui peut être fait de la relation précédente, dont nous n'utiliserons qu'un cas particulier pour l'objet qui nous occupe.

Si AL se confond avec la normale en A, r est le rayon de courbure de la développée de A. La formule devient

$$\frac{r\sin^2\lambda}{l} = \frac{r_1\sin^2\lambda_1\cos\alpha_1}{l_1}.$$

Si deux courbes (A) et (A′) jouissent de cette propriété que leurs centres de courbure en deux points correspondants A et A′ soient constamment sur une droite passant au point L_1, où la droite AA′ touche son enveloppe, les rayons de courbure de leurs développées sont liés entre eux et avec les éléments déjà considérés par les formules

$$(3)\qquad \frac{r\sin^2\lambda}{l\cos\alpha_1} = \frac{r'\sin^2\lambda'}{l'\cos\alpha'_1} = \frac{r_1\sin^2\lambda_1}{l_1}.$$

Ces formules sont applicables aux cas suivants :

1° Une courbe B est telle que le rapport $\frac{BA}{BA'}$ des distances de chacun de ses points à deux courbes (A) et (A′) est constant. Les centres de courbure de (A) et (A′) en deux points correspondants A, A′ sont alors en ligne droite avec le point où AA′ touche son enveloppe. On le voit, comme précédemment, par la considération de deux triangles homologiques. Les rayons de courbure des développées de (A), de (A′) et de l'enveloppe de AA′ satisfont, par suite, à la relation (3) (Application aux caustiques par réfraction, etc.) [1].

2° *Courbes réciproques.* — La relation cherchée est simple-

---

[1] Le problème de la détermination des rayons de courbure des caustiques par réfraction a déjà été traité par M. Mannheim (*Développements de Géométrie cinématique*, pages 51 à 62 de la *Collection de Mémoires publiés par la Société Philomathique*, à l'occasion du centenaire de sa fondation, année 1888).

ment

$$\frac{r \sin^2\lambda}{l} = \frac{r' \sin^2\lambda'}{l'} = \frac{r_1 \sin^2\lambda_1 \cos\alpha_1}{l_1}.$$

(Application aux caustiques par réflexion.)

Le cas particulier le plus remarquable est celui des courbes transformées par rayons vecteurs réciproques. L'enveloppe de LL' étant le pôle de transformation, r_1 est nul, et la liaison entre le rayon de courbure d'une courbe et celui de sa transformée est simplement exprimée par la formule

$$\frac{r \sin^2\lambda}{l} = \frac{r' \sin^2\lambda'}{l'}. \tag{4}$$

Soient LC, LC' les rayons de courbure des développées de (A) et de (A'); menons $L'C'_1 = L'C'$ parallèlement à LC; de C et C'_1, abaissons des perpendiculaires sur LL', puis des pieds de celles-ci des perpendiculaires sur LC et $L'C'_1$; D et D' sont sur ces droites les pieds de ces perpendiculaires.

On a

$$LD = r \sin^2\lambda, \qquad L'D' = r' \sin^2\lambda',$$

par suite

$$\frac{LD}{l} = \frac{L'D'}{l'}.$$

Les points D et D' sont donc en ligne droite avec le pôle de transformation.

Ceci indique la construction à effectuer pour obtenir l'un des rayons de courbure connaissant l'autre. L'un des centres de courbure permet d'avoir l'un des points D ou D'; on en déduit l'autre et, par une construction inverse, le rayon de courbure inconnu. Les cas particuliers sont nombreux. Nous ne nous y arrêtons pas.

La courbe (A'), polaire réciproque d'une courbe quelconque (C), la conique auxiliaire étant une circonférence, est la transformée par rayons vecteurs réciproques de la podaire (A) de (C) par rapport au centre du cercle. Les relations (1) et (4) sont, par suite, applicables à ces courbes. On a ainsi les relations entre les rayons de courbure des développées d'une courbe, de sa podaire et de sa polaire réciproque.