BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HUMBERT

Sur la fonction $(x-1)^a$

Bulletin de la S. M. F., tome 9 (1881), p. 56-58
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1881__9__56_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur la fonction $(x-1)^a$; par M. Humbert.

(Séance du 4 février 1881.)

Dans le *Bulletin de la Société mathématique,* M. Laguerre a démontré que les polynômes P, Q, R, de degrés p, q, r, qui rendent la fonction $Pe^{ax}+Qe^{bx}+R$ du degré le plus élevé possible en x, sont tels que les trois fonctions Pe^{ax}, Qe^{bx}, R sont solutions d'une équation différentielle du troisième ordre, de la forme

$$xy''' + (\alpha x+\beta)y'' + (\gamma x+\delta)y' + \varepsilon y = 0.$$

On peut donner un théorème analogue en remplaçant e^{ax}, e^{bx} par $(x-1)^a$, $(x-1)^b$; la méthode qu'on va employer est différente de celle de M. Laguerre.

Cherchons donc à déterminer les polynômes P, Q, R, de degrés p, q, r, de façon que $P(x-1)^a+Q(x-1)^b+R$ soit du degré le plus élevé possible en x, c'est-à-dire du degré $p+q+r+2$. On a donc

$$P(x-1)^a + Q(x-1)^b + R = (x^{p+q+r+2}).$$

Lemme. — On ne peut avoir

$$P(x-1)^a + Q(x-1)^b + R = (x^{p+q+r+3}),$$

P, Q, R étant de degrés p, q, r, sans que $P=0$, $Q=0$, $R=0$.

Prenons en effet les dérivées d'ordre $r+1$ des deux membres de l'équation précédente ; il vient

$$(x-1)^{a'}P_1(x) + (x-1)^{b'}Q_1(x) = (x^{p+q+2}),$$

P_1 et Q_1 étant de degrés p et q, ou

$$(x-1)^{a'-b'}P_1 + Q_1 = (x^{p+q+2}).$$

Prenons les dérivées d'ordre $q+1$:

$$(x-1)^{a''-b''}P_2 = (x^{p+1}).$$

P_2 étant au plus de degré p, cette égalité est impossible, à moins que $P_2=0$. Le second membre est nul aussi ; on en conclut aisément que l'on a

$$(x-1)^{a''-b''}P_1 + Q_1 = 0,$$

et aussi

$$P(x-1)^a + Q(x-1)^b + R = 0.$$

La première de ces équations exige que $a''-b''$ ou $a-b$ soit entier, ou que $P_1=0$, $Q_1=0$.

Excluons le cas de $a-b$ entier ; on voit que

$$P(x-1)^a + Q(x-1)^b + R$$

doit être nul, en même temps que $P(x-1)^a = R_1$, $Q(x-1)^b = R_2$, R_1 et R_2 étant des polynômes de degré r. Cela exige que a et b soient entiers.

En excluant les cas de a, b, $a-b$ entiers, le lemme est donc démontré.

Cela posé, je reprends l'équation

$$(1)\qquad P(x-1)^a + Q(x-1)^b + R = (x^{p+q+r+2}).$$

Prenons les dérivées successives

$$(2)\qquad (x-1)^{a-1}P'(x-1)+aP]+\ldots+R'=(x^{p+q+r+1}).$$

$$(3)\qquad \begin{cases} (x-1)^{a-2}[P''(x-1)^2+2aP'(x-1) \\ \qquad\qquad + a(a-1)P]+\ldots+R''=(x^{p+q+r}), \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} (x-1)^{a-3}[P'''(x-1)^3 \\ \qquad +3aP''(x-1)^2+3a(a-1)P'(x-1) \\ \qquad\qquad + a(a-1)(a-2P]+\ldots+R'''=(x^{p+q+r-1}). \end{cases}$$

Multiplions (4) par $x(x-1)^2$, (3) par $(x-1)(\alpha x+\beta)$, (2) par $(\gamma x+\delta)$, (1) par ε; α, β, γ, δ, ε sont des constantes; ajoutons membre à membre, il vient

$$\begin{aligned}&(x-1)^{a-1}[xP'''(x-1)^3+\ldots]\\ &\quad+(x-1)^{b-1}[xQ'''(x-1)^3+\ldots]+x(x-1)^2R'''\\ &\quad+(x-1)R''(\alpha x+\beta)+(\gamma x+\delta)R'+\varepsilon R=(x^{p+q+r}).\end{aligned}$$

On peut disposer de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ de manière que $x(x-1)^2R'''+\ldots$ soit au plus de degré $r-5$.

On a aussi

$$(x-1)^{a-1}\psi(x)+(x-1)^{b-1}\chi(x)+\varphi(x)=(x^{p+q+r});$$

ψ est au plus de degré $p+1$, χ est au plus de degré $q+1$, φ est au plus de degré $r-3$.

La somme de ces degrés est donc au plus $p+q+r-3$.

On ne peut donc avoir, d'après le lemme,

$$(x-1)^{a-1}\psi(x)+(x-1)^{b-1}\chi(x)+\varphi(x)=(x^{p+q+r})$$

que si $\psi=0$, $\chi=0$, $\varphi=0$. Donc l'équation

$$x(x-1)^2y'''+(x-1)(\alpha x+\beta)y''+(\gamma x+\delta)y'+\varepsilon y=0$$

a pour solutions

$$R(x),\quad (x-1)^aP(x),\quad (x-1)^bQ(x).$$

La généralisation est évidente.