BULLETIN DE LA S. M. F.

HAAG

Note sur une classe d'équations différentielles

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 80-81
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__80_1>

Note sur une classe d'équations différentielles; par M. HAAG.

(Séance du 20 février 1880.)

Soit l'équation différentielle

$$(1)\quad \left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)^2 + A\left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)^2 + \ldots + L\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + M\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + Ny^2 + P = 0,$$

où A, B, ..., L, M, N, P sont des constantes.

Posons

$$y = \lambda \sin(\alpha x + C),$$

λ, α, C étant trois constantes; nous en déduirons

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \lambda\alpha \cos(\alpha x + C),$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -\lambda\alpha^2 \sin(\alpha x + C).$$

et, par conséquent,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \lambda^2\alpha^2[1 - \sin^2(\alpha x + C)] = \alpha^2(\lambda^2 - y^2)$$

et

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \alpha^4 y^2.$$

On voit aisément qu'on trouvera, en général,

$$\left(\frac{d^{2p}y}{dx^{2p}}\right)^2 = \alpha^{4p} y^2$$

et

$$\left(\frac{d^{2p+1}y}{dx^{2p+1}}\right)^2 = \alpha^{(4p+2)}(\lambda^2 - y^2).$$

Substituant dans l'équation proposée, et groupant ensemble les termes qui renferment y^2 et ceux qui en sont indépendants, on trouve (supposons, par exemple, m pair)

$$(2)\qquad \begin{cases} [\alpha^{2m} - A\alpha^{2(m-1)} + \ldots + L\alpha^4 - M\alpha^2 + N]y^2 \\ \qquad + [A\alpha^{2(m-1)}\lambda^2 + \ldots + M\alpha^2\lambda^2 + P] = 0, \end{cases}$$

et l'équation sera satisfaite si l'on a simultanément

$$(3)\qquad \alpha^{2m} - A\alpha^{2m-1} + \ldots + L\alpha^4 - M\alpha^2 + N = 0,$$

$$(4)\qquad A\alpha^{2(m-1)}\lambda^2 + \ldots + M\alpha^2\lambda^2 + P = 0.$$

L'équation (3), qui est du degré m en α^2, donnera m valeurs de α^2. L'équation (4), où l'on portera l'une quelconque de ces valeurs de α^2, donnera alors

$$(5)\qquad \lambda^2 = \frac{-P}{A\alpha^{2(m-1)} + \ldots + M\alpha^2},$$

et, si l'on adopte pour α et λ des valeurs satisfaisant aux relations (3) et (4),

$$y = \lambda \sin(\alpha x + C)$$

sera une solution de l'équation différentielle proposée et renfermera une constante arbitraire C.

On trouvera ainsi $2m$ solutions de l'équation (1) (car les combinaisons obtenues en changeant simultanément les signes de α et de λ ne donnent pas de solutions distinctes) [1].

---

[1] Il est facile de reconnaître d'ailleurs que l'analyse précédente s'applique à toute équation de la forme

$$\sum A\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) + P = 0,$$

où m et n peuvent être égaux, pourvu que dans chaque terme la somme $m + n$ soit paire.