

# BULLETIN DE LA S. M. F.

HAAG

## Note sur une classe d'équations différentielles

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 8 (1880), p. 80-81

<[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1880\\_8\\_80\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880_8_80_1)>

© Bulletin de la S. M. F., 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>*

*Note sur une classe d'équations différentielles; par M. HAAg.*

(Séance du 20 février 1880.)

Soit l'équation différentielle

$$(1) \left( \frac{d^m y}{dx^m} \right)^2 + A \left( \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} \right)^2 + \dots + L \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 + M \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + Ny^2 + P = 0,$$

où A, B, ..., L, M, N, P sont des constantes.

Posons

$$y = \lambda \sin(\alpha x + C),$$

$\lambda$ ,  $\alpha$ , C étant trois constantes; nous en déduirons

$$\left( \frac{dy}{dx} \right) = \lambda \alpha \cos(\alpha x + C),$$

$$\left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = -\lambda \alpha^2 \sin(\alpha x + C).$$

et, par conséquent,

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = \lambda^2 \alpha^2 [1 - \sin^2(\alpha x + C)] = \alpha^2 (\lambda^2 - y^2)$$

et

$$\left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 = \alpha^4 y^2.$$

On voit aisément qu'on trouvera, en général,

$$\left( \frac{d^{2p} y}{dx^{2p}} \right)^2 = \alpha^{4p} y^2$$

et

$$\left( \frac{d^{2p+1}y}{dx^{2p+1}} \right)^2 = \alpha^{(4p+2)} (\lambda^2 - \gamma^2).$$

Substituant dans l'équation proposée, et groupant ensemble les termes qui renferment  $\gamma^2$  et ceux qui en sont indépendants, on trouve (supposons, par exemple,  $m$  pair)

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\alpha^{2m} - A\alpha^{2(m-1)} + \dots + L\alpha^4 - M\alpha^2 + N]\gamma^2 \\ \quad + [A\alpha^{2(m-1)}\lambda^2 + \dots + M\alpha^2\lambda^2 + P] = 0, \end{array} \right.$$

et l'équation sera satisfaite si l'on a simultanément

$$(3) \quad \alpha^{2m} - A\alpha^{2m-1} + \dots + L\alpha^4 - M\alpha^2 + N = 0,$$

$$(4) \quad A\alpha^{2(m-1)}\lambda^2 + \dots + M\alpha^2\lambda^2 + P = 0.$$

L'équation (3), qui est du degré  $m$  en  $\alpha^2$ , donnera  $m$  valeurs de  $\alpha^2$ . L'équation (4), où l'on portera l'une quelconque de ces valeurs de  $\alpha^2$ , donnera alors

$$(5) \quad \lambda^2 = \frac{-P}{A\alpha^{2(m-1)} + \dots + M\alpha^2},$$

et, si l'on adopte pour  $\alpha$  et  $\lambda$  des valeurs satisfaisant aux relations (3) et (4),

$$y = \lambda \sin(\alpha x + C)$$

sera une solution de l'équation différentielle proposée et renfermera une constante arbitraire  $C$ .

On trouvera ainsi  $2m$  solutions de l'équation (1) (car les combinaisons obtenues en changeant simultanément les signes de  $\alpha$  et de  $\lambda$  ne donnent pas de solutions distinctes) (1).

---

(1) Il est facile de reconnaître d'ailleurs que l'analyse précédente s'applique à toute équation de la forme

$$\sum A \left( \frac{d^m y}{dx^m} \right) \left( \frac{d^n y}{dx^n} \right) + P = 0,$$

où  $m$  et  $n$  peuvent être égaux, pourvu que dans chaque terme la somme  $m+n$  soit paire.