BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

# Sur la multiplication des fonctions elliptiques

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 6 (1878), p. 68-71
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__68_1>

## *Sur la multiplication des fonctions elliptiques;*
par M. LAGUERRE.

(Séance du 4 avril 1877.)

**1.** Je rappellerai d'abord une formule importante due à M. Hermite (¹).

Étant donnée une forme homogène, à deux variables et du degré $m$, $U(x, y)$, si l'on pose, suivant l'usage habituel,

$$U_1 = \frac{1}{m}\frac{dU}{dx}, \quad U_2 = \frac{1}{m}\frac{dU}{dy},$$

on a identiquement

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & U(\lambda x - U_2, \lambda y + U_1) \\ & \quad = U\left[\lambda^n + \frac{n(n-1)}{1.2} A\lambda^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} B\lambda^{n-3} + \ldots\right], \end{aligned} \right.$$

A, B, ... désignant des covariants de la forme U.

Je transformerai cette formule en posant

$$\lambda x - U_2 = t\xi, \quad \lambda y + U_1 = t\eta;$$

d'où

$$\lambda = \frac{\xi U_1 + \eta U_2}{x\eta - y\xi}, \quad t = \frac{U}{x\eta - y\xi},$$

ou, en posant, pour abréger, $\xi U_1 + \eta U_2 = \Delta$, $x\eta - y\xi = \omega$,

$$\lambda = \frac{\Delta}{\omega}, \quad t = \frac{U}{\omega}.$$

---

(¹) *Deuxième Mémoire sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées* (*Journal de Crelle*, t. 52, p. 25).

En remplaçant respectivement, dans l'équation (1), $\lambda x - U_1$, $\lambda x - U_2$, $\lambda$ et $t$ par leurs valeurs, il viendra

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} U^{n-1}(x, y)\,U(\xi, \eta) &= \Delta^n + \frac{n(n-1)}{1.2}\,A\,\Delta^{n-2}\omega^2 \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-1)}{1.2.3}\,B\,\Delta^{n-3}\omega^3 + \dots. \end{aligned}\right.$$

Si l'on suppose que U soit une forme du quatrième degré, en désignant par H son hessien, par J son covariant cubique du sixième degré, et par S son invariant quadratique, il viendra

$$(3)\quad U^3(x, y)\,U(\xi, \eta) = \Delta^4 + 6H\Delta^2\omega^2 + 4J\Delta\omega^3 + (SU^2 - 3H^2)\,\omega^4.$$

2. En extrayant la racine carrée du premier membre, on obtient la relation suivante :

$$U^3\,U(\xi, \eta) = (\Delta^2 + 3H\omega^2)^2 + \omega^3[4J\Delta + (SU^2 - 12H^2)\,\omega],$$

et l'on voit, en vertu du théorème fondamental d'Abel, que l'intégrale algébrique entière de l'équation différentielle

$$\frac{3\,dx}{\sqrt{U(x, y)}} + \frac{d\xi}{\sqrt{U(\xi, \eta)}},$$

où les quantités $\eta$ et $y$ doivent, ainsi que dans ce qui suit, être remplacées par l'unité, est fournie par l'équation

$$4J(\xi U_1 + \eta U_2) + (SU^2 - 12H^2)(x\eta - y\xi) = 0.$$

3. On obtient avec une égale facilité la formule qui donne la multiplication des fonctions elliptiques par 5, en d'autres termes, l'intégrale algébrique entière de l'équation

$$(4)\qquad \frac{d\xi}{\sqrt{U(\xi, \eta)}} + \frac{5\,dx}{\sqrt{U(x, y)}} = 0.$$

Désignant, en effet, par $a$ un covariant inconnu de U, il suffira de déterminer ce covariant, de telle sorte que le reste de l'opération, dans l'extraction de la racine carrée de

$$(\Delta + a\omega)^2[\Delta^4 + 6H\Delta^2\omega^2 + 4J\Delta\omega^3 + (SU^2 - 3H^2)\,\omega^4],$$

soit divisible par $\omega^5$. On aura, en effet, identiquement

$$U^3(\Delta + a\omega)^2 U(\xi, \eta) = P^2 + (x\eta - y\xi)^5[Q(\xi U_1 + \eta U_2) + R(x\eta - y\xi)];$$

d'où il suit, en vertu du théorème d'Abel, que l'intégrale cherchée est fournie par la résolution de l'équation

$$Q(\xi U_1 + \eta U_2) + R(x\eta - y\xi) = 0.$$

Pour effectuer le calcul, remplaçons pour un instant $\Delta$ par $z$ et $\omega$ par $1$; on trouvera aisément

$$\begin{aligned}
&(z + a)^2(z^4 + 6Hz^2 + 4Jz + SU^2 - 3H^2) \\
&\quad = (z^3 + az^2 + 3Hz + 2J + 3aH)^2 + (SU^2 - 12H^2 + 4aJ)z^3 \\
&\qquad + [2a(SU^2 - 12H^2) + 4(a^2 - 3H)J]z \\
&\qquad + a^2(SU^2 - 12H^2) - 4J^2 - 12aJH;
\end{aligned}$$

en égalant à zéro le coefficient de $z^3$, on a

$$a = \frac{12H^2 - SU^2}{4J},$$

et le reste de l'opération de l'extraction de la racine carrée devient

$$\begin{aligned}
&-\frac{[(SU^2 - 12H^2)^2 + 48HJ^2]}{4J}z \\
&+\frac{[(SU^2 - 12H^2)^3 - 48HJ^2(SU^2 - 12H^2) - 64J^4]}{16J^2}.
\end{aligned}$$

L'intégrale algébrique de l'équation (5) est donc donnée par l'équation

$$\begin{aligned}
&4J[(SU^2 - 12H^2)^2 + 48HJ^2](\xi U_1 + \eta U_2) \\
&\quad - [(SU^2 - 12H^2)^3 - 48HJ^2(SU^2 - 12H^2) - 64J^4](x\eta - y\xi) = 0.
\end{aligned}$$

4. On trouverait de même la formule qui donne la multiplication des fonctions elliptiques par un nombre impair quelconque $n$, ou, en d'autres termes, l'intégrale algébrique entière de l'équation

$$(5) \qquad \frac{d\xi}{\sqrt{U(\xi, \eta)}} + \frac{n\,dx}{\sqrt{U(x, y)}} = 0.$$

Le problème revient, comme on le voit par ce qui précède, à déterminer deux polynômes entiers $F(z)$ et $f(z)$ qui soient respectivement du degré $\frac{n-3}{2}$ et du degré $\frac{n+1}{2}$, et tels que l'on ait

$$(6) \qquad F^2(z)\,W(z) = f^2(z) + \alpha z + \beta,$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$W(z) = z^4 + 6Hz^2 + 4Jz + SU^2 - 3H^2,$$

et où $\alpha$ et $\beta$ désignent des covariants de U indépendants de $z$.

La première méthode qui se présente pour résoudre ce problème est celle que j'ai employée dans les exemples précédents; en mettant en évidence les $\frac{n-3}{2}$ coefficients actuellement indéterminés de $F(z)$, et extrayant la racine de $F^2(z)\,W(z)$, on profitera de l'indétermination de ces coefficients pour annuler les coefficients des $\frac{n-3}{2}$ premiers termes du reste, qui sera nécessairement de la forme

$$\alpha z + \beta,$$

$\alpha$ et $\beta$ étant des fonctions connues des covariants de U.

L'intégrale cherchée de l'équation (5) sera alors donnée par la relation

$$\alpha(\xi U_1 + \eta U_2) + \beta(x\eta - y\xi) = 0.$$

Mais on peut rattacher la détermination des polynômes $F(z)$ et $f(z)$, et par conséquent du reste $\alpha z + \beta$, à la réduction de l'expression $\sqrt{W(z)}$ en fonction continue.

De l'équation (6) on déduit, en effet,

$$F(z)\sqrt{W(z)} = f(z) + \frac{\alpha z + \beta}{F(z)\sqrt{W(z)} + f(z)};$$

le dénominateur de la fraction $\frac{\alpha z + \beta}{F(z)\sqrt{W(z)} + f(z)}$ est du degré $\frac{n+1}{2}$, d'où il suit que le développement de $F(z)\sqrt{W(z)} - f(z)$ commence par un terme de l'ordre de $\frac{1}{x^{\frac{n-3}{2}+1}}$.

La fraction $\frac{f(z)}{F(z)}$ est donc une des réduites obtenues en développant $\sqrt{W(z)}$ en fraction continue, celle dont le dénominateur est du degré $\left(\frac{n-3}{2}\right)$.