Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 7, nº 1 (1883), p. 5-14

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_5_0>

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

KOENIGSBERGER (A.) — ALLGEMEINE UNTERSUCHUNGEN AUS DER THEORIE DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN. — 1 vol. in-8°; Leipzig, 1882.

Dans ces dernières années, M. Koenigsberger a publié une suite d'importantes recherches sur la théorie des équations différentielles et notamment des équations différentielles linéaires; on trouvera, dans le Volume dont nous rendons compte, les résultats de ses recherches réunis, développés et généralisés; elles se rapportent principalement à la notion d'irréductibilité des équations différentielles algébriques, à l'extension du théorème d'Abel aux intégrales des équations différentielles, à l'étude des intégrales des équations différentielles linéaires d'ordre quelconque, en tant qu'elles peuvent s'exprimer par des combinaisons de fonctions algébrico-logarithmiques et d'intégrales abéliennes.

La notion d'irréductibilité s'est offerte comme d'elle-même à M. Frobenius dans ses recherches sur la théorie des équations différentielles linéaires, recherches dont le point de départ est dans les découvertes de M. Fuchs et dont M. Floquet a développé les principaux résultats dans un Mémoire inséré dans les *Annales de l'École Normale supérieure*, 2^e série, t. VIII, p. S.3.

Voici comment M. Koenigsberger étend cette notion aux équations différentielles algébriques quelconques.

L'équation différentielle du m^{ieme} ordre

$$f\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_\rho, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0,$$

dans laquelle $y_1, y_2, \ldots, y_\rho$ sont des fonctions algébriques irréductibles de x, où f désigne une fonction rationnelle entière des quantités qui figurent entre les parenthèses, sera dite irréductible si, relativement à $\frac{d^m z}{dx^m}$, elle est irréductible en sens algébrique et si, en outre, elle n'a aucune intégrale commune avec une équation différentielle d'ordre moindre et du même caractère

$$\varphi\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_\rho, z, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^\mu z}{dx^\mu}\right) = 0,$$

où φ désigne encore une fonction rationnelle entière et où μ est plus petit que m.

L'auteur établit ensuite la proposition suivante :

Si une équation différentielle algébrique a une intégrale commune avec une autre équation différentielle de même nature, irréductible au sens algébrique par rapport à la dérivée d'ordre le plus élevé qui y figure, intégrale qui ne vérifie aucune équation différentielle d'ordre moindre, toutes les intégrales de la seconde équation différentielle satisferont à la première.

Cette proposition permet de transformer comme il suit la définition de l'irréductibilité : une équation différentielle algébrique est dite irréductible si elle est irréductible au sens algébrique par rapport à la dérivée d'ordre le plus élevé qui y figure et si elle n'admet aucune intégrale algébrique d'*ordre quelconque*.

Ces définitions établies, la question suivante se pose immédiatement :

Étant donnée une équation différentielle algébrique, reconnaître si elle est irréductible ou non.

Après avoir répondu à cette question pour quelques types simples d'équations différentielles, l'auteur traite, à ce point de vue, des équations différentielles linéaires et montre qu'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre réductible admet toujours comme intégrale algébrique du premier ordre une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre ([1]); que, si une équation différentielle linéaire homogène du $m^{\text{ième}}$ ordre, étant réductible, admet une intégrale algébrique du $\rho^{\text{ième}}$ ordre, et si entre les m intégrales fondamentales particulières de l'équation considérée et leurs $\rho - 1$ premières dérivées il n'existe aucune relation algébrique, cette intégrale algébrique est une équation différentielle linéaire du $\rho^{\text{ième}}$ ordre.

M. Koenigsberger établit ensuite deux propositions qui servent de base à ses recherches ultérieures sur l'extension du théorème d'Abel, à la théorie de la transformation des transcendantes définies par des équations différentielles et généralement à l'étude de la nature de ces transcendantes; voici, tout au long, l'énoncé de ces deux théorèmes :

Soit donné un système d'équations différentielles

$$(1) \qquad f_i\left(x_i, y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{i,\rho_i}, z, \frac{dz}{dx_i}, \ldots, \frac{d^{m_i}z}{dx_i^{m_i}}\right) = 0,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k)$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sont des variables indépendantes, où $y_{i,1}, y_{i,2}, \ldots, y_{i,\rho_i}$ sont des fonctions algébriques irréductibles de la variable x_i; supposons que ces équations différentielles soient irréductibles, au sens algébrique, relativement aux dérivées d'ordre le plus élevé qui y figurent; soient $z_1, z_2, \ldots, z_k$ une suite d'intégrales particulières déterminées de ces équations différentielles, intégrales dont chacune est supposée ne vérifier aucune équation différentielle de même nature d'ordre moindre ; une telle suite existera toujours si les équations différentielles (1) sont irréductibles.

Soient de plus données les équations différentielles

$$(2) \quad F_j\left(x_{k+j}, y_{k+j,1}, y_{k+j,2}, \ldots, y_{k+j,\rho_{k+j}}, z, \frac{dz}{dx_{k+j}}, \ldots, \frac{dz^{n_j}z}{dx_{k+j}^{n_j}}\right), \quad (j = 1, 2, \ldots, \lambda),$$

([1]) *Voir* le Mémoire de M. Frobenius dans le 79ᵉ Volume du *Journal de Crelle*.

dans lesquelles les variables indépendantes $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+\lambda}$ sont liées algébriquement aux variables indépendantes du système (1) par des équations telles que

$$\varphi_j(x_{k+j}, x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

et où

$$y_{k+j,1}, y_{k+j,2}, \ldots, y_{k+j,\rho_{k+j}}$$

désignent des fonctions algébriques irréductibles de x_{k+j}; soient maintenant $z_{k+1}, z_{k+2}, \ldots, z_{k+\lambda}$ λ intégrales particulières des équations différentielles (2).

Supposons enfin que, entre les $k+\lambda$ intégrales $z_1, z_2, \ldots, z_k, z_{k+1}, \ldots, z_{k+\lambda}$ des équations différentielles (1) et (2) et leurs dérivées il existe une relation algébrique

$$(3) \quad F\left(z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \ldots, \frac{d^{M_1} z_1}{dx_1^{M_1}}, \ldots, z_{k+\lambda}, \frac{dz_{k+\lambda}}{dx_{k+\lambda}}, \ldots, \frac{d^{M_{k+\lambda}} z_{k+\lambda}}{dx_{k+\lambda}^{M_{k+\lambda}}}\right) = 0:$$

le premier théorème consiste en ce que cette relation subsistera, si l'on remplace les intégrales particulières du système (1) par d'autres intégrales particulières *quelconques* de ce système, pourvu qu'on remplace en même temps les intégrales particulières du système (2) par des intégrales *convenablement choisies de ce même système;* il ne suppose aucune restriction imposée aux équations différentielles algébriques du système (2); le second théorème, au contraire, suppose que les équations de ce système sont, au sens algébrique, irréductibles par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé et relativement aux intégrales particulières des équations de ce système qui figurent dans la relation (3), qu'il n'y ait aucune relation algébrique entre ces intégrales et leurs dérivées prises, pour chacune, jusqu'à un degré inférieur d'une unité à l'ordre de l'équation différentielle correspondante; sous ces conditions, l'équation (3) subsistera quand on remplacera les intégrales particulières du système (2) par d'autres intégrales particulières quelconques, pourvu qu'on remplace les intégrales particulières du système (1) par d'autres intégrales particulières convenablement choisies.

De ces propositions, M. Koenigsberger déduit facilement que la relation algébrique possible entre des intégrales abéliennes (en considérant comme telles les logarithmes de fonctions algébriques) est une relation linéaire à coefficients constants, où le second membre est une fonction algébrique; il montre aussi qu'une relation algébrique ne peut pas exister entre des intégrales abéliennes et des fonctions analytiques admettant un théorème d'addition. La méthode qu'il suit le conduit à un problème intéressant en lui-même et qui jouera d'ailleurs un rôle important dans ses recherches ultérieures.

On peut regarder comme le caractère distinctif des équations différentielles dont la solution se ramène immédiatement à effectuer une quadrature, et aussi des équations différentielles linéaires, la façon dont l'intégrale générale dépend d'une ou plusieurs constantes arbitraires et d'une ou plusieurs intégrales particulières: on est donc amené à se demander quelles sont les classes d'équations différentielles dont l'intégrale générale est une fonction algébrique d'intégrales particulières et de constantes arbitraires; cette question en comprend deux autres suivant que l'on admet que, dans cette fonction algébrique, la variable indépendante peut ou ne peut pas figurer explicitement. Par exemple, M. Koenigsberger établit que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation algébrique du premier ordre

$$\frac{dv}{dw} = f(v, w)$$

soit telle que son intégrale générale soit une fonction algébrique d'une intégrale particulière et d'une constante arbitraire, fonction où ne figure pas explicitement la variable indépendante, consiste en ce que l'on ait

$$f(v, w) = \varphi(v)\chi(w),$$

$\chi(w)$ étant une fonction algébrique quelconque de w et $\varphi(v)$ une fonction algébrique de v, telle que $\frac{dv}{\varphi(v)}$ soit une différentielle de première espèce et de genre 1. Une relation algébrique ne peut pas exister entre des intégrales abéliennes et l'intégrale d'une pareille équation.

Ces recherches se relient d'ailleurs par le lien le plus étroit avec celles qui concernent l'extension aux intégrales des équations différentielles algébriques du théorème d'Abel relatif aux quadratures.

Soit, par exemple, z une intégrale particulière d'une équation différentielle algébrique entre z et x et soient z_1, z_2, Z les valeurs de cette intégrale pour les valeurs x_1, x_2, X de la variable x, valeurs dont les premières sont indépendantes et dont la dernière est liée à celles-ci par une relation algébrique

$$X = \varphi(x_1, x_2),$$

s'il existe entre z_1, z_2, Z une relation algébrique

$$Z = f(z_1, z_2, x_1, x_2).$$

M. Koenigsberger dit que l'équation différentielle considérée possède un théorème abélien du *genre* 1 ; on aura de même un théorème abélien du genre 2. Si z_1, z_2, z_3, Z_1, Z_2 étant des valeurs de l'intégrale particulière z pour les valeurs x_1, x_2, x_3, X_1, X_2 de la variable x, valeurs dont les deux dernières sont données algébriquement au moyen des trois premières, il existe une relation algébrique de la forme

$$F(Z_1, Z_2; z_1, z_2, z_3; x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \ldots.$$

Le principe de cette extension une fois admis, les questions suivantes se posent immédiatement : Quelles sont les équations différentielles algébriques qui admettent un théorème abélien d'un genre donné? Quelle est la forme de la relation algébrique qui constitue ce théorème?

Si le genre du théorème abélien est égal à 1, l'équation différentielle doit, tout d'abord, être du premier ordre et son intégrale générale doit être une fonction algébrique d'une constante arbitraire et d'une intégrale particulière, fonction où la variable indépendante doit figurer explicitement ou non, selon que les variables x_1, x_2 doivent figurer ou non explicitement dans le théorème abélien, suivant que, en d'autres termes, ce théorème peut s'exprimer par une relation de la forme

$$Z = f(Z_1, Z_2; x_1, x_2),$$

ou de la forme

$$Z = f(Z_1, Z_2).$$

Ce dernier cas est évidemment le plus simple; alors, ainsi qu'on l'a déjà dit, l'équation différentielle doit avoir la forme

$$\frac{dz}{dx} = \lambda(x)\,\mu(z),$$

où $\lambda(x)$ et $\mu(z)$ sont des fonctions algébriques; en outre, les différentielles $\frac{dz}{\mu(z)}$ et $\lambda(x)\,dx$ doivent être de première espèce et de genre 1.

Dans le premier cas, M. Koenigsberger montre que, si l'intégrale générale est une fonction *entière* d'une constante et d'une intégrale particulière, cette fonction est nécessairement linéaire par rapport à l'intégrale particulière, le coefficient de l'intégrale étant une constante, et le second coefficient étant une fonction algébrique de x; l'équation différentielle est alors linéaire.

Si l'intégrale générale est une fonction rationnelle d'une intégrale particulière et d'une constante arbitraire, cette relation est nécessairement de la forme $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, où α, β, γ, δ sont des fonctions algébriques de la variable x et la constante arbitraire; l'équation différentielle est alors de la forme

$$\frac{dz}{dx} = \mathrm{A}z^2 + \mathrm{B}z + \mathrm{C},$$

où A, B, C sont des fonctions algébriques de x; si une équation différentielle de cette forme admet deux intégrales algébriques, l'intégrale générale est toujours liée algébriquement à une intégrale particulière transcendante, en supposant qu'une telle intégrale existe, et, de plus, toute intégrale transcendante admet un théorème abélien.

L'examen du cas où le théorème abélien est du genre 2 conduit l'auteur à des propositions et à des recherches analogues.

Le reste du Volume se rapporte à la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients algébriques qui admettent comme intégrales des fonctions composées algébriquement de fonctions algébrico-logarithmiques et d'intégrales abéliennes : on sait qu'Abel a montré que, si l'intégrale d'une fonction algébrique pouvait être ramenée à des fonctions algébrico-logarithmiques et à des intégrales elliptiques, les variables des fonctions réduites pouvaient s'exprimer rationnellement au moyen de la variable de l'intégrale abélienne et de l'irrationnalité correspondante; et ce théorème est le fondement de la théorie de la réduction des intégrales d'une fonction algébrique. M. Koenigsberger parvient à une suite de propositions analogues pour les intégrales de la nature considérée des équations différentielles linéaires, propositions qui lui permettent de fonder la théorie de la réduction de ces intégrales. Ainsi, lorsqu'une équation différentielle algébrique linéaire à second membre admet une intégrale de la forme $A \log v$, où A est une constante et v une fonction algébrique, l'auteur montre qu'elle admet nécessairement une intégrale de la forme $\frac{A}{\delta} \log w$, où δ est un nombre entier et w une fonction rationnelle des coefficients de l'équation; plus généralement, supposons qu'une équation différentielle linéaire

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \ldots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} + Y_m z = y,$$

où Y_1, Y_2, ..., Y_m, y sont des fonctions algébriques de x, admette une intégrale de la forme

$$\begin{aligned} z = u + A_2 \log v_1 + A_1 \log v_2 + \ldots + A_k \log v_k \\ + \int^{\xi_1} y_1\, ds + \int^{\xi_2} y_2\, ds + \ldots + \int^{\xi_\lambda} y_\lambda\, ds, \end{aligned}$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sont des constantes; $u, v_1, v_2, \ldots, v_k$; $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\lambda$ des fonctions algébriques de x; $y_1, y_2, \ldots, y_\lambda$ des fonctions algébriques de s; on voit d'abord que, si Y_m n'est pas nul, z s'exprimera algébriquement au moyen de x. Supposant $Y_m = 0$, M. Koenigsberger montre que l'équation proposée admettra une intégrale de la forme

$$\begin{aligned} z = U + B_1 \log V_1 + B_2 \log V_2 + \ldots + B_\mu \log V_\mu \\ + \frac{1}{\delta} \sum_{\rho=1}^{\rho=p_1} \int^{\eta_1^{(\rho)}} y_1\, ds + \ldots + \frac{1}{\delta} \sum_{\rho=1}^{\rho=p_\lambda} \int^{\eta_\lambda^{(\rho)}} y_\lambda\, ds, \end{aligned}$$

où $B_1, B_2, \ldots, B_\mu$ sont des constantes, où $U, V_1, \ldots, V_\mu$ sont des fonctions rationnelles de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{m-1}, y$, où $p_1, p_2, \ldots, p_\lambda$ désignent les nombres qui caractérisent les genres, où δ est un nombre entier; enfin les limites supérieures $\eta_a^{(\rho)}$ sont les racines d'une équation de degré p_a dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{m-1}, y$, tandis que, inversement, les valeurs de l'irrationnalité y_a qui correspondent à ces limites s'expriment rationnellement au moyen de ces limites elles-mêmes et des coefficients de l'équation différentielle. Relativement aux sommes d'intégrales abéliennes qui figurent dans l'expression de z et dont l'une quelconque peut être représentée par le symbole

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=p} \int^{\eta^{(\rho)}} Y\,ds,$$

M. Koenigsberger établit la formule de réduction suivante :

$$\int^{x} F(x, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{m-1}, y)\,dx = \sum_{\rho=1}^{\rho=p} \int^{\eta^{(\rho)}} \Omega(s, Y)\,ds;$$

dans le second membre $\Omega(s, Y)$ est une fonction rationnelle de s et de Y telle que $\Omega(s, Y)\,ds$ soit une différentielle de première espèce, d'ailleurs quelconque; dans le premier membre,

$$F(x, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{m-1}, y)$$

est une fonction rationnelle des quantités entre parenthèses, et l'intégrale est aussi de première espèce.

Le problème de la réduction est ensuite traité avec détail dans le cas d'une irrationnalité binôme, et, comme application, l'auteur donne une suite d'intéressantes propositions sur la réduction des intégrales hyperelliptiques à des intégrales elliptiques.

Enfin, dans le cas où les intégrales de l'équation différentielle linéaire ne sont pas composées par voie d'addition au moyen de fonctions algébrico-logarithmiques et d'intégrales abéliennes, l'auteur établit quelle doit être la forme de cette composition et apprend à en déduire d'autres formes rationnelles qui doivent encore être des intégrales de l'équation différentielle.

Il reste un problème à traiter, celui de la nature des irrationnalités algébriques qui servent de base aux intégrales elliptiques ou abéliennes que l'on suppose satisfaire à une équation différentielle linéaires; M. Koenigsberger réduit d'abord la question au cas des intégrales de première espèce; considérant ensuite une équation

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \ldots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = y,$$

où $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{m-1}$ sont des fonctions algébriques de x et où y est lié à ces quantités et à x par une équation irréductible

$$y^n + \varphi_1(x, Y_1, \ldots, Y_{m-1})y^{n-1} + \ldots = 0,$$

et supposant qu'elle soit vérifiée par une intégrale elliptique de première espèce,

$$z = \int^v \frac{d\xi}{\Delta(\xi)},$$

pour laquelle v et $\Delta(v)$ s'expriment rationnellement au moyen de $x, y, Y_1, \ldots, Y_{m-1}$, il observe qu'on peut faire décrire à la variable x des circuits fermés, tels que $Y_1, \ldots, Y_{m-1}$ restent inaltérés, tandis que y devient successivement égal aux n racines de l'équation qui le définit, et examine d'abord le cas où une racine de cette équation se produit ainsi multipliée par un facteur constant qui est nécessairement de la forme $e^{\frac{2\pi i}{\mu}}$, μ étant un nombre entier; si l'équation différentielle linéaire sans second membre n'est vérifiée par aucune intégrale abélienne ou n'est vérifiée que par une intégrale elliptique de même module, on doit avoir $\mu = 2, 3, 4$ ou 6 et, dans les trois derniers cas, l'intégrale elliptique a l'une des formes

$$\int^u \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3 - 1}}, \quad \int^u \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 - 1}}, \quad \int^u \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^6 - 1}} = \frac{1}{2}\int^v \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(\eta^3 - 1)}}.$$

L'auteur étend ensuite ses recherches au cas où il existe entre plusieurs valeurs de y une relation linéaire; l'étude de ce cas se relie à la théorie de la multiplication complexe et de la division du cercle; une analyse succincte des méthodes employées et des résultats obtenus serait difficilement intelligible, et nous devons renvoyer le lecteur au beau livre de M. Koenigsberger. J. T.