

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

J. TANNERY

Sur une décomposition en carrés

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2^e série,
tome 7, n° 1 (1883), p. 103-106

http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_103_1

© Gauthier-Villars, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

G. D.

MÉLANGES.

SUR UNE DÉCOMPOSITION EN CARRÉS;

PAR M. J. TANNERY.

I. Soient

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \quad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0, \quad \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z = 0$$

les équations de trois plans perpendiculaires deux à deux; si l'on fait

$$(1) \left\{ \begin{aligned} f(x, y, z) &= (\alpha x + \beta y + \gamma z)(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)(\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z) \\ &= x^2(px + p'y + p''z) + y^2(q''x + q'y + q'z) \\ &\quad + z^2(r'x + r''y + rz) + hxyz, \end{aligned} \right.$$

on aura identiquement

$$(2) \left\{ \begin{aligned} &(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)(\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2) \\ &= 6(p^2 + q^2 + r^2) + 2(p'^2 + q'^2 + r'^2 + p''^2 + q''^2 + r''^2) + h^2. \end{aligned} \right.$$

Si l'on considère en effet les expressions des coefficients p , p' , ..., qui résultent de l'égalité (1), et si l'on désigne par p_2 ,

p'_2, \dots ce que deviennent ces quantités quand on y remplace α, β, \dots par α^2, β^2, \dots , on aura évidemment

$$(3) \quad K = p_2 + q_2 + r_2 + p'_2 + q'_2 + r'_2 + p''_2 + q''_2 + r''_2 + h_2,$$

où K désigne le premier membre de l'égalité (2); d'ailleurs, on obtient de suite les égalités suivantes :

$$(4) \quad \begin{cases} p_2 = p^2, & q_2 = q^2, & r_2 = r^2, \\ p'_2 = p'^2 - 2pq'', & p''_2 = p''^2 - 2pr', \\ q'_2 = q'^2 - 2qr'', & q''_2 = q''^2 - 2qp', \\ r'_2 = r'^2 - 2rp'', & r''_2 = r''^2 - 2rq', \\ \delta^2 = h_2 + 2M - 2N, \\ h^2 = h_2 + 2M + 2N; \end{cases}$$

dans les deux dernières égalités, δ désigne le déterminant

$$\Sigma \pm \alpha\beta'\gamma'',$$

$2M$ représente l'ensemble des six doubles produits qui, dans le carré de ce déterminant, figurent avec le signe $+$, et $-2N$, l'ensemble des neuf doubles produits qui, dans ce même carré, figurent avec le signe $-$; ces quantités N et M sont liées aux coefficients de $f(x, y, z)$ par la relation

$$(5) \quad N + 3M = r'q'' + p'r'' + q'p'';$$

des équations (3), (4) et (5) on tire

$$(6) \quad \begin{cases} 3K - \delta^2 = 3(p^2 + q^2 + r^2 + p'^2 + q'^2 + r'^2 + p''^2 + q''^2 + r''^2) \\ \quad - 6[p(q'' + r') + q(r'' + p') + r(p'' + q')] \\ \quad + 2h^2 - 2(r'q'' + p'r'' + q'p''). \end{cases}$$

Jusqu'ici on n'a pas supposé que les plans fussent rectangulaires; cette supposition entraîne les égalités

$$\begin{aligned} 3p + q'' + r' &= 0, \\ 3q + r'' + p' &= 0, \\ 3r + p'' + q' &= 0, \\ \delta^2 &= K; \end{aligned}$$

les trois premières égalités permettent de faire disparaître du second membre de l'égalité (6) tous les doubles produits : on parvient ainsi soit à l'égalité (6) que j'avais en vue, soit à l'égalité

équivalente

$$(2 \text{ bis}) \quad K = 15(p^2 + q^2 + r^2) + h^2 + (q'' - r')^2 + (r'' - p')^2 + (p'' - q')^2.$$

Ces identités offrent ceci d'intéressant, qu'elles conduisent immédiatement à la décomposition en carrés du discriminant de l'équation du troisième degré que l'on rencontre dans la théorie des plans principaux des surfaces du troisième degré. Cette décomposition a été effectuée, comme on sait, par M. Kummer; Borchardt, pour l'équation aux inégalités séculaires de degré quelconque, a, de même, décomposé en carrés l'ensemble des fonctions qui, par leur caractère positif, assurent la réalité des racines d'une telle équation; sa belle analyse épuise, en quelque sorte, la question au point de vue analytique; toutefois, il semble qu'il y ait encore quelque intérêt à relier la formule de décomposition de M. Kummer à des considérations géométriques qui se présentent naturellement dans la théorie des surfaces du second degré.

Soit

$$\varphi(x, y, z) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0$$

l'équation d'un cône du second degré, et soit

$$\Phi(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$$

la forme adjointe de la fonction $\varphi(x, y, z)$: on reconnaît de suite que l'équation du troisième degré qui représente l'ensemble des trois plans principaux du cône considéré s'obtient en éliminant α, β, γ entre les trois opérations

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma z &= 0, \\ \alpha \varphi'_x + \beta \varphi'_y + \gamma \varphi'_z &= 0, \\ \alpha \Phi'_x + \beta \Phi'_y + \gamma \Phi'_z &= 0. \end{aligned}$$

On peut représenter le résultat de l'élimination par

$$f(x, y, z) = 0,$$

en posant

$$\begin{aligned} p &= b''B' - b'B'', \quad \dots, \\ p' &= B'(a' - a) - b'(A' - A) - (bB'' - b''B), \\ p'' &= B''(a - a'') - b''(A - A'') - (b'B - b'B'), \\ &\dots\dots\dots, \\ h &= a'A'' + \tilde{a}''A + aA' - a''A' - aA'' - a'A. \end{aligned}$$

D'ailleurs, si, étant donnée une fonction quelconque F des coefficients a, a', a'', b, b', b'' , on désigne par F_s ce que devient cette fonction quand on y remplace a, a', a'' par $a-s, a'-s, a''-s$; si enfin on désigne par s_1, s_2, s_3 les trois racines de l'équation

$$\Delta_s = (a-s)(a'-s)(a''-s) - (a-s)b^2 \\ - (a'-s)b'^2 - (a''-s)b''^2 + 2bb'b'' = 0,$$

les équations des trois plans principaux du cône seront respectivement

$$X = x\sqrt{A_{s_1}} + y\sqrt{A'_{s_1}} + z\sqrt{A''_{s_1}} = 0, \\ Y = x\sqrt{A_{s_2}} + y\sqrt{A'_{s_2}} + z\sqrt{A''_{s_2}} = 0, \\ Z = x\sqrt{A_{s_3}} + y\sqrt{A'_{s_3}} + z\sqrt{A''_{s_3}} = 0,$$

pourvu que l'on prenne les signes des radicaux de manière à satisfaire aux équations

$$\sqrt{A'_{s_1}}\sqrt{A''_{s_1}} = B_{s_1}, \dots$$

Le produit XYZ sera donc égal à $f(x, y, z)$, à un facteur près, indépendant des quantités x, y, z ; on reconnaît sans peine, en formant directement, par exemple, le coefficient de x^3 , que ce facteur est égal à ± 1 . En appliquant les formules (2) ou (2 bis), on obtiendra donc une décomposition en carrés du discriminant

$$K = (A_{s_1} + A'_{s_1} + A''_{s_1})(A_{s_2} + A'_{s_2} + A''_{s_2})(A_{s_3} + A'_{s_3} + A''_{s_3})$$

de l'équation $\Delta_s = 0$; l'application de la formule (2 bis) conduit à la décomposition de M. Kummer :

$$K = 15[(b''B' - b'B'')^2 + (bB'' - b''B)^2 + (b'B - bB')^2] \\ + [B(a' + a'' - 2a) - b(A' + A'' - 2A)]^2 \\ + [B'(a'' + a - 2a') - b'(A'' + A - 2A')]^2 \\ + [B''(a + a' - 2a'') - b''(A + A' - 2A'')]^2 \\ + (a'A'' + a''A + aA' - a''A' - aA'' - a'A)^2.$$