

# BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

P. DU BOIS-REYMOND

## Détermination de la valeur-limite d'une intégrale qui se présente dans la théorie des séries trigonométriques

*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2<sup>e</sup> série,*  
tome 3, n° 1 (1879), p. 343-352

[http://www.numdam.org/item?id=BSMA\\_1879\\_2\\_3\\_1\\_343\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_343_1)

© Gauthier-Villars, 1879, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## MÉLANGES.

### DÉTERMINATION DE LA VALEUR-LIMITE D'UNE INTÉGRALE QUI SE PRÉSENTE DANS LA THÉORIE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES ;

PAR M. P. DU BOIS-REYMOND.

*Établir la limite de*

$$(1) \quad J = \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \varepsilon^2) f(\theta) d\theta}{1 - 2\varepsilon \cos(\theta - \alpha) + \varepsilon^2}$$

*quand  $\varepsilon$  s'approche de l'unité.*

#### I.

Supposons

$$1 > \varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad 2\pi > \alpha > 0.$$

On commence par partager l'intégrale J en deux autres, de 0 à  $\alpha$

et de  $\alpha$  à  $2\pi$ , ce qui donne, après un changement de variables,

$$(2) \quad J = \int_0^\alpha \frac{(1-\varepsilon^2)f(\alpha-\theta)d\theta}{1-2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2} + \int_0^{2\pi-\alpha} \frac{(1-\varepsilon^2)f(\alpha+\theta)d\theta}{1-2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2}.$$

En écrivant  $\varphi(\theta)$  au lieu de  $f(\alpha-\theta)$  ou  $f(\alpha+\theta)$ , on voit que les deux intégrales du second membre de (2) ont la forme commune

$$(3) \quad j = \int_0^\alpha \frac{(1-\varepsilon^2)\varphi(\theta)d\theta}{1-2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2}, \quad (2\pi > \alpha > 0),$$

qu'il faut discuter.

## II.

Considérons en premier lieu l'intégrale plus simple

$$(4) \quad (j) = \int_0^\alpha \frac{(1-\varepsilon^2)d\theta}{1-2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2}.$$

On sait qu'elle peut se mettre sous la forme

$$\text{arc tang} \frac{(1-\varepsilon^2)\sin\alpha}{(1+\varepsilon^2)\cos\alpha-2\varepsilon};$$

mais cet arc tang a l'inconvénient de n'être pas renfermé entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $+\frac{\pi}{2}$ . Pour le rendre tel, il faut lui ajouter  $\pi$ , comme je l'ai montré dans les *Annales de Leipzig*, t. VII, p. 257. Toujours est-il que cette forme de l'intégrale (4) se prête moins aisément à la recherche qui nous occupe, qu'une autre transformation que je vais indiquer.

Dans

$$(5) \quad (j) = (1-\varepsilon^2) \int_0^\alpha \frac{d\theta}{1+\varepsilon^2-2\varepsilon\cos\theta}$$

on introduit  $\frac{\theta}{2}$  au lieu de  $\theta$ , ce qui donne

$$(6) \quad \frac{1}{2}(j) = (1-\varepsilon^2) \int_0^\alpha \frac{d \text{ tang} \frac{\theta}{2}}{(1-\varepsilon)^2 + (1+\varepsilon)^2 \text{ tang}^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Maintenant, en faisant  $\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = \tau \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$ , la différentielle de l'intégrale prend la forme canonique  $\frac{d\tau}{1+\tau^2}$ ; mais il est indispensable de traiter séparément les cas  $a \leq \pi$  et  $a > \pi$ .

Supposons d'abord  $a \leq \pi$ . On trouve

$$(7) \quad \frac{1}{2}(j) = \int_0^{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \operatorname{tang} \frac{a}{2}} \frac{d\tau}{1+\tau^2}.$$

Pour  $a > \pi$ , on a

$$\frac{1}{2}(j) = (1-\varepsilon^2) \int_0^a \frac{d \operatorname{tang} \frac{\theta}{2}}{(1-\varepsilon)^2 + (1+\varepsilon)^2 \operatorname{tang}^2 \frac{\theta}{2}} = (1-\varepsilon^2) \left( \int_0^\pi + \int_\pi^a \right).$$

On peut se servir de la substitution  $\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = \tau \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$  dans les deux intégrales du second membre, en songeant que  $\operatorname{tang} \frac{a}{2}$  est négative, de sorte que  $(j)$  devient, dans ce cas,

$$(8) \quad \frac{1}{2}(j) = \int_0^\infty \frac{d\tau}{1+\tau^2} + \int_{-\infty}^{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \operatorname{tang} \frac{a}{2}} \frac{d\tau}{1+\tau^2}.$$

A présent  $(j)$  est ramené, dans les deux cas  $a \leq \pi$ ,  $a > \pi$ , à des formes qui permettent d'en établir sur-le-champ la limite pour  $\varepsilon$  s'approchant de l'unité. Si, dans les équations (7) et (8),  $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$  converge vers  $+\infty$ , l'intégrale dans (7) converge vers  $\int_0^\infty d \operatorname{arc} \operatorname{tang} \tau$ , et la seconde intégrale dans (8) tend vers zéro, à cause de  $\operatorname{tang} \frac{a}{2}$  négative.

### III.

Reprenons maintenant la formule générale (3) :

$$j = \int_0^a \frac{(1-\varepsilon^2) \varphi(\theta) d\theta}{1-2\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2}, \quad (2\pi > a > 0).$$

La substitution  $\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = \tau \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$  l'aurait transformée, pour  $a \leq \pi$ , en

$$(9) \quad \frac{1}{2}j = \int_0^{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \operatorname{tang} \frac{a}{2}} \varphi \left[ 2 \operatorname{arctang} \left( \tau \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \right) \right] \frac{d\tau}{1+\tau^2},$$

et, pour  $a > \pi$ , en

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}j = \int_0^{\infty} \varphi \left[ 2 \operatorname{arctang} \left( \tau \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \right) \right] \frac{d\tau}{1+\tau^2} \\ \quad + \int_{-\infty}^{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \operatorname{tang} \frac{a}{2}} \varphi \left[ 2 \operatorname{arctang} \left( \tau \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \right] \frac{d\tau}{1+\tau^2}. \end{cases}$$

Pour simplifier, faisons

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} = \gamma, \quad \operatorname{tang} \frac{a}{2} = A, \quad \varphi[2 \operatorname{arctang}(x)] = \psi(x).$$

Les formules (9) et (10) deviennent ainsi

$$(9a) \quad \frac{1}{2}j = \int_0^{\frac{A}{\gamma}} \psi(\gamma\tau) \frac{d\tau}{1+\tau^2}, \quad (A > 0),$$

$$(10a) \quad \frac{1}{2}j = \int_0^{\infty} \psi(\gamma\tau) \frac{d\tau}{1+\tau^2} + \int_{-\infty}^{\frac{A}{\gamma}} \psi(\gamma\tau) \frac{d\tau}{1+\tau^2}, \quad (A < 0).$$

Quant à  $\gamma = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$ , on a  $0 < \gamma$ , et, pour  $\lim \varepsilon = 1$ ,  $\lim \gamma = 0$ .

Cherchons d'abord la limite de  $j$  dans (9a). Nous partageons cette intégrale en deux autres :

$$(11) \quad \frac{1}{2}j = \int_0^c \psi(\gamma\tau) \frac{d\tau}{1+\tau^2} + \int_0^{\frac{A}{\gamma}} \psi(\gamma\tau) \frac{d\tau}{1+\tau^2}, \quad (0 < c < \frac{A}{\gamma}).$$

La fonction  $\psi(x)$  est supposée finie entre les limites des intégrales (9a) et (10a), c'est-à-dire que  $\varphi(\theta) = \psi(x)$  est finie entre les limites  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . De plus,  $\psi(x)$  est supposée intégrable. C'est

à cela que se bornent nos suppositions. Alors, à cause de  $\frac{1}{1+\tau^2}$  positif et du théorème ordinaire des valeurs moyennes :

$$\int_a^b \psi(x)\varphi(x)dx = \psi(\xi) \int_a^b \varphi(x)dx, \quad (a \leq \xi \leq b),$$

l'équation (11) devient

$$(12) \quad \frac{1}{2}j = \psi(\gamma c_1) \int_0^c d \operatorname{arc} \operatorname{tang} \tau + \psi(\gamma c_2) \int_c^{\frac{A}{\gamma}} d \operatorname{arc} \operatorname{tang} \tau, \\ \left( 0 \leq c_1 \leq c \leq c_2 \leq \frac{A}{\gamma} \right).$$

Pour trouver la limite de  $j$ ,  $\gamma$  tendant vers zéro, nous supposons  $c$  croissant au delà de toute limite pendant que  $\gamma$  décroît, mais sous cette condition, que le produit  $\gamma c$  converge en même temps vers zéro, ce qui aura lieu, par exemple, si l'on fait  $c = \gamma^{-\frac{1}{2}}$ . Évidemment on aura

$$\lim \frac{1}{2}j = \frac{\pi}{2} \lim \psi(\gamma c_1) + 0 \cdot \lim \psi(\gamma c_2),$$

et, si l'on suppose finalement encore que  $\lim \psi(\delta)$ , ( $0 < \delta$ ), pour  $\delta = 0$ , est une quantité déterminée, quelle que soit la nature de la quantité évanouissante  $\delta$ , on trouve

$$(13) \quad \lim j = \pi \lim \psi(\delta), \quad (\delta > 0).$$

L'équation (10<sub>a</sub>) donne la même limite de  $j$ ; car, en opérant sur la première intégrale de son second membre comme nous venons de le faire sur l'intégrale  $\frac{1}{2}j$  de l'équation (9<sub>a</sub>)<sub>1</sub>, on voit immédiatement que sa limite est  $\pi \lim \psi(\delta)$ . La seconde intégrale, mise sous la forme

$$\psi(\gamma \tau_1) \int_{-\infty}^{\frac{A}{\gamma}} d \operatorname{arc} \operatorname{tang} \tau, \quad \left( -\infty < \tau_1 < \frac{A}{\gamma} \right),$$

a la limite zéro, à cause de  $\psi(\gamma \tau_1)$  finie et de  $A < 0$ .

Tout ceci aboutit donc au théorème :

Soit donnée l'intégrale

$$i = \int_0^a \frac{(1 - \varepsilon^2) \varphi(\theta) d\theta}{1 - 2\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2}, \quad (2\pi > a > 0),$$

la fonction  $\varphi(\theta)$  étant assujettie aux conditions d'être intégrable dans l'intervalle  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , et d'avoir une limite déterminée  $\lim \varphi(\delta)$  pour  $\delta > 0$ ,  $\delta$  s'approchant d'une manière quelconque de zéro. Si dans l'intégrale  $j$  la quantité  $\varepsilon$ , supposée  $< 1$ , tend vers l'unité,  $j$  tend vers  $\pi \lim \varphi(\delta)$ .

#### IV.

Après avoir établi la limite de  $j$ , celle de l'intégrale  $J$ , qui est l'objet de cette analyse, n'offre plus aucune difficulté.

Nous avons en effet, formule (2),

$$J = \int_0^\alpha \frac{(1 - \varepsilon^2) f(\alpha - \theta) d\theta}{1 - 2\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2} + \int_0^{2\pi - \alpha} \frac{(1 - \varepsilon^2) f(\alpha + \theta) d\theta}{1 - 2\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2}.$$

En faisant tour à tour  $f(\alpha + \theta) = \varphi(\theta)$ ,  $f(\alpha - \theta) = \varphi(\theta)$ , nous trouvons pour  $\alpha$ , contenu entre 0 et  $2\pi$ ,

$$(14) \quad \lim J = \pi [\lim f(\alpha - \delta) + \lim f(\alpha + \delta)],$$

sous l'hypothèse du théorème que je viens d'énoncer, que  $f(x)$  est intégrable dans l'intervalle  $0 \leq x \leq 2\pi$ , et que  $\lim f(\alpha - \delta)$ ,  $\lim f(\alpha + \delta)$  sont des valeurs déterminées, indépendantes de la manière dont  $\delta$  s'évanouit.

Jusqu'à présent nous avons supposé  $\alpha$  différent de zéro et de  $2\pi$ . Pour achever notre tâche, il reste à trouver la limite de  $J$  pour  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 2\pi$  et  $\alpha$  en dehors de l'intervalle  $0 \dots 2\pi$ .

Pour  $\alpha = 0$  on fait

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \varepsilon^2) f(\theta) d\theta}{1 - 2\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2} = \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi}.$$

La première intégrale à droite donne, d'après ce qui précède,  $\pi \lim f(\delta)$  pour limite. Dans la seconde intégrale, on pose

$$\theta = 2\pi - \theta_1,$$

ce qui la transforme en celle-ci,

$$\int_0^\pi \frac{(1 - \varepsilon^2) f(2\pi - \theta_1) d\theta_1}{1 - 2\varepsilon \cos \theta_1 + \varepsilon^2},$$

dont la limite est  $\pi \lim f(2\pi - \delta)$ .

Donc on a, pour  $\alpha = 0$ ,

$$(15) \quad \lim J = \pi [\lim f(\delta) + \lim f(2\pi - \delta)].$$

Pour  $\alpha = 2\pi$ , J ne change pas, de sorte qu'on obtient la même valeur de  $\lim J$ .

Quant aux valeurs de  $\alpha$  en dehors de l'intervalle  $0 \dots 2\pi$ , elles résultent de la périodicité de la fonction  $\lim J = F(\alpha)$ .

Le résultat de notre recherche par rapport à cette fonction peut donc s'énoncer ainsi :

*La fonction*

$$\lim J = F(\alpha) = \frac{1}{2} \lim \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \varepsilon^2) f(\theta) d\theta}{1 - 2\varepsilon \cos(\theta - \alpha) + \varepsilon^2}$$

*est, pour les fonctions  $f(\theta)$  qui n'ont un nombre infini ni de maxima et minima ni de discontinuités, identiquement la même que celle-ci*

$$F_1(\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(u) du + \cos \alpha \int_0^{2\pi} f(u) \cos u du + \dots \\ + \sin \alpha \int_0^{2\pi} f(u) \sin u du + \dots$$

Une première différence entre les deux représentations  $F(\alpha)$  et  $F_1(\alpha)$  s'accuse quand on les applique à des fonctions possédant un nombre infini de maxima et minima. *Alors on trouverait que la première est bien plus générale que la seconde, qui se refuse déjà à représenter certaines fonctions continues, tandis que la première n'exige que l'intégrabilité de  $f(x)$ , et donne  $F(\alpha) = \pi [\lim f(x + \delta) + \lim f(x - \delta)]$  partout où ces limites existent.*



## V.

Une autre différence peut être constatée si l'on ne cherche pas seulement les valeurs  $\lim_{\varepsilon=1} J(\alpha)$  pour des  $\alpha$  fixes, mais plus généralement toutes les valeurs  $\lim_{\varepsilon=1, \delta=0} J(\varepsilon, \alpha + \delta)$  pour des relations quelconques entre  $1 - \varepsilon$  et  $\delta$ .

Le problème d'établir dans sa conception la plus générale la limite d'une expression analytique ne saurait être considéré comme entièrement résolu si sa *limite mixte*, comme on peut nommer des limites telles que  $\lim_{\varepsilon=1, \delta=0} J(\varepsilon, \alpha + \delta)$ , n'est déterminée aussi. Ce problème des limites mixtes peut présenter des difficultés très-sérieuses; mais, pour des cas analogues à celui que nous traitons ici, on en trouve facilement la solution au moyen d'une proposition que j'ai communiquée dans les *Annales de Leipzig* (t. VII, p. 251), et dont voici la teneur :

*Soient*

$$G_+ = \lim_{h=\infty} \int_0^b d\beta \Phi(\beta, h),$$

$$G_- = \lim_{h=\infty} \int_{-a}^0 d\beta \Phi(\beta, h),$$

*des quantités indépendantes de  $b$  et de  $a$ . On aura généralement*

$$(G_- + G_+)f(x) = \lim_{h=\infty} \int_A^B d\beta f(\beta) \Phi(\beta - x, h),$$

*en supposant  $A < x < B$ , et  $f(x)$  continue entre les limites  $A$  et  $B$ . Mais, si  $f(x)$  prend pour un point  $x = x_1$  deux valeurs différentes  $f(x_1 - 0)$  et  $f(x_1 + 0)$ , on aura*

$$\begin{aligned} & \lim_{h=\infty, x=x_1} \int_A^B d\beta f(\beta) \Phi(\beta - x, h) \\ & = f(x_1 + 0)G_+ + f(x_1 - 0)G_- \\ & \quad - [f(x_1 + 0) - f(x_1 - 0)] \lim_{h=\infty, x=x_1} \int_0^{x_1-x} d\beta \Phi(h, \beta). \end{aligned}$$

Si l'on applique cette formule à la série

$$\begin{aligned} F_1(\alpha, n) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(u) du \\ &+ \cos \alpha \int_0^{2\pi} f(u) \cos u du + \dots + \cos n \alpha \int_0^{2\pi} f(u) \cos n u du \\ &+ \sin \alpha \int_0^{2\pi} f(u) \sin u du + \dots + \sin n \alpha \int_0^{2\pi} f(u) \sin n u du, \end{aligned}$$

en posant  $n = h$ ,  $x = \alpha$ ,  $x_1 = \alpha_1$ , elle devient (*Ann. de Leipzig*, t. VII, p. 254)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty, \alpha = \alpha_1} F_1(\alpha, n) &= \frac{\pi}{2} [f(\alpha_1 + 0) + f(\alpha_1 - 0)] \\ &+ [f(\alpha_1 + 0) - f(\alpha_1 - 0)] \lim_{n \rightarrow \infty, \alpha = \alpha_1} \int_0^{n(\alpha - \alpha_1)} \frac{\sin x}{x} dx. \end{aligned}$$

En l'appliquant ensuite à la fonction

$$F(\alpha, \varepsilon) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \varepsilon^2) f(\theta) d\theta}{1 - 2\varepsilon \cos(\theta - \alpha) + \varepsilon^2},$$

et en posant  $\frac{1}{1 - \varepsilon} = h$ ,  $x = \alpha$ ,  $x_1 = \alpha_1$ , on trouve

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 1, \alpha = \alpha_1} F(\alpha, \varepsilon) &= \frac{\pi}{2} [f(\alpha_1 + 0) + f(\alpha_1 - 0)] \\ &+ [f(\alpha_1 + 0) - f(\alpha_1 - 0)] \lim_{\varepsilon \rightarrow 1, \alpha = \alpha_1} \operatorname{arc tang} \left[ \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \operatorname{tang} \frac{\alpha - \alpha_1}{2} \right]. \end{aligned} \right.$$

Ces deux formules pour les limites mixtes de  $F_1(\alpha, n)$  et  $F(\alpha, \varepsilon)$  peuvent être comparées, si l'on suppose les quantités  $h = n$ ,

$h = \frac{1}{1 - \varepsilon}$  égales.

Soit, par exemple,

$$h = \frac{\pm \rho}{\alpha - \alpha_1},$$

selon que  $\alpha \geq \alpha_1$ , et  $\rho$  signifiant une constante arbitraire. Nos deux

formules deviennent

$$\lim_{n \rightarrow \infty, \alpha = \alpha_1} F_1(\alpha, n) = \frac{\pi}{2} [f(\alpha_1 + 0) + f(\alpha_1 - 0)] \\ \pm [f(\alpha_1 + 0) - f(\alpha_1 - 0)] \int_0^\rho \frac{\sin x}{x} dx,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 1, \alpha = \alpha_1} F(\alpha, \varepsilon) = \frac{\pi}{2} [f(\alpha_1 + 0) + f(\alpha_1 - 0)] \\ \pm [f(\alpha_1 + 0) - f(\alpha_1 - 0)] \operatorname{arc} \operatorname{tang} \rho,$$

et donnent évidemment des valeurs de  $F$  et  $F_1$  différentes entre elles quand on assigne des valeurs quelconques à l'arbitraire  $\rho$ .

Les nos IV et V de cet article, notamment les formules (14), (15) (16), contiennent la solution complète du problème proposé.

