Remarque mathématique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 8 (1875), p. 208
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1875__8__208_0>

REMARQUE MATHÉMATIQUE,

Par A. Popof, membre honoraire de l'Université de Kazan (¹).

(TRADUIT DU RUSSE.)

La formule analytique suivante me semble nouvelle :

$$e^{-hx^2} = A_1 e^{-ax} + A_2 e^{-a^2x} + A_3 e^{-a^3x} + \ldots,$$

h et a désignant des nombres positifs arbitraires, le second a étant >1, et l'expression générale des coefficients constants A_i étant

$$A_i = M_i \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{a^i} - \frac{a^{2i} - a^i(a^2-1) + (a^2-1)(a-1)}{a^{3i}(a-1)(a^2-1)} \cdot 2h \\ &+ \frac{\left[\begin{aligned} &a^{4i} - a^{3i}(a^4-1) + a^{2i}(a^4-1)(a^3-1) - a^i(a^4-1)(a^3-1)(a^2-1) \\ &+ (a^4-1)(a^3-1)(a^2-1)(a-1) \end{aligned}\right]}{a^{5i}(a-1)(a^2-1)(a^3-1)(a^4-1)} \cdot 1.3(2h)^2 \\ &- \ldots \end{aligned} \right\},$$

où l'on a posé

$$M_i = \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{a-1} - \frac{2a^i}{(a-1)(a^2-1)} + \frac{3a^{2i}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)} \\ &\qquad - \frac{4a^{3i}}{(a-1)(a^2-1)(a^3-1)(a^4-1)} + \ldots \end{aligned} \right\}^{-1}.$$

Le terme général de la série qui représente la valeur de A_i est ainsi

$$\frac{1.3.5\ldots(2p-1)(-2h)^p M_i}{a^{2(p+1)i}(a-1)(a^2-1)\ldots(a^{2p}-1)}$$
$$\times \left[a^{2pi} - a^{(2p-1)i}(a^{2p}-1) + \ldots + (a^{2p}-1)\ldots(a^3-1)(a^2-1)(a-1)\right].$$

Cette formule n'est qu'un cas particulier d'un autre développement général,

$$F(x) = A_1 e^{-r_1 x} + A_2 e^{-r_2 x} + A_3 e^{-r_3 x} + \ldots,$$

dans lequel

$$r_1 < r_2 < r_3 < r_4 < \ldots,$$

et où la somme

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + \ldots = \text{une quantité finie.}$$

(¹) Extrait des *Ученыя Записки И. Каз. Университета*, année 1874. 2^e livraison.