BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

E. PELLET

Note sur les podaires obliques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 3 (1872), p. 278-281

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1872__3__278_1>

© Gauthier-Villars, 1872, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

NOTE SUR LES PODAIRES OBLIQUES;

PAR M. E. PELLET,
ELEVE DE L'ECOLE NORMALE.

1. Appelons *podaire oblique* d'une courbe, par rapport à un point O, le lieu des pieds, sur les tangentes à cette courbe, des droites partant du point O et faisant avec les tangentes un angle donné α, toujours dans le même sens. Pour avoir toutes les podaires, il suffit de faire varier α depuis o jusqu'à π. La podaire ordinaire correspond à $\alpha = 90^\circ$; on peut l'appeler *podaire droite*.

Soit

$$x\cos\theta + y\sin\theta - f(\theta) = 0$$

l'équation d'une tangente à une courbe. La podaire droite aura pour équation

$$\rho = f(\omega),$$

en prenant l'axe des x pour axe polaire.

ρ_1, ω_1, coordonnées polaires d'un point de la podaire oblique correspondant à l'angle α, sont reliées aux coordonnées ρ, ω du point correspondant de la podaire droite par les relations

$$\rho_1 \sin\alpha = \rho, \quad \omega_1 = \omega + \frac{\pi}{2} - \alpha;$$

par suite, l'équation de cette podaire est

$$\rho \sin\alpha = f\left(\omega - \frac{\pi}{2} + \alpha\right).$$

Par une rotation autour du point O, d'un angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$ on l'amènera à être homothétique à la podaire droite.

2. *L'enveloppe des podaires d'une courbe est la courbe elle-même.*

On aura cette enveloppe en éliminant α entre les deux équations

$$\rho \sin\alpha = f\left(\omega - \frac{\pi}{2} + \alpha\right), \quad \rho \cos\alpha = f'\left(\omega - \frac{\pi}{2} + \alpha\right),$$

$f'(\theta)$ étant la dérivée de $f(\theta)$; ou bien entre

$$(1) \quad \begin{cases} \rho^2 = f^2\left(\omega - \frac{\pi}{2} + \alpha\right) + f'^2\left(\omega - \frac{\pi}{2} + \alpha\right), \\ \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \dfrac{f'\left(\omega - \frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{f\left(\omega - \frac{\pi}{2} + \alpha\right)}. \end{cases}$$

D'autre part, l'équation de la courbe en coordonnées rectangulaires s'obtiendra en éliminant θ entre les deux équations

$$x\cos\theta + y\sin\theta - f(\theta) = 0, \quad -x\sin\theta + y\cos\theta - f'(\theta) = 0,$$

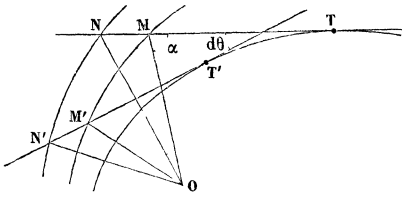
et, en coordonnées polaires, en éliminant θ entre les deux équations

$$(2) \quad \begin{cases} \rho^2 = f^2(\theta) + f'^2(\theta), \\ \operatorname{tang}(\omega - \theta) = \dfrac{f'(\theta)}{f(\theta)}. \end{cases}$$

L'élimination de α entre les deux équations (1) conduit évidemment à la même relation entre ρ et ω que l'élimination de θ entre les deux équations (2).

3. Soit TM une tangente à la courbe, T étant le point de contact et M le pied de l'oblique. La tangente en M à la podaire est évidem-

ment la tangente au cercle qui passe par les trois points O, M, T.



Soit T'M' une tangente infiniment voisine, faisant avec la première un angle $d\theta$. Construisons la podaire correspondant à l'angle $\alpha + d\alpha$, et soient N, N' les points où elle coupe TM et M'T'. Proposons-nous d'évaluer l'aire du parallélogramme NMM'N'.

Elle est égale à

$$\mathrm{NM}.\mathrm{MM'}\sin\mathrm{NMM'}.$$

Or le triangle MON donne

$$\mathrm{NM} = \frac{c\,d\alpha}{\sin\alpha},$$

en posant $c = \mathrm{OM}$. Le triangle MTM' donne

$$\mathrm{MM'} = \frac{t\,d\theta}{\sin\mathrm{NMM'}},$$

en posant $t = \mathrm{TM}$.

Par suite, l'aire du parallélogramme que nous désignons par $d\sigma$ est égale à

$$d\sigma = \frac{ct}{\sin a}\,d\theta\,d\alpha. \tag{3}$$

4. Supposons que la courbe donnée soit fermée et convexe, et le point O pris dans son intérieur, θ variera de o à 2π; par chaque point du plan il passera deux podaires et l'on pourra mener deux tangentes à la courbe.

D'après la valeur précédente de $d\sigma$, on aura

$$\int \frac{d\sigma}{c}\left(\frac{\sin\alpha}{t} + \frac{\sin\alpha_1}{t_1}\right) = 2\pi^2,$$

l'intégrale s'étendant à tous les éléments des plans extérieurs à la

courbe, et t, t_1 étant les longueurs des tangentes menées par un point de l'élément $d\sigma$ à la courbe, et α, α_1 les angles que les directions de ces tangentes font avec la ligne qui joint l'élément $d\sigma$ au point θ.

5. On peut déduire de l'expression (3) de $d\sigma$ une autre intégrale plus curieuse. On en tire

$$\frac{d\sigma \sin^2\alpha}{t} = c \sin\alpha \, d\alpha \, d\theta.$$

Or $c \sin\alpha$ est la distance du point O à la tangente TM, que nous avons désigné par $f(\theta)$; et l'on a par un théorème connu

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = \mathrm{L},$$

L étant la longueur totale de la courbe fermée. Donc

$$\int d\alpha \left(\frac{\sin^2\alpha}{t} + \frac{\sin^2\alpha_1}{t_1} \right) = \pi \mathrm{L},$$

l'intégrale s'étendant, comme précédemment, à tous les éléments du plan extérieur de la courbe. Cette dernière est indépendante de la position du point O pris dans l'intérieur de la courbe.