

# THÈSES D'ORSAY

TAMAS SZAMUELY

**Sur la théorie des corps de classes pour les variétés sur les corps  $p$ -adiques**

*Thèses d'Orsay*, 1998

[<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11\\_1998\\_\\_0531\\_\\_P0\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1998__0531__P0_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses d'Orsay » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



NUMDAM

*Thèse numérisée par la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016  
et diffusée dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>*

63875

ORSAY

N° d'ordre : 5347

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD

Centre d'ORSAY

# THÈSE

présentée  
pour obtenir

Le grade de Docteur en Sciences  
Spécialité : Mathématiques

par

Tamás SZAMUELY

Sujet : Sur la théorie des corps de classes pour les variétés sur les corps  
 $p$ -adiques

Soutenue le 8 juillet 1998 devant la commission d'examen :

|     |                            |           |
|-----|----------------------------|-----------|
| MM. | Luc ILLUSIE                | Président |
|     | Jean-Benoît BOST           |           |
|     | Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE |           |
|     | Bruno KAHN                 |           |
|     | Christophe SOULÉ           |           |

Au vu des rapports de :

|     |             |
|-----|-------------|
| MM. | Uwe JANNSEN |
|     | Bruno KAHN  |



## REMERCIEMENTS

Qui d'autre pourrais-je remercier en premier lieu que Jean-Louis Colliot-Thélène? Il a été bien plus pour moi qu'un directeur de thèse, toujours prêt à me soutenir à des moments difficiles, toujours attentif à mes idées les moindres, toujours prêt à me fournir des explications sur une question qui a éveillé mon intérêt, fût-ce un point délicat en cohomologie étale ou une subtilité de la langue ou de la bureaucratie françaises. Je reste émerveillé par l'énergie qu'il sait déployer quand il s'agit de s'attaquer à un problème et par sa générosité dont il ne cesse de témoigner envers moi depuis le moment où il a appris mon existence.

L'usage veut que les membres du jury soient remerciés ensuite, mais dans ce cas-là, il n'est pas question d'une simple formule protocolaire. Tout d'abord parce que son président, Luc Illusie, était celui qui, conjointement avec Michel Raynaud, m'a initié à la géométrie algébrique. Ils ont profondément influencé ma vision des mathématiques et je les en remercie de tout coeur. J'ai ensuite le plaisir de saluer parmi les membres du jury Jean-Benoît Bost, Bruno Kahn et Christophe Soulé, qui ont été parmi les principaux intervenants d'un séminaire tenu à l'Ecole polytechnique où j'ai fait la connaissance de la cohomologie motivique, sans avoir soupçonné à l'époque qu'elle serait utilisée de façon essentielle dans le présent travail. Bruno Kahn a également assumé la tâche ingrate du rapporteur, tout comme Uwe Jannsen, que je remercie pour l'intérêt qu'il a manifesté envers mon travail et les discussions intéressantes que nous avons eues à Cambridge.

Je considère comme une chance exceptionnelle d'avoir pu bénéficier pendant quatre ans de l'environnement particulièrement stimulant de l'Université de Paris-Sud, et je voudrais exprimer ici ma reconnaissance envers mes collègues et amis de l'Equipe d'Arithmétique et Géométrie Algébrique pour tout ce qu'ils m'ont appris pendant ces quatre ans – en salle de séminaire, au bureau ou à table. Je n'oublie pas non plus l'aide précieuse de Mmes Bonnardel et Le Bronnec.

Du côté matériel, je tiens à signaler que mon séjour en France a été rendu possible pendant les trois premières années par une bourse du Gouvernement Français et que la majeure partie de ce travail a été rédigée lors d'un séjour très enrichissant à l'Institut Isaac Newton de Cambridge, que je remercie pour son hospitalité.

Enfin, pour terminer sur une corde nostalgique, j'ai une pensée pour Mme Révaï, ma toute première institutrice, qui m'a offert, à l'âge de six ans, un cadeau de Noël "pour ma diligence en Mathématiques".

ABSTRACT. — Let  $X$  be a smooth, proper, geometrically integral variety defined over a  $p$ -adic field  $k$ . In this thesis we study the kernel of the reciprocity map  $SK_1(X) \rightarrow \pi_1^{ab}(X)$  of the class field theory of  $X$  as introduced by S. Saito. Assuming that for a prime  $l$  the cohomological symbol  $K_3(F)/l^n \rightarrow H^3(F, \mu_{l^n}^{\otimes 3})$  is bijective when  $F$  is a field of cohomological dimension 4 (a very special case of a conjecture of Bloch and Kato which is known for  $l = 2$ ), we show that  $\phi_X$  is injective on the  $l$ -primary torsion in  $SK_1(X)$  if  $l$  is prime to  $p$  and if  $X$  is a surface whose second  $l$ -adic cohomology group  $H^2(X, \mathbb{Q}_l)$  is trivial – so in particular if  $X$  has potentially good reduction. In higher dimensions, we derive the same assertion from a special case of another conjecture of Kato in the case of varieties with good reduction. We also obtain some finiteness results for the torsion subgroup of  $SK_1(X)$ . The proofs exploit the theory of motivic complexes constructed by Voevodsky. In a second part, we prove the injectivity of  $\phi_X \otimes \mathbb{Z}/n$  for any  $n$  in the case when  $X$  is a conic fibration over an arbitrary smooth proper curve. The method is more elementary and the result, which is unconditional this time, holds without restrictions on the reduction of the surface.

## TABLE DES MATIÈRES

|                           |          |
|---------------------------|----------|
| <b>Introduction .....</b> | <b>3</b> |
|---------------------------|----------|

### **Première partie: Sur la théorie des corps de classes pour les variétés sur les corps $p$ -adiques**

|                                                         |    |
|---------------------------------------------------------|----|
| 1. Introduction .....                                   | 13 |
| 2. Grandes lignes de la démonstration du théorème.....  | 16 |
| 3. Excursion motivique.....                             | 20 |
| 4. Démonstration du Zusatz 1.4 .....                    | 27 |
| 5. Résultats de finitude pour $SK_1$ de surfaces .....  | 29 |
| Appendice: Lien avec la $\mathcal{K}$ -cohomologie..... | 37 |
| Bibliographie .....                                     | 39 |

### **Deuxième partie: Sur la loi de réciprocité pour une surface fibrée en coniques définie sur un corps local**

|                                                        |    |
|--------------------------------------------------------|----|
| 1. Le résultat.....                                    | 45 |
| 2. Réduction au cas d'une fibration $C$ -minimale..... | 46 |
| 3. Démonstration de la proposition 1 .....             | 47 |
| 4. Démonstration de la proposition 2 .....             | 48 |
| Bibliographie .....                                    | 50 |

### **Annexe: Une loi de réciprocité de Kato pour les anneaux locaux de dimension 2**

|                                                      |    |
|------------------------------------------------------|----|
| 1. Énoncés.....                                      | 55 |
| 2. Préparation .....                                 | 56 |
| 3. Toujours préparation, mais à la Weierstrass ..... | 59 |
| 4. Réductions .....                                  | 60 |
| 5. Conclusion .....                                  | 63 |
| Bibliographie .....                                  | 65 |



## INTRODUCTION

### Définitions

Soient  $k$  un corps  $p$ -adique (i. e. une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ ), et  $X$  une variété propre, lisse, géométriquement intègre définie sur  $k$ . L'objet d'étude de la théorie des corps de classes pour  $X$ , comme introduite dans les travaux de S. Bloch, K. Kato et S. Saito (I [3], [16], [22], [23])\* est le groupe  $SK_1(X)$  obtenu comme le conoyau d'un morphisme

$$\partial_X : \bigoplus_{y \in X_1} K_2 k(y) \rightarrow \bigoplus_{x \in X_0} K_1 k(x)$$

(où  $X_i$  veut dire les points de dimension  $i$  de  $X$  et  $k(y)$  note le corps résiduel du point  $y$ ), que l'on peut percevoir de deux façons équivalentes :

- il est défini par la théorie de localisation en  $K$ -théorie de Quillen ; ou bien, de manière plus terre-à-terre,
- il est défini comme la somme des morphismes suivants attachés aux divers points  $y$  dans  $X_1$  : on prend le normalisé de l'adhérence de  $y$  dans  $X$  ; c'est une courbe propre, lisse, de corps des fractions  $k(y)$  ; un point fermé  $\tilde{x}$  de la courbe induit une valuation sur ce corps ; d'où un symbole modéré vers le groupe multiplicatif du corps résiduel de  $\tilde{x}$  (ce qui n'est autre que  $K_1(k(\tilde{x}))$ ), que l'on peut ensuite composer avec la norme vers le corps résiduel du point fermé  $x$  de  $X$  au-dessous de  $\tilde{x}$ .

L'équivalence de ces deux constructions a été vérifiée par Gillet (cf. II [5]).

Le groupe  $SK_1(X)$  étant défini, on considère un morphisme

$$\phi_X : SK_1(X) \rightarrow \pi_1^{ab}(X),$$

appelé application de réciprocité, où  $\pi_1^{ab}(X)$  est l'abélianisé du groupe fondamental étale de  $X$ .

D'où vient l'intérêt de définir une telle application  $\phi_X$  ? Pour en donner la motivation, supposons pour le moment que la variété  $X$  ait bonne réduction, de fibre spéciale lisse  $Y$ . La réponse est alors donnée par le fait que l'application  $\phi_X$ , que l'on construira plus bas, fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} SK_1(X) & \xrightarrow{\phi_X} & \pi_1^{ab}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ CH_0(Y) & \xrightarrow{\rho_Y} & \pi_1^{ab}(Y) \end{array}$$

---

\* Les chiffres romains devant les références bibliographiques de cette introduction renvoient à la bibliographie de la partie correspondante de la thèse.



Ici, le morphisme vertical de droite est la spécialisation du groupe fondamental, et celui de gauche est également un morphisme de spécialisation, construit de façon similaire à la deuxième définition de  $\partial_X$  ; pour le voir clairement, il convient de présenter  $CH_0(Y)$ , le groupe de Chow des zéro-cycles de  $Y$ , comme le conoyau du morphisme induit par les flèches diviseurs

$$\bigoplus_{y \in Y_1} K_1 k(y) \rightarrow \bigoplus_{x \in Y_0} K_0 k(x).$$

Enfin, le morphisme  $\rho_Y$  est l'application de réciprocité de la théorie des corps de classes non ramifiée introduite par Lang au milieu des années cinquante : elle associe à un point fermé de  $Y$  la classe de ses Frobenius dans le groupe fondamental abélianisé ; le fait que cette application passe au quotient par l'équivalence rationnelle est assurée par la loi de réciprocité de la théorie des corps de classes globale classique pour les corps de fonctions.

L'application de réciprocité  $\phi_X$  se spécialise donc en celle de Lang pour une variété avec bonne réduction ; d'autre part, on va voir que dans le cas du point, elle se réduit à la théorie des corps de classes locale. En voici maintenant deux constructions, pour une variété  $X$  avec réduction quelconque.

*Première construction.* Elle imite la construction de  $\rho_Y$ , rendant la commutativité du diagramme ci-dessus évident : pour  $x$  un point fermé de  $X$ , on envoie le groupe multiplicatif du corps résiduel  $k(x)$  dans l'abélianisé de son groupe de Galois absolu par la théorie des corps de classes locale et on pousse l'image dans  $\pi_1^{ab}(X)$  par fonctorialité du groupe fondamental. Pour assurer que cette application passe au quotient et induit un morphisme au niveau de  $SK_1(X)$ , on doit de nouveau démontrer une loi de réciprocité convenable, pour laquelle on se réfère à l'article de Saito (I [22]).

Toutefois, dans la majeure partie de cette thèse nous travaillerons avec une autre construction, plus technique mais plus maniable, qui nécessite quelques rappels.

RAPPEL A. — Rappelons que pour un entier positif  $n$  fixé, il existe un symbole cohomologique définissant, pour tout corps  $F$  dans lequel  $n$  est inversible et tout entier naturel  $i$ , un homomorphisme

$$K_i^M(F)/n \rightarrow H^i(F, \mu_n^{\otimes i})$$

(où  $K_i^M$  est le  $i$ -ième  $K$ -groupe de *Milnor*) par cup-produit à partir du bord de la suite de Kummer associée au nombre  $n$ . Une conjecture, le plus souvent attribuée à Bloch et Kato, prédit que c'est toujours un isomorphisme.

Voici les cas où la conjecture est connue actuellement : c'est classique pour  $i = 1$  ; pour  $i = 2$ , c'est le théorème célèbre de Merkuriev et Sousline, et enfin pour  $l = 2$ ,  $i$  quelconque cela a été démontré récemment par Voevodsky (le cas particulier  $i = 3$ , que nous utiliserons principalement, avait toutefois été établi antérieurement par Merkuriev/Sousline et Rost).

Pour les références ultérieures, faisons la convention suivante. Nous dirons qu'un corps  $F$  satisfait à  $BK(i, l)$  si la conjecture de Bloch et Kato est vraie pour la  $i$ -ième  $K$ -groupe de Milnor de  $F$ , quand l'entier  $n$  figurant dans la définition ci-dessus une puissance de  $l$ .

D'autre part, la théorie de Bloch et Ogus (I [5]) enseigne que l'on peut attacher à  $X$  certains complexes de groupes abéliens provenant de la théorie de la localisation en cohomologie étale sur  $X$ . On va les rappeler dans notre situation.

RAPPEL B. — Pour un entier positif  $n$  inversible sur  $X$ , il existe, pour tout couple d'entiers positifs  $(i, q)$  des complexes

$$C_{n,X}^{q,i} : \quad \dots \rightarrow \bigoplus_{x \in X_{j+1}} H^{q+j+1}(\kappa(x), \mu_n^{\otimes i+j+1}) \rightarrow \bigoplus_{x \in X_j} H^{q+j}(\kappa(x), \mu_n^{\otimes i+j}) \rightarrow \dots$$

de groupes de cohomologie étale. Par passage à la limite inductive suivant les puissances d'un nombre premier  $l$  fixé, on peut encore noter les complexes obtenus par  $C_{l^\infty, X}^{q,i}$ .

D'après Bloch et Ogus, ces complexes sont fournis, pour  $i$  fixé, par des suites spectrales

$$E_1^{s,t} = \bigoplus_{x \in X_{d-s}} H^{t-s}(\kappa(x), \mu_n^{\otimes i+d-s}) \Rightarrow H^{s+t}(X, \mu_n^{\otimes i+d})$$

où  $d$  est la dimension de  $X$  et on a fait le changement de variable  $t = d + q$ . Leur théorème principal identifie les termes  $E_2^{s,t}$  de cette suite spectrale (donc l'homologie des complexes  $C_{n,X}^{q,i}$ ) aux groupes de cohomologie de Zariski  $H_{Zar}^s(X, \mathbf{R}^t \pi_* \mu_n^{\otimes i+d})$ , où  $\pi$  est le morphisme de changement de site  $X_{\acute{e}t} \rightarrow X_{Zar}$ .

Signalons d'autre part que quand  $X$  a bonne réduction, un cas particulier d'une conjecture de Kato prédit l'exactitude du complexe  $C_{n,X}^{2,1}$ . Nous aurons besoin d'une forme plus faible de cette conjecture pour l'un de nos résultats.

Après ces rappels, on peut donner la

*Deuxième construction de l'application de réciprocité.* Le groupe  $\pi_1^{ab}(X)$  étant un groupe profini, il nous suffira de construire des morphismes compatibles  $SK_1(X) \rightarrow \pi_1^{ab}(X)/n$  pour tout entier positif  $n$ , après quoi on passera à la limite projective. Vu le théorème de Merkuriev et Sousline, le symbole cohomologique induit un morphisme

$$SK_1(X) \rightarrow \text{coker} \left( \bigoplus_{x \in X_1} H^2(k(x), \mu_n^{\otimes 2}) \rightarrow \bigoplus_{x \in X_0} H^1(k(x), \mu_n) \right).$$

Mais ce dernier groupe n'est autre que l'homologie en degré  $d$  du complexe  $C_{n,X}^{1,1}$ , donc, par la théorie de Bloch et Ogus, il s'identifie au groupe de cohomologie de Zariski  $H_{Zar}^d(X, \mathbf{R}^{d+1} \pi_* \mu_n^{\otimes d+1})$ . En composant avec le bord de la suite spectrale  $E_2^{s,t}$ , on obtient donc un morphisme

$$\phi_{X,n} : SK_1(X) \rightarrow H_{\acute{e}t}^{2d+1}(X, \mu_n^{\otimes d+1}).$$

Enfin, le deuxième groupe est dual du groupe de cohomologie étale  $H^1(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  par la combinaison des dualités de Tate et de Poincaré (cf. le Rappel 2.1 de la Première Partie), groupe qui est lui-même dual du groupe  $\pi_1^{ab}(X)/n$ .

A notre connaissance, la première construction de  $\phi_X$  apparaît pour la première fois dans l'article de Saito sur le cas des courbes (I [22]), et la deuxième, également dans le cas des courbes, dans le travail de Bloch (I [3]). Nous avons suivi ici la présentation de W. Raskind (I [21]) qui a également vérifié l'équivalence de ces deux constructions.

### Énoncé des résultats

Le but de la théorie des corps de classes pour  $X$  est de décrire le noyau et l'image de l'application de réciprocité  $\phi_X$ . Pour se donner une idée de ce qu'on peut espérer, rappelons d'abord les résultats sur l'application de réciprocité  $\rho_Y$  de Lang pour une variété propre et lisse  $Y$  définie sur un corps fini  $\mathbb{F}$ .

Il convient de considérer le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_0(Y) & \longrightarrow & CH_0(Y) & \xrightarrow{\deg} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \rho_Y & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \pi_1^{ab, geom}(Y) & \longrightarrow & \pi_1^{ab}(Y) & \longrightarrow & Gal(\overline{\mathbb{F}} | \mathbb{F}) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

où  $A_0(Y)$  est le groupe des zéro-cycles de degré zéro sur  $Y$  modulo l'équivalence rationnelle et  $\pi_1^{ab, geom}(Y)$  est la partie géométrique du groupe fondamental abélianisé de  $Y$ . Déjà Lang connaissait la surjectivité du morphisme vertical de gauche; par contre, l'image de celui de droite est seulement dense car  $Gal(\overline{\mathbb{F}} | \mathbb{F}) \cong \hat{\mathbb{Z}}$ . D'autre part, l'injectivité du morphisme vertical de gauche n'a été démontré que trente ans plus tard par Kato/Saito et Colliot-Thélène/Sansuc/Soulé dans le cas des surfaces (le cas difficile), puis par Colliot-Thélène en général (pour  $Y$  projective).

Revenant à notre variété  $X$  sur un corps  $p$ -adique, on peut s'attendre en voyant ces résultats à ce que dans le cas de bonne réduction, l'image de  $\phi_X$  soit dense. Kato et Saito ont démontré (cf. I [21], [22], [23]) que c'est bien le cas et ils ont également donné une description du conoyau (topologique) de  $\phi_X$  dans le cas semi-stable en termes de la combinatoire de la fibre spéciale.

Par rapport à ces résultats avancés, bien peu de choses étaient connues sur le noyau de  $\phi_X$ . Déjà, on ne peut pas espérer la trivialité de ce noyau car, contrairement à la situation sur les corps finis, le groupe  $SK_1(X)$  pourrait admettre une large partie divisible. Une question raisonnable serait plutôt de se demander si le noyau de  $\phi_X$  est toujours uniquement divisible, i. e. un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel. Dans le cas des courbes, Saito a démontré la divisibilité du noyau; ce qui, joint à un résultat de finitude de Colliot-Thélène et Raskind (cf. I [10]) implique l'unique divisibilité première à  $p$  dans le cas de bonne réduction, et, par un théorème non publié de T. Sato, pour les courbes de genre 1.

Dans cette thèse, nous établissons des résultats concernant l'unique divisibilité du noyau pour des variétés de dimension au moins 2. Comme dans le cas des variétés sur les

corps finis, on peut restreindre l'attention au noyau  $V(X)$  de la norme  $SK_1(X) \rightarrow k^\times$  (il existe alors un diagramme commutatif avec des propriétés analogues à celui pour  $\rho_Y$  grâce à la théorie des corps de classes locale). Comme il est connu que le groupe  $V(X)$  est extension d'un groupe de torsion par un groupe divisible\* et que son image dans  $\pi_1^{ab}(X)$  est finie (résultats dus à Bloch, Kato et Saito), l'unique  $l$ -divisibilité du noyau de  $\phi_X$  pour un nombre premier  $l$  est une conséquence de l'injectivité de  $\phi_X$  sur la torsion  $l$ -primaire de  $SK_1(X)$ .

Le théorème principal de cette thèse est maintenant le suivant.

**THÉORÈME 1.** — *Soit  $X$  une variété propre, lisse, géométriquement intègre, de dimension  $d$  sur un corps  $p$ -adique  $k$  et fixons un nombre premier  $l$  différent de la caractéristique résiduelle de  $k$ . Supposons que l'hypothèse **BK**(3,  $l$ ) soit satisfaite par les corps résiduels des points de dimension 2 de  $X$ .*

*Alors la restriction de l'application de réciprocité  $\phi_X$  à la torsion  $l$ -primaire de  $SK_1(X)$  est injective dans chacun des cas suivants.*

- (1)  *$X$  est de dimension au plus 2 et le groupe de cohomologie  $l$ -adique  $H^2(X, \mathbb{Q}_l)$  est trivial.*
- (2)  *$X$  a bonne réduction et le complexe  $C_{l^\infty, X}^{2,1}$  introduit au précédent chapitre est exact en degré  $d - 3$  (i.e. au terme faisant intervenir une somme indexée par les points de dimension 3).*

Voici quelques remarques à propos du théorème.

- 1) Comme on l'a rappelé au chapitre précédent, l'exactitude du complexe  $C_{l^\infty, X}^{2,1}$  dans le cas de bonne réduction est une conjecture (difficile) de Kato.
- 2) On a vu que le cas des courbes était essentiellement connu avant. Mais en utilisant le théorème de Merkuriev-Sousline/Rost (cf. Rappel A du chapitre précédent), on obtient un théorème nouveau et inconditionnel sur la torsion 2-primaire dans  $SK_1$  de surfaces satisfaisant à  $H^2(X, \mathbb{Q}_2) = 0$ .
- 3) La condition  $H^2(X, \mathbb{Q}_l) = 0$  est satisfaite, par exemple, par les variétés avec potentiellement bonne réduction ou par celles avec  $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$  et dont la variété de Picard a bonne réduction (Zusatz 1.4 dans la Première partie).
- 4) Comme il est connu que la torsion  $l$ -primaire de  $\pi_1^{ab}(X)$  est finie, on obtient la finitude de la torsion  $l$ -primaire de  $SK_1(X)$  pour  $X$  satisfaisant aux hypothèses du théorème.

L'ingrédient principal dans la démonstration du Théorème 1 est l'identification du groupe  $SK_1(X)$  avec le groupe d'hypercohomologie de Zariski  $H_{Zar}^{2d+1}(X, \mathbb{Z}(d+1))$ , où  $\mathbb{Z}(d+1)$  est l'un des complexes motiviques introduits récemment par Voevodsky. Dans cette interprétation, l'application de réciprocité est donnée par ce qu'on appellera le "symbole cohomologique de Sousline-Voevodsky". L'utilisation de la théorie de Voevodsky explique pourquoi l'on doit se borner au cas d'un corps de base de caractéristique zéro; en fait, la résolution des singularités est cachée dans un coin.

---

\* Pour être précis, c'est connu seulement si  $X$  est projective. Rajoutons donc cette hypothèse ici.

Supposons désormais que  $X$  soit une surface. Dans ce cas, nous avons encore d'autres résultats qui ne dépendent pas de la réduction de  $X$  ; en revanche, ils ne sont pas aussi puissants. De fait, coupons la question de l'unique  $l$ -divisibilité (pour  $l \neq p$ ) du noyau de  $\phi_X$  en deux, à savoir :

**Question 1.** *La torsion  $l$ -primaire de  $SK_1(X)$  est-elle finie ?*

**Question 2.** *Le noyau de  $\phi_X$  est-il  $l$ -divisible ?*

Il est clair qu'une réponse affirmative à ces deux questions entraîne l'unique  $l$ -divisibilité du noyau de  $\phi_X$ .

Voici les cas non couverts par le Théorème 1 où nous pouvons répondre à la **Question 1** par l'affirmative. Les résultats dépendront toujours de l'hypothèse **BK**(3,  $l$ ), mais rappelons une fois de plus que nous obtiendrons ainsi des théorèmes définitifs pour  $l = 2$ .

**THÉORÈME 2.** — *Soit  $X$  une surface propre, lisse, géométriquement intègre sur un corps  $p$ -adique  $k$  et supposons que son corps de fonctions vérifie **BK**(3,  $l$ ) pour un  $l$  différent de  $p$ . Alors*

- a) *La torsion  $l$ -primaire de  $SK_1(X)$  est toujours de cotype fini.*
- b) *Si  $H^1(X, O_X) = 0$  (ou plus généralement, si la variété d'Albanese de  $X$  a bonne réduction), alors la torsion  $l$ -primaire de  $SK_1(X)$  est finie.*
- c) *Si  $H^1(X, O_X) \neq 0$ , mais  $H^2(X, O_X) = 0$ , la classification de Castelnuovo-Enriques permet de supposer que l'image de  $X$  par l'application d'Albanese soit une courbe propre lisse  $C$ . Alors si la torsion  $l$ -primaire de  $SK_1(C)$  est finie, la même chose est vraie pour  $SK_1(X)$ .*

La finitude de la torsion  $l$ -primaire dans  $SK_1(C)$  reste une conjecture ouverte pour une courbe propre lisse  $C$  quelconque. Pourtant, à part les cas couverts par le th. 1, c'est connu pour les courbes de genre 1 par le travail déjà cité de T. Sato, ce qui fournit des exemples où le cas c) donne de nouveaux résultats définitifs.

Passons maintenant à la **Question 2**. Là nous avons une réponse affirmative et inconditionnelle pour une classe particulière de surfaces. Notamment :

**THÉORÈME 3.** — *Supposons qu'il existe un morphisme propre surjectif  $X \rightarrow C$ , où  $C$  est une courbe propre, lisse, géométriquement intègre définie sur  $k$ , dont la fibre générique est une conique lisse. Alors pour tout entier positif  $n$ , l'application*

$$\phi_{X,n} : SK_1(X)/n \rightarrow \pi_1^{ab}(X)/n$$

*est injective.*

Le théorème implique la divisibilité du noyau par un argument de passage à la limite qui utilise la finitude de l'image de  $V(X)$  (cf. I [22], p. 72). Sa démonstration est beaucoup plus élémentaire que celle du th. 1 ; en particulier, elle n'utilise pas la théorie de Voevodsky et reste donc valable sur un corps local  $k$  quelconque pour  $n$  inversible dans

*k*. La technique adoptée ici est l'étude explicite des fibres, reposant sur des résultats de Merkuriev et autres sur la  $K$ -théorie des algèbres de quaternions.

Ce résultat est également intéressant d'un autre point de vue. On peut notamment comparer l'application de réciprocity  $\phi_X$  à l'application cycle  $c_{X,n} : CH_0(X)/n \rightarrow H^4(X, \mu_n^{\otimes 2})$  du groupe de Chow des zéro-cycles vers la cohomologie étale. On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} CH_0(X)/n & \xrightarrow{c_{X,n}} & H^4(X, \mu_n^{\otimes 2}) \\ \downarrow \cup \alpha/n & & \downarrow \cup d\alpha \\ SK_1(X)/n & \xrightarrow{\phi_{X,n}} & H^5(X, \mu_n^{\otimes 3}) \cong \pi_1^{ab}(X)/n \end{array}$$

où l'isomorphisme est donné par la combinaison des dualités de Tate et de Poincaré. Ici,  $\alpha$  est la classe d'une constante dans  $H^0(X, \mathbb{G}_m)$ ,  $d$  le bord de la suite de Kummer associée à la multiplication avec  $n$  et à gauche nous avons un cup-produit en cohomologie motivique que nous pouvons considérer de façon plus terre-à-terre comme l'opération de "mettre la même fonction constante au-dessus de chaque point". Le diagramme dépend bien sûr du choix de la constante  $\alpha$ , mais il commute avec chaque choix, et on peut d'ailleurs considérer des diagrammes analogues en dimension quelconque.

Revenons maintenant au cas d'une surface fibrée en coniques. Parimala et Suresh ont étudié l'application cycle  $c_{X,n}$  sur de telles surfaces (cf. II, [10]) et ont trouvé un exemple où elle admet un noyau non trivial pour  $n = 2$ . En revanche, ce n'est pas le cas pour l'application de réciprocity  $\phi_{X,n}$  en vertu du Théorème 2! Le diagramme ci-dessus implique donc le fait surprenant que le cup-produit de l'obstruction de Parimala et Suresh avec la classe d'une constante est toujours trivial.

Pour terminer, indiquons le contenu des diverses parties de la thèse. La première contient la démonstration des Théorèmes 1 et 2. La deuxième partie, indépendante de la première, est consacrée au Théorème 3. Enfin, nous avons reproduit dans une annexe un article d'exposition publié en 1997 dans la revue suisse *L'Enseignement Mathématique* (vol. 43, pp. 77-91) qui donne pour la première fois une démonstration complète d'une loi de réciprocity due à Kato intervenant dans la théorie des corps de classes globale des schémas arithmétiques.

Orsay, le 23 avril 1998

Tamás Szamuely



## PREMIÈRE PARTIE :

Sur la théorie des corps de classes  
pour les variétés sur les corps  $p$ -adiques





# SUR LA THÉORIE DES CORPS DE CLASSES POUR LES VARIÉTÉS SUR LES CORPS $p$ -ADIQUES

Tamás Szamuely (Orsay)

## 1. INTRODUCTION

Soit  $k$  un corps  $p$ -adique, i. e. une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ , et soit  $X$  une variété propre, lisse, géométriquement intègre définie sur  $k$ . La théorie des corps de classes pour  $X$ , introduite dans les travaux de Bloch, Kato et Saito, (cf. [3], [16], [21], [23]) étudie le groupe

$$SK_1(X) := \operatorname{coker}\left(\bigoplus_{x \in X_1} K_2 k(x) \rightarrow \bigoplus_{x \in X_0} K_1 k(x)\right)$$

(où  $X_i$  veut dire les points de dimension  $i$  de  $X$  et le morphisme est induit par le symbole modéré) ainsi qu'une application de réciprocité, à valeurs dans l'abélianisé du groupe fondamental étale de  $X$  :

$$\phi_X : SK_1(X) \rightarrow \pi_1^{ab}(X).$$

Cette application de réciprocité généralise celle de la théorie des corps de classes locale (cas du point), et, pour une variété avec bonne réduction, se spécialise modulo  $p$  (via les résidus en  $K$ -théorie de Milnor) en celle définie par Lang [17] pour une variété propre lisse sur un corps fini. Il y a plusieurs façons équivalentes de la définir; une construction sera rappelée plus tard.

Des travaux de Saito (cf. [21], [22], [23]) ont permis d'obtenir des résultats satisfaisants sur l'image de  $\phi_X$ , mais son noyau, ainsi que la structure du groupe  $SK_1(X)$  sont encore loin d'être bien compris. Notre contribution concerne ces dernières questions.

Pour pouvoir énoncer les résultats, nous sommes obligés de faire une petite digression.

**RAPPEL 1.1.** — Pour un entier positif  $n$  fixé, il existe un symbole cohomologique définissant, pour tout corps  $F$  dans lequel  $n$  est inversible et tout entier naturel  $i$ , un homomorphisme

$$K_i^M(F)/n \rightarrow H^i(F, \mu_n^{\otimes i})$$

(où  $K_i^M$  est le  $i$ -ième  $K$ -groupe de Milnor) par cup-produit à partir du bord de la suite de Kummer associée au nombre  $n$ . Une conjecture, le plus souvent attribuée à Bloch et Kato, prédit que c'est toujours un isomorphisme.

Voici l'état de l'art concernant cette conjecture. Pour  $i = 1$ , c'est classique (Kummer, Hilbert, Noether) et pour  $i = 2$  elle a été démontrée par Merkuriev et Sousline [18]. Ces auteurs ont également démontré dans [19] (indépendamment de M. Rost, qui n'a pas publié sa démonstration) le cas  $i = 3$ ,  $l = 2$ . Dans cet article, nous travaillerons pratiquement toujours en supposant que le cas  $i = 3$  soit connu (du moins pour certains corps) pour  $l$  quelconque, faisons donc une

**CONVENTION.** *Nous dirons qu'un corps  $F$  satisfait à l'hypothèse  $BK(i, l)$  si la conjecture de Bloch et Kato est vraie pour le  $i$ -ième  $K$ -groupe de Milnor de  $F$ , quand l'entier  $n$  figurant dans la définition ci-dessus est une puissance de  $l$ .*

En fait, pour  $i > 2$  seule la surjectivité du symbole cohomologique sera utilisée lors des démonstrations. Signalons enfin que le cas  $l = 2$ ,  $i$  quelconque a été récemment démontré par Voevodsky [38]. Nous n'aurons pas besoin de ce résultat, mais en revanche, nous nous servirons de plusieurs techniques importantes intervenant dans sa démonstration.

Notre deuxième rappel concerne une (autre) conjecture de Kato.

RAPPEL 1.2. — Dans son article fondamental [16], Kato a défini un complexe de groupes abéliens

$$C_{n,S}^{q,i} : \quad \dots \rightarrow \bigoplus_{x \in S_{j+1}} H^{q+j+1}(\kappa(x), \mu_n^{\otimes i+j+1}) \rightarrow \bigoplus_{x \in S_j} H^{q+j}(\kappa(x), \mu_n^{\otimes i+j}) \rightarrow \dots$$

où  $i, j, q$  sont des entiers positifs,  $S$  est n'importe quel schéma excellent et  $n$  inversible sur  $S$ . (On ignore les questions de  $p$ -torsion dans cet article; voir la Remarque 4.2 (2) pourquoi.) Ce complexe généralise le complexe de Bloch-Ogus pour une variété lisse sur un corps. Pour un schéma régulier propre et plat sur l'anneau des entiers  $O_k$  d'un corps  $p$ -adique  $k$ , avec fibre générique lisse  $X$  et fibre spéciale  $Y$ , les morphismes résidus pour la cohomologie étale d'un anneau de valuation discrète induisent un morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccc} C_{n,X}^{2,1} & : & \dots \rightarrow \bigoplus_{x \in X_{j+1}} H^{j+3}(\kappa(x), \mu_n^{\otimes j+2}) \rightarrow \bigoplus_{x \in X_j} H^{j+2}(\kappa(x), \mu_n^{\otimes j+1}) \rightarrow \dots \\ & & \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ C_{n,Y}^{1,0(-)} & : & \dots \rightarrow \bigoplus_{x \in Y_{j+1}} H^{j+2}(\kappa(x), \mu_n^{\otimes j+1}) \rightarrow \bigoplus_{x \in Y_j} H^{j+1}(\kappa(x), \mu_n^{\otimes j}) \rightarrow \dots \end{array}$$

où les différentielles dans le diagramme du bas ont un signe opposé à celles de  $C_{n,Y}^{1,0}$ . Concernant ce morphisme, Kato espère :

CONJECTURE ( $K_n$ ) (=Conjecture 5.1 de [16]). — *Le morphisme  $C_{n,X}^{2,1} \rightarrow C_{n,Y}^{1,0(-)}$  du diagramme est un quasi-isomorphisme de complexes.*

Fixons un nombre premier  $l \neq p$  et notons  $C_{l^\infty,X}^{2,1}$  (resp.  $C_{l^\infty,X}^{1,0}$ ) le complexe obtenu par passage à la limite inductive suivant  $n$  à partir des complexes  $C_{l^n,X}^{2,1}$  (resp.  $C_{l^n,X}^{1,0}$ ). Alors on peut énoncer la conjecture sous la forme plus faible :

CONJECTURE ( $K_{l^\infty}$ ). — *Le morphisme  $C_{l^\infty,X}^{2,1} \rightarrow C_{l^\infty,Y}^{1,0(-)}$  obtenu à la limite à partir de celui du diagramme est un quasi-isomorphisme de complexes.*

On dira que la conjecture ( $K_{l^\infty}$ ) est vraie en degré  $i$  si le morphisme de complexes en question induit un isomorphisme sur la  $i$ -ième homologie. (Ici, on adopte la convention, différente de celle de Kato, selon laquelle le terme en degré  $i$  du complexe est celui faisant intervenir une somme indexée par des points de codimension  $i$ .)

Notre résultat principal s'énonce maintenant comme suit.

**THÉOREME.** — Soit  $X$  une variété propre, lisse, géométriquement intègre, de dimension  $d$  sur un corps  $p$ -adique  $k$  et fixons un nombre premier  $l$  différent de  $p$ . Supposons que les corps résiduels des points de dimension 2 vérifient **BK**(3,  $l$ ).

Alors la restriction de l'application de réciprocité  $\phi_X$  à la torsion  $l$ -primaire de  $SK_1(X)$  est injective dans chacun des cas suivants.

- (1)  $X$  a bonne réduction et la conjecture  $(K_{l^\infty})$  de Kato est vérifiée en degré  $d - 3$ .
- (2)  $X$  est de dimension au plus 2 et le groupe de cohomologie  $l$ -adique  $H^2(X, \mathbb{Q}_l)$  est trivial.

Le cas des courbes était connu avant, du moins dans le cas de bonne réduction (combinaison [22], Lemma 5.3 avec [10], Proposition 4.6 b)). Mais le théorème fournit un résultat nouveau et inconditionnel pour la torsion 2-primaire dans  $SK_1$  d'une surface.

Le théorème admet la conséquence suivante concernant le noyau  $V(X)$  de la norme  $SK_1(X) \rightarrow k^\times$ , étudié pour la première fois par Bloch [3] :

**COROLLAIRE 1.3.** — Supposons que  $X$  est soit variété projective satisfaisant aux hypothèses du Théorème, et supposons que les corps résiduels de ses points de dimension 2 vérifient **BK**(3,  $l$ ) pour tout  $l \neq p$ . Alors le groupe  $V(X)$  est extension d'un groupe fini par un groupe **uniquement divisible** premier à  $p$ .

En effet, la torsion  $l$ -primaire de  $\pi_1^{ab}(X)$  est finie et nulle pour presque tout  $l$  ([21], pp. 126–129). D'autre part, on sait que le groupe  $V(X)$  est extension d'un groupe de torsion par un groupe divisible. Cela a été démontré par Saito dans le cas des courbes (cf. [22], Cor. 5.2 (2) et aussi [21], Cor. 4.15); le cas général s'y réduit par un argument de Bertini comme dans la démonstration de [8], Proposition 3.3 (c'est ici que l'on utilise l'hypothèse de projectivité). Le corollaire découle de ces deux faits et du Théorème.

D'autres résultats de finitude pour le groupe  $SK_1(X)$  dans le cas des surfaces figureront au chapitre 5.

**ZUSATZ 1.4.** — L'hypothèse  $H^2(X, \mathbb{Q}_l) = 0$  dans la partie (2) du Théorème est satisfaite dans les deux cas suivants.

- $X$  a potentiellement bonne réduction.
- $H_{Zar}^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$  et la variété de Picard de  $X$  a potentiellement bonne réduction.

La démonstration, donnée au chapitre 4, repose sur des arguments de poids essentiellement bien connus. Le cas de bonne réduction figure déjà dans l'article de Soulé [30].

Terminons l'introduction en mentionnant que dans leur article non publié [26], Saito et Salberger démontrent l'injectivité de l'application de réciprocité *modulo*  $l^n$  pour des surfaces satisfaisant à des hypothèses semblables, mais apparemment plus fortes que dans la partie (2) du Théorème. Dans des travaux en cours, Jannsen et Saito obtiennent un résultat de même allure comme corollaire d'un résultat général décrivant l'homologie en degré  $d - 2$  du complexe  $C_{l^\infty, X}^{2,1}$  de Kato pour les variétés avec réduction semi-stable. (Il est donc amusant de voir qu'en vertu de notre Théorème, la  $(d - 3)$ -ième homologie dudit complexe contrôle déjà la situation en dimension quelconque, du moins dans le cas de bonne réduction.) Leur approche a l'avantage de couvrir aussi le cas où le corps de base  $k$  est un corps local d'égale caractéristique. Mais dans le cas d'une surface avec  $H^2(X, \mathbb{Q}_l) = 0$  sur

un corps  $p$ -adique, notre résultat est plus fort car il fournit des renseignements plus précis sur la structure du groupe  $V(X)$  comme au cor. 1.3 ; les résultats de [26] n'impliquent que la divisibilité du noyau de  $\phi_X$ .

Pourtant, on aimerait avoir des résultats sur le noyau de l'application de réciprocité qui soient valables sans hypothèses sur la réduction. Pour l'instant, le résultat le plus satisfaisant est celui de Saito qui a démontré l'injectivité de  $\phi_X$  modulo  $l^n$  pour une courbe propre lisse quelconque sur un corps local ([22], Lemma 5.3). Dans [35], je démontre par une méthode directe que la même conclusion vaut pour les surfaces fibrées en coniques au-dessus d'une courbe propre lisse  $C$ . Par contre, l'injectivité de  $\phi_X$  sur la torsion  $l$ -primaire dans  $SK_1$  de telles surfaces n'est pas connue en toute généralité. Ce serait une conséquence de la finitude de la torsion  $l$ -primaire dans  $SK_1$  des courbes, finitude conjecturée par Kato il y a une quinzaine d'années qui attend toujours sa démonstration dans le cas général (cf. la discussion avant la prop. 5.6). Manifestement, nos connaissances sont pour l'instant lacunaires même sur le cas des courbes, ce qui explique la difficulté de traiter complètement même une classe aussi particulière de surfaces.

Toute ma reconnaissance à J.-L. Colliot-Thélène pour son encouragement permanent et pour ses remarques pertinentes. Cet article a été rédigé dans l'environnement luxueux de l'Isaac Newton Institute de l'Université de Cambridge que je remercie pour son hospitalité.

## 2. GRANDES LIGNES DE LA DÉMONSTRATION DU THÉOREME

Commençons par rappeler une construction de l'application de réciprocité  $\phi_X$ . Celle qui est la plus adaptée à nos besoins a son origine dans le travail de Bloch [3] et est décrite en détail dans [21], 4.1 ; en voici un bref résumé.

Fixons pour le moment un entier  $m$ . Comme le symbole cohomologique est compatible avec les morphismes résidus en  $K$ -théorie de Milnor et en cohomologie étale (on peut voir à la rigueur [34], chap. 2 pour une discussion), il définit un morphisme

$$SK_1(X) \rightarrow \operatorname{coker} \left( \bigoplus_{x \in X_1} H^2(k(x), \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow \bigoplus_{x \in X_c} H^1(k(x), \mu_m) \right).$$

Or, par la théorie de Bloch et Ogus ([5], [9]), ce dernier groupe s'identifie au groupe de cohomologie de Zariski  $H_{Zar}^d(X, \mathcal{H}^{d+1}(\mu_m^{\otimes d+1}))$ , où  $d$  est la dimension de  $X$  et on emploie la notation standard  $\mathcal{H}^i(\mu_m^{\otimes j})$  pour le faisceau de Zariski  $\mathbf{R}^i \pi_* \mu_m^{\otimes j}$ , image directe supérieure associée à la projection  $\pi$  du grand site étale de  $k$  au grand site Zariski de  $k$ . Comme la dimension cohomologique de  $X_{Zar}$  est  $d$ , on peut composer par un morphisme bord provenant de la suite spectrale de Leray associée à  $\pi$ , et on obtient un morphisme

$$\phi_{X,n} : SK_1(X) \rightarrow H_{ét}^{2d+1}(X, \mu_m^{\otimes d+1}).$$

Mais par le théorème de dualité arithmétique rappelé ci-après, le deuxième groupe est dual de  $H^1(X, \mathbb{Z}/m)$ , lui-même dual par définition de  $\pi_1^{ab}(X)/m$ . L'application de réciprocité s'obtient alors par passage à la limite projective suivant  $m$ .

RAPPEL 2.1. — Voici l'énoncé du théorème de dualité (cf. [21], th. 1.14 ainsi que [24]) :

Soit  $V$  une variété propre, lisse, géométriquement intègre, de dimension  $d$  sur un corps local  $k$ , et  $m$  un entier positif inversible dans  $k$ . Alors on dispose d'un morphisme trace

$$H_{\text{ét}}^{2d+2}(V, \mu_m^{\otimes d+1}) \rightarrow \mathbb{Z}/m$$

obtenu comme le composé de l'application de Hochschild-Serre

$$H_{\text{ét}}^{2d+2}(V, \mu_m^{\otimes d+1}) \rightarrow H^2(k, H_{\text{ét}}^{2d}(\bar{V}, \mu_m^{\otimes d}) \otimes \mu_m)$$

avec le morphisme trace de la dualité de Poincaré pour  $\bar{V} = V \times \bar{k}$  et l'invariant du groupe de Brauer de  $k$ . C'est un isomorphisme par définition, et on montre que les accouplements

$$H_{\text{ét}}^i(V, \mu_m^{\otimes j}) \times H_{\text{ét}}^{2d+2-i}(V, \mu_m^{\otimes d+1-j}) \rightarrow \mathbb{Z}/m$$

obtenus en composant le cup-produit en cohomologie étale avec cette trace sont parfaits.

Après tous ces rappels, on arrive au point clef de la démonstration.

PROPOSITION 2.2. — *Soit  $X$  une variété lisse sur un corps de caractéristique zéro, et supposons que les corps résiduels des points de dimension 2 de  $X$  vérifient  $\text{BK}(3, l)$ . Alors pour tout entier positif  $n$  inversible dans  $k$ , il existe une surjection*

$$H_{\text{Zar}}^{2d}(X, \tau_{\leq d+1} \mathbf{R}\pi_* \mu_{l^n}^{\otimes d+1}) \twoheadrightarrow {}_l SK_1(X).$$

Ici, le morphisme  $\pi : k_{\text{ét}} \rightarrow k_{\text{Zar}}$  est le changement de site déjà vu plus haut,  $\tau_{\leq}$  est la troncation “sophistiquée” (cf. par exemple [38], 1.2.7; mais attention, les flèches vont dans l'autre sens!) et pour un groupe abélien  $A$ , le symbole  ${}_l A$  désigne son sous-groupe de  $l^n$ -torsion.

La démonstration est reportée au chapitre suivant; elle repose sur la théorie de complexes motiviques introduits par Voevodsky. On peut d'ailleurs identifier le noyau au quotient modulo  $l^n$  d'un certain groupe de  $\mathcal{K}$ -cohomologie, généralisant ainsi des résultats bien connus de Bloch [4] et de Sousline [31] sur la torsion dans le groupe de Chow de codimension deux dont la proposition est un analogue; cf. là-dessus l'Appendice.

*Remarque 2.3.* Si  $X$  est une surface, le groupe  $H_{\text{Zar}}^{2d}(X, \tau_{\leq d+1} \mathbf{R}\pi_* \mu_{l^n}^{\otimes d+1})$  figurant dans la proposition s'identifie au groupe  $NH^4(X, \mu_{l^n}^{\otimes 3})$  défini comme le noyau du morphisme de restriction

$$H_{\text{ét}}^4(X, \mu_{l^n}^{\otimes 3}) \rightarrow H_{\text{ét}}^4(k(X), \mu_{l^n}^{\otimes 3}).$$

Cela résulte immédiatement du triangle distingué fondamental (dans  $\mathbf{D}^b(X_{\text{Zar}})$ , la catégorie dérivée des complexes cohomologiquement bornés de faisceaux de Zariski sur  $X$ ) :

$$\tau_{\leq 3} \mathbf{R}\pi_* \mu_{l^n}^{\otimes 3} \rightarrow \tau_{\leq 4} \mathbf{R}\pi_* \mu_{l^n}^{\otimes 3} \rightarrow \mathcal{H}^4(\mu_{l^n}^{\otimes 3})[-4] \rightarrow \tau_{\leq 3} \mathbf{R}\pi_* \mu_{l^n}^{\otimes 3}[1]$$

joint à la théorie de Bloch-Ogus, et sert de base pour la démonstration des résultats de finitude exposés au chapitre 5.

Disposant de la proposition 2.2, on peut énoncer la proposition suivante, inspirée de la proposition 1 de Colliot-Thélène, Sansuc et Soulé [12] :

PROPOSITION 2.4. — *Sous les hypothèses de la proposition précédente, on dispose d'un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
 H_{Zar}^{2d}(X, \tau_{\leq d+1} \mathbf{R}\pi_* \mu_{l^n}^{\otimes d+1}) & \longrightarrow & {}_{l^n}SK_1(X) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_{\acute{e}t}^{2d}(X, \mu_{l^n}^{\otimes d+1}) & \longrightarrow & H_{\acute{e}t}^{2d+1}(X, \mu_{l^m}^{\otimes d+1})
 \end{array}$$

Le morphisme vertical de droite, qui existe sur un corps quelconque, est défini comme dans la construction de l'application de réciprocité  $\phi_X$ . Si de plus  $k$  est un corps  $p$ -adique, le groupe en bas à droite s'identifie par la dualité arithmétique 2.1 à  $\pi_1^{ab}(X)/l^m$  et le morphisme vertical de droite devient  $\phi_X$  modulo  $l^m$ , restreint à la  $l^n$ -torsion dans  $SK_1(X)$ .

Quelques mots sur les autres morphismes : celui de gauche est induit par la version “catégories dérivées” de la suite spectrale de Leray (cf. [39], cor. 10.8.3), composée par l’“oubli de la troncation” ; le morphisme horizontal du haut provient de la Proposition 2.2, et enfin celui du bas est le morphisme de Bockstein en cohomologie étale associé à la suite exacte de faisceaux

$$1 \rightarrow \mu_{l^n}^{\otimes d+1} \rightarrow \mu_{l^{n+m}}^{\otimes d+1} \rightarrow \mu_{l^m}^{\otimes d+1} \rightarrow 1.$$

La démonstration, également de nature “motivique”, rejoindra celle de la proposition précédente dans le prochain chapitre. Par passage à la limite inductive suivant  $n$  et à la limite projective suivant  $m$ , on obtient le

COROLLAIRE 2.5. — *Sous les hypothèses précédentes, on a un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
 H_{Zar}^{2d}(X, \tau_{\leq d+1} \mathbf{R}\pi_* \mathbb{Q}_l / \mathbb{Z}_l(d+1)) & \longrightarrow & SK_1(X)\{l\} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_{\acute{e}t}^{2d}(X, \mathbb{Q}_l / \mathbb{Z}_l(d+1)) & \longrightarrow & H^{2d+1}(X, \mathbb{Z}_l(d+1))\{l\}
 \end{array}$$

Ici, le groupe  $A\{l\}$  est le sous-groupe de torsion  $l$ -primaire du groupe abélien  $A$ . Sur un corps  $p$ -adique, le groupe en bas à droite est isomorphe à  $\pi_1^{ab}(X)\{l\}$  et le morphisme qu'il reçoit n'est autre que  $\phi_X$  restreint à  $SK_1(X)\{l\}$ .

Un examen du diagramme figurant dans le Corollaire montre alors que pour démontrer le Théorème, il suffit d'établir l'injectivité du morphisme de gauche ainsi que de celui du bas sous les hypothèses imposées. C'est le contenu des deux lemmes suivants.

LEMME 2.6. — Si  $X$  est une variété propre, lisse, de dimension  $d$  définie sur un corps  $p$ -adique  $k$  satisfaisant à la conjecture  $(K_{l\infty})$  en degré  $d - 3$  et ayant bonne réduction, le morphisme

$$H_{Zar}^{2d}(X, \tau_{\leq d+1} R\pi_* \mathbb{Q}_l / \mathbb{Z}_l(d+1)) \rightarrow H_{\acute{e}t}^{2d}(X, \mathbb{Q}_l / \mathbb{Z}_l(d+1))$$

est injectif. Si  $d \leq 2$ , on arrive à la même conclusion sous la seule hypothèse que  $X$  est lisse sur un corps de caractéristique zéro.

*Démonstration.* Le cas des courbes est tautologique et celui des surfaces résulte de la démonstration de la Remarque 2.3. Pour  $d \geq 3$ , remarquons d'abord que  $k$  étant un corps  $p$ -adique, la dimension cohomologique d'un ouvert affine de  $X$  est  $d + 2$  et a fortiori pour tout  $n$ , le complexe  $R\pi_* \mu_{l^n}^{\otimes d+1}$  est acyclique en degrés supérieurs à  $d + 2$ . Donc on a un triangle distingué dans  $D^b(X_{Zar})$  :

$$\tau_{\leq d+1} R\pi_* \mu_{l^n}^{\otimes d+1} \rightarrow R\pi_* \mu_{l^n}^{\otimes d+1} \rightarrow \mathcal{H}^{d+2}(\mu_{l^n}^{\otimes d+1})[-d-2] \rightarrow \tau_{\leq d+1} R\pi_* \mu_{l^n}^{\otimes d+1}[1]$$

d'où une suite exacte longue :

$$\begin{aligned} H_{\acute{e}t}^{2d-1}(X, \mu_{l^n}^{\otimes d+1}) &\rightarrow H_{Zar}^{d-3}(X, \mathcal{H}^{d+2}(\mu_{l^n}^{\otimes d+1})) \\ &\rightarrow H_{Zar}^{2d}(X, \tau_{\leq d+1} R\pi_* \mu_{l^n}^{\otimes d+1}) \rightarrow H_{\acute{e}t}^{2d}(X, \mu_{l^n}^{\otimes d+1}) \end{aligned}$$

et, par passage à la limite inductive suivant  $n$ ,

$$\begin{aligned} H_{\acute{e}t}^{2d-1}(X, \mathbb{Q}_l / \mathbb{Z}_l(d+1)) &\rightarrow H_{Zar}^{d-3}(X, \mathcal{H}^{d+2}(\mathbb{Q}_l / \mathbb{Z}_l(d+1))) \\ &\rightarrow H_{Zar}^{2d}(X, \tau_{\leq d+1} R\pi_* \mathbb{Q}_l / \mathbb{Z}_l(d+1)) \rightarrow H_{\acute{e}t}^{2d}(X, \mathbb{Q}_l / \mathbb{Z}_l(d+1)). \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que le groupe  $H_{Zar}^{d-3}(X, \mathcal{H}^{d+2}(\mathbb{Q}_l / \mathbb{Z}_l(d+1)))$  est trivial. Mais par la théorie de Bloch et Ogus, ledit groupe s'identifie à l'homologie en degré  $d - 3$  du complexe  $C_{l\infty, X}^{2,1}$  de Kato introduit dans le Rappel 1.2. Comme l'on a supposé  $(K_{l\infty})$  vrai en degré  $d - 3$ , ce groupe est isomorphe à l'homologie en degré  $d - 3$  du complexe  $C_{l\infty, Y}^{1,0}$  associé à la fibre spéciale  $Y$  qui est lisse par hypothèse. Or Colliot-Thélène démontra dans [8] que  $C_{l\infty, Y}^{1,0}$  est exact en degrés  $\geq d - 3$ , d'où le lemme.

*Remarque subjective 2.7.* La démonstration ci-dessus montre que l'ingrédient fondamental dans le cas  $d \geq 3$  du Théorème est non pas la conjecture  $(K_{l\infty})$ , mais plutôt l'exactitude conjecturale du complexe  $C_{l\infty, X}^{2,1}$  en degré  $d - 3$  pour une variété propre et lisse avec bonne réduction. Je suis d'avis que la démonstration éventuelle de ce fait sera directe et ne procèdera pas par réduction au résultat de [8]. J'ai toutefois préféré la présentation adoptée ici pour pouvoir citer la conjecture telle qu'elle se trouve dans la littérature.

LEMME 2.8. — Soit  $X$  une variété propre, lisse, de dimension  $d$  définie sur un corps  $p$ -adique  $k$  et soit  $l$  un nombre premier inversible dans  $k$ . Alors l'application de Bockstein

$$H^{2d}(X, \mathbb{Q}_l / \mathbb{Z}_l(d+1)) \rightarrow H^{2d+1}(X, \mathbb{Z}_l(d+1))$$

est injective si et seulement si  $H^2(X, \mathbb{Q}_l) = 0$ .



Remarquons qu'en vertu du *Zusatz* 1.4, la condition du Lemme est satisfaite en particulier quand  $X$  a bonne réduction. Cette observation est nécessaire pour compléter la démonstration de la partie (1) du Théorème.

*Démonstration.* Par la dualité arithmétique 2.1, elle est égale, au signe près, au dual du morphisme de Bockstein

$$(2.9) \quad H^1(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_l)$$

notant la compatibilité des cup-produits en cohomologie étale aux cobords (cf. la Remarque suivante). Ce morphisme s'insère dans la suite exacte

$$H^1(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_l) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Q}_l) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l).$$

provenant par passage à la limite inductive suivant  $n$  et à la limite projective suivant  $m$  de la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte de faisceaux constants

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/l^{m+n}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

(voir l'argument de [11], p. 473 ; le passage à la limite projective nécessite la connaissance de la finitude des groupes  $H^i(X, \mathbb{Z}/l^j\mathbb{Z})$  sur un corps  $p$ -adique, cf. là-dessus la démonstration de la prop. 5.2 *infra*). On en déduit que le morphisme dans (2.9) est surjectif si et seulement si  $H^2(X, \mathbb{Q}_l) = 0$ , car  $H^2(X, \mathbb{Q}_l)$  est uniquement divisible et  $H^2(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)$  est de torsion.

*Remarque pédante 2.10.* En ce qui concerne la compatibilité des cup-produits en cohomologie étale avec les cobords, on trouve dans Milne [20], Prop. V.1.16 que la formule standard  $d(\alpha_1 \cup \alpha_2) = (d_1\alpha_1) \cup \alpha_2$  est vérifiée pour les cobords provenant de suites exactes scindées fibre par fibre. Pour la démonstration, Milne renvoie à l'ouvrage de Bredon ([7], prop. II.6.2). Mais cette même démonstration, jointe au lemme V.1.15 de [20] montre que la formule citée est vraie plus généralement si la suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{F}'_1 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}''_1 \rightarrow 0,$$

dont le cobord  $d_1$  provient, reste exacte en tensorisant avec  $\mathcal{F}'_2$ , faisceau figurant à gauche dans la suite exacte courte analogue pour la deuxième variable. Or cette condition est satisfaite pour le morphisme de Bockstein à coefficients finis ; notre cas en résulte après passage à la limite. L'éventuel signe n'apparaît que dans la formule analogue pour la deuxième variable qui se ramène à la formule ci-dessus par anticommutativité du cup-produit. On pourra également consulter l'article de Gamst et Hoechsmann [14] sur ce point.

### 3. EXCURSION MOTIVIQUE

Ce chapitre est consacré à la démonstration des propositions 2.2 et 2.4 à l'aide de la cohomologie motivique développée par Voevodsky et Souline. Les résultats sont valables sur n'importe quel corps de base  $k$  de caractéristique zéro.

Voevodsky a introduit (cf. par exemple [33], chap.2) pour tout entier  $j$ , un complexe de faisceaux abéliens  $\mathbb{Z}(j)$  sur le sous-site du grand site Zariski de  $k$  formé des schémas lisses, vérifiant un grand nombre de propriétés prédites par Beilinson dans [2]. Notamment, les complexes  $\mathbb{Z}(j)$  sont acycliques en degrés supérieurs à  $j$  mais l'on ignore pour l'instant s'ils sont acycliques en degrés négatifs.

*Autre remarque pédante 3.1.* Le fait que l'on ne sache pas si les complexes  $\mathbb{Z}(j)$  sont cohomologiquement bornés pose un problème pour le calcul de leur hypercohomologie de Zariski. Mais localement sur un schéma  $X$  de dimension cohomologique finie, c'est toujours possible (cf. [39], cor. 10.5.11), et c'est le seul cas que l'on va rencontrer dans la suite. Donc à de telles occasions il faudra toujours sous-entendre que les considérations sont faites sur le petit site Zariski de  $X$ .

En basses dimensions, on a :

$$\mathbb{Z}(j) = 0 \quad \text{pour } j < 0,$$

et des quasi-isomorphismes de complexes de faisceaux

$$\mathbb{Z}(0) \simeq \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \mathbb{Z}(1) \simeq \mathbb{G}_m[-1].$$

Notons  $\mathbb{Z}/l^n(j)$  le produit tensoriel  $\mathbb{Z}(j) \otimes \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$ . Comme  $\mathbb{Z}(j)$  est un complexe de groupes abéliens sans torsion, la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{l^n} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

donne lieu à un triangle distingué

$$\mathbb{Z}(j) \xrightarrow{l^n} \mathbb{Z}(j) \rightarrow \mathbb{Z}/l^n(j) \rightarrow \mathbb{Z}(j)[1]$$

dans la catégorie dérivée des faisceaux sur le sous-site du grand site Zariski de  $k$  formé des schémas lisses, qui sera notée  $\mathbf{D}(Sm(k)_{Zar})$  dans la suite.

En considérant la suite exacte longue associée en cohomologie de Zariski pour  $j = d + 1$ , on obtient le

LEMME 3.2. — *Pour une variété lisse  $X$  sur  $k$ , il existe une suite exacte :*

$$0 \rightarrow H_{Zar}^{2d}(X, \mathbb{Z}(d+1))/l^n \rightarrow H_{Zar}^{2d}(X, \mathbb{Z}/l^n(d+1)) \rightarrow {}_l H_{Zar}^{2d+1}(X, \mathbb{Z}(d+1)) \rightarrow 0.$$

Remarquons pour usage ultérieur que l'on n'a pas utilisé dans la démonstration du lemme le fait que  $d$  était égale à la dimension de  $X$ . Il vaut donc pour  $d$  quelconque. La Proposition 2.2 est maintenant une conséquence de ce résultat en vertu du

LEMME 3.3. — *Supposons que l'hypothèse  $BK(3, l)$  soit vérifiée pour les corps résiduels des points de dimension 2 de  $X$ . Alors on dispose d'isomorphismes canoniques :*

- a)  $H_{Zar}^{2d+1}(X, \mathbb{Z}(d+1)) \cong SK_1(X);$
- b)  $H_{Zar}^{2d}(X, \mathbb{Z}/l^n(d+1)) \cong H_{Zar}^{2d}(X, \tau_{\leq d+1} \mathbf{R}\pi_* \mu_{l^n}^{\otimes d+1}).$

L'hypothèse  $BK(3, l)$  ne sert en fait que dans la partie b) du lemme. Avant de commencer la démonstration, rappelons une construction de Sousline et Voevodsky [33] dont la présentation adoptée ici doit beaucoup aux remarques de B. Kahn et E. Peyre.

RAPPEL 3.4. — Il existe, pour tout  $j$  et  $n$ , un “symbole cohomologique” pour la cohomologie motivique à coefficients finis, i. e. un morphisme

$$\mathbb{Z}/l^n(j) \rightarrow \tau_{\leq j} \mathbf{R}\pi_* \mu_{l^n}^{\otimes j}$$

dans  $\mathbf{D}(Sm(k)_{zar})$ . Voici comment il est construit.

Comme  $\mathbb{Z}/l^n(j)$  n’a pas de cohomologie en degrés  $> j$ , il revient au même de définir un morphisme

$$\mathbb{Z}/l^n(j) \rightarrow \mathbf{R}\pi_* \mu_{l^n}^{\otimes j}.$$

Pour la réduction suivante, remarquons que le foncteur de changement de site  $\pi^*$  étant exact ([20], Lemma II.2.6. et p. 68), il est l’adjoint à gauche de  $\mathbf{R}\pi_*$ , et il suffit donc de définir un morphisme

$$\pi^* \mathbb{Z}/l^n(j) \rightarrow \mu_{l^n}^{\otimes j}$$

dans la catégorie  $\mathbf{D}(Sm(k)_{ét})$  définie de façon analogue à  $\mathbf{D}(Sm(k)_{zar})$ . Commençons par construire ce morphisme pour  $j = 1$ .

Par la prop. 2.2 de [33] on dispose d’un isomorphisme  $\mathbb{Z}(1) \cong \mathbb{G}_m[-1]$  dans  $\mathbf{D}(Sm(k)_{zar})$ , d’où, par l’exactitude de  $\pi^*$ , un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \pi^* \mathbb{Z}(1) & \xrightarrow{l^n} & \pi^* \mathbb{Z}(1) & \longrightarrow & \pi^* \mathbb{Z}/l^n(1) & \longrightarrow & \pi^* \mathbb{Z}(1)[1] \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & & & \downarrow \cong \\ \mathbb{G}_m[-1] & \xrightarrow{l^n} & \mathbb{G}_m[-1] & \longrightarrow & \mu_{l^n} & \longrightarrow & \mathbb{G}_m \end{array}$$

dont les lignes sont des triangles distingués de  $\mathbf{D}(Sm(k)_{ét})$ , celui du bas étant donné notamment par la théorie de Kummer en cohomologie étale. Une propriété de base des catégories triangulées implique alors que le morphisme vertical manquant au milieu existe (c’est d’ailleurs un isomorphisme par le lemme des cinq).

Or les objets  $\pi^* \mathbb{Z}/l^n(j)$  et  $\mu_{l^n}^{\otimes j}$  vivent en effet dans une certaine sous-catégorie pleine  $DM_{ét}^{-,eff}(k)$  de  $\mathbf{D}(Sm(k)_{ét})$  qui a été construite dans [35] par Voevodsky. S’agissant d’une sous-catégorie pleine, le morphisme pour  $j = 1$  que l’on vient de construire est un morphisme de  $DM_{ét}^{-,eff}(k)$ . Or dans  $DM_{ét}^{-,eff}(k)$  le complexe  $\pi^* \mathbb{Z}/l^n(j)$  se décompose comme un produit

$$\pi^* \mathbb{Z}/l^n(j) = \pi^* \mathbb{Z}/l^n(1) \overset{V}{\otimes} \dots \overset{V}{\otimes} \pi^* \mathbb{Z}/l^n(1) \quad (j \text{ fois}),$$

où  $\otimes^V$  est le produit tensoriel de  $DM_{ét}^{-,eff}(k)$  (cf. [38], démonstration du th. 2.6), donc on peut définir un morphisme

$$\pi^* \mathbb{Z}/l^n(j) \rightarrow \mu_{l^n}^{\otimes^V j}$$

par élévation à la puissance  $V$ -tensorielle. Mais  $\mu_{l^n}^{\otimes^V j} \simeq \mu_{l^n}^{\otimes j}$ , car l’inclusion de  $DM_{ét}^{-,eff}(k)$  dans  $\mathbf{D}(Sm(k)_{ét})$  admet un adjoint à gauche respectant la structure tensorielle (cf. [36], bas de la page 25 pour l’énoncé analogue sur le site Nisnevich).

*Démonstration du lemme 3.9.* Pour établir a), commençons par remarquer que la suite spectrale d'hypercohomologie

$$E_2^{p,q} = H_{Zar}^p(X, \mathcal{H}^q \mathbb{Z}(j)) \Rightarrow H_{Zar}^{p+q}(X, \mathbb{Z}(j))$$

fournit un morphisme

$$\rho_{i,j} : H_{Zar}^i(X, \mathbb{Z}(j)) \rightarrow H_{Zar}^{i-j}(X, \mathcal{H}^j \mathbb{Z}(j))$$

par l'acyclicité de  $\mathbb{Z}(j)$  en degrés  $> j$ . De plus, pour  $i = 2d + 1$  et  $j = d + 1$  on obtient ainsi un isomorphisme

$$H_{Zar}^{2d+1}(X, \mathbb{Z}(d+1)) \xrightarrow{\cong} H_{Zar}^d(X, \mathcal{H}^{d+1} \mathbb{Z}(d+1))$$

car  $X$  est de dimension cohomologique  $d$ . D'autre part, Voevodsky a démontré l'existence d'une "résolution de Gersten" par des faisceaux flasques :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{H}^{d+1} \mathbb{Z}(d+1) &\rightarrow \bigoplus_{x \in X^0} i_{x*} \mathcal{H}^{d+1} \mathbb{Z}(d+1)_x \rightarrow \\ &\rightarrow \bigoplus_{x \in X^1} i_{x*} \mathcal{H}^d \mathbb{Z}(d)_x \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{x \in X^d} i_{x*} \mathcal{H}^1 \mathbb{Z}(1)_x \rightarrow 0, \end{aligned}$$

où  $i_{x*}$  est l'inclusion du point  $x$ . Cette résolution existe sur tout corps  $k$  sur lequel la résolution des singularités est connue sous une forme forte, donc pour l'instant en caractéristique zéro grâce à Hironaka. (Voir l'Appendice pour plus de détails.) Il suffit maintenant de calculer le groupe  $H_{Zar}^d(X, \mathcal{H}^{d+1} \mathbb{Z}(d+1))$  en utilisant cette résolution, tenant compte du fait que la prop. 3.2 de [33] fournit des isomorphismes canoniques

$$H^1(F, \mathbb{Z}(1)) \cong F^* \quad \text{et} \quad H^2(F, \mathbb{Z}(2)) \cong K_2(F)$$

pour un corps  $F$  quelconque.

Pour que cette démonstration soit complète, il faut vérifier encore que le morphisme

$$\bigoplus_{x \in X_1} K_2(k(x)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X_0} K_1(k(x))$$

est bien celui induit par le symbole modéré, comme dans la définition de  $SK_1(X)$ . Voevodsky affirme dans [38] qu'une telle vérification est facile; nous n'y sommes pas entièrement parvenus à ce jour. Toutefois, la démonstration de la partie b) montrera que c'est vrai modulo  $n$  pour tout  $n$ .

Passons maintenant à la démonstration de la partie b). Si l'on suppose que l'hypothèse  $\mathbf{BK}(d+1, l)$  soit satisfaite pour tout corps  $F$  (où, rappelons-le,  $d$  est la dimension de  $X$ ), le résultat principal de [33] (Theorem 5.9) dit que le symbole cohomologique que l'on a construit dans 3.4 est toujours un isomorphisme pour  $j = d+1$  si  $k$  est un corps

sur lequel la résolution des singularités est connue, ce qui donne immédiatement le résultat. Comme nous avons mis des hypothèses plus douces, nous sommes obligés de dévisser.

Appliquons donc la suite spectrale d'hypercohomologie aux deux groupes figurant dans l'énoncé. Comme dans a), tenant compte de la dimension cohomologique de  $X_{Zar}$ , de l'acyclicité de  $\mathbb{Z}/l^n(d+1)$  en degrés  $> d+1$  ainsi que de la forme de la résolution de Gersten, on vérifie que la suite spectrale nous fournit par dégénérescence un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \rightarrow H_{Zar}^d(X, \mathcal{H}^d \mathbb{Z}/l^n(d+1)) & \rightarrow & H_{Zar}^{2d}(X, \mathbb{Z}/l^n(d+1)) & \rightarrow & H_{Zar}^{d-1}(X, \mathcal{H}^{d+1} \mathbb{Z}/l^n(d+1)) & \rightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \rightarrow H_{Zar}^d(X, \mathcal{H}^d(\mu_{l^n}^{\otimes d+1})) & \rightarrow & H_{Zar}^{2d}(X, \tau_{\leq d+1} \mathbf{R}\pi_* \mu_{l^n}^{\otimes d+1}) & \rightarrow & H_{Zar}^{d-1}(X, \mathcal{H}^{d+1}(\mu_{l^n}^{\otimes d+1})) & \rightarrow & 0
\end{array}$$

Nous affirmons que sous les hypothèses du lemme, les morphismes verticaux aux deux extrémités sont des isomorphismes, ce qui suffira pour conclure. Vérifions cet isomorphisme dans le cas du morphisme vertical de droite (celui de gauche se traite de façon analogue). En utilisant les résolutions de Gersten-Voevodsky et de Bloch-Ogus, nous obtenons ce morphisme comme le morphisme induit sur l'homologie des complexes figurant dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
\bigoplus_{x \in X_2} H^3(k(x), \mathbb{Z}/l^n(3)) & \rightarrow & \bigoplus_{x \in X_1} H^2(k(x), \mathbb{Z}/l^n(2)) & \rightarrow & \bigoplus_{x \in X_0} H^1(k(x), \mathbb{Z}/l^n(1)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\bigoplus_{x \in X_2} H^3(k(x), \mu_{l^n}^{\otimes 3}) & \rightarrow & \bigoplus_{x \in X_1} H^2(k(x), \mu_{l^n}^{\otimes 2}) & \rightarrow & \bigoplus_{x \in X_0} H^1(k(x), \mu_{l^n})
\end{array}$$

Le diagramme commute car les deux résolutions en question s'obtiennent comme les résolutions de Gersten de "faisceaux avec transferts invariants par homotopie" au sens de [37] et on vérifie, en utilisant la compatibilité aux produits, que le symbole cohomologique de Sousline-Voevodsky induit des symboles cohomologiques sur les termes des résolutions de Gersten. Or les trois morphismes verticaux peuvent être écrits comme des morphismes composés des isomorphismes de Sousline-Voevodsky ([32], Corollary 3.5)

$$H^i(k(x), \mathbb{Z}/l^n(i)) \xrightarrow{\cong} K_i^M(k(x))/l^n$$

avec les symboles cohomologiques usuels

$$K_i^M(k(x))/l^n \rightarrow H^i(k(x), \mu_{l^n}^{\otimes i})$$

(la vérification de ce fait se réduit immédiatement au cas trivial  $i = 1$  par compatibilité des deux morphismes aux produits). Le deuxième symbole est également un isomorphisme pour  $i = 1, 2$  ainsi que pour  $i = 3$  et  $x$  un point de dimension 2 par hypothèse. Donc on obtient bien un isomorphisme sur l'homologie, ce qui était à voir.

*Remarque 3.5.* L'utilisation de la résolution des singularités pour construire la résolution de Gersten-Voevodsky est la raison pourquoi l'on ignore dans cet article le cas de la caractéristique  $p > 0$ .

Le reste de ce chapitre est consacré à la *démonstration de la proposition 2.4*. Comme on l'a déjà remarqué, un diagramme de même allure figure dans [12], prop. 1, mais l'utilisation de la cohomologie motivique rend la vérification de sa commutativité beaucoup moins fatigante.

De fait, tenant compte des identifications introduites lors de la démonstration précédente, il suffit de vérifier la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 H_{Zar}^{2d}(X, \mathbb{Z}/l^n(d+1)) & \rightarrow & H_{Zar}^{2d+1}(X, \mathbb{Z}(d+1)) & \rightarrow & H_{Zar}^{2d+1}(X, \mathbb{Z}/l^m(d+1)) \\
 (3.6) \quad \downarrow \cong & & & & \downarrow \\
 H_{Zar}^{2d}(X, \tau_{\leq d+1} \mathbf{R}\pi_* \mu_{l^n}^{\otimes d+1}) & & & & H_{Zar}^{2d+1}(X, \tau_{\leq d+1} \mathbf{R}\pi_* \mu_{l^m}^{\otimes d+1}) \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 H_{ét}^{2d}(X, \mu_{l^n}^{\otimes d+1}) & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & & & H_{ét}^{2d+1}(X, \mu_{l^m}^{\otimes d+1})
 \end{array}$$

Il convient peut-être de dire quelques mots sur l'identification de l'application de réciprocity au composé des morphismes figurant dans la moitié droite de ce diagramme. Tenant compte de l'isomorphisme

$$H_{Zar}^{2d+1}(X, \tau_{\leq d+1} \mathbf{R}\pi_* \mu_{l^m}^{\otimes d+1}) \cong H_{Zar}^d(X, \mathcal{H}^{d+1}(\mu_{l^m}^{\otimes d+1}))$$

résultant du fait que  $X$  est de dimension cohomologique  $d$ , il suffit de voir que le morphisme naturel

$$SK_1(X) \rightarrow \text{coker} \left( \bigoplus_{x \in X_1} H^2(k(x), \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow \bigoplus_{x \in X_0} H^1(k(x), \mu_m) \right)$$

s'identifie bien au morphisme composé

$$H_{Zar}^{2d+1}(X, \mathbb{Z}(d+1)) \rightarrow H_{Zar}^{2d+1}(X, \mathbb{Z}/l^m(d+1)) \rightarrow H_{Zar}^{2d+1}(X, \tau_{\leq d+1} \mathbf{R}\pi_* \mu_{l^m}^{\otimes d+1})$$

via les diverses résolutions de Gersten. Mais c'est une conséquence immédiate de la construction du "symbole cohomologique" de Sousline-Voevodsky rappelée dans 3.4.

Pour l'étape suivante, nous avons besoin d'une petite digression sur les morphismes de Bockstein.

La suite exacte de groupes abéliens

$$(3.7) \quad 0 \rightarrow \mathbb{Z}/l^m \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/l^{m+n} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/l^n \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

donne lieu, par torsion avec la  $(d+1)$ -ième puissance tensorielle du caractère cyclotomique, à une suite exacte de faisceaux sur  $X_{ét}$  :

$$1 \rightarrow \mu_{l^m}^{\otimes d+1} \rightarrow \mu_{l^{m+n}}^{\otimes d+1} \rightarrow \mu_{l^n}^{\otimes d+1} \rightarrow 1,$$

d'où un triangle distingué dans  $\mathbf{D}(X_{Zar})$  :

$$\mathbf{R}\pi_*\mu_{l^m}^{\otimes d+1} \rightarrow \mathbf{R}\pi_*\mu_{l^{m+n}}^{\otimes d+1} \rightarrow \mathbf{R}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes d+1} \rightarrow \mathbf{R}\pi_*\mu_{l^m}^{\otimes d+1}[1],$$

dont le dernier morphisme est la version “catégories dérivées” du morphisme de Bockstein. Il induit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_{Zar}^{2d}(X, \tau_{\leq d+1} \mathbf{R}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes d+1}) & \longrightarrow & H_{Zar}^{2d+1}(X, \tau_{\leq d+1} \mathbf{R}\pi_*\mu_{l^m}^{\otimes d+1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{Zar}^{2d}(X, \mathbf{R}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes d+1}) & \longrightarrow & H_{Zar}^{2d+1}(X, \mathbf{R}\pi_*\mu_{l^m}^{\otimes d+1}) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H_{\acute{e}t}^{2d}(X, \mu_{l^n}^{\otimes d+1}) & \longrightarrow & H_{\acute{e}t}^{2d+1}(X, \mu_{l^m}^{\otimes d+1}) \end{array}$$

où les isomorphismes indiqués sont donnés par la version de Verdier de la suite spectrale de Leray. D'autre part, en tensorisant la suite exacte (3.7) par le complexe  $\mathbb{Z}(d+1)$ , on trouve le triangle distingué de  $\mathbf{D}(Sm(k)_{Zar})$  :

$$\mathbb{Z}/l^m(d+1) \rightarrow \mathbb{Z}/l^{m+n}(d+1) \rightarrow \mathbb{Z}/l^n(d+1) \rightarrow \mathbb{Z}/l^m(d+1)[1]$$

dont le dernier morphisme est le Bockstein pour la cohomologie motivique qui s'insère dans le diagramme commutatif évident :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/l^n(d+1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/l^m(d+1)[1] \\ \downarrow & & \downarrow = \\ \mathbb{Z}(d+1)[1] & \longrightarrow & \mathbb{Z}/l^m(d+1)[1] \end{array}$$

A fortiori, on peut remplacer la première ligne du diagramme (3.6) par le morphisme de Bockstein

$$H_{Zar}^{2d}(X, \mathbb{Z}/l^n(d+1)) \rightarrow H_{Zar}^{2d+1}(X, \mathbb{Z}/l^m(d+1))$$

et on est réduit à vérifier la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} H_{Zar}^{2d}(X, \mathbb{Z}/l^n(d+1)) & \longrightarrow & H_{Zar}^{2d+1}(X, \mathbb{Z}/l^m(d+1)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{Zar}^{2d}(X, \tau_{\leq d+1} \mathbf{R}\pi_*\mu_{l^n}^{\otimes d+1}) & \longrightarrow & H_{Zar}^{2d+1}(X, \tau_{\leq d+1} \mathbf{R}\pi_*\mu_{l^m}^{\otimes d+1}) \end{array}$$

C'est une conséquence du lemme plus général suivant :

LEMME 3.8. — *Le symbole cohomologique de Sousline-Voevodsky et les morphismes de Bockstein induisent, pour tout entier positif  $j$ , un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/l^n(j) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/l^m(j)[1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tau_{\leq j} \mathbf{R}\pi_* \mu_{l^n}^{\otimes j} & \longrightarrow & \tau_{\leq j} \mathbf{R}\pi_* \mu_{l^m}^{\otimes j}[1] \end{array}$$

dans  $\mathbf{D}(\mathrm{Sm}(k)_{\mathrm{Zar}})$ .

*Démonstration.* Tenant compte de la construction rappelée dans 3.4, l'assertion est immédiate pour  $j = 1$ . Le cas général s'y réduit par la compatibilité des cup-produits en cohomologie étale avec les morphismes de Bockstein (cf. là-dessus la Remarque 2.10).

#### 4. DÉMONSTRATION DU ZUSATZ 1.4

On va démontrer les deux énoncés parallèlement. Par la suite spectrale de Hochschild-Serre (pour la cohomologie continue), il suffit de montrer que les hypothèses du Zusatz impliquent les trois annulations :

- a)  $H^2(k, H^0(\overline{X}, \mathbb{Q}_l)) = H^2(k, \mathbb{Q}_l) = 0$ ;
- b)  $H^1(k, H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_l)) = 0$ ;
- c)  $H^0(k, H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}_l)) = 0$ .

Quitte à passer à une extension finie de  $k$ , on peut effacer le mot “potentiellement” dans les hypothèses en utilisant un argument de transfert.

Pour a), remarquons que  $H^2(k, \mathbb{Z}_l)$  est dual à  $H^0(k, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1))$  par la dualité de Tate locale, et ce dernier groupe est fini car  $k$  ne contient qu'un nombre fini de racines de l'unité. Mais par définition  $H^2(k, \mathbb{Q}_l) = H^2(k, \mathbb{Z}_l) \otimes \mathbb{Q}_l$ .

Passons à l'assertion b). Notons  $G$  le groupe de Galois absolu de  $k$ . Comme la caractéristique d'Euler-Poincaré du  $G$ -module  $H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_l)$  est nulle pour  $l \neq p$  (cela résulte après passage à la limite de [29], II.5.4, prop. 17), il suffit de démontrer la nullité des groupes  $H^0(k, H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_l))$  et  $H^2(k, H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_l))$ . Pour le deuxième groupe, on a la chaîne d'isomorphismes (où  $*$  veut dire le  $\mathbb{Q}_l$ -espace vectoriel dual) :

$$\begin{aligned} H^2(k, H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_l)) &\cong H^0(k, H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_l)^*(1))^* \cong \\ &\cong H^0(k, H^{2d-1}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l)(d+1))^* \cong H^0(k, H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_l(2)))^* \end{aligned}$$

Ici, le premier isomorphisme est donné par la dualité de Tate (cf. la première remarque ci-après), le deuxième par celle de Poincaré et le troisième par le théorème de Lefschetz vache (cf. [13], 4.1.1). (Cet argument figure à la p. 336 de [15].) Donc si la variété  $X$  a bonne



réduction, l'assertion résulte des conjectures de Weil généralisées démontrées dans Deligne [13] : les  $G$ -modules  $H^1(\bar{X}, \mathbb{Q}_l)$  et  $H^1(\bar{X}, \mathbb{Q}_l(2))$  sont de poids 1 et -3, respectivement, donc le Frobenius n'a pas de points fixes. (Rappelons le calcul des poids : le groupe de cohomologie  $H^i(X, \mathbb{Q}_l(j))$  est de poids  $i - 2j$  si l'action de  $G$  est non ramifiée; le Frobenius n'a pas de points fixes si le poids est différent de zéro. D'ailleurs, pour cette partie on aurait pu se passer du théorème de Lefschetz vache; son utilisation sera plutôt commode dans ce qui suit.)

Si l'on suppose seulement que la variété de Picard ait bonne réduction, l'argument est le suivant. La théorie de Kummer pour la cohomologie étale fournit un isomorphisme

$$H^1(\bar{X}, \mu_{l^n}) \cong {}_{l^n}\text{Pic}(\bar{X}),$$

et comme les  $\bar{k}$ -points de la variété abélienne  $\text{Pic}^0(X)$  forment un groupe divisible, la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Pic}^0(\bar{X}) \rightarrow \text{Pic}(\bar{X}) \rightarrow NS(\bar{X}) \rightarrow 0$$

fournit une suite exacte

$$0 \rightarrow {}_{l^n}\text{Pic}^0(\bar{X}) \rightarrow {}_{l^n}\text{Pic}(\bar{X}) \rightarrow {}_{l^n}NS(\bar{X}) \rightarrow 0$$

où  $NS(\bar{X})$  est le groupe de Néron-Severi de  $\bar{X}$ . C'est un groupe de type fini, donc son sous-groupe de torsion est fini et donc par passage à la limite projective on obtient un isomorphisme de modules de Tate  $l$ -adiques :

$$T_l \text{Pic}^0(\bar{X}) \cong T_l \text{Pic}(\bar{X}).$$

Le deuxième groupe n'est autre que  $H^1(\bar{X}, \mathbb{Z}_l(1))$ ; en tordant avec  $\mathbb{Q}_l(1)$  ou  $\mathbb{Q}_l(-1)$ , et en appliquant au premier groupe le théorème de Weil sur les variétés abéliennes, on obtient que les deux modules galoisiens qui nous intéressent ont les mêmes poids que dans le cas précédent.

Pour une variété  $X$  avec bonne réduction, l'assertion c) résulte du fait que  $H^2(\bar{X}, \mathbb{Q}_l)$  est de poids 2. Supposons donc que  $X$  ait éventuellement mauvaise réduction, mais  $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ . On utilise de nouveau la théorie de Kummer pour la cohomologie étale pour obtenir la suite exacte  $G$ -équivariante :

$$0 \rightarrow \text{Pic}(\bar{X})/l^n \rightarrow H^2(\bar{X}, \mu_{l^n}) \rightarrow {}_{l^n}\text{Br}(\bar{X}) \rightarrow 0$$

où  $\text{Br}(\bar{X})$  est le groupe de Brauer cohomologique de  $\bar{X}$ . Mais l'hypothèse  $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$  implique la finitude de la torsion  $l$ -primaire de ce groupe (cf. [10], démonstration de la prop. 2.11). Par passage à la limite projective, la suite exacte se réduit donc à l'isomorphisme

$$\text{Pic}(\bar{X}) \hat{\otimes} \mathbb{Z}_l \cong H^2(\bar{X}, \mathbb{Z}_l(1)),$$

ou encore, utilisant la divisibilité de  $\text{Pic}^0(\bar{X})$ , à

$$(4.1) \quad NS(\bar{X}) \hat{\otimes} \mathbb{Z}_l \cong H^2(\bar{X}, \mathbb{Z}_l(1))$$

(rappelons que pour un groupe abélien  $A$ ,  $A \hat{\otimes} \mathbb{Z}_l$  note le groupe  $\varprojlim A/l^n$ , la limite projective étant prise suivant les puissances de  $l$ ). Exploitions de nouveau le fait que  $NS(\bar{X})$  est un groupe de type fini : il permet de supposer que l'action de  $G$  sur  $NS(\bar{X})$  soit triviale. En tensorisant avec  $\mathbb{Q}_l(-1)$ , on obtient donc finalement :

$$NS(\bar{X}) \hat{\otimes} \mathbb{Q}_l(-1) \cong H^2(\bar{X}, \mathbb{Q}_l).$$

Mais les  $G$ -invariants du groupe à gauche sont triviaux car  $\mathbb{Q}_l(-1)$  est de poids 2.

*Remarques 4.2.* 1) La dualité de Tate locale à coefficients  $\mathbb{Q}_l(j)$  semble être absente de la littérature; elle résulte pourtant par un argument standard de passage à la limite (pour la cohomologie continue qui est la cohomologie usuelle sur un corps local) de la version à coefficients finis prouvée dans [29]. Alternativement, on aurait pu raisonner sur les dimensions des groupes en question, n'utilisant que la dualité de Tate usuelle, comme le fait Jannsen dans [15].

2) Comme me fait remarquer C. Breuil, dans le cas d'une variété avec bonne réduction on peut invoquer des arguments de poids tout à fait analogues pour  $l = p$ , avec comme seule grande différence que la caractéristique d'Euler-Poincaré est non nulle. Donc a fortiori  $H^2(X, \mathbb{Q}_p) \neq 0$ . Voir aussi [30], Theorem 2 (ii).

## 5. RÉSULTATS DE FINITUDE POUR $SK_1$ DE SURFACES

Dans tout ce chapitre,  $X$  est une *surface* propre et lisse sur un corps  $p$ -adique,  $l$  un nombre premier (non nécessairement premier à  $p$ ) et l'on suppose l'hypothèse **BK**(3,  $l$ ) vérifiée pour le corps de fonctions  $k(X)$  de  $X$  (ce qui est le cas pour  $l = 2$ ). Sous ces hypothèses, la Proposition 2.2 et la Remarque 2.3 impliquent :

**RAPPEL 5.1.** — *Pour tout entier positif  $n$ , la  $l^n$ -torsion du groupe  $SK_1(X)$  est un quotient du groupe  $NH^4(X, \mu_{l^n}^{\otimes 3})$  défini dans la Remarque 2.3.*

Voici un corollaire immédiat.

**PROPOSITION 5.2.** — *Le groupe  ${}_n SK_1(X)$  est fini pour tout  $n$  et le groupe  $SK_1(X)\{l\}$  est de cotype fini (i.e. le groupe abélien dual est un  $\mathbb{Z}_l$ -module de type fini).*

*Démonstration.* Vu le rappel précédent, pour le premier énoncé il suffit de remarquer que le groupe de cohomologie étale  $H^4(X, \mu_{l^n}^{\otimes 3})$  est fini si le corps de base est un corps  $p$ -adique; c'est une conséquence du théorème de finitude en cohomologie étale ([20], th. VI.2.1) et de la finitude de la cohomologie galoisienne d'un module fini sur un corps  $p$ -adique ([29], II.5.1, prop. 14). La deuxième assertion se démontre de façon analogue, après passage à la limite inductive.

*Remarque 5.3.* On peut, si l'on veut, démontrer cette proposition par voie élémentaire, i.e. sans utiliser la cohomologie motivique (même dans le cas d'un corps local d'égale caractéristique, du moins pour  $l$  inversible).

Les deux observations suivantes sont dues à J.-L. Colliot-Thélène.

PROPOSITION 5.4. — *Le groupe  $V(X)$  est extension d'un  $l$ -groupe fini par un groupe  $l$ -divisible.*

(Rappelons que  $V(X)$  est le noyau de la norme  $SK_1(X) \rightarrow k^\times$ .)

*Démonstration.* Cela résulte de la proposition précédente et du fait, déjà utilisé lors de la dérivation du Corollaire 1.3, que  $V(X)$  est extension d'un groupe de torsion par un groupe divisible.

PROPOSITION 5.5. — *Soit  $X$  comme ci-dessus. Supposons de plus que la variété d'Albanese de  $X$  ait bonne réduction. Alors le groupe  $SK_1(X)\{l\}$  est fini.*

*Démonstration.* Comme au chapitre précédent, on utilisera la filtration de Hochschild-Serre sur le groupe  $H^4(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3))$  dont  $SK_1(X)\{l\}$  est un sous-quotient.

Le groupe  $H^0(k, H^4(\bar{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3)))$  est isomorphe par le morphisme trace de la dualité de Poincaré au groupe  $H^0(k, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1))$  qui est fini, on l'a vu. La dualité de Poincaré implique également que le groupe  $H^3(\bar{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$  s'identifie à la torsion  $l$ -primaire de la variété d'Albanese de  $X$  (qui est par définition la duale de la variété de Picard, donc on peut raisonner de façon analogue aux arguments du chapitre précédent). Ainsi un argument faisant intervenir caractéristique d'Euler-Poincaré, dualité et poids (pour ce dernier dans le contexte de  $\mathbb{Z}_l$ -modules, voir [10], Theorem 1.5.1) montre que le groupe  $H^1(k, H^3(\bar{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3)))$  est fini. Enfin, un résultat récent de K. Sato [27] montre que le groupe  $NH^4(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3)) \cap H^2(k, H^2(\bar{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3)))$  est toujours fini sur un corps  $p$ -adique, indépendamment des hypothèses sur la réduction de  $X$ . Ceci termine la démonstration.

En particulier, la proposition précédente vaut pour les surfaces avec  $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ ; en effet, dans ce cas la variété de Picard, et donc également la variété d'Albanese sont triviales (cf. par exemple [6], chap. 8.4, Theorem 1). Le reste de ce chapitre sera consacré au cas où  $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ . Nous nous proposons de démontrer la finitude de  $SK_1(X)\{l\}$  pour de telles surfaces (bien entendu, toujours sous l'hypothèse **BK**(3,  $l$ ) et pour  $l \neq p$ ) pourvu que le même énoncé vaille dans le cas des courbes. Malheureusement, à l'heure actuelle on ne connaît pas la finitude de  $SK_1(C)\{l\}$  pour une courbe propre lisse  $C$  quelconque sur un corps  $p$ -adique, mais d'après le Théorème, c'est quand même le cas pour les courbes avec  $H^2(C, \mathbb{Q}_l) = 0$  (donc en particulier pour les courbes avec bonne réduction) et, par un travail non publié de T. Sato [28], pour les courbes elliptiques.

Plus précisément, on va procéder comme suit. Tout d'abord, notons que vu la prop. 5.2, il suffira de démontrer que le groupe  $SK_1(X)\{l\}$  est d'exposant fini. Nous pouvons donc faire appel à un argument de norme standard qui nous permettra de faire des extensions finies du corps de base  $k$  lors de la démonstration. Cela étant dit, on peut invoquer la classification des surfaces par Castelnuovo-Enriques d'après laquelle sur la clôture algébrique  $\bar{k}$  de  $k$ , les surfaces avec  $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$  se répartissent en deux classes (cf. la p. 238 de l'article de Colliot-Thélène et Raskind [11], qui ont dégagé cet énoncé de l'ouvrage de Beauville [1]) :

- ou bien  $H^1(\overline{X}, O_{\overline{X}}) = 0$ ;
- ou bien il existe un morphisme propre surjectif  $p : \overline{X} \rightarrow \overline{C}$  sur une courbe propre lisse intègre  $\overline{C}$  induisant un isomorphisme  $Pic^0(\overline{C}) \cong Pic^0(\overline{X})$ .

Le premier cas a déjà été couvert plusieurs fois : on peut appliquer soit la proposition précédente, soit le Théorème en vertu du *Zusatz* 1.4. Dans le deuxième cas, après extension finie du corps de base on peut supposer que la courbe  $\overline{C}$  provienne par changement de base d'une courbe  $C$  définie sur  $k$ , et le morphisme  $p$  est également défini sur  $k$ . On a alors la

**PROPOSITION 5.6.** — *Soit  $X$  une surface propre, lisse, géométriquement intègre définie sur un corps  $p$ -adique  $k$ . Supposons que  $H^2(X, O_X) = 0$  et que  $X$  soit fibrée au-dessus d'une  $k$ -courbe propre, lisse, géométriquement intègre  $C$  avec  $Pic^0(\overline{C}) \cong Pic^0(\overline{X})$ . Alors (toujours sous  $BK(3, l)$ ) la finitude de  $SK_1(C)\{l\}$  implique la finitude de  $SK_1(X)\{l\}$ .*

Le travail de T. Sato [28] fournit donc de nouveaux cas (par rapport aux propositions précédentes) où la finitude de  $SK_1(X)\{2\}$  est définitivement établie. Des exemples concrets sont donnés par les surfaces fibrées en coniques au-dessus de courbes elliptiques avec mauvaise réduction. D'autre part, la discussion précédente mérite d'être résumée dans le

**COROLLAIRE 5.7.** — *Admettons que le groupe  $SK_1(C)\{l\}$  soit toujours finie pour une courbe  $C$  propre et lisse définie sur un corps  $p$ -adique. Alors le groupe  $SK_1(X)\{l\}$  est finie pour toute surface  $X$  propre, lisse, géométriquement intègre définie sur un corps  $p$ -adique satisfaisant à la condition  $H^2(X, O_X) = 0$  et dont le corps de fonctions vérifie  $BK(3, l)$ .*

Il ne reste qu'à démontrer la Proposition 5.6. Commençons par remarquer que d'après les lemmes 3.1 et 3.2, le groupe  $SK_1(X)\{l\}$  s'identifie au conoyau du morphisme

$$H_{Zar}^4(X, \mathbb{Z}(3)) \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l \rightarrow NH^4(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3)).$$

Pour l'étape suivante, on a besoin du

**LEMME 5.8.** — *Les groupes  $H_{Zar}^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Z}(i+1)) \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l$  sont triviaux pour  $i = 1, 2$ .*

*Démonstration.* Le cas  $i = 1$  a été démontré dans [10] dans le langage de la K-théorie et pour  $i = 2$ , on raisonne de façon analogue. Rappelons brièvement comment.

Par passage à la limite projective à partir de la suite exacte du lemme 3.2 (que l'on peut d'ailleurs également appliquer pour  $d = i = 1$  tenant compte de la remarque qui le suit) on obtient une suite de morphismes

$$H_{Zar}^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Z}(i+1)) \rightarrow H_{Zar}^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Z}(i+1)) \hat{\otimes} \mathbb{Z}_l \rightarrow \varprojlim H_{Zar}^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Z}(i+1) \otimes \mathbb{Z}/l^n \mathbb{Z})$$

dont le deuxième est une injection. D'autre part, pour  $i = 1, 2$  le symbole cohomologique nous fournit des injections

$$\varprojlim H_{Zar}^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Z}(i+1) \otimes \mathbb{Z}/l^n \mathbb{Z}) \rightarrow H_{\acute{e}t}^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Z}_l(i+1))$$

dans la cohomologie étale continue. Par le même argument que dans [10], Theorem 1.6, on montre alors que l'image du morphisme composé

$$\phi_{i,l} : H_{Zar}^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Z}(i+1)) \rightarrow H_{\acute{e}t}^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Z}_l(i+1))$$

est finie. Il suffira donc de montrer la  $l$ -divisibilité du noyau de  $\phi_{i,l}$ . De fait, soit  $\alpha$  un élément de ce noyau ; comme son image est triviale dans le groupe  $H_{Zar}^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Z}(i+1)) \hat{\otimes} \mathbb{Z}_l$ , pour tout entier positif  $N$  il existe un élément  $\beta_N$  de  $H_{Zar}^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Z}(i+1))$  avec  $l^N \beta_N = \alpha$ . Si  $N$  est plus grand que l'exposante de l'image de  $\phi_{i,l}$  (ce qui est finie par ce qui précède), alors  $l^{N-1} \beta_N$  est bien dans le noyau de  $\phi_{i,l}$  et donne  $\alpha$  par multiplication avec  $l$ .

Notons désormais  $FH^p(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(q))$  le noyau du morphisme de Hochschild-Serre en cohomologie étale  $H^p(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(q)) \rightarrow H^0(k, H^p(\overline{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(q)))$ . Par fonctorialité de la cohomologie, on obtient donc le

**COROLLAIRE 5.9.** — *Pour  $i = 1$  ou  $2$ , l'image du groupe  $H_{Zar}^{2i}(X, \mathbb{Z}(i+1)) \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l$  dans  $H_{\acute{e}t}^{2i}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(i+1))$  est contenue dans le sous-groupe  $FH^{2i}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(i+1))$ .*

Reprenant la démonstration de la proposition 5.6, le corollaire précédent appliqué avec  $i = 2$  fournit un morphisme du groupe  $H_{Zar}^4(X, \mathbb{Z}(3)) \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l$  dans  $FH^4(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3))$ . Par passage au quotient par l'image de  $H^2(k, H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3)))$ , on obtient donc un morphisme

$$H_{Zar}^4(X, \mathbb{Z}(3)) \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l \rightarrow H^1(k, H^3(\overline{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3))).$$

D'autre part, lors de la démonstration de la prop. 5.5 nous avons vu qu'en toute généralité, les groupes  $H^0(k, H^4(\overline{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3)))$  et  $NH^4(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3)) \cap H^2(k, H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3)))$  sont finis. Il suffira donc de prouver que ce morphisme a un conoyau d'exposant fini.

Pour ce faire, nous emploierons une méthode inspirée d'un argument de Saito [25] sur le groupe de Chow ; toutefois, il sera bientôt clair que notre cas présente des différences sensibles.

Partons du diagramme

$$(5.10) \quad \begin{array}{ccc} Pic(X) \otimes_{\mathbb{Z}} H_{Zar}^2(X, \mathbb{Z}(2)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l & \rightarrow & H_{Zar}^4(X, \mathbb{Z}(3)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l \rightarrow H_{\acute{e}t}^4(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3)) \\ \downarrow & & \uparrow \end{array}$$

$$Pic(X) \otimes_{\mathbb{Z}} H_{\acute{e}t}^2(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \longrightarrow H_{\acute{e}t}^2(X, \mathbb{Z}_l(1)) \otimes_{\mathbb{Z}} H_{\acute{e}t}^2(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$$

où, notant l'isomorphisme  $Pic(X) \cong H_{Zar}^2(X, \mathbb{Z}(1))$  (en effet,  $\mathbb{Z}(1) \simeq \mathbb{G}_m[-1]$ ), le premier morphisme horizontal est défini par le cup-produit en cohomologie motivique, celui du bas est induit par le cobord de Kummer  $Pic(X) \rightarrow H_{\acute{e}t}^2(X, \mathbb{Z}_l(1))$  (ou, ce qui revient au même, par passage à la limite projective à partir du symbole cohomologique de Sousline-Voevodsky), le morphisme vertical de gauche est induit par le symbole cohomologique et enfin celui de droite est un cup-produit en cohomologie étale.

La commutativité de ce diagramme se vérifie aisément à un niveau fini : en fait, c'est une conséquence de la commutativité des deux diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
 H_{Zar}^2(X, \mathbb{Z}(1)) \otimes H_{Zar}^2(X, \mathbb{Z}(2)) \otimes \mathbb{Z}/l^n \mathbb{Z} & \rightarrow & H_{Zar}^4(X, \mathbb{Z}(3)) \otimes \mathbb{Z}/l^n \mathbb{Z} \rightarrow H_{Zar}^4(X, \mathbb{Z}/l^n(3)) \\
 \downarrow & & \uparrow \\
 H_{Zar}^2(X, \mathbb{Z}(1)) \otimes H_{Zar}^2(X, \mathbb{Z}/l^n(2)) & \longrightarrow & H_{Zar}^2(X, \mathbb{Z}/l^n(1)) \otimes H_{Zar}^2(X, \mathbb{Z}/l^n(2))
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
 H_{Zar}^4(X, \mathbb{Z}/l^n(3)) & \rightarrow & H_{\acute{e}t}^4(X, \mu_{l^n}^{\otimes 3}) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 H_{Zar}^2(X, \mathbb{Z}/l^n(1)) \otimes H_{Zar}^2(X, \mathbb{Z}/l^n(2)) & \rightarrow & H_{\acute{e}t}^2(X, \mu_{l^n}) \otimes H_{\acute{e}t}^2(X, \mu_{l^n}^{\otimes 2}).
 \end{array}$$

Les morphismes horizontaux de ce dernier sont donnés par le symbole cohomologique suivi par "l'oubli de la troncation" et sa commutativité est une conséquence de la compatibilité du symbole cohomologique aux produits.

Le cas  $i = 1$  du corollaire 5.9 nous fournit maintenant l'existence d'un morphisme  $H_{Zar}^2(X, \mathbb{Z}(2)) \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l \rightarrow FH^2(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$  que l'on peut ensuite composer avec le morphisme de Hochschild-Serre  $FH^2(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \rightarrow H^1(k, H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)))$ . De même, on peut composer le morphisme de Kummer  $Pic(X) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_l(1))$  avec le morphisme  $H^2(X, \mathbb{Z}_l(1)) \rightarrow H^0(k, H^2(\overline{X}, \mathbb{Z}_l(1)))$ . D'où le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 Pic(X) \otimes_{\mathbb{Z}} H_{Zar}^2(X, \mathbb{Z}(2)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l & \rightarrow & H_{Zar}^4(X, \mathbb{Z}(3)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l \rightarrow H^1(k, H^3(\overline{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3))) \\
 (5.11) \quad \downarrow & & \uparrow
 \end{array}$$

$$Pic(X) \otimes_{\mathbb{Z}} FH^2(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \longrightarrow H^0(k, H^2(\overline{X}, \mathbb{Z}_l(1))) \otimes_{\mathbb{Z}_l} H^1(k, H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)))$$

Nous allons vérifier la commutativité de ce diagramme par réduction à la commutativité de (5.10). De fait, il suffit d'appliquer le lemme suivant.

LEMME 5.12. — *Le cup-produit en cohomologie galoisienne*

$$H^0(k, H^2(\overline{X}, \mathbb{Z}_l(1))) \otimes_{\mathbb{Z}_l} H^1(k, H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))) \rightarrow H^1(k, H^3(\overline{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3)))$$

est induit par le cup-produit en cohomologie étale

$$H^2(X, \mathbb{Z}_l(1)) \otimes_{\mathbb{Z}} H^2(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \rightarrow H^4(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3)).$$

Il est tout à fait excusable de sauter la

*Démonstration.* Nous allons vérifier la compatibilité du lemme à un niveau fini, avec des coefficients  $\mathbb{Z}/l^n(j)$ ; l'énoncé en résultera par passage à la limite. Faisons donc les abréviations  $A := \mathbb{Z}/l^n(1)$ ,  $B := \mathbb{Z}/l^n(2)$  et  $C := \mathbb{Z}/l^n(3)$ . Par la version "catégories dérivées" de la suite spectrale de Hochschild-Serre, pour tout entier positif  $p$  on dispose d'isomorphismes

$$H^p(X, A) \cong H^p(k, \mathbf{R}\Gamma(\overline{X}, A))$$

et de même pour  $B$  et  $C$ . Dans notre cas, on a :

$$H^2(X, A) \cong H^2(k, \mathbf{R}\Gamma(\overline{X}, A)) \cong H^2(k, \tau_{\leq 2} \mathbf{R}\Gamma(\overline{X}, A))$$

et de même pour  $B$ . Or il est formel que les cup-produits

$$H^p(X, A) \otimes H^q(X, B) \rightarrow H^{p+q}(X, C)$$

induits par l'accouplement  $A \otimes B \rightarrow C$  sont compatibles via cet isomorphisme avec les accouplements composés

$$\begin{aligned} H^p(k, \mathbf{R}\Gamma(\overline{X}, A)) \otimes H^q(k, \mathbf{R}\Gamma(\overline{X}, B)) &\rightarrow H^{p+q}(k, \mathbf{R}\Gamma(\overline{X}, A) \overset{L}{\otimes} \mathbf{R}\Gamma(\overline{X}, B)) \\ &\rightarrow H^{p+q}(k, \mathbf{R}\Gamma(\overline{X}, C)). \end{aligned}$$

D'autre part, l'accouplement

$$\mathbf{R}\Gamma(\overline{X}, A) \overset{L}{\otimes} \mathbf{R}\Gamma(\overline{X}, B) \rightarrow \mathbf{R}\Gamma(\overline{X}, C)$$

induit par troncation les accouplements

$$\begin{aligned} \tau_{\leq 2} \mathbf{R}\Gamma(\overline{X}, A) \overset{L}{\otimes} \tau_{\leq 1} \mathbf{R}\Gamma(\overline{X}, B) &\rightarrow \tau_{\leq 3} \mathbf{R}\Gamma(\overline{X}, C) \quad \text{et} \\ \tau_{\leq 1} \mathbf{R}\Gamma(\overline{X}, A) \overset{L}{\otimes} \tau_{\leq 1} \mathbf{R}\Gamma(\overline{X}, B) &\rightarrow \tau_{\leq 2} \mathbf{R}\Gamma(\overline{X}, C). \end{aligned}$$

Utilisant les triangles distingués de  $\mathbf{D}^b(k_{\text{ét}})$

$$\begin{aligned} \tau_{\leq 1} \mathbf{R}\Gamma(\overline{X}, A) &\rightarrow \tau_{\leq 2} \mathbf{R}\Gamma(\overline{X}, A) \rightarrow H^2(\overline{X}, A)[-2] \rightarrow \tau_{\leq 1} \mathbf{R}\Gamma(\overline{X}, A)[1] \quad \text{et} \\ \tau_{\leq 2} \mathbf{R}\Gamma(\overline{X}, C) &\rightarrow \tau_{\leq 3} \mathbf{R}\Gamma(\overline{X}, C) \rightarrow H^3(\overline{X}, C)[-3] \rightarrow \tau_{\leq 2} \mathbf{R}\Gamma(\overline{X}, C)[1], \end{aligned}$$

on en déduit un accouplement

$$H^2(\overline{X}, A)[-2] \overset{L}{\otimes} \tau_{\leq 1} \mathbf{R}\Gamma(\overline{X}, B) \rightarrow H^3(\overline{X}, C)[-3]$$

(pour s'en convaincre, il convient de calculer le produit tensoriel dérivé sur le complexe simple associé d'une résolution de Cartan-Eilenberg projective d'un représentant de  $\tau_{\leq 2} \mathbf{R}\Gamma(\overline{X}, A)$ ). Cet accouplement est visiblement trivial sur l'image de  $H^0(\overline{X}, B) \cong \tau_{\leq 0} \mathbf{R}\Gamma(\overline{X}, B)$ , on obtient donc enfin un accouplement

$$H^2(\overline{X}, A)[-2] \otimes^L H^1(\overline{X}, B)[-1] \rightarrow H^3(\overline{X}, C)[-3].$$

En prenant la deuxième cohomologie galoisienne des groupes de gauche et la quatrième de celui de droite, on en déduit précisément le premier cup-produit du lemme avec des coefficients finis.

Notons enfin que pendant cette vérification, nous avons travaillé avec des morphismes construits par troncation, et non pas avec ceux provenant de la suite spectrale de Hochschild-Serre. C'est un exercice amusant sur les résolutions de Cartan-Eilenberg de vérifier que les deux constructions donnent le même résultat. Ceux désireux de se passer de cette vérification remplaceront partout dans la démonstration de la proposition 5.6 les morphismes à la Hochschild-Serre par les versions avec les troncations. En tout cas, la démonstration du lemme est terminée.

Continuant la démonstration de la proposition 5.6, rappelons que notre tâche est de démontrer que le deuxième morphisme horizontal du haut dans le diagramme (5.11) admet un conoyau d'exposant fini. Vu la commutativité du diagramme que l'on vient de vérifier, et comme la propriété d'avoir un conoyau d'exposant fini est stable par composition et par produit tensoriel des morphismes, il ne reste qu'à démontrer le lemme suivant.

LEMME 5.13. — *Sous les hypothèses de la Proposition 5.6, chacun des morphismes*

- a)  $H_{Zar}^2(X, \mathbb{Z}(2)) \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l \rightarrow FH^2(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$
- b)  $Pic(X) \otimes_{\mathbb{Z}} FH^2(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \rightarrow H^0(k, H^2(\overline{X}, \mathbb{Z}_l(1))) \otimes_{\mathbb{Z}_l} FH^2(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$
- c)  $H^0(k, H^2(\overline{X}, \mathbb{Z}_l(1))) \otimes_{\mathbb{Z}_l} H^1(k, H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))) \rightarrow H^1(k, H^3(\overline{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3)))$

*admet un conoyau d'exposant fini.*

La démonstration montrera que l'hypothèse  $H^2(X, O_X) = 0$  ne sert que pour la partie b) et de même, on n'utilisera la fibration au-dessus de  $C$  que dans la partie a).

*Démonstration.* Pour la partie a), considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_{Zar}^2(C, \mathbb{Z}(2)) \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l & \rightarrow & FH^2(C, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{Zar}^2(X, \mathbb{Z}(2)) \otimes \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l & \rightarrow & FH^2(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \end{array}$$

obtenu par fonctorialité. Par les lemmes 3.1 et 3.2, le conoyau du morphisme horizontal du haut est un sous-groupe de  $SK_1(C)\{l\}$ , ce qui est fini par hypothèse. Il suffit donc de



prouver que le morphisme vertical de droite a un conoyau d'exposant fini. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
H^2(k, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) & \rightarrow & FH^2(C, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) & \rightarrow & H^1(k, H^1(\overline{C}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))) & \rightarrow & 0 \\
\downarrow = & & \downarrow & & \downarrow & & \\
H^2(k, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) & \rightarrow & FH^2(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) & \rightarrow & H^1(k, H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))) & \rightarrow & 0
\end{array}$$

dont les lignes exactes sont fournies par la suite spectrale de Hochschild-Serre (on pourra remarquer que les deux groupes à gauche sont triviaux mais on ne se servira que de leur égalité). Il suffit de montrer que le troisième morphisme vertical a un conoyau d'exposant fini, ce qui sera établi si l'on démontre que le morphisme  $H^1(\overline{C}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \rightarrow H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$  est une isogénie, i. e. son noyau et conoyau sont finis. Mais en tant que morphisme de groupes abéliens, ce morphisme s'identifie à  $H^1(\overline{C}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1)) \rightarrow H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1))$ , ce qui n'est autre que le morphisme  $Pic(\overline{C})\{l\} \rightarrow Pic(\overline{X})\{l\}$  par la théorie de Kummer étale. L'assertion découle alors du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & Pic^0(\overline{C})\{l\} & \longrightarrow & Pic(\overline{C})\{l\} & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & Pic^0(\overline{X})\{l\} & \longrightarrow & Pic(\overline{X})\{l\} & \longrightarrow & NS(\overline{X})\{l\} \longrightarrow 0
\end{array}$$

dont le premier morphisme vertical est un isomorphisme par hypothèse, et où le groupe  $NS(\overline{X})\{l\}$  est fini.

Pour établir b), montrons d'abord que le morphisme

$$Pic(X) \hat{\otimes} \mathbb{Z}_l \rightarrow H^0(k, H^2(\overline{X}, \mathbb{Z}_l(1)))$$

admet un conoyau fini. Commençons par une extension éventuelle du corps de base  $k$ , afin d'assurer que le groupe de Galois  $G$  de  $k$  agit trivialement sur le groupe de Néron-Severi de  $\overline{X}$ . Donc la  $G$ -cohomologie de la suite exacte courte

$$0 \rightarrow Pic^0(\overline{X}) \rightarrow Pic(\overline{X}) \rightarrow NS(\overline{X}) \rightarrow 0$$

montre que le conoyau du morphisme naturel  $Pic(X) \rightarrow NS(\overline{X})$  est fini car il est à la fois quotient du groupe de type fini  $NS(\overline{X})^G = NS(\overline{X})$  et sous-groupe du groupe de torsion  $H^1(G, Pic^0(\overline{X}))$ . A fortiori, le morphisme  $Pic(X) \hat{\otimes} \mathbb{Z}_l \rightarrow NS(\overline{X}) \hat{\otimes} \mathbb{Z}_l$  admet un conoyau fini. D'autre part, on a vu au chapitre précédent que sous l'hypothèse  $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$  on dispose d'un isomorphisme  $NS(\overline{X}) \hat{\otimes} \mathbb{Z}_l \cong H^2(\overline{X}, \mathbb{Z}_l(1))$ , donc le morphisme dans b) se factorise en un morphisme de conoyau fini suivi des isomorphismes canoniques

$$NS(\overline{X}) \hat{\otimes} \mathbb{Z}_l \cong H^0(k, NS(\overline{X}) \hat{\otimes} \mathbb{Z}_l) \cong H^0(k, H^2(\overline{X}, \mathbb{Z}_l(1))).$$

Pour terminer la démonstration de b), notons que par la structure du groupe des points d'une variété abélienne sur un corps  $p$ -adique, le groupe  $Pic(X)$  est extension d'un groupe de type fini  $A$  par une puissance directe de  $\mathbb{Z}_p$ . Donc nous pouvons remplacer dans l'énoncé le groupe  $Pic(X)$  par  $A$ . Par définition, il existe un entier positif  $M$  tel que  $A$  soit quotient de  $\mathbb{Z}^M$  et a fortiori  $A \hat{\otimes} \mathbb{Z}_l$  quotient de  $\mathbb{Z}_l^M$ . Par ce que nous venons de démontrer, et par l'exactitude à droite de la limite projective dans notre situation, le morphisme composé  $\mathbb{Z}_l^M \rightarrow H^0(k, H^2(\bar{X}, \mathbb{Z}_l(1)))$  admet un conoyau fini, il est donc de même pour le morphisme  $\mathbb{Z}^M \otimes_{\mathbb{Z}} FH^2(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \rightarrow H^0(k, H^2(\bar{X}, \mathbb{Z}_l(1))) \otimes_{\mathbb{Z}} FH^2(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$ .

Enfin pour c), remarquons d'abord que le théorème de Lefschetz vache implique l'existence d'une classe dans  $H^2(\bar{X}, \mathbb{Z}_l(1))$  induisant par cup-produit une isogénie

$$H^1(\bar{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \rightarrow H^3(\bar{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3)).$$

Une façon de voir cela est de considérer la situation duale par dualité de Poincaré : Lefschetz vache implique alors que le morphisme  $H^1(\bar{X}, \mathbb{Z}_l(-1)) \rightarrow H^3(\bar{X}, \mathbb{Z}_l(1))$  induit par cup-produit avec la classe d'un hyperplan (que l'on peut choisir défini sur  $k$ ) dans  $H^2(\bar{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1))$  est un isomorphisme modulo torsion ; mais les sous-groupes de torsion des groupes en question sont finis.

Par passage à la cohomologie galoisienne de  $k$  on obtient donc un morphisme

$$H^1(k, H^1(\bar{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))) \rightarrow H^1(k, H^3(\bar{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(3)))$$

dont le conoyau est d'exposant fini. Comme la classe de notre hyperplan était invariante par Galois, on voit que ce morphisme est induit par cup-produit avec un élément de  $H^0(k, H^2(\bar{X}, \mathbb{Z}_l(1)))$ , ce qui suffit pour conclure.

#### APPENDICE : LIEN AVEC LA $\mathcal{K}$ -COHOMOLOGIE

Comme annoncé, dans cet appendice nous traduirons le lemme 3.2 dans un langage plus classique, précisant la Proposition 2.2. Il s'agit du résultat suivant :

**PROPOSITION A.1.** — *Soit  $X$  une variété lisse sur un corps de caractéristique zéro, et supposons que  $\mathbf{BK}(3, l)$  soit vérifié par les corps résiduels des points de dimension 2 de  $X$ . Alors pour tout entier positif  $n$ , on dispose d'une suite exacte*

$$0 \rightarrow H_{Zar}^{d-1}(X, \mathcal{K}_{d+1}^M)/l^n \rightarrow H_{Zar}^{2d}(X, \tau_{\leq d+1} \mathbf{R}\pi_* \mu_{l^n}^{\otimes d+1}) \rightarrow {}_{l^n}SK_1(X) \rightarrow 0.$$

Ici, on définit le faisceau  $\mathcal{K}_{d+1}^M$  sur le sous-site du grand site Zariski de  $k$  formé des schémas lisses sur  $k$  comme le noyau du morphisme de faisceaux donné localement sur un schéma lisse  $S$  par :

$$\bigoplus_{s \in S^0} K_{d+1}^M(k(s)) \rightarrow \bigoplus_{s \in S^1} K_d^M(k(s))$$

où  $S^i$  veut dire les points de codimension  $i$  de  $S$  et le morphisme est induit par les résidus en  $K$ -théorie de Milnor.

*Exemples A.2.* Explicitons la suite exacte de la proposition en basses dimensions.

(1) Pour  $X$  une courbe, on retrouve la suite bien connue de Sousline ([31], cor. 23.4) :

$$0 \rightarrow H_{Zar}^0(X, \mathcal{K}_2)/l^n \rightarrow H_{\acute{e}t}^2(X, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) \rightarrow {}_l SK_1(X) \rightarrow 0.$$

(2) Pour  $X$  une surface, la suite exacte s'écrit :

$$0 \rightarrow H_{Zar}^1(X, \mathcal{K}_3^M)/l^n \rightarrow NH^4(X, \mu_{l^n}^{\otimes 3}) \rightarrow {}_l SK_1(X) \rightarrow 0,$$

où  $NH^4(X, \mu_{l^n}^{\otimes 3})$  est le groupe introduit dans la Remarque 2.3. Là encore, on retrouve l'analogie d'une suite exacte de Bloch et Sousline pour la  $l^n$ -torsion du groupe de Chow de codimension deux ([31], th. 23.1, [32], cor. 4.4). J'ignore si elle peut être établie par les méthodes usuelles de la K-théorie.

La Proposition A.1 est une conséquence immédiate des lemmes 3.2 et 3.3 et du résultat suivant de Voevodsky, appliqué avec  $i = 2d$  et  $j = d + 1$  :

PROPOSITION A.3. — *Soit  $X$  une  $k$ -variété lisse de dimension  $d$ . Alors il existe un morphisme canonique*

$$H_{Zar}^i(X, \mathbb{Z}(j)) \rightarrow H^{i-j}(X, \mathcal{K}_j^M)$$

*qui est un isomorphisme pour  $i \geq 2j - 2$ .*

*Démonstration.* C'est la deuxième partie du corollaire 2.4 de [38]. Comme Voevodsky est un peu avare en matière de détails de la démonstration, on la donne (*cum grano salis*) pour la satisfaction des lectrices et des lecteurs.

En ce qui concerne la définition du morphisme, nous avons déjà établi lors de la démonstration du lemme 3.3 l'existence d'un morphisme

$$\rho_{i,j} : H_{Zar}^i(X, \mathbb{Z}(j)) \rightarrow H_{Zar}^{i-j}(X, \mathcal{H}^j \mathbb{Z}(j))$$

fourni par la suite spectrale d'hypercohomologie. On est donc réduit à définir un morphisme de faisceaux sur le sous-site du grand site Zariski de  $k$  formé des  $k$ -schémas lisses :

$$\mathcal{H}^j \mathbb{Z}(j) \rightarrow \mathcal{K}_j^M.$$

Le diagramme commutatif exact suivant donne sa définition localement sur un schéma lisse  $X$  et, en même temps, montre que c'est un isomorphisme :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Gamma(X, \mathcal{H}^j \mathbb{Z}(j)) & \rightarrow & \bigoplus_{x \in X^0} H^j(k(x), \mathbb{Z}(j)) & \rightarrow & \bigoplus_{x \in X^1} H^{j-1}(k(x), \mathbb{Z}(j-1)) \\ & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \rightarrow & \Gamma(X, \mathcal{K}_j^M) & \rightarrow & \bigoplus_{x \in X^0} K_j^M(k(x)) & \rightarrow & \bigoplus_{x \in X^1} K_{j-1}^M(k(x)) \end{array}$$

Ici, les deux isomorphismes verticaux sont définis au cours de la démonstration de la Proposition 3.2 de [33]. La suite exacte du bas est la définition du faisceau  $\mathcal{K}_j^M$  et celle du haut est fournie par la “résolution de Gersten” de Voevodsky :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{H}^i \mathbb{Z}(j) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^0} i_{x*} \mathcal{H}^i \mathbb{Z}(j)_x \rightarrow \\ \rightarrow \bigoplus_{x \in X^1} i_{x*} \mathcal{H}^{i-1} \mathbb{Z}(j-1)_x \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{x \in X^d} i_{x*} \mathcal{H}^{i-d} \mathbb{Z}(j-d)_x \rightarrow 0, \end{aligned}$$

où  $i_{x*}$  est l’inclusion du point  $x$ . C’est le th. 4.37 de [37], valable sur un corps quelconque, appliquée au faisceau  $\mathcal{H}^j \mathbb{Z}(j)$  qui est un “faisceau avec transferts invariant par homotopie”, notant le quasi-isomorphisme  $\mathbb{Z}(j)_{-1} \simeq \mathbb{Z}(j-1)$ , valable sur tout corps  $k$  où l’on dispose de la résolution des singularités ([38], th. 2.1). Ici encore, pour être complet, il faut vérifier la commutativité du carré de droite, ce qui revient à montrer une compatibilité entre les morphismes résidus en K-théorie de Milnor et cohomologie motivique; cf. nos remarques lors de la démonstration du lemme 3.3.

Pour terminer la démonstration, il suffit donc de montrer que le morphisme  $\rho_{i,j}$  est un isomorphisme pour  $i \geq 2j-2$ . En effet, la résolution de Gersten montre que sous l’hypothèse  $b$ ), les groupes  $H^{i-j+r+1}(X, \mathcal{H}^{j-r} \mathbb{Z}(j))$  sont triviaux pour tout entier positif  $r$ , donc les différentielles de la suite spectrale  $E_2^{p,q}$  partant de  $H^{i-j}(X, \mathcal{H}^j \mathbb{Z}(j))$  sont toutes nulles et le morphisme  $\rho_{i,j}$  est surjectif. Par le même argument, les groupes  $H^{i-j+r}(X, \mathcal{H}^{j-r} \mathbb{Z}(j))$  sont également nuls pour  $r \geq 2$ , et donc pour démontrer la proposition, il ne reste qu’à considérer le groupe  $H^{i-j+1}(X, \mathcal{H}^{j-1} \mathbb{Z}(j))$  qui, toujours par la résolution de Gersten, est un quotient de  $\mathcal{H}^0 \mathbb{Z}(1) = \mathcal{H}^0 \mathbb{G}_m[-1]$ , groupe qui lui aussi est évidemment trivial. Voilà.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BEAUVILLE. — *Surfaces algébriques complexes*, 3e éd., *Astérisque* 54, 1978.
- [2] A. A. BEILINSON. — Lettre à C. Soulé, 1982.
- [3] S. BLOCH. — Algebraic K-theory and class field theory for arithmetic surfaces, *Ann. of Math.* 114 (1981), 229-265.
- [4] S. BLOCH. — *Lectures on Algebraic Cycles*, Duke University, 1980.
- [5] S. BLOCH and A. OGUS. — Gersten’s conjecture and the homology of schemes, *Ann. Sci. ENS 4<sup>e</sup> sér.* 7 (1974), 181-202.
- [6] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT, M. RAYNAUD. — *Néron Models*, Springer, 1990.
- [7] G. BREDON. — *Sheaf Theory*, 2nd ed, Springer GTM 170, 1997.
- [8] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE. — On the reciprocity sequence in the higher class field theory of function fields, in *K-Theory and Algebraic Topology* (P. G. Goerss, J. F. Jardine, eds.) Kluwer, 1993.
- [9] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, R. HOOBLER and B. KAHN. — The Bloch-Ogus-Gabber theorem, *Fields Institute Communications* 16 (1997), 31-94.

- [10] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE and W. RASKIND. —  $\mathcal{K}_2$ -cohomology and the second Chow group, *Math. Ann.* **270** (1985), 165-199.
- [11] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE and W. RASKIND. — Groupe de Chow de codimension deux des variétés définies sur un corps de nombres : un théorème de finitude sur la torsion, *Invent. Math.* **105** (1991), 221-245.
- [12] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC et C. SOULÉ. — Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux, *Duke Math. J.* **50** (1983), 763-801.
- [13] P. DELIGNE. — La conjecture de Weil II, *Publ. Math. IHES* **52** (1980), 137-252.
- [14] J. GAMST and K. HOECHSMANN. — Products in Sheaf-Cohomology, *Tohoku Math. J.* **22** (1970), 143-162.
- [15] U. JANNSEN. — On the  $l$ -adic cohomology of varieties over number fields and its Galois cohomology, in *Galois Groups over  $\mathbb{Q}$*  (Y. Ihara, K. Ribet, J-P. Serre, eds.) Springer, 1989, 315-360
- [16] K. KATO. — A Hasse principle for two-dimensional global fields, *J. reine angew. Math.* **366** (1986), 142-181.
- [17] S. LANG. — Unramified class field theory over function fields in several variables, *Ann. of Math.* **64** (1956), 555-563.
- [18] A. MERKUR'EV and A. SUSLIN. —  $K$ -cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism. Version russe : *Izv. Akad. Nauk SSSR* **46** (1982) No. 5. Version anglaise : *Math. USSR Izvestiya* **21** (1983), 307-340.
- [19] A. MERKUR'EV and A. SUSLIN. — The group  $K_3$  for a field. Version russe : *Izv. Akad. Nauk SSSR* **54** (1990) No. 3. Version anglaise : *Math. USSR Izvestiya* **36** (1991), 541-565.
- [20] J. S. MILNE. — *Étale cohomology*, Princeton Univ. Press, 1980.
- [21] W. RASKIND. — Higher class field theory of arithmetic schemes, *Proc. Symp. Pure Math.* **58/1** (1995), 85-187.
- [22] S. SAITO. — Class field theory of curves over local fields, *J. Number Theory* **21** (1985), 44-80.
- [23] S. SAITO. — Unramified class field theory of arithmetic schemes, *Ann. of Math.* **121** (1985), 251-281.
- [24] S. SAITO. — A global duality theorem for varieties over number fields, in *Algebraic K-Theory : Connections with Geometry and Topology* (J. F. Jardine and V. P. Snaith, eds.), Kluwer, 1989.
- [25] S. SAITO. — Cycle map on torsion algebraic cycles of codimension two, *Invent. Math.* **106** (1991), 443-460.
- [26] S. SAITO and P. SALBERGER, Class field theory for surfaces over local fields, TEX-script non publié, 1993.

- [27] K. SATO. — Finiteness of a certain motivic cohomology of varieties : application to regulator maps, prépublication, 1998.
- [28] T. SATO. — Torsion of  $SK_1$  of curves over local fields, tapuscrit non publié.
- [29] J.-P. SERRE. — *Cohomologie galoisienne* (5<sup>e</sup> éd.), Springer LNM 5, 1994.
- [30] C. SOULÉ. — The rank of étale cohomology of varieties over  $p$ -adic or number fields, *Compositio Math.* **53** (1984), 113–131.
- [31] A. SUSLIN. — Algebraic K-theory and the norm residue homomorphism. Version russe : *Itogi Nauki i Tehniki, Sovrem. Prob. Mat. Nov. Dost.* **25** (1984), 115-207. Version anglaise : *J. Soviet Math.* **30** (1985), 2556-2611.
- [32] A. SUSLIN. — Torsion in  $K_2$  of fields, *K-Theory* **1** (1987), 5-29.
- [33] A. SUSLIN and V. VOEVODSKY. — Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients, prépublication, 1995.
- [34] T. SZAMUELY. — Sur la loi de réciprocité de Kato pour les anneaux locaux de dimension 2, *L'Enseignement Mathématique* **43** (1997), 77-91.
- [35] T. SZAMUELY. — Sur l'application de réciprocité pour une surface fibrée en coniques définie sur un corps local, prépublication.
- [36] V. VOEVODSKY. — Triangulated categories of motives over a field, prépublication, 1995.
- [37] V. VOEVODSKY. — Cohomological theory of presheaves with transfers, prépublication, 1995.
- [38] V. VOEVODSKY. — The Milnor Conjecture, prépublication, 1996.
- [39] C. WEIBEL. — *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, 1995.

Tamás Szamuely

Equipe Arithmétique et Géométrie Algébrique, URA D0752

Université de Paris-Sud Mathématiques

Bâtiment 425

F-91405 Orsay, France

email : Tamas.Szamuely@math.u-psud.fr



## DEUXIÈME PARTIE :

Sur la loi de réciprocité pour une surface  
fibrée en coniques définie sur un corps local





# SUR LA LOI DE RÉCIPROCITÉ POUR UNE SURFACE FIBRÉE EN CONIQUES DÉFINIE SUR UN CORPS LOCAL

Tamás Szamuely (Orsay)

## 1. LE RÉSULTAT

Soit  $k$  un corps local, i.e. un corps complet pour une valuation discrète, à corps résiduel fini, et soit  $X$  une variété propre lisse géométriquement intègre définie sur  $k$ . Considérons le groupe

$$SK_1(X) := \operatorname{coker} \left( \bigoplus_{x \in X_1} K_2 k(x) \rightarrow \bigoplus_{x \in X_0} K_1 k(x) \right)$$

où  $X_i$  veut dire l'ensemble des points de dimension  $i$  de  $X$  et l'homomorphisme est induit par le symbole modéré. Fixons une fois pour toutes un entier positif  $n$  inversible dans  $k$ . Shuji Saito a défini (cf. [14], chap. 3) une application de réciprocité

$$\phi_{X,n} : SK_1(X)/n \longrightarrow \pi_1^{ab}(X)/n$$

où  $\pi_1^{ab}(X)$  est l'abélianisé du groupe fondamental étale de  $X$ . La construction est faite de la manière suivante : pour chaque point fermé  $x$  de  $X$ , on envoie  $k(x)^\times$  dans  $\operatorname{Gal}(k(x)^{ab}/k(x))$  par la théorie des corps de classes locale, on compose par l'homomorphisme donné par la fonctorialité du groupe fondamental, puis on fait la somme sur les points fermés de  $X$ . Une loi de réciprocité assure alors que l'homomorphisme ainsi défini induit une application de  $SK_1(X)$  dans  $\pi_1^{ab}(X)$  (que l'on peut ensuite réduire modulo  $n$ ). Dans [11], 4.1 on trouve une autre construction de  $\phi_{X,n}$  (qui dépend vraiment de  $n$ ), équivalente à celle rappelée ici.

Saito a également démontré dans [13] l'injectivité de  $\phi_{X,n}$  pour  $X$  une courbe. Dans cet article, nous démontrons le résultat suivant.

**THÉORÈME.** — *Supposons que  $X$  soit une surface admettant un morphisme propre surjectif  $\pi : X \rightarrow C$ , où  $C$  est une  $k$ -courbe propre, lisse, géométriquement intègre et la fibre générique de  $\pi$  est une conique lisse. Alors  $\phi_{X,n}$  est injectif.*

Notons que le théorème vaut sans hypothèse sur la réduction de  $X$ . Il est d'ailleurs instructif de le comparer avec l'exemple de Parimala et Suresh [10] : ces auteurs étudient l'application cycle sur de telles surfaces, et montrent qu'elle peut admettre un noyau non trivial même dans le cas où la fibration  $\pi$  est lisse.

L'idée de la démonstration est de comparer le noyau de  $\phi_{X,n}$  avec le noyau (trivial) de  $\phi_{C,n}$ . Pour ce faire, remarquons d'abord que le morphisme  $\pi : X \rightarrow C$  induit un morphisme  $\pi_* : SK_1(X) \rightarrow SK_1(C)$  par la fonctorialité covariante du complexe de Gersten, i.e. par

le diagramme commutatif (qui généralise une loi de réciprocité de Weil, cf. [5], p. 276)

$$\begin{array}{ccc}
 \bigoplus_{x \in X_1} K_2 k(x) & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in X_0} K_1(k(x)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 K_2 k(C) & \longrightarrow & \bigoplus_{p \in C_0} K_1(k(p))
 \end{array}$$

où les homomorphismes verticaux sont induits par les normes en K-théorie. La construction de  $\phi_{X,n}$  rappelée plus haut, jointe à l'invariance de la théorie des corps de classes locale par rapport aux normes assure alors la functorialité covariante de l'application de réciprocité pour les morphismes propres.

Notons  $SK_1(X/C)$  le noyau de  $\pi_*$ . Avec cette notation, le théorème découle des deux propositions suivantes.

PROPOSITION 1. — *Pour  $X, C$  comme ci-dessus, le noyau de  $\phi_{X,n}$  est un quotient de  $SK_1(X/C)$ .*

PROPOSITION 2. — *Pour  $X, C$  comme ci-dessus,  $SK_1(X/C) = 0$ .*

Les démonstrations occuperont les paragraphes suivants.

## 2. RÉDUCTION AU CAS D'UNE FIBRATION $C$ -MINIMALE

Dans ce paragraphe, on rappelle quelques résultats de géométrie birationnelle (valables sur un corps  $k$  quelconque) qui permettront de simplifier l'étude des fibres du morphisme  $\pi$ . Disons qu'une surface comme dans le Théorème est  *$C$ -minimale* si les fibres  $X_p$  du morphisme  $\pi$  au-dessus des points fermés  $p$  de  $C$  satisfont à l'une des deux conditions suivantes :

- $X_p$  est une conique lisse ;
- Sur une extension quadratique du corps  $k(p)$ ,  $X_p$  devient la réunion de deux droites projectives se coupant en un point  $k(p)$ -rationnel.

Le résultat suivant est dû à Manin :

LEMME 1. — *Soit  $X$  une surface comme dans le Théorème. Alors il existe une  $k$ -surface  $\tilde{X}$  équipée d'un  $k$ -morphisme  $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow C$  pour lequel elle est  $C$ -minimale, ainsi qu'un  $C$ -morphisme propre birationnel  $X \rightarrow \tilde{X}$ , défini par l'éclatement d'un nombre fini de points fermés de  $\tilde{X}$ .*

Pour la démonstration, combiner [7], 1.4 et 1.6 avec [8], 21.5 et 21.8.

D'autre part, on a le lemme suivant qui est sans doute bien connu, mais nous en incluons une démonstration fautive de référence :

LEMME 2. — Soit  $f_z : Y \rightarrow Z$  un morphisme de  $k$ -surfaces propres et lisses défini par l'éclatement d'un point fermé  $z$  de  $Z$ . Alors  $f_z$  induit un isomorphisme de  $SK_1(Y)$  avec  $SK_1(Z)$ .

En effet, notons  $E$  le diviseur exceptionnel. On a alors le diagramme commutatif à lignes exactes, dont les morphismes verticaux sont induits par les symboles modérés :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & K_2 k(E) & \longrightarrow & \bigoplus_{u \in Y_1} K_2 k(u) & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in Z_1} K_2 k(v) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & N(\bigoplus_{y \in E_0} k(y)^\times) & \longrightarrow & \bigoplus_{y \in Y_0} k(y)^\times & \xrightarrow{N} & \bigoplus_{z \in Z_0} k(z)^\times \longrightarrow 1
 \end{array}$$

Ici, le morphisme  $N$  est l'identité sur les corps résiduels des points non situés sur  $E$  et le produit des normes sur les éléments de  $\bigoplus_{y \in E_0} k(y)^\times$ . L'indice  $N$  veut dire les éléments tués par  $N$ . Par un résultat classique de Tate (cf. [2], p. 379), le morphisme vertical de gauche est surjectif. (Le même résultat assure la commutativité du carré de droite.) Mais les conoyaux des deux autres morphismes verticaux sont respectivement  $SK_1(Y)$  et  $SK_1(Z)$ , d'où le lemme.

Comme par ailleurs le groupe fondamental est un invariant birationnel (cf. [SGA1], Exp. X, Cor. 3.4) et comme  $\phi_{X,n}$  est fonctorielle pour les morphismes propres, les lemmes 1 et 2 permettent de *supposer désormais que  $X$  soit une surface  $C$ -minimale*.

### 3. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1

On commence la démonstration en remarquant que le morphisme  $\pi_* : SK_1(X) \rightarrow SK_1(C)$  est surjectif. Par la définition même de  $\pi_*$ , il suffit de montrer que pour chaque point fermé  $p$  de  $C$ , la norme  $\bigoplus_{x \in (X_p)_0} k(x)^\times \rightarrow k(p)^\times$  est surjective. C'est évident pour une fibre dégénérée, et pour une fibre lisse cela équivaut au fait bien connu que la norme réduite de l'algèbre de quaternions associée à  $X_p$  est surjective sur  $k(p)^\times$  (en effet,  $k(p)$  est un corps  $p$ -adique, et on peut appliquer [15], chap. X, prop. 6).

Tenant compte de cette remarque, on voit que la première ligne du diagramme commutatif suivant est exacte :

$$\begin{array}{ccccccc}
 SK_1(X/C)/n & \longrightarrow & SK_1(X)/n & \longrightarrow & SK_1(C)/n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \phi_{X,n} & & \downarrow \phi_{C,n} & & \\
 & & \pi_1^{ab}(X)/n & \xrightarrow{\alpha} & \pi_1^{ab}(C)/n & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Par Saito [13], Lemma 5.3,  $\varphi_{C,n}$  est toujours injective. Par l'exactitude de la ligne du haut, on est donc ramené à voir<sup>\*</sup> l'injectivité du morphisme  $\alpha$ , i.e. la surjectivité de la flèche  $H^1(C, \mathbb{Z}/n) \rightarrow H^1(X, \mathbb{Z}/n)$ . Une considération de la suite spectrale de Leray associée à  $\pi : X \rightarrow C$  nous apprend qu'il suffit de montrer  $H^0(C, R^1\pi_*\mathbb{Z}/n) = 0$ . Or les fibres géométriques de  $R^1\pi_*\mathbb{Z}/n$  sont toujours nulles, ce que l'on voit comme suit.

- Si  $\bar{p}$  est au-dessus d'un point de  $C$  où la fibre est lisse, on a par changement de base  $(R^1\pi_*\mathbb{Z}/n)_{\bar{p}} = H^1(\mathbb{P}_{\bar{k}}^1, \mathbb{Z}/n) = 0$  car  $\mathbb{P}^1$  est simplement connexe.
- Le cas où  $\bar{p}$  est au-dessus d'un point où la fibre est dégénérée se ramène au cas précédent par la suite exacte de Mayer-Vietoris associée aux inclusions des deux composantes irréductibles de  $X_{\bar{p}}$  (elle se démontre pour la cohomologie étale exactement comme dans [6], II.5.6) :

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{P}_{\bar{k}}^1, \mathbb{Z}/n) \oplus H^0(\mathbb{P}_{\bar{k}}^1, \mathbb{Z}/n) &\rightarrow H^0(\{\text{point}\}, \mathbb{Z}/n) \rightarrow H^1(X_{\bar{p}}, \mathbb{Z}/n) \rightarrow \\ &\rightarrow H^1(\mathbb{P}_{\bar{k}}^1, \mathbb{Z}/n) \oplus H^1(\mathbb{P}_{\bar{k}}^1, \mathbb{Z}/n) \end{aligned}$$

Ici, le dernier terme de la suite exacte est zéro, les deux premiers sont isomorphes respectivement à  $\mathbb{Z}/n \oplus \mathbb{Z}/n$  et  $\mathbb{Z}/n$ ; le morphisme qui les lie est la différence des composantes, ce qui est surjectif. Donc le troisième terme s'annule et la démonstration de la proposition est terminée.

#### 4. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2

Considérons le diagramme à lignes exactes suivant, analogue à celui figurant dans le paragraphe 1 de [3] :

$$\begin{array}{ccccccc} \bigoplus_{x \in (X_\eta)_0} K_2k(x) & \longrightarrow & \bigoplus_{p \in C_0} SK_1(X_p) & \longrightarrow & SK_1(X) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \pi_* & & \\ K_2k(C) & \longrightarrow & \bigoplus_{p \in C_0} k(p)^\times & \longrightarrow & SK_1(C) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Ici, les morphismes  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont donnés par les normes en  $K$ -théorie de Milnor, et  $X_\eta$  est la fibre générique de  $\pi$ . Que  $\alpha_1$  soit bien défini est assuré par le diagramme commutatif du paragraphe 1. La commutativité du carré de droite est tautologique; pour celui de gauche, elle résulte de compatibilités standard en  $K$ -théorie.

On voit donc que la Proposition 2 découle des deux lemmes suivants :

LEMME 3. — *Le morphisme  $\alpha_1$  est injectif.*

---

\* A vrai dire, on n'a pas besoin de ce fait pour démontrer le Théorème. Il est donc possible de sauter le reste du paragraphe.

LEMME 4. — *Le morphisme  $\alpha_2$  est surjectif.*

Commençons par le *lemme 3*. On va faire une vérification cas par cas, suivant le type des fibres.

- Pour les fibres lisses, le théorème à la page 79 de [9] implique que  $\ker(SK_1(X_p) \xrightarrow{N} k(p)^\times) \simeq SK_1(D)$ , où  $D$  est l'algèbre de quaternions associée sur  $k(p)$  à  $X_p$ . Or le dernier groupe est 0 sur un corps local par un théorème classique de Wang (cf. [4], pp. 164-165).
- Cas des fibres dégénérées : Soient  $K = k(p)$ ,  $K'$  l'extension quadratique qui déploie la fibre  $X_p$ . Soit  $X^1$  l'une des composantes de  $X_p \times K'$ . Le morphisme composé  $X^1 \rightarrow X_p \times K' \rightarrow X_p$  induit un isomorphisme sur les sous-schémas ouverts obtenus en enlevant le point double de  $X_p$  et son image réciproque sur  $X^1$ , notée  $y$ . Notre tâche est de montrer que la ligne du bas du diagramme commutatif de complexes

$$\begin{array}{ccccc}
 K_2 K'(X^1) & \longrightarrow & \bigoplus_{x' \in X_0^1} K'(x')^\times & \longrightarrow & K'^\times \\
 \downarrow \text{norme} & & \downarrow \text{norme} & & \downarrow N_{K'/K} \\
 K_2 K(X_p) & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in (X_p)_0} K(x)^\times & \xrightarrow{\alpha} & K^\times
 \end{array}$$

est exacte. Soit donc  $(f_x) \in \ker \alpha$ . En modifiant par un élément de  $K_2 K(X_p)$ , on peut supposer que la composante au point double soit 1. Par l'isomorphisme décrit plus haut,  $(f_x)$  provient alors d'un élément  $(f'_{x'})$  de  $\bigoplus K'(x')^\times$  dont la composante en  $y$  est 1. Modifions cet élément en plaçant  $[\prod N_{K'(x')/K'}(f'_{x'})]^{-1}$  au-dessus du point  $y$ ; le nouvel élément s'applique toujours sur  $(f_x)$  (par commutativité du carré de droite) mais sa norme en  $K'$  est 1.  $X^1$  étant une droite projective, la ligne du haut est exacte d'après le théorème de Tate déjà cité;  $(f_x)$  provient donc d'un élément de  $K_2 K'(X^1)$ .

Prouvons enfin le *lemme 4*.

Soit  $D$  l'algèbre de quaternions associée à la conique générique  $X_\eta$ . Par la propriété fondamentale de la norme réduite pour  $K_2$  (cf. l'introduction de [9]), on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \prod_{\text{cloie } D} K_2(L) & \longrightarrow & K_2(D) \\
 \searrow \Pi N_{L|k(C)} & & \downarrow Nrd \\
 & & K_2 k(C)
 \end{array}$$

Alperin et Dennis (cf. [1], [12]) nous apprennent que la flèche horizontale est surjective. Comme un corps  $L$  déploie  $D$  si et seulement si  $X_\eta$  possède un  $L$ -point, par transitivité de la norme on en conclut que  $\text{Im } \alpha_2 = \text{Im}(K_2(D) \xrightarrow{\text{Nrd}} K_2 k(C))$ . Mais par un résultat de Merkuriev, (cf. [9], Theorem 9), ce dernier groupe est égal au noyau de l'homomorphisme  $K_2 k(C) \rightarrow H^4(k(C), \mathbb{Z}/2)$  obtenu par cup-produit avec la classe de  $D$  à partir du symbole cohomologique. Or  $H^4(k(C), \mathbb{Z}/2) = 0$  car  $k(C)$  est de dimension cohomologique 3. Cela montre la surjectivité de  $\alpha_2$ , et termine la démonstration du théorème.

*Remerciement.* Ce travail a bénéficié de discussions illuminantes avec J.-L. Colliot-Thélène; qu'il en soit remercié ici.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [SGA1] A. GROTHENDIECK. — *Revêtements étales et groupe fondamental*, Springer LNM **224**, 1971.
- [1] R. ALPERIN, R.K. DENNIS. —  $K_2$  of quaternion algebras, *J. Algebra* **56** (1979), 262-274.
- [2] H. BASS, J. TATE. — The Milnor ring of a global field, in *Algebraic K-Theory II*, Springer LNM **342**, 1973.
- [3] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, A. N. SKOROBOGATOV. — Groupe de Chow des zéro-cycles sur les fibrés en quadriques, *K-Theory* **7** (1993), 477-500.
- [4] P. DRAXL. — *Skew Fields*, LMS Lecture Notes **81**, Cambridge University Press, 1983.
- [5] H. GILLET. — Riemann-Roch theorems for higher algebraic K-theory, *Adv. in Math.* **40** (1981), 203-289.
- [6] B. IVERSEN. — *Cohomology of Sheaves*, Springer, 1986.
- [7] Yu. I. MANIN. — Surfaces rationnelles sur les corps parfaits I. (en russe) *Publ. Math. IHES* **30** (1966), 55-113. (Trad. anglaise : *Amer. Math. Soc. Transl.* **84** (1969), 137-186.)
- [8] Yu. I. MANIN. — *Cubic Forms*, North-Holland, 1974.
- [9] A.S. MERKURJEV. —  $K$ -theory of simple algebras, *Proc. Symp. Pure Math.* **58/1** (1995), 65-83.
- [10] R. PARIMALA, V. SURESH. — Zero-cycles on quadric fibrations : Finiteness theorems and the cycle map, *Inv. Math.* **122** (1995), 83-119.
- [11] W. RASKIND. — Higher class field theory of arithmetic schemes, *Proc. Symp. Pure Math.* **58/1** (1995), 85-187.
- [12] U. REHMANN, U. STUHLER. — On  $K_2$  of finite dimensional division algebras over arithmetical fields, *Inv. Math.* **50** (1978), 75-90.

- [13] S. SAITO. — Class field theory of curves over local fields, *J. Number Theory* **21** (1985), 44-80.
- [14] S. SAITO. — Unramified class field theory of arithmetic schemes, *Ann. of Math.* **121** (1985), 251-281.
- [15] A. WEIL. — *Basic Number Theory*, 2nd ed, Springer, 1973.

Tamás Szamuely  
Equipe Arithmétique et Géométrie Algébrique, URA D0752  
Université de Paris-Sud Mathématiques  
Bâtiment 425  
F-91405 Orsay, France  
email : Tamas.Szamuely@math.u-psud.fr





ANNEXE :  
Une loi de réciprocité de Kato  
pour les anneaux locaux de dimension 2



## SUR UNE LOI DE RÉCIPROCITÉ DE KATO POUR LES ANNEAUX LOCAUX DE DIMENSION 2

Nous nous proposons ici de donner une exposition complète (dans le cas premier à la caractéristique résiduelle) d'un résultat de Kazuya Kato, fondamental dans la théorie des corps de classes en dimension supérieure, mais difficilement abordable dans la littérature. Il va sans dire que nous nous sommes fortement inspirés des travaux originaux ([7], [8], [9] et [14]) dont nous espérons que ce texte facilitera l'accès.

### 1. ÉNONCÉS

Soient  $A$  un anneau local normal complet de dimension 2,  $K$  son corps de fractions et  $\mathbb{F}$  son corps résiduel qui sera supposé *fini* dans la suite. Prenons un idéal premier  $\mathfrak{p}$  de hauteur 1, et notons  $K_{\mathfrak{p}}$  le corps de fractions du hensélisé  $A_{\mathfrak{p}}^h$  de  $A$  en  $\mathfrak{p}$ . (Pour tout ce qui concerne les anneaux henséliens, voir [11] et [12].) Fixons un entier positif  $m$  premier à la caractéristique de  $\mathbb{F}$ .

**THÉOREME 1.** — *Pour tout premier  $p$  divisant  $m$ , la  $p$ -dimension cohomologique de  $K_{\mathfrak{p}}$  est 3, et on a un isomorphisme*

$$H^3(K_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Plus généralement, on dit qu'un corps  $F$  est un *corps local de dimension  $d$*  si  $F$  est muni d'une valuation discrète hensélienne pour laquelle son corps résiduel est un corps local de dimension  $d - 1$ , un corps local de dimension 0 étant un corps fini. Donc un corps local au sens classique est un corps local complet de dimension 1 dans notre sens, et on va voir au chap. 3 que le corps  $K_{\mathfrak{p}}$  du th. 1 est un corps local de dimension 2. Or pour un  $m$  premier à la caractéristique du "plus petit" corps résiduel de  $F$ , on a le théorème général suivant.

**THÉOREME 1'.** — *Pour tout premier  $p$  divisant  $m$ , la  $p$ -dimension cohomologique de  $F$  est  $d + 1$  et on a un isomorphisme*

$$H^{d+1}(F, \mu_m^{\otimes d}) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Pour  $d = 1$ , on récupère la détermination classique de la  $m$ -torsion du groupe de Brauer d'un corps local (cf. par exemple [16], [17]). Le groupe du th. 1 joue donc un rôle analogue à celui du groupe de Brauer dans le cas classique.

Revenons maintenant à notre corps  $K$ , et soit  $\omega \in H^3(K, \mu_m^{\otimes 2})$ ,  $\omega_{\mathfrak{p}}$  sa restriction à  $H^3(K_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2})$ . On va voir au chap. 4 que  $\omega_{\mathfrak{p}} = 0$  pour presque tout  $\mathfrak{p}$ , on obtient donc un homomorphisme

$$H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^3(K_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}) \cong \bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

où  $\mathfrak{p}$  parcourt les idéaux premiers de hauteur 1 dans  $A$ . En faisant la somme suivant ces  $\mathfrak{p}$ , on obtient l'analogie suivant de la loi de reciprocité classique de Takagi-Artin (pour cette dernière, cf. [18]) :

THÉOREME 2. — *La suite d'homomorphismes*

$$H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^3(K_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

*est un complexe.*

*Remarque.* Tout comme le th. 1, le th. 2 admet une généralisation en dimension supérieure qui se démontre essentiellement de la même façon : supposons en fait que le corps résiduel  $\mathbb{F}$  de notre anneau  $A$  soit un corps local de dimension  $d - 2$  pour un  $d \geq 2$ . Alors on a un complexe, avec les mêmes notations :

$$H^{d+1}(K, \mu_m^{\otimes d}) \rightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^{d+1}(K_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes d}) \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Ces théorèmes sont dûs à Kazuya Kato. En fait, il a démontré beaucoup plus, car il a également traité le cas où l'entier  $m$  est divisible par la caractéristique résiduelle. Ce cas, qui nécessite de longs calculs sur le complexe de de Rham-Witt, ne sera pas examiné ici. Les deux chapitres qui suivent contiennent des rappels de résultats divers utilisés dans la suite, les preuves des théorèmes 1 et 1' ainsi qu'une discussion superficielle de la position du th. 2 dans la théorie des corps de classes des schémas arithmétiques. Le reste de l'article est consacré à la démonstration de ce théorème.

## 2. PRÉPARATION

On rappelle ici quelques résultats en cohomologie galoisienne ; une référence de base est le livre de Serre [15].

Si  $G$  est un groupe profini,  $I$  un sous-groupe normal fermé dans  $G$ , on a pour tout  $G$ -module discret  $A$  la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{i,j} = H^i(G/I, H^j(I, A)) \Rightarrow H^{i+j}(G, A).$$

La théorie générale des suites spectrales nous fournit maintenant le

LEMME 2.1. — *Si  $A$  est un module de torsion et  $I$  est de dimension cohomologique 1, il existe un homomorphisme*

$$\partial_i : H^{i+1}(G, A) \rightarrow H^i(G/I, H^1(I, A))$$

*appelé le résidu. Si, de plus,  $G/I$  est de dimension cohomologique  $i$ , cet homomorphisme est en fait un isomorphisme.*

*Remarque.* En fait, pour  $A$  fixé, il suffit de supposer que  $I$  soit de  $p$ -dimension cohomologique 1 pour chaque  $p$  annulant un élément de  $A$  ; de même pour l'énoncé sur  $G/I$ .

Un calcul sur les cochaînes (cf. par exemple [5], p. 77 ainsi que [13], Appendice A) montre la compatibilité suivante entre résidus et cup-produits.

LEMME 2.2. — Soient  $G$  et  $I$  comme ci-dessus,  $A$  et  $B$  deux  $G$ -modules discrets de torsion. Alors pour tout  $a \in H^i(G, A)$ ,  $b \in H^j(G/I, H^0(I, B))$ ,

$$\partial_{i+j-1}(a \cup \text{Inf}_{G/N}^G(b)) = \partial_{i-1}(a) \cup b.$$

La démonstration du théorème 1' est une application simple du lemme 2.1.

*Démonstration du théorème 1'.* On sait que pour un corps muni d'une valuation discrète hensélienne, le sous-groupe d'inertie du groupe de Galois absolu est de  $p$ -dimension cohomologique 1 pour tout premier  $p$  différent de la caractéristique résiduelle. (En fait, on trouve dans la littérature plusieurs démonstrations pour le cas complet, mais par exemple celle donnée par Serre en termes d'algèbres simples centrales dans [17] se transcrit immédiatement au cas hensélien.) Tenant compte de la remarque précédente, on peut donc appliquer le lemme 2.1 avec  $i = d$ ,  $G$  le groupe de Galois absolu de  $F$  et  $I$  le groupe d'inertie, pour obtenir un résidu

$$(2.3) \quad \partial_d : H^{d+1}(G, \mu_m^{\otimes d}) \rightarrow H^d(G/I, H^1(I, \mu_m^{\otimes d})) \cong H^d(G/I, \mu_m^{\otimes(d-1)}).$$

En effet, on vérifie aisément que  $H^1(I, \mu_m^{\otimes d}) \cong H^1(I, \mu_m) \otimes \mu_m^{\otimes(d-1)}$  en tant que  $G/I$ -modules (noter que l'action de  $I$  sur  $\mu_m^{\otimes d}$  est triviale). Puis la suite de Kummer et la valuation donnent des isomorphismes  $H^1(I, \mu_m) \cong F_{nr}^*/F_{nr}^{*m} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ , où  $F_{nr}^*$  est le groupe multiplicatif de l'extension maximale non ramifiée de  $F$ .

Soient maintenant  $F^{(1)}$  le corps résiduel de  $F$ ,  $F^{(2)}$  celui de  $F^{(1)}$ , etc. En répétant l'argument en haut et réécrivant les groupes de cohomologie en termes de corps, on obtient (notant que  $\mu_m^{\otimes 0} = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  par convention) une suite d'homomorphismes

$$H^{d+1}(F, \mu_m^{\otimes d}) \rightarrow H^d(F^{(1)}, \mu_m^{\otimes(d-1)}) \rightarrow \dots \rightarrow H^1(F^{(d)}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},$$

$F^{(d)}$  étant fini par hypothèse. Mais alors il est de dimension cohomologique 1, et l'application successive d'un théorème de transition en cohomologie galoisienne (Serre [15], chap. 4.3, prop. 12) et du deuxième énoncé du lemme 2.1 montrent qu'il y a isomorphisme partout.

Soit maintenant  $F$  un corps quelconque. Rappelons que le  $K$ -groupe de Milnor  $K_d^M F$  est défini comme le quotient de la  $d$ -ième puissance tensorielle du groupe multiplicatif  $F^*$  par l'idéal engendré par les éléments de la forme  $f_1 \otimes \dots \otimes f_d$  pour lesquels il existe  $1 \leq i \neq j \leq d$  avec  $f_i + f_j = 1$ . (On pose  $K_0^M(F) = \mathbb{Z}$ .) L'image d'un élément  $f_1 \otimes \dots \otimes f_d$  dans  $K_d^M(F)$  sera noté  $\langle f_1, \dots, f_d \rangle$ .

Le lien avec la cohomologie galoisienne est donné par le symbole cohomologique de Tate

$$h_{m,F}^d : K_d^M(F)/mK_d^M(F) \rightarrow H^d(F, \mu_m^{\otimes d})$$

défini pour  $d = 0$  comme l'identité de  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ , et pour  $d \geq 1$  par cup-produit à partir du bord de la suite de Kummer. (A priori, cet homomorphisme a pour domaine  $(F^*/F^{*m})^{\otimes d}$ . Le fait qu'il passe au quotient par les relations est vérifié, par exemple, dans Tate [19] pour le cas typique  $d = 2$ .) On conjecture la bijectivité du symbole pour tout  $d$  et  $m$ . La conjecture est vérifiée dans plusieurs cas dont le plus important pour nous est le

**THÉORÈME (Merkouriev-Sousline).** — *Le symbole  $h_{m,F}^2$  est bijectif pour tout  $m$ ,  $F$ .*

Notons qu'en fait nous n'utiliserons qu'un cas très particulier de ce résultat puissant, pour un corps de degré de transcendance 1 sur un corps de dimension cohomologique 1. Ce cas peut d'ailleurs être prouvé directement en modifiant un joli argument géométrique de Bloch ([4], pp. 5.9-5.11).

Si de plus  $F$  est muni d'une valuation discrète  $v$  à corps résiduel  $\kappa(v)$ , il existe (cf. Bass-Tate [3]) un homomorphisme canonique  $\partial_{d,v}^M : K_{d+1}^M(F) \rightarrow K_d^M(\kappa(v))$ , caractérisé par la formule

$$\partial_{d,v}^M(< \omega, u_1, \dots, u_d >) = < \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_d >$$

où  $\omega$  est une uniformisante, et les  $u_i$  sont des unités avec image  $\bar{u}_i$  dans  $\kappa(v)$ . Notons que la définition implique  $\partial_{d,v}^M(< u_1, \dots, u_{d+1} >) = 0$  si tous les  $u_i$  sont des unités et que  $\partial_{0,v}^M$  n'est autre que la valuation  $v$ .

Supposons maintenant  $F$  hensélien par rapport à  $v$  et donnons-nous un entier  $m$  premier à la caractéristique de  $\kappa(v)$ . Alors on dispose d'une part du résidu de Milnor  $\partial_{d,F}^M$ , d'autre part du résidu  $\partial_d$  pour la cohomologie galoisienne à valeurs dans  $\mu_m^{\otimes d}$ . Tenant compte de l'identification (2.3), les deux sont liés de façon agréable par le symbole cohomologique.

**LEMME 2.4.** — *Pour tout  $d \geq 0$ , on a le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} H^{d+1}(F, \mu_m^{\otimes(d+1)}) & \xrightarrow{\partial_d} & H^d(\kappa(v), \mu_m^{\otimes d}) \\ h_{m,F}^{d+1} \downarrow & & \downarrow h_{m,\kappa(v)}^d \\ K_{d+1}^M(F)/mK_{d+1}^M(F) & \xrightarrow{\partial_{d,v}^M} & K_d^M(\kappa(v))/mK_d^M(\kappa(v)) \end{array}$$

*Démonstration.* L'assertion est évidente pour  $d = 0$ . Mais on s'y réduit immédiatement grâce au lemme 2.2, tenant compte de la compatibilité entre cup-produits et inflations, et de l'égalité  $\text{Inf}_{\kappa(v)}^F h_{m,\kappa(v)}^1(\bar{u}) = h_{m,F}^1(u)$  pour une unité  $u$  de  $F$  avec image  $\bar{u}$  dans  $\kappa(v)$ .

*Remarque.* Par une compatibilité triviale entre les restrictions en cohomologie et les changements de base en K-théorie, on voit qu'il est superflu de supposer  $F$  hensélien : on peut toujours passer par le hensélisé par rapport à  $v$  et le lemme reste valable.

Donnons enfin, comme promis, une explication informelle pourquoi le th. 2 s'appelle une loi de réciprocité. D'abord, quelques rappels sur la théorie classique. Si  $F$  est un corps local au sens classique,  $\chi \in H^1(F, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$  un caractère d'ordre  $m$  de son groupe de Galois absolu, et  $\alpha$  un élément du groupe multiplicatif  $F^*$ , on a  $\delta_m \alpha \cup \chi \in H^2(F, \mu_m) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ , où  $\delta_m$  est le cobord de la suite de Kummer pour la multiplication par  $m$ . Ceci définit un homomorphisme  $\phi_F : H^1(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(F^*, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  dont on sait (cf. [16], [17]) qu'il est le dual de l'application de réciprocité locale. Pour la théorie globale, on introduit des idéles et on définit l'application de réciprocité globale comme le produit des applications locales (on suppose ici pour simplifier qu'il n'y ait pas de places réelles). Ensuite, on vérifie que le produit est en fait une somme, et que le fait que l'application passe au quotient par l'image diagonale du groupe multiplicatif de notre corps global équivaut au fait que la suite d'Albert-Brauer-Hasse-Noether pour le groupe de Brauer est un complexe (voir [18]).

Maintenant, on peut procéder de façon analogue pour le corps  $K$  du théorème 2, en remplaçant les groupes multiplicatifs par les  $K_2$ -groupes de Milnor. Pour les localisés  $K_p$ , on accouple  $\chi \in H^1(K_p, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$

avec  $\alpha \in K_2^M(K_p)$  pour obtenir  $h_{m, K_p}^2(\alpha) \cup \chi \in H^3(K_p, \mu_m^{\otimes 2}) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  en utilisant le th. 1, ce qui définit comme en haut une application de réciprocité locale entre  $K_2^M(K_p)$  et le groupe de Galois absolu de  $K_p$ . Ensuite, on peut définir des  $K_2$ -idéles de  $K$  ainsi qu'une application de réciprocité globale comme le produit des applications locales; comme dans le cas classique, le fait que cette application passe au quotient par l'image diagonale de  $K_2(K)$  se réduit via le symbole cohomologique à notre th. 2.

Remarquons enfin qu'en général, pour n'importe quel schéma normal, intègre, de dimension  $d$  et de type fini sur  $\mathbb{Z}$ , on peut introduire la notion de  $K_d$ -idéles et énoncer des "lois de réciprocité". Le miracle est que par passage à un sous-schéma fermé convenable et puis par localisation en des points de codimension 1 et 2, ces énoncés se réduisent respectivement à la loi de réciprocité classique et à la Remarque suivant le th. 2. Le cas local de dimension 2 est donc le cas qui, tous dévissages faits, reste à traiter, mais la formulation du cas général appartient à la théorie des "chaînes de Parshin" pour laquelle on renvoie le lecteur à [9].

### 3. TOUJOURS PRÉPARATION, MAIS À LA WEIERSTRASS

Ce chapitre est consacré à quelques outils d'algèbre commutative qui seront utilisés dans la suite. Le résultat fondamental est la conséquence suivante du théorème de structure pour les anneaux locaux complets.

**THÉORÈME (I. S. Cohen).** — *Soit  $A$  un anneau local normal complet de dimension 2, à corps résiduel  $\mathbb{F}$  (non nécessairement fini). Alors  $A$  est fini sur un anneau de séries formelles de la forme  $O_k[[T]]$ , où  $O_k$  est l'anneau des entiers d'un corps  $k$  complet pour une valuation discrète au même corps résiduel  $\mathbb{F}$ .*

Voir Nagata [12], Cor. 31.6 pour une démonstration. Ce théorème est très utile car la structure des anneaux de la forme  $O_k[[T]]$  est bien connue.

**LEMME 3.1.** — *Soit  $O_k$  comme en haut. Alors l'anneau  $O_k[[T]]$  est factoriel, et ses éléments premiers sont l'uniformisante  $\pi$  de  $O_k$ , ainsi que les "polynômes de Weierstrass", c'est-à-dire les polynômes irréductibles dans  $O_k[T]$  de la forme  $T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_0$ , où tous les  $a_i$  sont divisibles par  $\pi$ .*

Le lemme est une conséquence du théorème de préparation de Weierstrass. Voir, par exemple, l'ouvrage de Lang [10].

Les idéaux premiers de hauteur 1 dans  $O_k[[T]]$  sont donc engendrés par l'uniformisante  $\pi$  ou par un polynôme de Weierstrass. Les corps résiduels correspondants sont respectivement  $\mathbb{F}((T))$  ou des extensions finies du corps valué complet  $k$ , et par conséquent sont munis de valuations discrètes canoniques pour lesquelles ils sont complets. Mais il en est alors de même pour  $A$  (car il est fini sur  $O_k[[T]]$ ), ce qui montre bien que les corps  $K_p$  du th. 1 sont des corps locaux de dimension 2. Le théorème 1 découle donc du th. 1'.

Par ailleurs, l'anneau  $O_k[[T]]$  est le complété de l'anneau local  $B = O_k[T]_{(\pi, T)}$ . Nous pouvons dériver du lemme 3.1 la description suivante du hensélisé  $B^h$  qui sera utilisée dans la démonstration du théorème 2.

**LEMME 3.2.** — *L'anneau  $B^h$  est un anneau local noethérien régulier, donc factoriel, de dimension 2, dont le complété est  $O_k[[T]]$ . Ses éléments premiers sont l'uniformisante  $\pi$  et les polynômes de Weierstrass. Par conséquent, le morphisme naturel  $\text{Spec } O_k[[T]] \rightarrow \text{Spec } B^h$  est bijectif, et les corps résiduels des idéaux premiers correspondants sont identiques sauf pour  $(0)$  et  $(\pi)$ , où le corps résiduel de  $O_k[[T]]$  est le complété de celui de  $B^h$ .*



*Démonstration.* La première assertion résulte des propriétés générales de la hensélisation (cf. [11], Chap. 1.4) et la troisième est triviale à partir de la seconde. Pour cette dernière, on remarque d'abord que  $O_k[[T]]$  étant fidèlement plat sur  $B^h$ , il suffit d'établir une bijection entre les idéaux premiers de hauteur 1 de  $B$  et ceux de  $O_k[[T]]$ . Dans  $B$ , ce sont des idéaux principaux engendrés par  $\pi$  ou par certains polynômes irréductibles de  $O_k[T]$  contenus dans  $(\pi, T)$ . Soit  $f$  un tel polynôme. Comme  $O_k[[T]]$  est fidèlement plat sur  $B$ , il existe un idéal premier de  $O_k[[T]]$  au-dessus de  $(f)$ , engendré par un polynôme de Weierstrass  $w$  selon le lemme 3.1. Mais comme les polynômes de Weierstrass sont tous contenus dans  $B$ , on a forcément  $f = w$ , ce qui donne la bijection désirée.

#### 4. RÉDUCTIONS

Le reste de ces notes est consacré à la démonstration du théorème 2. Gardons les notations du chapitre 1. Tout d'abord, on va vérifier que  $\omega_p = 0$  pour presque tous les  $p$  de hauteur 1.

Soit  $X$  le sous-schéma ouvert de  $\text{Spec } A$  obtenu en enlevant le point fermé. La suite de localisation en cohomologie étale (cf. Milne [11], Chap. III, Prop. 1.25) nous fournit par fonctorialité le diagramme commutatif

$$(4.1) \quad \begin{array}{ccc} H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H_p^4(X, \mu_m^{\otimes 2}) \\ \downarrow & & \downarrow \cong \\ H^3(K_p, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\cong} & H_p^4(\text{Spec } A_p^h, \mu_m^{\otimes 2}) \end{array}$$

Ici, la flèche verticale à droite est un isomorphisme par excision (Milne [11], Chap. III, Cor. 1.28). Quant à la flèche horizontale en bas, en continuant la suite de localisation on obtient la suite exacte

$$H^3(\text{Spec } A_p^h, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H^3(K_p, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H_p^4(\text{Spec } A_p^h, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H^4(\text{Spec } A_p^h, \mu_m^{\otimes 2}).$$

Mais les termes aux deux extrémités sont nuls car  $A_p^h$  étant hensélien, sa cohomologie est la même que celle de son corps résiduel  $\kappa(p)$  (cf. Artin [2], Chap. III., Thm. 4.9), ce qui est un corps de dimension cohomologique 2, on l'a vu. Ceci démontre le second isomorphisme.

Soit maintenant  $S$  un ensemble fini de points fermés de  $X$ , et considérons la suite de localisation

$$H^3(X - S, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H_S^4(X, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H^4(X, \mu_m^{\otimes 2}).$$

Ici, on a  $H_S^4(X, \mu_m^{\otimes 2}) \cong \bigoplus_{p \in S} H_p^4(X, \mu_m^{\otimes 2})$ , donc par passage à la limite sur les  $S$  (ce qui est permis dans notre cas par Milne [11], Chap. III, Lemma 1.16), on a la suite exacte

$$(4.2) \quad H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow \bigoplus_p H_p^4(X, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H^4(X, \mu_m^{\otimes 2}).$$

En particulier, l'image d'un élément  $\omega \in H^3(K, \mu_m^{\otimes 2})$  par un homomorphisme

$$H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H_p^4(X, \mu_m^{\otimes 2})$$

est nulle pour presque tout  $p$ . Mais par (4.1), cette image n'est autre que la restriction  $\omega_p \in H^3(K_p, \mu_m^{\otimes 2})$ , et on obtient le résultat.

Ensuite, on va utiliser le théorème de Cohen pour montrer le

LEMME 4.3. — Dans l'énoncé du théorème 2, on peut supposer  $A = O_k[[T]]$ .

*Démonstration.* Soit  $A$  comme au th. 2, et notons  $\tilde{K}$  le corps de fractions d'un anneau de la forme  $O_k[[T]]$  sur lequel  $A$  est fini selon Cohen. Alors pour tout idéal premier  $\tilde{\mathfrak{p}}$  de hauteur 1 de  $O_k[[T]]$ , on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{p}|\tilde{\mathfrak{p}}} H^3(K_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}) \\ \text{Cor} \downarrow & & \downarrow \Sigma \text{Cor} \\ H^3(\tilde{K}, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^3(\tilde{K}_{\tilde{\mathfrak{p}}}, \mu_m^{\otimes 2}) \end{array}$$

En effet, il existe un tel diagramme pour tous les  $H^i$  ( $i \geq 0$ ), et il suffit de vérifier la fonctorialité pour  $i = 0$ . On peut supposer de plus que l'extension  $K | \tilde{K}$  soit séparable et l'assertion est alors une conséquence du théorème sur les extensions de valuations (cf. Serre [16], chap. I., par. 2.3).

D'autre part, par le th. 1, on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^3(K_{\mathfrak{p}}, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\ \text{Cor} \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ H^3(\tilde{K}_{\tilde{\mathfrak{p}}}, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \end{array}$$

dont la commutativité se vérifie de la même manière que l'énoncé analogue (cf. Serre, *loc. cit.*) pour le groupe de Brauer d'un corps local (de dimension 1). Ces deux diagrammes impliquent la réduction cherchée.

On suppose donc désormais  $A = O_k[[T]]$ .

*Convention.* On va noter par  $A^\circ$  le hensélisé de l'anneau  $O_k[T]_{(\pi, T)}$ , avec le même  $O_k$  que dans la définition de  $A$ . Son corps de fractions sera noté  $K^\circ$ . Par contre, en général, nous continuerons de noter par  $B^h$  tout anneau qui est comme dans le lemme 3.2. Veuillez accepter toutes nos excuses pour cet inconvénient.

L'idée de la démonstration du théorème 2 est de comparer la suite d'homomorphismes figurant dans l'énoncé à un complexe auxiliaire en K-théorie de Milnor par le symbole cohomologique. Or l'image de  $h_{m, K}^d$  est contenue dans  $H^d(K, \mu_m^{\otimes d})$ , donc pour pouvoir bénéficier de cet outil il faut remplacer  $H^3(K, \mu_m^{\otimes 2})$  par exemple par  $H^2(K, \mu_m^{\otimes 2})$ . Comme  $\mathbb{F}$  est fini, la suite spectrale de Hochschild-Serre nous fournit un homomorphisme  $H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H^1(\mathbb{F}, H^2(K^{hs}, \mu_m^{\otimes 2}))$ , où  $K^{hs}$  est le corps de fractions du hensélisé strict  $A^{hs}$ . Mais cet homomorphisme n'est un isomorphisme que si  $K^{hs}$  est de  $p$ -dimension cohomologique 2 pour tout  $p$  divisant  $m$ , ce qui n'est pas clair. Par contre si l'on remplace  $A$  par  $A^\circ$ , le corps de fractions  $K^{\circ\circ}$  du hensélisé strict le sera bien, étant un corps de degré de transcendance 1 sur un corps de dimension cohomologique 1 (cf. Serre [15], chap. 4.3, prop. 11). La réduction suivante est donc :

LEMME 4.4. — *On peut remplacer  $A$  par  $A^\circ$  dans l'énoncé du th. 2.*

*Démonstration.* La suite de localisation (4.2) nous fournit par fonctorialité le diagramme commutatif

$$(4.5) \quad \begin{array}{ccccc} H^3(K^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{d^\circ} & \bigoplus_{\mathfrak{p}^\circ} H_{\mathfrak{p}^\circ}^4(X^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^4(X^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{d} & \bigoplus_{\mathfrak{p}} H_{\mathfrak{p}}^4(X, \mu_m^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^4(X, \mu_m^{\otimes 2}) \end{array}$$

où  $X^\circ = \text{Spec } A^\circ - \{(\pi, T)\}$ , et  $\mathfrak{p}^\circ$  parcourt les points fermés de  $X^\circ$  qui sont en bijection avec ceux de  $X$  selon le lemme 3.2. Tenant compte de l'identification (4.1), pour achever la réduction il suffit de montrer que l'homomorphisme vertical au milieu induit un isomorphisme  $\text{Im } d^\circ \cong \text{Im } d$ . Une chasse au diagramme montre alors que pour cela il suffit de voir deux choses :

- (1) Dans le diagramme (4.5), l'homomorphisme vertical à droite est injectif.
- (2) Pour tous les  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{p}^\circ$  correspondants, l'homomorphisme naturel  $H_{\mathfrak{p}^\circ}^4(X^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H_{\mathfrak{p}}^4(X, \mu_m^{\otimes 2})$  est un isomorphisme.

Pour prouver (1), on considère les isomorphismes

$$X \cong X^\circ \times_{\text{Spec } A^\circ} \text{Spec } A \cong \varprojlim (X^\circ \times_{\text{Spec } A^\circ} \text{Spec } R)$$

où la limite projective est prise suivant les  $\text{Spec } R$ , avec  $R$  un sous-anneau de  $A$  de type fini sur  $A^\circ$ . Pour un tel anneau, le morphisme naturel  $A^\circ \rightarrow R$  possède une section par le théorème d'approximation d'Artin [1], donc le morphisme  $H^4(X^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow H^4(X^\circ \times_{\text{Spec } A^\circ} \text{Spec } R, \mu_m^{\otimes 2})$  a également une section et on obtient le résultat par passage à la limite (tenant de nouveau compte de [11], Chap. III, Lemma 1.16).

Pour (2), considérons le diagramme commutatif suivant, obtenu en superposant (4.1) et

le diagramme analogue pour  $A^\circ$ .

$$\begin{array}{ccc}
 H^3(K^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\quad} & H_{p^\circ}^4(X^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow h \quad \searrow \cong \\
 H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\quad} & H_p^4(X, \mu_m^{\otimes 2}) \\
 & \searrow & \downarrow \cong \quad \searrow \\
 & & H_{p^\circ}^4(\text{Spec}(A_{p^\circ}^\circ)^h, \mu_m^{\otimes 2}) \\
 & \swarrow f & \downarrow g \\
 & & H_p^4(\text{Spec } A_p^h, \mu_m^{\otimes 2}) \\
 & \swarrow & \uparrow \cong \\
 H^3(K_{p^\circ}^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\cong} & H_{p^\circ}^4(\text{Spec}(A_{p^\circ}^\circ)^h, \mu_m^{\otimes 2}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H^3(K_p, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\cong} & H_p^4(\text{Spec } A_p^h, \mu_m^{\otimes 2})
 \end{array}$$

Notre tâche est de montrer que l'homomorphisme  $h$  du diagramme est un isomorphisme ce qui équivaut à dire que  $f$  l'est. Mais par le th. 1, les groupes  $H^3(K_p, \mu_m^{\otimes 2})$  et  $H^3(K_{p^\circ}^\circ, \mu_m^{\otimes 2})$  sont tous les deux isomorphes à  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ; reste donc à voir que ces isomorphismes sont compatibles avec  $f$ . Par construction, l'isomorphisme du th. 1 est obtenu comme le composé de deux résidus pour la suite spectrale de Hochschild-Serre, donc la compatibilité en question est évidente par fonctorialité.

## 5. CONCLUSION

Comme promis, on va maintenant construire, suivant Kato, un complexe en K-théorie de Milnor que l'on va ensuite comparer à travers le symbole cohomologique avec le complexe hypothétique du th. 2.

Soit  $B^h$  un anneau comme dans le lemme 3.2,  $K_h$  son corps de fractions. On suppose que le corps résiduel de  $B^h$  soit parfait. (En fait, des hypothèses plus faibles suffisent, cf. la Remarque ci-dessous.) Si  $q$  parcourt les idéaux premiers de hauteur 1 de  $B^h$ , on définit le complexe

$$(M) \quad K_2(K_h) \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_q K_1(\kappa(q)) \xrightarrow{\beta} K_0(\mathbb{F}) \cong \mathbb{Z}$$

comme suit : l'homomorphisme  $\alpha$  est somme directe des résidus de Milnor  $\partial_{1,q}^M$  (cf. chap. 2) attachés aux valuations discrètes de  $K_h$  induites par les divers  $q$  (on voit tout de suite qu'il n'y a qu'un nombre fini de résidus qui n'annulent pas un élément donné de  $K_2(K_h)$ ), et  $\beta = \sum f_q v_q$ , où  $v_q$  est la valuation induite sur le corps résiduel  $\kappa(q)$  de  $q$  par l'idéal maximal de  $B^h$ ,  $f_q$  son degré résiduel. (En fait,  $v_q = \partial_{0,v_q}^M$  et la multiplication par  $f_q$  est précisément la norme  $K_0(\kappa(v_q)) \rightarrow K_0(\mathbb{F})$ .)

LEMME 5.1. — (M) est un complexe.

*Démonstration.* Par le lemme 3.2, le groupe multiplicatif de  $K_h$  est engendré par les unités de  $B^h$ , l'uniformisante  $\pi$ , la variable  $T$  et les éléments de la forme  $P/T^n$ , où  $P$  est un polynôme de Weierstrass de degré  $n$ . Il suffit donc de vérifier l'égalité  $\beta\alpha(< a, b >) = 0$  quand  $a$  et  $b$  sont parmi ces générateurs. Les cas où  $a$  ou  $b$  est une unité, ou bien  $a = \pi$ ,  $b = T$ , sont triviaux. Si  $P$  est de Weierstrass,  $\beta\alpha(< \pi, P >) = n - e_q f_q = 0$ , (où  $e_q$  est l'indice de ramification de  $v_q$ ) car  $\mathbb{F}$  est supposé parfait. Vu la multiplicativité et l'anticommutativité des symboles  $< a, b >$  (cf. Bass-Tate [3]), il nous reste à traiter les cas où  $a = P/T^n$ ,  $b = Q/T^k$ , ou bien  $a = P/T^n$ ,  $b = T$ . Sur de tels  $< a, b >$  le résidu  $\partial_{1,v}^M$  est trivial, donc on peut se borner aux autres places de  $K_h$ . Or elles peuvent être identifiées à des places du corps de fonctions  $\mathbb{F}(T)$  par le morphisme naturel  $\text{Spec } B_\pi^h \rightarrow \text{Spec } \mathbb{F}[T]$ . Si  $v$  est une place de  $\mathbb{F}(T)$ , triviale sur  $\mathbb{F}$ , qui ne provient pas d'une place de  $B_\pi^h$ , on a, grâce à la normalisation par  $1/T^n$ ,

$$\partial_{1,v}^M(< a, b >) = \begin{cases} 1 & \text{si } b = T \text{ et } v \text{ est la place à l'infini;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Maintenant si  $v_\pi$  est la valuation de  $k$ ,  $\mathfrak{p}$  une place de  $\mathbb{F}(T)$ ,  $v_\mathfrak{p}$  le prolongement unique de  $v_\pi$  sur le corps résiduel  $\kappa(\mathfrak{p})$  avec degré résiduel  $f_\mathfrak{p}$ , on a la formule  $v_\pi \circ N_{\kappa(\mathfrak{p})/k} = f_\mathfrak{p} v_\mathfrak{p}$ , ce qui nous donne

$$\beta\alpha(< a, b >) = v_\pi \circ \sum_{\mathfrak{p}} N_{\kappa(\mathfrak{p})/k} \circ \partial_{1,\mathfrak{p}}^M(< a, b >)$$

où  $\mathfrak{p}$  parcourt les places de  $\mathbb{F}(T)$  triviales sur  $\mathbb{F}$  (y compris la place à l'infini, car  $v_\pi(1) = 0$ ). Mais la loi de réciprocité de Bass-Tate ([3], chap. I.5.) nous dit que  $\sum_{\mathfrak{p}} N_{\kappa(\mathfrak{p})/k} \circ \partial_{1,\mathfrak{p}}^M = 0$ , ce qui achève la démonstration.

*Remarque.* Le complexe du lemme peut être largement généralisé; en fait, il peut être construit pour n'importe quel anneau local noethérien excellent de dimension 2. Pour voir  $\beta\alpha = 0$  dans ce cas, on montre d'abord par un argument de normes que l'on peut remplacer l'anneau par son complété, puis par un autre argument de normes et le théorème de Cohen on se réduit au cas de  $O_k[[T]]$ , ce qui se traite comme dans le lemme ci-dessus. On n'a pas besoin d'hypothèse sur le corps résiduel; le fait que l'anneau soit excellent assure la validité de la formule  $n = ef$ .

Enfin, nous signalons que Kato [7] définit un complexe encore plus général, pour n'importe quel schéma excellent, qui est un analogue du complexe de Gersten-Quillen en K-théorie de Milnor. Mais la vérification du fait que ce soit un complexe se réduit immédiatement au cas mentionné ci-dessus.

Maintenant rien ne nous empêche de finir la démonstration du th. 2. Soient  $A^\circ$ ,  $K^\circ$  comme au chapitre précédent,  $A^{\circ\circ}$  le hensélisé strict de  $A^\circ$  avec corps de fractions  $K^\circ$ .  $A^{\circ\circ}$  n'est autre que le hensélisé de  $O_k^{\text{nr}}[T]_{(\pi,T)}$ , et comme on l'a déjà remarqué,  $K^{\circ\circ}$  est de dimension cohomologique 2. Donc la suite spectrale de Hochschild-Serre induit un isomorphisme  $H^3(K^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \cong H^1(\mathbb{F}, H^2(K^{\circ\circ}, \mu_m^{\otimes 2}))$ . De même, si  $\mathfrak{p}^\circ$  est un idéal premier de hauteur 1 de  $A^\circ$ , la suite spectrale de Hochschild-Serre en cohomologie étale (cf. Milne [11], p. 106) induit un isomorphisme  $H^3(K_{\mathfrak{p}^\circ}^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \cong H^1(\mathbb{F}, H^2(K^{\circ\circ} \times_{K^\circ} K_{\mathfrak{p}^\circ}^\circ, \mu_m^{\otimes 2}))$ , car on a pour tout  $i \geq 0$  des isomorphismes

$$(5.2) \quad H^i(K^{\circ\circ} \times_{K^\circ} K_{\mathfrak{p}^\circ}^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \cong \bigoplus_{\mathfrak{p}^{\circ\circ} | \mathfrak{p}^\circ} H^i(K_{\mathfrak{p}^{\circ\circ}}^{\circ\circ}, \mu_m^{\otimes 2})$$

(où les  $\mathfrak{p}^{\circ\circ}$  sont les idéaux premiers de  $A^{\circ\circ}$  au-dessus de  $\mathfrak{p}^{\circ}$ ) et les corps  $K_{\mathfrak{p}^{\circ\circ}}$  sont de dimension cohomologique 2. Quant à la vérification de (5.2), on peut supposer  $i = 0$ , puis remplacer les anneaux en question par leurs complétés, et alors on peut de nouveau invoquer [16], chap. I., par. 2.3., le théorème sur les extensions de valuations.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 H^1(\mathbb{F}, K_2(K^{\circ\circ})/m) & \rightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{p}^{\circ}} H^1(\mathbb{F}, \bigoplus_{\mathfrak{p}^{\circ\circ}|\mathfrak{p}^{\circ}} K_2(K_{\mathfrak{p}^{\circ\circ}}^{\circ\circ})/m) & \xrightarrow{\partial^M} & H^1(\mathbb{F}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong \\
 H^1(\mathbb{F}, H^2(K^{\circ\circ}, \mu_m^{\otimes 2})) & \rightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{p}^{\circ}} H^1(\mathbb{F}, \bigoplus_{\mathfrak{p}^{\circ\circ}|\mathfrak{p}^{\circ}} H^2(K_{\mathfrak{p}^{\circ\circ}}^{\circ\circ}, \mu_m^{\otimes 2})) & \xrightarrow{\partial} & H^1(\mathbb{F}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 H^3(K^{\circ}, \mu_m^{\otimes 2}) & \rightarrow & \bigoplus_{\mathfrak{p}^{\circ}} H^3(K_{\mathfrak{p}^{\circ}}^{\circ}, \mu_m^{\otimes 2}) & \rightarrow & H^1(\mathbb{F}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})
 \end{array}$$

(où, bien sûr,  $K_2(K^{\circ\circ})/m$  veut dire  $K_2(K^{\circ\circ})/mK_2(K^{\circ\circ})$  etc. et on a  $H^1(\mathbb{F}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ). Remarquons que l'homomorphisme marqué  $\partial^M$  est induit par le composé de deux résidus de Milnor, comme dans le complexe (M) (noter, cependant, que tous les  $f_{\mathfrak{p}^{\circ\circ}}$  sont égaux à 1), et  $\partial$  est induit par le composé de deux résidus de Hochschild-Serre. Donc la commutativité du deuxième quadrant en haut est assurée par le lemme 2.4; la commutativité du premier est triviale. La ligne en bas est essentiellement la suite du th. 2, la seule différence étant que le composé des deux résidus qui induit l'isomorphisme du th. 1 tombe dans  $H^1(\kappa(v_{\mathfrak{p}}), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ , il faut donc ajouter une corestriction pour l'extension finie de corps  $\kappa(v_{\mathfrak{p}}) | \mathbb{F}$  pour arriver à  $H^1(\mathbb{F}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ . Mais l'isomorphisme de ce dernier groupe avec  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  n'est pas affecté par les corestrictions. Enfin les deux quadrants en bas commutent par des propriétés formelles de la suite spectrale de Hochschild-Serre. Une application du lemme 5.1 (avec  $A^{\circ\circ}$  à la place de  $B^h$ ) montre que la première ligne est un complexe. D'autre part, le théorème de Merkuriev-Sousline et le fait que  $\mathbb{F}$  soit de dimension cohomologique 1 entraînent la surjectivité du premier homomorphisme vertical en haut. Une chasse au diagramme montre alors que la ligne en bas est aussi un complexe, ce qu'il fallait démontrer.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ARTIN. — Algebraic approximation of structures over complete local rings, *Pub. Math. IHES* **36** (1969), 23–58.
- [2] M. ARTIN. — *Grothendieck Topologies*, Harvard University, 1961.
- [3] H. BASS and J. TATE. — The Milnor Ring of a Global Field, in : H. Bass (ed.) *Algebraic K-theory II*, Springer LNM **342**, 1973.
- [4] S. BLOCH. — *Lectures on Algebraic Cycles*, Duke University, 1980.

- [5] E. FROSSARD. — *Thèse*, Université de Paris-XI, Orsay, 1995.
- [6] K. KATO. — A generalization of local class field theory by using K-groups II, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **27** (1980), 603–683.
- [7] K. KATO. — Milnor K-theory and the Chow group of zero-cycles, in : S. Bloch et al. (eds.) *Applications of Algebraic K-Theory to Algebraic Geometry and Number Theory*, *Contemp. Math.* **55** (1986), 241–263.
- [8] K. KATO. — A Hasse principle for two-dimensional local fields, *J. reine angew. Math.* **366** (1986), 142–183.
- [9] K. KATO and S. SAITO. — Global class field theory of arithmetic schemes, in : S. Bloch et al. (eds.) *Applications of Algebraic K-Theory to Algebraic Geometry and Number Theory*, *Contemp. Math.* **55** (1986), 255–331.
- [10] S. LANG. — *Algebra (3rd ed.)*, Addison-Wesley, 1993.
- [11] J. S. MILNE. — *Étale Cohomology*, Princeton University Press, 1980.
- [12] M. NAGATA. — *Local Rings*, Wiley-Interscience, New York, 1952.
- [13] B. PERRIN-RIOU. — Systèmes d'Euler et représentations  $p$ -adiques, prépublication Orsay 96-04.
- [14] S. SAITO. — Class field theory for curves over local fields, *J. Number Theory* **21** (1985), 44–80.
- [15] J.-P. SERRE. — *Cohomologie Galoisienne (5<sup>e</sup> éd.)*, Springer LNM **5**, 1994.
- [16] J.-P. SERRE. — *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1968.
- [17] J.-P. SERRE. — Local class field theory, in : J. W. S. Cassels and A. Fröhlich (eds.) *Algebraic Number Theory*, Academic Press, London–New York, 1967, 129–162.
- [18] J. TATE. — Global class field theory, in : J. W. S. Cassels and A. Fröhlich (eds.) *Algebraic Number Theory*, Academic Press, London–New York, 1967, 163–203.
- [19] J. TATE. — Relations between  $K_2$  and Galois cohomology, *Invent. Math.* **36** (1976), 257–274.