

THÈSES D'ORSAY

DAVID HERMANN

Homologie symplectique et épaisseur de Gromov d'un ouvert de type contact restreint

Thèses d'Orsay, 1998

[<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1998__0513__P0_0>](http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1998__0513__P0_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses d'Orsay » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



NUMDAM

*Thèse numérisée par la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016
et diffusée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

ORSAY

N° D'ORDRE: 5163

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THESE
présentée
pour obtenir

Le TITRE de DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITE PARIS XI ORSAY

PAR
M. David HERMANN

SUJET:

HOMOLOGIE SYMPLECTIQUE ET ÉPAISSEUR
DE GROMOV D'UN OUVERT DE TYPE
CONTACT RESTREINT

Soutenue le 16/01/98 devant le jury composé de :

M. Emmanuel GIROUX	Rapporteur
M. François LAUDENBACH	
M. Pierre PANSU	
M. Jean-Claude SIKORAV	Rapporteur
M. Claude VITERBO	Directeur

Remerciements

Je remercie François Laudenbach et Pierre Pansu de m'avoir fait le plaisir et l'honneur d'accepter de participer à ce jury.

Je remercie Emmanuel Giroux et Jean-Claude Sikorav d'avoir accepté de consacrer de leur temps à rapporter ma thèse, et des nombreuses corrections et simplifications qu'ils m'ont suggérées. Au cours des contacts que nous avons eus, j'ai beaucoup apprécié leur patience et leur gentillesse.

Je remercie Claude Viterbo qui m'a permis de beaucoup apprendre sur la géométrie symplectique et sur la façon de faire de la recherche. Je le remercie d'avoir toujours su se montrer très disponible, et de n'avoir jamais perdu patience devant mes incessantes questions.

Je remercie Helmut Hofer de m'avoir accueilli à l'ETH de Zürich: ce séjour a été enrichissant dans de nombreux domaines, et m'a permis de faire beaucoup progresser ces travaux. Je remercie aussi Michel Andenmatten, Kai Cieliebak, Markus Kriener et Torsten Linnemann pour toutes les discussions que nous avons pu avoir lors de ce séjour.

Je remercie également Emmanuel Ferrand et tous les participants au groupe de travail de géométrie symplectique pour les discussions que nous avons eues.

La liste ne s'arrête pas là...

Résumé: L'objet de cette thèse est l'étude de l'homologie symplectique d'un ouvert dont le bord est de type contact restreint dans un espace vectoriel symplectique. On construit une suite cofinale de hamiltoniens et de structures presque complexes pour lesquels les orbites périodiques et les trajectoires de Floer intervenant dans l'homologie symplectique sont toutes situées dans l'ouvert considéré. Les propriétés de cette suite cofinale montrent que l'homologie symplectique d'un tel ouvert est locale. On contrôle ainsi en particulier les trajectoires de Floer associées à la capacité de Floer-Hofer de cet ouvert, ce qui nous permet de montrer qu'une suite de telles trajectoires de Floer converge globalement vers une courbe pseudo-holomorphe. On montre ainsi que la capacité de Floer-Hofer d'un tel ouvert est au moins égale à son épaisseur de Gromov.

Abstract: The aim of this thesis is the study of the symplectic homology of an open set which boundary is of restricted contact type in a symplectic vector space. We construct a cofinal sequence of hamiltonians and almost complex structures whose periodic orbits and Floer connecting orbits playing a role in the symplectic homology stay in this open set. This property shows that the symplectic homology of such an open set is local. It gives us in particular a control on the Floer connecting orbits associated to the Floer-Hofer capacity of this open set. This control allows us to prove that a sequence of such connecting orbits converges globally to a pseudo-holomorphic curve. This proves that the Floer-Hofer capacity of such an open set equals at least its Gromov width.

Introduction

L'homologie symplectique, introduite par Floer, Hofer *et al.* dans [FH94], est un des outils fondamentaux pour l'étude de la géométrie symplectique des ouverts de $\mathbb{C}^n$ via les systèmes hamiltoniens. Le point crucial de cette théorie est de définir pour une variété non compacte l'homologie de Floer, introduite par Floer dans [Flo88] pour une variété symplectique compacte (M, ω) vérifiant certaines hypothèses topologiques. Floer considère un analogue du complexe de Thom-Smale-Witten pour l'homologie de Morse : ce complexe est engendré par les orbites 1-périodiques d'un hamiltonien H sur M , gradué par l'indice de Conley-Zehnder, et l'application bord est obtenue en comptant modulo 2, entre deux orbites 1-périodiques de H , le nombre de solutions de l'équation aux dérivées partielles elliptique

$$u : Z = \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow M, \quad \bar{\partial}_J u = -\nabla_J H(u) \quad (1)$$

dans laquelle J est une structure presque complexe calibrée par ω , et ∇_J désigne le gradient pour la métrique induite par J sur M .

Dans [FH94], les auteurs montrent comment combiner cette théorie de Morse elliptique et la théorie des capacités symplectiques de [EH90a], [EH90b] pour associer à un hamiltonien quasi-quadratique à l'infini sur $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$ symplectique standard une homologie de Floer $HF_*^{[a,b]}(H, J)$ qui est de plus filtrée par la valeur de la fonctionnelle d'action sur les orbites 1-périodiques de H . Les propriétés fonctorielles de cette homologie de Floer permettent de définir l'homologie symplectique $S_*^{[a,b]}(U)$ d'un ouvert borné U de $\mathbb{C}^n$ comme la limite de l'homologie de Floer de hamiltoniens tendant vers 0 dans U et vers l'infini hors de U . En particulier, ils montrent dans [FW94] comment définir une capacité symplectique pour les ouverts de $\mathbb{C}^n$ à l'aide de l'homologie symplectique. Si l'on considère une petite boule $B(r)$ incluse dans U , on dispose de morphismes naturels

$$\sigma_u^b : S_{n+1}^{[\varepsilon, b]}(U) \rightarrow S_{n+1}^{[\varepsilon, b]}(B(r)) \simeq \mathbb{Z}_2$$

pour $0 < \varepsilon < \pi r^2 < b$ qui sont surjectifs pour b assez grand. Ils définissent alors une capacité symplectique par

$$c(U) = \inf \{ b / \sigma_U^b \text{ est surjectif} \} . \quad (2)$$

Le but de ce travail est de comparer cette capacité à une autre capacité symplectique : l'épaisseur symplectique définie par Gromov ([Gro85], [Gro87]) comme

$$w(U) = \sup_{x \in U} \sup_{J \in \mathcal{J}} \inf_{u \in \text{Hol}(J, x)} \mathcal{A}(u) \quad (3)$$

où $\mathcal{J}$ désigne l'ensemble des structures presque complexes calibrées par ω_0 , $Hol(J, x)$ l'ensemble des courbes J -holomorphes passant par x et s'appuyant sur ∂U , et $\mathcal{A}(u)$ l'aire symplectique de u . L'idée de base d'une telle comparaison est de partir d'une structure presque complexe J sur U et de l'étendre (après restriction) en une structure presque complexe J_λ sur $\mathbb{C}^n$. Si l'on considère une famille cofinale H_λ de hamiltoniens, la définition de $c(U)$ fournit une famille u_λ de trajectoires de Floer pour (H_λ, J_λ) d'énergie proche de $c(U)$. Comme H_λ converge vers 0 dans U , la partie de u_λ située dans U va converger localement vers une solution u de $\bar{\partial}_J u = 0$, c'est à dire vers une courbe J -holomorphe, permettant ainsi de majorer $w(U)$ par $c(U)$.

Le problème est qu'en général, si l'on peut imposer à u de passer par un point x donné, rien ne prouve que la courbe holomorphe obtenue est non constante et s'appuie sur ∂U . Il faut en fait imposer aux trajectoires de Floer de rester au voisinage de U , pour pouvoir passer de la convergence locale à la convergence globale de u_λ vers une courbe holomorphe. On est ainsi naturellement amené à supposer que ∂U est de type contact, c'est à dire qu'un voisinage V de ∂U est feuilleté par des hypersurfaces Σ_S symplectiquement conformes à ∂U . Suivant une idée de McDuff (cf [McD91]), on peut alors considérer des extensions J_λ de J rendant les Σ_S pseudoconvexes, et des hamiltoniens H_λ plurisousharmoniques au voisinage de ∂U dont les surfaces de niveau sont les Σ_S . Dans ce cas, le principe du maximum implique que les trajectoires de Floer ne peuvent être tangentes intérieurement aux Σ_S , et donc ne peuvent pas sortir "localement" de U .

Cependant, cette seule propriété n'est pas suffisante, car les trajectoires de Floer pourraient *a priori* sortir de $U \cup V$. Il faut en fait supposer ∂U de type contact restreint, c'est à dire qu'on peut choisir V arbitrairement grand. Dans ce cas, le principe du maximum impose aux trajectoires de Floer quittant U à sortir "loin" de U . Suivant une idée de Viterbo (cf [Vit]), on peut construire une famille cofinale (H_λ, J_λ) telle que:

- les seules orbites 1-périodiques de H_λ d'action positive soient
 1. les points critiques de H_λ dans U , d'action proche de 0
 2. les caractéristiques fermées de ∂U , dont l'action est proche de l'aire symplectique
 l'action des autres orbites 1-périodiques de H_λ tendant uniformément vers $-\infty$
- les trajectoires de Floer reliant les orbites 1-périodiques d'action positives et sortant de $U \cup V$ aient une grande énergie, donc que les trajectoires d'énergie bornée restent dans U .

On obtient ainsi une description "locale" de l'homologie symplectique de U , dont on peut montrer qu'elle coïncide avec la définition "intrinsèque" de [Vit]. Si l'on se restreint aux actions proches de 0, on montre que le complexe de Floer de (H_λ, J_λ) coïncide avec le complexe de Thom-Smale-Witten pour l'homologie de Morse de H_λ . On en déduit que pour ε proche de 0

$$S_*^{[0, \varepsilon]}(U) \simeq H_{*+n}(U, \partial U) . \quad (4)$$

On montre ensuite que l'application

$$H_{2n}(U, \partial U) \xrightarrow{i_U^b} S_n^{[0,b]}(U)$$

obtenue par les suites exactes d'homologie symplectique s'annule pour b assez grand, et qu'on a aussi

$$c(U) = \inf\{b/i_U^b(1) = 0\} . \quad (5)$$

Cette définition fournit une famille de trajectoires de Floer u_λ reliant le minimum z_0 de H_λ , situé à l'intérieur de U , et une orbite périodique γ_λ de H_λ située près du bord de U . Un argument de régularité elliptique dû à Floer ([Flo88]) montre qu'elles convergent localement vers un cylindre J -holomorphe dans U . Le point crucial est d'étudier ensuite la convergence de u_λ au voisinage de ses extrémités. En rigidifiant la situation en z_0 , c'est à dire en déformant J en une structure J' constante sur un voisinage de z_0 , on montre que l'on obtient à la limite une courbe J' -holomorphe de genre nul non constante u_r passant par z_0 . On fait ensuite converger J' vers J : un argument dû à Floer, Hofer et Viterbo (cf [FHV90]) permet de montrer que u_r converge vers une courbe J -holomorphe de genre nul passant par z_0 et s'appuyant sur ∂U . Comme son aire est inférieure à $c(U)$, il en résulte

Théorème 1

*Pour un ouvert U connexe et borné de $\mathbb{C}^n$
tel que ∂U est de type contact restreint, on a
 $w(U) \leq c(U)$*

Le premier chapitre est consacré aux propriétés de base des ouverts à bord de type contact restreint. On définit le paramétrage transverse τ que l'on utilisera dans toute la suite, et on étudie les orbites périodiques des hamiltoniens que l'on considérera. On étudie ensuite le comportement de ces ouverts vis-à-vis des capacités symplectiques, en particulier de l'épaisseur symplectique de Gromov. On rappelle enfin comment on peut étendre une structure presque complexe donnée en une structure presque complexe rendant la fonction τ plurisousharmonique, ainsi que les conséquences du principe du maximum dans une telle situation.

Le second chapitre est consacré à l'homologie de Floer dans $\mathbb{C}^n$. On y rappelle certains résultats et définitions de la littérature "classique" sur le sujet (en particulier [CFH95], [CFHW96], [Flo88], [FH94], [FHS95], [FW94], [HZ94], [MS94], [Sal90] et [SZ92]) concernant la théorie Fredholm pour les fonctionnelles intervenant dans l'homologie de Floer et la construction de l'homologie symplectique. On y étudie en particulier l'existence d'extrémités pour une trajectoire de Floer, et la manière de perturber une paire (H, J) donnée pour obtenir une paire "générique", c'est à dire dont l'homologie de Floer soit bien définie.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de l'homologie symplectique d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ à bord de type contact restreint. On commence par construire une famille cofinale de (H_λ, J_λ) adaptée à la situation, c'est à dire dont les orbites 1-périodiques et les trajectoires de Floer restent au voisinage de U . On utilise ensuite cette construction, ainsi que les perturbations génériques ci-dessus pour décrire l'homologie symplectique de U : on y montre en particulier (4).

Le quatrième chapitre est consacré à la preuve du théorème 1. On y rappelle les résultats de [FHW94] concernant la capacité c , et on y montre (5). On utilise ensuite la famille cofinale du chapitre 3 pour construire une trajectoire de Floer de minmax associée à $c(U)$. On montre enfin la convergence de cette trajectoire de minmax vers une courbe holomorphe ayant les propriétés souhaitées lorsqu'on fait tendre successivement toutes les perturbations vers 0.

Table des matières

1	Ouverts de type contact restreint	11
1.1	Dynamique hamiltonienne au voisinage du bord	11
1.1.1	Définitions	11
1.1.2	Notations et paramétrage	12
1.1.3	Hamiltoniens spéciaux	14
1.2	Capacités symplectiques	16
1.2.1	Capacités intrinsèques et capacités relatives	16
1.2.2	Épaisseur de Gromov	17
1.2.3	Cas d'un ouvert à bord de type contact restreint	19
1.2.4	Non-dégénérescence du spectre d'action	20
1.2.5	Extension des inégalités	20
1.3	Pseudoconvexité	21
1.3.1	Hypersurfaces pseudoconvexes	21
1.3.2	Structures presque complexes spéciales	23
1.3.3	Principe du maximum convexe	25
2	Homologie de Floer	27
2.1	Fonctionnelles et trajectoires de Floer	27
2.1.1	La fonctionnelle d'action	27
2.1.2	Conventions de signe	28
2.1.3	Trajectoires de Floer et fonctionnelle d'énergie	29
2.1.4	Lien avec les courbes holomorphes	30
2.2	Convergence locale des trajectoires de Floer	32
2.2.1	Conditions à l'infini	32
2.2.2	Régularité elliptique	33
2.2.3	Extrémités des trajectoires d'énergie finie	34
2.2.4	Trajectoires d'extrémités non dégénérées	36
2.3	Homologie symplectique	38
2.3.1	Paires admissibles	38
2.3.2	Homologie de Floer dans $\mathbb{C}^n$	38
2.3.3	Perturbations génériques	40
2.3.4	Perturbations admissibles	42
2.3.5	Propriétés fonctorielles	44

3	Homologie symplectique locale	49
3.1	Suite cofinale adaptée	49
3.1.1	Famille cofinale idéale	49
3.1.2	Hamiltonien lisse	52
3.1.3	Orbites périodiques de H_λ	54
3.1.4	Estimation de l'énergie des trajectoires de Floer	55
3.1.5	Construction d'une suite cofinale	57
3.2	Description de l'homologie symplectique	59
3.2.1	Familles cofinales génériques	59
3.2.2	Homologie symplectique "intrinsèque"	63
3.2.3	Unicité de l'homologie symplectique	67
3.2.4	Homologie au voisinage de 0	69
4	Applications	71
4.1	Capacité par homologie symplectique	71
4.1.1	Homologie symplectique des boules	71
4.1.2	Définition de c	73
4.1.3	Cas d'un ouvert de type contact restreint	74
4.1.4	Trajectoire de minmax	77
4.2	Construction d'une courbe holomorphe	80
4.2.1	Stratégie de la preuve du théorème	80
4.2.2	Rigidification locale	81
4.2.3	Convergence de la trajectoire de minmax	82
4.2.4	Assouplissement en 0	87
4.2.5	Conclusion	91

Chapitre 1

Ouverts de type contact restreint

1.1 Dynamique hamiltonienne au voisinage du bord

On définit dans cette section les hamiltoniens que l'on va considérer, dont les variations sont localisées au voisinage d'une hypersurface de type contact restreint. On va s'intéresser en particulier à leurs orbites périodiques et à la valeur de la fonctionnelle d'action sur celles-ci.

1.1.1 Définitions

Commençons par rappeler quelques définitions classiques à propos des hypersurfaces de type contact. On se place dans $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ muni de la forme symplectique

$$\omega_0 = \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k \quad (1.1.1)$$

avec $z = (z_1, \dots, z_n)$ et $z_k = x_k + iy_k$. Si $\langle, \rangle$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^{2n}$, on a donc

$$\omega_0(u, v) = \langle iu, v \rangle .$$

Définition 1.1.1 *Une hypersurface Σ est de type contact restreint s'il existe un champ de Liouville transverse à Σ , c'est à dire un champ de vecteur η sur $\mathbb{C}^n$ vérifiant :*

$$L_\eta \omega_0 = \omega_0 \text{ et } \eta \lrcorner \Sigma . \quad (1.1.2)$$

On notera $\lambda = i_\eta \omega_0$, qui vérifie

$$d\lambda = \omega_0 .$$

On notera $\sigma = i_\Sigma^* \lambda$ la restriction de λ à Σ : c'est une forme de contact sur Σ , c'est à dire que la forme $\sigma \wedge (d\sigma)^n$ est une forme volume.

Définition 1.1.2 *Le champ de contact de Σ est le champ d'hyperplans*

$$\xi = \text{Ker } \sigma .$$

Le champ de Reeb de σ est le champ de vecteurs X défini par

$$i_X d\sigma = 0 \text{ et } \sigma(X) = 1 .$$

La forme $d\sigma|_\xi$ est une forme symplectique sur le champ ξ .

Définition 1.1.3 Une caractéristique fermée de Σ est une orbite périodique de X . Son aire est le réel

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_{S^1} \gamma^* \sigma .$$

Le spectre d'action de Σ est l'ensemble

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \{ \mathcal{A}(\gamma) / \gamma \text{ caractéristique fermée de } \Sigma \} .$$

Un exemple essentiel d'hypersurface de type contact restreint est celui de la sphère.

Exemple 1.1.4 Si $\Sigma = S^{2n-1}(R)$, le champ

$$\eta_0(z) = \frac{1}{2}z$$

est associé à la forme de Liouville

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n x_k dy_k - y_k dx_k = \frac{1}{2} \langle iz, \cdot \rangle$$

qui induit la structure de contact standard sur S^{2n-1} . Le champ de Reeb associé est

$$X_0(z) = \frac{2}{R^2} iz$$

pour $z \in S^{2n-1}(R)$. Son spectre d'action est donné par

$$\mathcal{S}(S^{2n-1}(R)) = \{ k\pi R^2 / k \in \mathbb{N}^* \} .$$

1.1.2 Notations et paramétrage

On considérera dorénavant un ouvert connexe et borné U tel que $\Sigma = \partial U$ est de type contact restreint. On peut alors rendre le champ de Liouville η standard à l'infini comme suit. On suppose que $U \subset B^{2n}(R)$ et que η_1 est un champ de Liouville transverse à Σ . On considère la forme $\lambda_1 = i_{\eta_1} \omega_0$ et la forme λ_0 de l'exemple ci-dessus. On en déduit

$$d(\lambda_1 - \lambda_0) = \omega_0 - \omega_0 = 0$$

et donc qu'il existe une fonction $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\lambda_1 = \lambda_0 + df .$$

On se donne une fonction plateau ρ valant 1 dans $B^{2n}(R)$ et 0 hors de $B^{2n}(R_0)$, avec $R_0 = R + 1$, et on considère la forme

$$\lambda = \lambda_0 + d(\rho f)$$

et le champ η défini par $i_\eta \omega_0 = \lambda$. Il vérifie toujours

$$L_\eta \omega_0 = \omega_0$$

et $\eta = \eta_1$ dans $B^{2n}(R)$, donc $\eta \upharpoonright \Sigma$. Il vérifie de plus

$$\eta = \eta_0 \text{ hors de } B^{2n}(R_0) . \quad (1.1.3)$$

Le flot ψ_s de η est alors défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ et vérifie :

$$\psi_s^* \lambda = e^s \lambda . \quad (1.1.4)$$

En effet, il vient

$$\frac{d}{ds} \psi_s^* \lambda = \psi_s^* (L_\eta \lambda) = \psi_s^* (d(i_\eta i_\eta \omega_0) + i_\eta \omega_0) = \psi_s^* \lambda .$$

On en déduit $\psi_s^* \omega_0 = e^s \omega_0$, c'est à dire que η est symplectiquement conforme. Comme η est standard à l'infini, on a également

$$\psi_s(z) = e^{\frac{s}{2}} z \text{ pour } s > 0 \text{ et } z \notin B^{2n}(R_0) . \quad (1.1.5)$$

On définit alors

$$\Psi : \mathbb{R}_+^* \times \Sigma \rightarrow \mathbb{C}^n$$

par

$$\Psi(S, p) = \psi_{\ln(S)}(p) .$$

Si l'on munit $\hat{\Sigma} := \mathbb{R}_+^* \times \Sigma$ de la forme symplectique $\hat{\omega} = d\hat{\lambda}$ avec

$$\hat{\lambda} = S \cdot \sigma , \quad (1.1.6)$$

on obtient

Lemme 1.1.5 $\Psi^* \lambda = \hat{\lambda}$.

Il suffit en effet de remarquer que

$$\Psi^* \lambda(\delta S, \delta p) = S^{-1} \lambda(\eta) \delta S + \psi_{\ln(S)}^* \lambda(\delta p) = S \lambda(\delta p) = S \sigma(\delta p) .$$

Par conséquent, $\Psi^* \omega_0 = \hat{\omega}$, donc Ψ est un plongement symplectique. On définit l'ouvert

$$W = \Psi(\hat{\Sigma}) . \quad (1.1.7)$$

Ce voisinage W de Σ est feuilleté par des hypersurfaces symplectiquement conformes à Σ , de la forme

$$\Sigma_S = \Psi(\{S\} \times \Sigma) = \psi_{\ln(S)}(\Sigma) \text{ pour } S > 0 . \quad (1.1.8)$$

On considérera aussi les ouverts

$$U_S = \psi_{\ln(S)}(U) \quad (1.1.9)$$

qui vérifient

$$\Sigma_S = \partial U_S \quad (1.1.10)$$

c'est à dire que l'intérieur de Σ_S est lui aussi symplectiquement conforme à l'intérieur de Σ . On définit enfin la fonction τ sur W par

$$\tau(\Psi(S, p)) = S . \quad (1.1.11)$$

Exemple 1.1.6 Si $\Sigma = S^{2n-1}(R)$, on a $\psi_s(z) = e^{\frac{s}{2}} z$, d'où

$$U_a = B^{2n}(R\sqrt{a})$$

pour $a > 0$ et

$$\tau(z) = \frac{1}{R^2} |z|^2$$

pour tout z de $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

En raison de la normalisation à l'infini décrite ci-dessus, la formule (1.1.5) implique donc dans le cas général

$$\bar{U}_a \subset B^{2n}(R_0\sqrt{a}) \text{ pour tout } a \geq 1 . \quad (1.1.12)$$

1.1.3 Hamiltoniens spéciaux

On posera pour un intervalle I de $\mathbb{R}$

$$U^I = \tau^{-1}(I) = \Psi(I \times \Sigma) . \quad (1.1.13)$$

Définition 1.1.7 Un hamiltonien $H : S^1 \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est spécial pour Σ sur $U^{[a,b]}$ s'il existe une fonction $h \in C^\infty([a, b])$ telle que

$$H(t, z) = h(\tau(z)) \text{ pour } (t, z) \in S^1 \times U^{[a,b]} .$$

Exemple 1.1.8 Si on se donne une fonction $h \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ telle que $h(x) = C_a$ pour $x < a$ et $h(x) = C_b$ pour $x > b$, on peut définir un hamiltonien spécial $H \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ par

- $H(z) = h(\tau(z))$ si $z \in U^{[a,b]}$
- $H(z) = C_a$ si $z \in U^a$
- $H(z) = C_b$ si $z \notin U^b$.

Si H est spécial sur $U^{[a,b]}$, le champ hamiltonien de H , défini par

$$i_{X_H} \omega_0 = -dH \quad (1.1.14)$$

vérifie $X_H = (h' \circ \tau)X_\tau$ sur $U^{[a,b]}$. On a en outre

$$X_\tau = \Psi_* X . \quad (1.1.15)$$

En effet, en passant à $\hat{\Sigma}$ via le symplectomorphisme Ψ , on a

$$\hat{\omega}(X, (\delta S, \delta p)) = S d\sigma(X, \delta p) - \sigma(X) \delta S = -\delta S .$$

On en déduit

$$X_H = (h' \circ \tau) \Psi_{\#} X . \quad (1.1.16)$$

On utilisera souvent la formule suivante, qui découle de (1.1.15) et des définitions

$$d\tau(\eta) = \lambda(X_{\tau}) = \tau . \quad (1.1.17)$$

On considère une orbite 1-périodique γ de X_H dans $U^{[a,b]}$: elle est forcément située sur une hypersurface

$$\Sigma_S = \{z \in \mathbb{C}^n / \tau(z) = S\} . \quad (1.1.18)$$

La courbe $\hat{\gamma} = \Psi^{-1}(\gamma)$ est alors une caractéristique fermée de Σ , de période $T = h'(S)$, dont l'aire est donnée par

$$A(\hat{\gamma}) = \int_0^T \sigma(X) dt = T .$$

Comme λ est une primitive globale de ω_0 , la fonctionnelle d'action peut être définie comme

$$A_H(\gamma) = \int_{S^1} \gamma^* \lambda - \int_0^1 H(\gamma(t)) dt .$$

On passe alors dans $\mathbb{R} \times \Sigma$ via Ψ pour calculer :

$$A_H(\hat{\gamma}) = \int_{S^1} \hat{\gamma}^* \hat{\lambda} - h(S) = \int_{S^1} (\tau \circ \gamma) \hat{\gamma}^* \sigma - h(S) = S h'(S) - h(S) .$$

On en déduit le

Lemme 1.1.9 *Une orbite 1-périodique γ de $H = h \circ \tau$ vérifie*

- $\gamma(S^1) \subset \Sigma_S = \tau^{-1}(S)$ avec $h'(S) \in \mathcal{S}(\Sigma)$
- $A_H(\gamma) = S h'(S) - h(S)$.

1.2 Capacités symplectiques

Nous allons rappeler ici les notions de capacité intrinsèque (définie sur les variétés symplectiques, et invariante par symplectomorphisme) et relative (définie sur les ouverts d'une variété donnée, et invariante par symplectomorphisme ambiant), ainsi que les définitions intrinsèques et relatives de l'épaisseur symplectique de Gromov dans le cas d'une variété non compacte. Nous verrons que dans le cas d'un ouvert à bord de type contact restreint, épaisseur intrinsèque et épaisseur relative coïncident et varient continûment par déformation de l'ouvert, ce qui nous permettra, pour prouver le théorème 1, de perturber Σ pour se ramener au cas où son spectre d'action est non dégénéré.

1.2.1 Capacités intrinsèques et capacités relatives

On ne va considérer que des variétés symplectiques (M, ω) sans bord, mais elles ne seront pas forcément compactes. Commençons par rappeler deux définitions (voir [LM], [HZ94], [Vit89])

Définition 1.2.1 Une capacité intrinsèque associée à une variété symplectique (M, ω) de dimension donnée un nombre :

$$C(M, \omega) \in [0, \infty]$$

vérifiant :

1. S'il existe un plongement symplectique :

$$(M_1^{2n}, \omega_1) \hookrightarrow (M_2^{2n}, \omega_2)$$

alors $C(M_1, \omega_1) \leq C(M_2, \omega_2)$.

2. $C(M, \alpha\omega) = |\alpha| C(M, \omega)$.

3. $C(B^{2n}(1), \omega_0) = C(B^2(1) \times \mathbb{R}^{2n-2}, \omega_0) = \pi$.

On dispose d'une notion analogue pour les ouverts d'une variété symplectique donnée

Définition 1.2.2 Une capacité relative sur (M^{2n}, ω) associée à tout ouvert de M un nombre $c(U) \in [0, \infty]$ vérifiant :

1. $U \subset V \Rightarrow c(U) \leq c(V)$.
2. $c(\phi(U)) = |\alpha| c(U)$ si $\phi : M \rightarrow M$ vérifie $\phi^*\omega = \alpha\omega$.
3. Si on a un plongement symplectique

$$\phi : (B^{2n}(R_0), \omega_0) \hookrightarrow (M, \omega)$$

(ce qui est le cas pour R_0 assez petit), alors

$$c(\phi(B^2(r) \times B^{2n-2}(R))) = \pi r^2 \text{ pour } r \leq R < R_0.$$

La notion de capacité intrinsèque est plus forte que la notion de capacité relative. La différence essentielle entre les deux notions est que la première est invariante par symplectomorphisme de U , alors que la deuxième est invariante seulement par symplectomorphisme ambiant.

1.2.2 Épaisseur de Gromov

L'épaisseur symplectique (le “width”) a été introduite par Gromov dans [Gro85], [Gro87] (voir également [Ben86] et [Vit89]). C'est historiquement la première des capacités symplectiques. Elle est basée sur l'existence de courbes holomorphes dans une variété symplectique vue comme variété presque complexe.

Définition 1.2.3 Soit (M, ω) une variété symplectique. Une structure presque complexe sur M calibrée par ω est un endomorphisme fibré J de TM vérifiant

$$J_x^2 = -Id_{T_x M} \text{ pour tout } x \text{ de } M \quad (1.2.1)$$

tel que $g_J(u, v) = \omega(u, Jv)$ définit une métrique riemannienne sur M , c'est à dire

$$\omega(Ju, Jv) = \omega(u, v) \text{ pour tout } u, v \in TM \quad (1.2.2)$$

$$\omega(u, Ju) > 0 \text{ pour tout } u \in TM, u \neq 0. \quad (1.2.3)$$

Définition 1.2.4 On note $\mathcal{J}_M$ l'espace des structures presque complexes sur M calibrées par ω . Si $J \in \mathcal{J}_M$, on appelle courbe holomorphe une application $u : S \rightarrow M$, où S est une surface de Riemann connexe (éventuellement non compacte, mais sans bord), qui vérifie

$$du \circ i = J(u) \circ du.$$

Dans un premier temps, on est amené à considérer uniquement des ouverts relativement compacts dans M . Étant donné un tel ouvert U , $J \in \mathcal{J}_M$ et $x \in U$, on considère l'espace $Hol(J, U, x)$ des courbes J -holomorphes $u : S \rightarrow M$ qui :

- sont non constantes
- sont proprement appliquées dans un voisinage V de $\overline{U}$
- passent par x .

Pour une courbe J -holomorphe u , on note $\mathcal{A}(u)$ son aire symplectique :

$$\mathcal{A}(u) = \int_S u^* \omega.$$

On considère alors (voir [Gro85])

Définition 1.2.5 Pour un ouvert U relativement compact de M , l'épaisseur symplectique relative de U est donnée par

$$w_r(U) = \inf \{ a > 0 / \forall J \in \mathcal{J}_M, \forall x \in U, \exists u \in Hol(J, U, x) / \mathcal{A}(u \cap U) \leq a \}.$$

Une définition équivalente est :

$$w_r(U) = \sup_{J \in \mathcal{J}_M} \sup_{x \in U} \inf_{u \in Hol(J, U, x)} \mathcal{A}(u \cap U). \quad (1.2.4)$$

Remarque 1.2.6 *Par transitivité du groupe des isotopies hamiltoniennes sur M , et par invariance par isotopie, on constate sans peine qu'on peut "oublier" le sup sur x , i.e. pour tout x dans U :*

$$w_r(U) = \sup_{J \in \mathcal{J}_M} \inf_{u \in \text{Hol}(J, U, x)} \mathcal{A}(u \cap U) . \quad (1.2.5)$$

Il résulte immédiatement de la définition que pour U et V relativement compacts, on a:

$$U \subset V \Rightarrow w_r(U) \leq w_r(V) .$$

On étend alors cette définition aux ouverts U non relativement compact par "remplissage relativement compact", c'est à dire en posant

Définition 1.2.7 *Pour tout ouvert U de M , l'épaisseur symplectique relative de U est donnée par*

$$w_r(U) = \sup \{ w_r(V) / V \subset U \text{ et } \overline{V} \text{ compact} \} .$$

Avec cette définition on a la

Proposition 1.2.8 *w_r est une capacité relative définie sur les ouverts de M .*

La croissance et l'invariance symplectique conforme sont immédiates d'après les définitions, et la normalisation, qui est le point essentiel de cet énoncé, résulte des théorèmes d'existence de courbes pseudo-holomorphes de [Gro85].

On peut alors définir le width intrinsèque comme $w_r(M)$, c'est à dire

Définition 1.2.9 *L'épaisseur symplectique intrinsèque de (M, ω) est le nombre*

$$w(M, \omega) = \sup \{ w_r(V) / V \subset M \text{ avec } \overline{V} \text{ compact} \} .$$

Ainsi, $w(M, \omega)$ est le plus petit nombre a tel que pour toute structure presque complexe J sur M calibrée par ω , pour tout ouvert U de M relativement compact et pour tout point x de U , il passe par x une courbe holomorphe u non constante, proprement appliquée au voisinage de $\overline{U}$, et telle que

$$\mathcal{A}(u \cap U) \leq a .$$

Avec ces définitions, on a la

Proposition 1.2.10 *w est une capacité intrinsèque.*

L'homogénéité et la normalisation résultent de celles de w_r . La croissance est une conséquence immédiate de la définition : elle vient du fait qu'on s'est restreint aux ouverts relativement compacts, et qu'on peut toujours étendre une structure presque complexe après restriction à un voisinage d'un tel ouvert. Considérons en effet un plongement symplectique équidimensionnel

$$\phi : (M_1^{2n}, \omega_1) \hookrightarrow (M_2^{2n}, \omega_2) .$$

On considère une structure $J \in \mathcal{J}_{M_1}$, un ouvert U relativement compact dans M_1 , et un point x de U . La structure presque complexe $J_1 = \phi_* J$ sur $\phi(M_1)$ est calibrée par ω_2 . On se donne un voisinage relativement compact V_1 de U dans M_1 : après restriction à $\phi(V_1)$, J_1 s'étend en $J_2 \in \mathcal{J}_{M_2}$. Si $w(M_2, \omega_2)$ est infini, il n'y a rien à montrer. Dans le cas contraire, pour tout $a > w(M_2, \omega_2)$, il passe par $\phi(x)$ une courbe J_2 -holomorphe u_2 non constante, proprement appliquée dans un voisinage V_2 de $\phi(\overline{U})$ et telle que

$$\mathcal{A}_\infty(u_2 \cap \phi(U)) \leq a .$$

On considère la composante connexe S de $u_2^{-1}(V_2 \cap \phi(V_1))$ qui contient $u_2^{-1}(x)$. C'est une surface de Riemann connexe sans bord, et

$$u_1 = \phi^{-1} \circ u_2 : S \rightarrow M_1$$

est J_1 -holomorphe, non constante et proprement appliquée dans un voisinage de $\overline{U}$. Elle passe par x et vérifie

$$\mathcal{A}_\infty(u_1 \cap U) \leq a .$$

Il en résulte $w(M_1, \omega_1) \leq a$ pour tout $a > w(M_2, \omega_2)$, donc

$$w(M_1, \omega_1) \leq w(M_2, \omega_2) .$$

Le même argument entraîne

Lemme 1.2.11 *Si U et V sont des ouverts de M tels que $\overline{V} \subset U$, alors*

$$w_r(V) \leq w(U) \leq w_r(U) .$$

1.2.3 Cas d'un ouvert à bord de type contact restreint

On suppose que ∂U est de type contact restreint. L'équivalence symplectique conforme entre U et U_S entraîne alors des relations très fortes entre capacités relatives et capacités intrinsèques : on a en effet

Lemme 1.2.12 *Si ∂U est de type contact restreint, alors*

$$w(U) = w_r(U) .$$

En effet, pour tout $S < 1$, on a $\overline{U_S} \subset U$. Le lemme 1.2.11 donne

$$w_r(U_S) \leq w(U) \leq w_r(U) .$$

L'invariance symplectique conforme de w_r entraîne

$$w_r(U_S) = S w_r(U) ,$$

et on conclut en faisant tendre S vers 1.

Si U est un ouvert de type contact restreint, on n'a donc pas à distinguer entre épaisseur intrinsèque et épaisseur relative de U : nous noterons dorénavant $w(U)$ pour $w_r(U)$ dans ce cas.

1.2.4 Non-dégénérescence du spectre d'action

Soit $A > 0$. On dit que le spectre d'action de Σ (voir définition 1.1.3) est A -simple si :

$$\mathcal{S}(\Sigma) \cap [0, A[= \{0 < T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n\} ,$$

où chaque période est associée à une orbite unique. On a alors (cf [Tak70], [Rob70])

Lemme 1.2.13 *Soit $A > 0$. La propriété d'avoir un spectre A -simple est C^∞ -générique parmi les hypersurfaces.*

On dira que $\mathcal{S}(\Sigma)$ est injectif si chaque période est associée à une orbite unique. En appliquant le lemme ci dessus à tout $A \in \mathbb{N}^*$ et en prenant l'intersection (dénombrable) de tous les G_δ ainsi obtenus, on en déduit aisément le

Corollaire 1.2.14 *La propriété d'avoir un spectre discret et injectif est C^∞ -générique parmi les hypersurfaces.*

1.2.5 Extension des inégalités

Il découle ce qui précède que, pour prouver le théorème 1, on peut se restreindre au cas où $\mathcal{S}(\partial U)$ est discret et injectif.

Proposition 1.2.15 *Si c est une capacité relative, et si pour tout ouvert $\tilde{U}$ tel que :*

- $\tilde{\Sigma} = \partial \tilde{U}$ est de type contact restreint
- $\mathcal{S}(\tilde{\Sigma})$ est discret et injectif

et tout $S < 1$ on a : $w(\tilde{U}_S) \leq c(\tilde{U})$, alors on a :

$$w(U) \leq c(U) \text{ si } \partial U \text{ est de type contact restreint.}$$

Démonstration : On part d'un ouvert U de type contact restreint et de $S < 1$, et on considère un voisinage tubulaire de $\Sigma = \partial U$ de la forme

$$U^{[S, S^{-1}]} = U_{S^{-1}} \setminus U_S .$$

La propriété d'avoir un spectre discret et injectif étant C^∞ générique, et la propriété d'être de type contact restreint étant C^1 ouverte, on peut trouver une hypersurface $\tilde{\Sigma}$ contenue dans $W^{[S, S^{-1}]}$ et C^1 -proche de Σ possédant ces propriétés. On note alors $\tilde{U}$ l'intérieur de $\tilde{\Sigma}$, et on sait que : $w(\tilde{U}_\delta) \leq c(\tilde{U})$ pour tout $\delta < 1$. On en déduit tout d'abord en faisant tendre δ vers 1 :

$$w(\tilde{U}) \leq c(\tilde{U}) .$$

Mais $U_S \subset \tilde{U} \subset U_{S^{-1}}$, donc par invariance symplectique conforme et croissance de w et c :

$$Sw(U) = w(U_S) \leq w(\tilde{U}) \leq c(\tilde{U}) \leq c(U_{S^{-1}}) = S^{-1}c(U)$$

et donc $w(U) \leq S^{-2}c(U)$ pour tout $S < 1$. Il ne reste plus qu'à faire tendre S vers 1 pour pouvoir conclure :

$$w(U) \leq c(U) .$$

1.3 Pseudoconvexité

Nous allons rappeler ici la notion de pseudoconvexité dans une variété presque complexe, ainsi que le fait qu'une hypersurface de type contact peut être vue comme hypersurface pseudoconvexe pour certaines structures presque complexes (voir [McD91]). Le fait crucial est qu'une courbe holomorphe ne peut pas avoir de tangence intérieure avec une hypersurface pseudoconvexe (voir [Eli90], [McD91]). Ce résultat résulte du principe du maximum, car une hypersurface pseudoconvexe peut être vue comme surface de niveau d'une fonction plurisousharmonique. Dans le cas d'une hypersurface de type contact restreint, les hamiltoniens spéciaux sont des fonctions plurisousharmoniques pour les structures presque complexes spéciales, et nous verrons que le principe du maximum s'applique également aux trajectoires de Floer.

1.3.1 Hypersurfaces pseudoconvexes

Soit Σ une hypersurface d'une variété presque complexe (X^{2n}, J) . En tout point x de Σ , on considère le sous-espace J -complexe maximal ζ_x de $T_x\Sigma$: c'est un champ d'hyperplans sur Σ (i.e. une distribution de sous-espaces de dimension $2n - 2$). Il est donné par

$$\zeta_x = T_x\Sigma \cap JT_x\Sigma . \quad (1.3.1)$$

Ce champ est canoniquement orienté par J , donc il est coorienté, et est donné par une équation de Pfaff

$$\zeta = \text{Ker } \alpha \quad (1.3.2)$$

où α est une 1-forme non singulière déterminée de façon unique à multiplication par une fonction positive près. Il en est de même pour $d\alpha|_\zeta$. On considère alors la forme quadratique sur ζ , appelée forme de Levi:

$$q(v) = d\alpha(v, Jv) , \quad v \in \zeta_x . \quad (1.3.3)$$

Définition 1.3.1 *On dira que Σ est J -convexe, ou pseudoconvexe, si q est définie positive.*

Le fait crucial est (cf [McD91], [Eli90]) :

Lemme 1.3.2 *Une hypersurface pseudoconvexe ne peut pas être touchée de l'intérieur par une courbe holomorphe.*

Nous aurons par la suite à utiliser le lemme suivant, qui traduit le fait que les sphères suffisamment petites sont pseudoconvexes.

Lemme 1.3.3 *Etant donné $M > 0$, il existe $r_0 > 0$ tel que, pour toute structure presque complexe J sur $\mathbb{C}^n$ calibrée par ω_0 vérifiant*

$$J(0) = i \text{ et } \|J\|_{C^1(B^{2n}(3r_0))} \leq M ,$$

pour tout $z_1 \in B^{2n}(r_0)$ et tout $r_1 \leq 2r_0$, la sphère $S^{2n-1}(z_1, r_1)$ est J -convexe.

Démonstration: Commençons par poser $J(z) = i + m(z)$. On a pour tout $z \in B^{2n}(3r_0)$

$$\| dm(z) \| \leq M \text{ et } \| m(z) \| \leq M \mid z \mid \leq 3Mr_0 .$$

De plus, en décomposant m en blocs (n, n)

$$m = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}$$

on a aussi, pour $1 \leq k \leq 4$ et pour $z \in B^{2n}(3r_0)$

$$\| m_k(z) \| \leq 3Mr_0 \text{ et } \| dm_k(z) \| \leq M .$$

Pour $z_1 \in B^{2n}(r_0)$ donné, posons

$$F(z) = \mid z - z_1 \mid^2 .$$

Alors $S^{2n-1}(z_1, r_1) = F^{-1}(r_1)$. Par conséquent, sa tangente complexe ζ a pour équation

$$dF(v) = 0 \text{ et } dF(Jv) = 0 .$$

Elle est donc définie par la forme

$$\alpha = -dF \circ J ,$$

puisqu'on impose $\alpha_z(Jz) > 0$. Il en résulte

$$\alpha = -dF \circ i - dF \circ m .$$

Mais

$$dF = 2(x - x_1)dx + 2(y - y_1)dy$$

donc

$$-dF \circ i = 2(x - x_1)dy - 2(y - y_1)dx .$$

On en déduit

$$d\alpha = 4\omega_0 - d(dF \circ m) ,$$

d'où la forme de Levi

$$q(v) = 4 \mid v \mid^2 + 4\omega_0(v, mv) - [d(dF \circ m)](v, Jv) .$$

Comme $S^{2n-1}(z_1, r_1) \subset B^{2n}(3r_0)$, on a

$$\mid \omega_0(v, mv) \mid \leq 3Mr_0 \mid v \mid^2 .$$

De plus

$$dF \circ m = 2(x - x_1)(m_1 dx + m_2 dy) + 2(y - y_1)(m_3 dx + m_4 dy)$$

donc

$$\begin{aligned} d(dF \circ m) &= 2dx \wedge (m_1 dx + m_2 dy) + 2dy \wedge (m_3 dx + m_4 dy) \\ &+ 2(x - x_1)(dm_1 \wedge dx + dm_2 \wedge dy) + 2(y - y_1)(dm_3 \wedge dx + dm_4 \wedge dy) . \end{aligned}$$

d'où

$$\| [d(dF \circ m)] \| \leq 40Mr_0$$

et finalement, puisque $\| J(z) \| \leq M$ pour $z \in B^{2n}(3r_0)$

$$| [d(dF \circ m)](v, Jv) | \leq 40M^2r_0 | v |^2$$

soit

$$q(v) \geq 4(1 - 3Mr_0 - 10M^2r_0) | v |^2$$

donc q est définie positive pour r_0 assez petit, ce qui prouve le lemme.

1.3.2 Structures presque complexes spéciales

Soit $\Sigma = \partial U$ une hypersurface de type contact de $\mathbb{C}^n$ et J une structure presque complexe calibrée par ω_0 . On note ζ la tangente J -complexe de Σ , et on reprend les notations de la section 1.1 : η est le champ conforme transverse, ψ_s le flot de η , ξ le champ de contact, X le champ de Reeb et τ est le paramètre transverse à Σ .

Définition 1.3.4 Soient $0 < a < b$. On dit que J est spéciale pour Σ dans $U^{[a,b]}$ si

- elle est ψ_s -invariante dans $U^{[a,b]}$
- il existe une constante $C > 0$ telle que

$$J(z)\eta(z) = CX_\tau(z) \text{ pour } z \in U^{[a,b]} .$$

Si J est spéciale sur $U^{[a,b]}$, cela entraîne d'une part la J -convexité de Σ_S pour $a < S < b$, et d'autre part la coïncidence de la tangente complexe à Σ_S et de son champ de contact :

$$\zeta = \xi . \tag{1.3.4}$$

On a en effet dans $U^{[a,b]}$

$$\lambda(v) = \omega_0(\eta, v) = \omega_0(J\eta, Jv) = \omega_0(CX_\tau, Jv)$$

c'est à dire

$$\lambda = -Cd\tau \circ J . \tag{1.3.5}$$

Le champ ζ est défini par (1.3.2) avec $\alpha = -d\tau \circ J$, puisque l'orientation correspond à $\alpha(J\eta) > 0$, d'où d'après (1.3.5)

$$\alpha = C\lambda .$$

On en déduit $\zeta = \text{Ker}\lambda = \xi$. Le fait crucial est que, J est spéciale, le champ ζ est X -stable et le champ ξ est J -stable. De plus, on a :

$$d\alpha|_\zeta = d(C\lambda)|_\zeta = C\omega_0|_\zeta$$

donc pour tout v dans ζ :

$$q(v) = d\alpha(v, Jv) = C\omega_0(v, Jv)$$

et par hypothèse sur J , q est donc définie positive, d'où la J -convexité de Σ .

Exemple 1.3.5 Si $\Sigma = S^{2n-1}(R)$, on a d'après les exemples 1.1.4 et 1.1.6

$$\phi_s(z) = e^{\frac{s}{2}} z, \quad \eta(z) = \frac{1}{2} z \quad \text{et} \quad X_\tau(z) = \frac{2}{R^2} i z$$

donc $J = i$ est une structure presque complexe spéciale sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ pour $S^{2n-1}(R)$ (avec $C = R^2/4$).

Remarque 1.3.6 Si l'on note $\hat{J} = \Psi^* J$ la structure presque complexe correspondante sur $\hat{\Sigma}$, une formulation équivalente de la définition 1.3.4 est que dans $[a, b] \times \Sigma$:

- $\hat{J}$ préserve ξ
- $\hat{J}|_\xi$ est indépendante de S
- $\hat{J}(S \cdot \partial_S) = C \cdot X$.

Pour une hypersurface de type contact restreint donnée, l'existence de structures presque complexes spéciales est due au fait que ces structures correspondent aux structures presque complexes calibrées par $d\sigma$ sur le fibré symplectique $\xi \rightarrow \Sigma$: pour un espace vectoriel symplectique (V, ω) , on note $j(V)$ l'espace des structures presque complexes sur V calibrées par ω , i.e. l'espace des $J \in \text{End}(V)$ tels que :

- $J^2 = -Id_V$
- $\omega(v, Jv)$ est définie positive
- $\omega(Ju, Jv) = \omega(u, v)$.

Avec ces notations, on a (voir [Wei77])

Lemme 1.3.7 $j(V)$ est non vide et contractile.

Soit maintenant $\pi : (E, \omega) \rightarrow P$ un fibré vectoriel symplectique (i.e. (E_p, ω_p) est un espace vectoriel symplectique). On note $\mathcal{J}(E)$ le fibré des structures presque complexes calibrées sur la fibre :

$$\mathcal{J}(E)_p = j(E_p) .$$

$\mathcal{J}(E)$ est donc un fibré à fibres contractiles, donc on peut toujours prolonger ses sections locales quitte à les restreindre à un ouvert plus petit. On considère maintenant une hypersurface de type contact restreint $\Sigma = \partial U$. On note $\mathcal{J}_s^{[a,b]}$ l'ensemble des structures presque complexes calibrées qui sont spéciales dans $U^{[a,b]}$. On a alors (cf [CFH95])

Lemme 1.3.8 $\mathcal{J}_s^{[a,b]}$ est non vide.

En effet on a une fibration symplectique :

$$\pi : (\xi, d\sigma|_\xi) \rightarrow \Sigma$$

et on sait que la fibre de $\mathcal{J}(\xi)$ est non vide et contractile, donc on peut trouver une section globale J_ξ de ce fibré. On étend J_ξ en $\hat{J}_\xi$ sur $\hat{\Sigma}$ par :

$$\begin{aligned} - \hat{J}_\xi|_\xi &= J_\xi \\ - \hat{J}_\xi \partial_S &= S^{-1}X \\ - \hat{J}_\xi X &= -S\partial_S \end{aligned}$$

ce qui fournit une structure presque complexe calibrée par $\hat{\omega}$ sur $\hat{\Sigma}$. On pose ensuite $\tilde{J}_\xi = \Psi_* \hat{J}_\xi$: elle est calibrée par ω_0 sur W . Après restriction à $U^{[a,b]}$, on peut étendre $\tilde{J}_\xi$, qui est une section locale de $\mathcal{J}(TM)$, en une section globale, i.e. en $J \in \mathcal{J}_0$, ayant les propriétés souhaitées.

1.3.3 Principe du maximum convexe

On peut étendre comme suit le lemme 1.3.2 au cas des trajectoires de Floer pour un hamiltonien spécial au voisinage d'une hypersurface de type contact restreint (voir définition 1.1.7).

Lemme 1.3.9 *Soit $\Sigma = \partial U$ une hypersurface de type contact restreint et $0 < a < b$. Si H et J sont spéciaux pour Σ dans $U^{[a,b]}$, une application $u : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}^n$ vérifiant*

$$u_s - J(u)u_t = -J(u)X_H(u) \quad (1.3.6)$$

telle que $u_s \not\equiv 0$ ne peut pas toucher Σ_S de l'intérieur pour $a < S < b$.

Démonstration :

Si u touchait Σ_S intérieurement en un point $u(s_0, t_0)$, avec $a < S < b$, la fonction $f = \tau \circ u$, définie sur un voisinage de $z_0 = (s_0, t_0)$ (par exemple sur $u^{-1}(U^{[a,b]})$), aurait un maximum local en z_0 . On calcule alors $dJ_0^* df = -\Delta f ds \wedge dt$

$$J_0^* df = d\tau \circ (J_0^* du) = d\tau(-u_s dt + u_t ds)$$

donc d'après (1.3.6)

$$J_0^* df = d\tau(-(Ju_t - JX_H)dt + (-Ju_s + X_H)ds)$$

d'où sur $f^{-1}(]a, b[)$

$$J_0^* df = -d\tau \circ J \circ du + d\tau(Jh'(\tau).X_\tau)dt \quad (1.3.7)$$

car $X_H = h'(\tau)X_\tau$ et $d\tau(X_\tau) = 0$. De plus, d'après (1.3.5), $d\tau \circ J = -C^{-1}\lambda$, et d'après (1.1.17), $\lambda(X_\tau) = \tau$, d'où

$$J_0^* df = C^{-1}u^*\lambda - C^{-1}\tau h'(\tau)dt .$$

D'où

$$-C\Delta f ds \wedge dt = u^* \omega_0 - \frac{\partial}{\partial s}(\tau(u)h'(\tau(u)))ds \wedge dt . \quad (1.3.8)$$

En appliquant à nouveau (1.3.6), on en tire

$$C\Delta f = -\omega_0(u_s, -Ju_s + h'(\tau)X_\tau) + \frac{\partial}{\partial s}(\tau(u)h'(\tau(u)))$$

soit, puisque $\omega_0(u_s, X_\tau) = d\tau(u_s)$:

$$C\Delta f = \omega_0(u_s, Ju_s) + \tau h''(\tau)d\tau(u_s) . \quad (1.3.9)$$

On en déduit que si $f(s, t) \in]a, b[$, on a

$$C\Delta f + g(f)f_s = g_J(u_s, u_s) \geq 0 \quad (1.3.10)$$

avec $g(S) = -Sh''(S)$. D'après le principe du maximum, f ne peut pas avoir de maximum local, sauf si elle est constante. En outre, d'après [FHS95], Lemme 4.1, comme l'on suppose que $u_s \not\equiv 0$, l'ensemble des points où $u_s = 0$ est discret. Par conséquent, f ne peut pas être constante et le lemme est démontré.

Chapitre 2

Homologie de Floer

2.1 Fonctionnelles et trajectoires de Floer

Nous allons donner les définitions des fonctionnelles et les équations des trajectoires de Floer que l'on va considérer, et rappeler un certain nombre de formules utiles. Un des problèmes que l'on rencontre lorsque l'on parcourt la littérature sur le sujet est la diversité des conventions de signe utilisées, en particulier en ce qui concerne les indices, aussi insisterons-nous sur les conséquences des conventions de signe que nous avons adoptées.

2.1.1 La fonctionnelle d'action

On se donne un hamiltonien $H : S^1 \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (c'est à dire dépendant éventuellement du temps). On pose $H_t = H(t, \cdot)$ et le champ hamiltonien de H par

$$i_{X_H}\omega_0 = -dH_t . \quad (2.1.1)$$

Définition 2.1.1 *La fonctionnelle d'action associée à H est définie pour $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{C}^n$ par*

$$A_H(\gamma) = \mathcal{A}(\gamma) - \int_{S^1} H(t, \gamma(t)) dt$$

avec, pour $\bar{\gamma} : D^2 \rightarrow \mathbb{C}^n$ tel que $\partial\bar{\gamma} = \gamma$

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_{D^2} \bar{\gamma}^* \omega_0 = \int_{S^1} \gamma^* \lambda$$

où λ vérifie $d\lambda = \omega_0$.

On considère un champ de vecteurs X de flot Φ_s , et on a

$$dA(\gamma)(X) = \frac{d}{ds} \left[\int_{S^1} (\Phi_s(\gamma))^* \lambda \right]_{s=0} = \frac{d}{ds} \left[\int_{S^1} \gamma^* \Phi_s^* \lambda \right]_{s=0}$$

soit :

$$dA(\gamma)(X) = \int_{S^1} \gamma^* \frac{d}{ds} [\Phi_s^* \lambda]_{s=0} = \int_{S^1} \gamma^* L_X \lambda$$

d'où

$$dA(\gamma)(X) = \int_{S^1} \gamma^* (i_X \omega_0 + d(i_X \lambda)) = \int_{S^1} \gamma^* i_X \omega_0$$

car $\int_{S^1} d(\gamma^* i_X \lambda) = 0$. On en déduit :

$$d\mathcal{A}(\gamma)(X) = \int_{S^1} \omega_0(-\dot{\gamma}, X(\gamma)) dt . \quad (2.1.2)$$

Il en résulte

$$dA_H(\gamma)(X) = d\mathcal{A}(\gamma)(X) - \int_{S^1} dH(X) dt = \int_{S^1} \omega_0(-\dot{\gamma}, X) dt + \int_{S^1} \omega_0(X_H, X) dt$$

soit :

$$dA_H(\gamma)(X) = \int_{S^1} \omega_0(X_H - \dot{\gamma}, X) dt \quad (2.1.3)$$

ce qui prouve en particulier que les points critiques de A_H sont les orbites 1-périodiques de X_H , qu'on notera $\mathcal{P}(H)$ dans la suite.

2.1.2 Conventions de signe

Tout d'abord, nos conventions

$$i_{X_H} \omega_0 = -dH \text{ et } g_J(u, v) = \omega_0(u, Jv)$$

impliquent

$$\nabla_J H = -JX_H .$$

De plus, la formule (2.1.3) peut se lire

$$dA_H(\gamma)(X) = \int_{S^1} g_J(JX_H - J\dot{\gamma}, X)$$

donc le gradient L^2 de A_H s'écrit

$$\nabla_J A_H(\gamma) = -\nabla_J H(\gamma) - J\dot{\gamma} . \quad (2.1.4)$$

Pour être consistant avec [FH94] et [CFH95], les trajectoires de Floer que l'on va considérer auront pour équation

$$u_s - J(u)u_t - \nabla_J H(u) = 0 \quad (2.1.5)$$

c'est à dire

$$\partial_J u = \nabla_J H$$

ou encore

$$u_s = -\nabla_J A_H(u(s, \cdot)) . \quad (2.1.6)$$

Nos trajectoires de Floer correspondent donc aux lignes de $-\nabla_J A_H$. On retombe sur l'équation (1), qui correspond aux lignes de gradient de A_H , par la substitution $s \mapsto -s$, c'est à dire en changeant le sens des trajectoires. Pour utiliser les résultats de [SZ92], où les trajectoires ont pour équation (1), il faut donc changer soit l'orientation (ce qui revient à passer d'un formalisme homologique à un formalisme cohomologique), soit le signe de l'indice de Conley-Zehnder. Pour conserver la théorie "homologique" de [FH94] et [FW94], on considérera en fait

$$\mu(x, H) = -\mu_1(x, H) \quad (2.1.7)$$

où $\mu_1(x, H)$ est défini dans [SZ92].

2.1.3 Trajectoires de Floer et fonctionnelle d'énergie

On dira qu'une structure presque complexe sur $\mathbb{C}^n$ dépendant de $t \in S^1$ est calibrée par ω_0 si, pour tout $t \in S^1$, la structure presque complexe

$$J_t = J(t, \cdot) \quad (2.1.8)$$

est calibrée par ω_0 . On considère une paire (H, J) où H est un hamiltonien et J une structure presque complexe calibrée par ω_0 (tous deux dépendant à présent du temps) et $x, y \in \mathcal{P}(H)$ deux orbites 1-périodiques de H .

Définition 2.1.2 *L'espace des trajectoires de Floer reliant x à y est l'espace*

$$\mathcal{M}(x, y, J, H) = \{u \in C^\infty(Z, \mathbb{C}^n) \text{ vérifiant (2.1.9), (2.1.10) et (2.1.11)}\}$$

$$\partial_J u = \nabla_J H_t(u), \text{ i.e. } u_s - J(t, u)u_t = -J(t, u)X_H(t, u) \quad (2.1.9)$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s, t) = x(t) \text{ dans } C^\infty(S^1) \quad (2.1.10)$$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s, t) = y(t) \text{ dans } C^\infty(S^1) \quad (2.1.11)$$

où $Z = \mathbb{R} \times S^1$.

Il est important de remarquer qu'on a une action libre de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{M}(x, y, J, H)$ par translation sur le facteur s , et que si de plus H et J sont autonomes, on a une action libre de S^1 par rotation sur le facteur t .

Pour $u \in \mathcal{M}(x, y, J, H)$, on considère la famille de courbes $\gamma_s = u(s, \cdot)$. La formule (2.1.2) implique

$$\frac{d}{ds} \mathcal{A}(\gamma_s) = \int_{S^1} \omega_0(-u_t, u_s) dt = \int_{S^1} \omega_0(u_s, u_t) dt.$$

Il en résulte

$$\mathcal{A}(y) - \mathcal{A}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{S^1} \omega_0(u_s, u_t) dt ds = \int_Z u^* \omega_0$$

soit

$$\int_Z u^* \omega_0 = \mathcal{A}(y) - \mathcal{A}(x). \quad (2.1.12)$$

On a en outre

$$|u_s - Ju_t + JX_H|^2_J = |u_s|^2_J + |u_t - X_H|^2_J + 2\omega_0(u_s, u_t - X_H)$$

et on a d'après (2.1.3)

$$\frac{d}{ds} A_H(\gamma_s) = \int_{S^1} \omega_0(-\dot{\gamma}_s + X_H, u_s) dt = \int_{S^1} \omega_0(-u_t + X_H, u_s) dt$$

donc d'après (2.1.9)

$$\frac{d}{ds} A_H(\gamma_s) = -\frac{1}{2}(|u_s|^2_J + |u_t - X_H|^2_J). \quad (2.1.13)$$

Définition 2.1.3 *La fonctionnelle d'énergie associée à (H, J) est*

$$\Phi_{H,J}(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{S^1} |u_s|^2_J + |u_t - X_H|^2_J dt ds$$

pour $u : Z \rightarrow \mathbb{C}^n$.

Pour $u \in \mathcal{M}(x, y, J, H)$, comme $u_s = J(u_t - X_H)$, et que J est calibrée par ω_0 , on a aussi

$$\Phi_{H,J}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{S^1} |u_s|_J^2 dt ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{S^1} |u_t - X_H|_J^2 dt ds . \quad (2.1.14)$$

De plus, on a d'après (2.1.13)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{ds} A_H(\gamma_s) = -\Phi_{H,J}(u)$$

c'est à dire

$$\Phi_{H,J}(u) = A_H(x) - A_H(y) \text{ pour } u \in \mathcal{M}(x, y, J, H) . \quad (2.1.15)$$

De plus, en considérant $Z^{[a,b]} = [a, b] \times S^1$, on en déduit de la même manière

$$A_H(\gamma_a) - A_H(\gamma_b) = \int_a^b \int_{S^1} |u_s|_J^2 dt ds$$

ce qui implique en particulier que la fonction $A_H(\gamma_s)$ est décroissante. Enfin, on considère une application $u : Z \rightarrow M$ d'énergie nulle. Elle vérifie donc :

$$\Phi_{H,J}(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{S^1} |u_s|_J^2 + |u_t - X_H|_J^2 dt ds = 0 .$$

On en déduit que u est indépendante de s , et que $u(t)$ est une orbite 1-périodique de H :

$$\text{Si } \Phi_{H,J}(u) = 0 \text{ alors } u(s, t) = x(t) \text{ avec } x \in \mathcal{P}(H) . \quad (2.1.16)$$

On en déduit en particulier

$$\text{Si } x \neq y \text{ et } A_H(x) \leq A_H(y) \text{ alors } \mathcal{M}(x, y, H, J) = \emptyset . \quad (2.1.17)$$

2.1.4 Lien avec les courbes holomorphes

D'après 2.1.2, on peut, par la substitution $s \mapsto -s$, ramener l'équation des connexions de Floer à l'équation

$$\bar{\partial}_J u = -\nabla_J H_t(u) .$$

On peut l'écrire sous la forme $\bar{\partial}_{J,H} u = 0$, avec :

$$\bar{\partial}_{J,H} u = u_s + Ju_t - JX_H(u) . \quad (2.1.18)$$

Une des façons d'étudier cet opérateur est de se ramener au cas des courbes holomorphes en utilisant l'astuce de Gromov. On considère $Z \times \mathbb{C}^n$ muni de la structure presque complexe :

$$\tilde{J}(\xi, x) = (J_0 \xi, Jx + \nabla_J H(z) \cdot \xi)$$

où $\nabla_J H(z)$ est vu comme une section anticomplexe, c'est à dire de façon plus explicite

$$\tilde{J}_{(s,t,z)}(h + J_0 k, x) = (-k + J_0 h, J_{(t,z)} x + (h - J_{(t,z)} k) X_H(t, z)) . \quad (2.1.19)$$

On considère une forme symplectique ω_Z de volume fini sur Z calibrant J_0 (par exemple $\omega_Z = e^{-s^2} ds \wedge dt$). La structure presque complexe $\tilde{J}$ est calibrée par la forme symplectique

$$\tilde{\omega} = \omega_Z + \omega_0 - dH \wedge dt .$$

L'application $\tilde{u} = id \times u$ est alors une courbe $\tilde{J}$ -holomorphe, et on a plus précisément :

$$\bar{\partial}_{\tilde{J}} \tilde{u} = 0 \times \bar{\partial}_{J,H} u .$$

On a de plus

$$\mathcal{A}_{\tilde{\omega}}(\tilde{u}) = \Phi_{H,J}(u) + \omega_Z(Z) .$$

On peut donc en particulier ramener la compacité locale des trajectoires de Floer à celle des courbes holomorphes.

2.2 Convergence locale des trajectoires de Floer

Nous verrons dans cette partie que, dans le cas de $\mathbb{C}^n$, si l'on impose certaines conditions de "convexité à l'infini" aux hamiltoniens et aux structures presque complexes sur $\mathbb{C}^n$, orbites 1-périodiques et trajectoires de Floer restent dans un compact. Combiné avec l'absence de sphères holomorphes, ceci implique que la non-compactité de l'espace des trajectoires de Floer est due uniquement au phénomène de brisure de trajectoires, ce qui permet de définir l'homologie de Floer comme dans le cas compact. Nous en déduirons l'existence d'extrémités pour une trajectoire de Floer d'énergie finie, l'unicité de ces extrémités dépendant de la non-dégénérescence du hamiltonien.

2.2.1 Conditions à l'infini

Pour pouvoir définir l'homologie de Floer sur $\mathbb{C}^n$, il est nécessaire d'empêcher les trajectoires de partir à l'infini. Dans ce but, on considérera des paires (H, J) "convexes à l'infini" au sens suivant.

Définition 2.2.1 *On dira que la paire (H, J) est standard à l'infini s'il existe $R > 0$ et $\mu > 0$ avec*

$$\mu \notin \pi\mathbb{Z} \quad (2.2.1)$$

tels que

$$H(t, z) = \mu |z|^2 \quad \text{pour } z \notin B^{2n}(R) \quad (2.2.2)$$

$$J(t, z) = i \quad \text{pour } z \notin B^{2n}(R) . \quad (2.2.3)$$

On peut traduire ceci à l'aide des exemples 1.1.4, 1.1.6 et 1.3.5 en considérant l'ouvert $U = B^{2n}(R)$ et en disant que H est spécial sur $U^{[1, +\infty[}$, avec $h(S) = \mu R^2 S$, et que J est spéciale sur $U^{[1, +\infty[}$. On a alors le

Lemme 2.2.2 *Si la paire (H, J) est standard hors de $B^{2n}(R)$, on a*

$$\mathcal{P}(H) \subset B^{2n}(R) \quad (2.2.4)$$

et

$$\mathcal{M}(x, y, J, H) \subset B^{2n+1}(R) \quad \text{pour tous } x, y \in \mathcal{P}(H) . \quad (2.2.5)$$

En effet, comme $h'(S) = \mu R^2$ pour $S \geq 0$ et que

$$\mathcal{S}(S^{2n-1}(R)) = \{k\pi R^2 / k \in \mathbb{N}^*\}$$

on en déduit que $h'(S) \notin \mathcal{S}(\Sigma)$ pour $S \geq 0$. D'après le lemme 1.1.9, H ne peut pas avoir d'orbite 1-périodique hors de $B^{2n}(R)$, d'où (2.2.4). D'après le lemme 1.3.9, les trajectoires de Floer entre point critiques de H ne peuvent être tangentes intérieurement à $S^{2n-1}(A)$ pour $A > R$. Comme leurs extrémités sont situées dans $B^{2n}(R)$, on en déduit que toutes les trajectoires de Floer considérées restent dans $B^{2n}(R)$, d'où (2.2.5).

On se trouve donc dans une situation compacte, en ayant compensé la non-compacité de $\mathbb{C}^n$ par l'hypothèse de “convexité à l'infini” ci-dessus. On définit alors, pour (H, J) standard à l'infini

Définition 2.2.3 *L'espace des trajectoires de Floer d'énergie finie est l'ensemble*

$$\mathcal{M}(H, J) = \{u \in C^\infty(Z, B^{2n}(R)) \mid u_s - Ju_t = -JX_H \text{ et } \Phi_{H,J}(u) < \infty\} .$$

2.2.2 Régularité elliptique

La régularité elliptique pour l'opérateur $\bar{\partial}_{J,H}$ se traduit par le théorème de convergence locale suivant pour les paires (H_n, J_n) standard à l'infini.

Théorème 2.2.4 *Soit (H_n, J_n) une suite de paires standard hors de $B^{2n}(R)$. On suppose que (H_n, J_n) converge C^∞ vers (H, J) . On considère une suite*

$$u_n \in \mathcal{M}(H_n, J_n) \text{ avec } \Phi_{H_n, J_n}(u_n) \text{ borné.}$$

Il existe alors $u \in \mathcal{M}(H, J)$ et une suite extraite de u_n telles que

$$u_{n_p} \rightarrow u \text{ dans } C_{loc}^\infty(Z, \mathbb{C}^n) .$$

La démonstration se trouve dans [Flo88] , [HZ94] (section 6.4), et elle peut également se déduire de [Gro85] à l'aide de la section 2.1.4 : on se trouve en effet dans un cas compact, puisque les paires considérées sont “uniformément standard à l'infini”. L'hypothèse d'énergie bornée et la compacité fournissent une borne de u_n dans $W_{loc}^{1,2}(Z)$. L'absence de sphères holomorphes (“no bubbling allowed”) fournit une borne $W_{loc}^{1,p}(Z)$ pour tout $p > 2$, et la régularité elliptique pour l'opérateur de Cauchy-Riemann fournit le bootstrapping pour les connexions de Floer : l'idée essentielle est d'approcher localement J par une structure intégrable, donnée par $J(z_0)$ au voisinage de z_0 . On en déduit que u_n est bornée dans $W_{loc}^{k,p}(Z)$ pour tout $p > 2$ et tout $k \in \mathbb{N}$. L'inclusion compacte de $W_{loc}^{k,p}(Z)$ dans $C_{loc}^{k-1}(Z)$ fournit alors la valeur d'adhérence recherchée.

Si la convergence est moins forte, le bootstrapping ne fournit plus une convergence C^∞ , mais la même démonstration fournit des résultats analogues. En particulier

Théorème 2.2.5 *Soit (H_n, J_n) une suite de paires standard hors de $B^{2n}(R)$. On suppose que*

- H_n est bornée dans $C^2(S^1 \times B^{2n}(R))$ et converge vers H dans $C^1(S^1 \times B^{2n}(R))$
- J_n est bornée dans $C^1(S^1 \times B^{2n}(R))$ et converge vers J dans $C^0(S^1 \times B^{2n}(R))$.

On considère une suite

$$u_n \in \mathcal{M}(H_n, J_n) \text{ avec } \Phi_{H_n, J_n}(u_n) \text{ borné.}$$

Il existe alors $u \in \mathcal{M}(H, J)$ et une suite extraite de u_n telles que

$$u_{n_p} \rightarrow u \text{ dans } C_{loc}^1(Z, \mathbb{C}^n) .$$

On peut en effet appliquer la méthode de [Flo88] jusqu'à $k = 2$, pour montrer que, sous les hypothèses ci-dessus, la suite u_n est bornée dans $W_{loc}^{2,p}(Z)$ pour tout p . L'inclusion compacte de $W_{loc}^{2,p}(Z)$ dans $C_{loc}^{2-\varepsilon}(Z)$ pour $\varepsilon > \frac{2}{p}$ implique la convergence d'une sous-suite de u_n dans $C_{loc}^{2-\varepsilon}(Z)$, d'où le théorème. Pour $H_n = 0$, ce résultat rejoint un théorème de régularité des courbes holomorphes (voir [Sik94], théorème 2.2.1): pour tout $r > 0$ non entier, si J est une structure presque complexe de classe C^r , alors toute courbe J -holomorphe est de classe C^{r+1} .

2.2.3 Extrémités des trajectoires d'énergie finie

On peut déduire du théorème précédent un analogue de la condition de Palais-Smale pour la fonctionnelle d'action (cf [FHV90])

Lemme 2.2.6 *Si $u \in \mathcal{M}(H, J)$, il existe $\gamma_{\pm} \in \mathcal{P}(H)$ et une suite réelle s_n telles que*

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} s_n = \pm\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow \pm\infty} u(s_n, t) = \gamma_{\pm} \text{ dans } C^\infty(S^1)$$

et on a

$$\Phi_{H,J}(u) = A_H(\gamma_-) - A_H(\gamma_+) .$$

Démonstration : Commençons par remarquer que, puisque :

$$\Phi_{H,J}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{S^1} |u_s|_J^2 dt ds < \infty$$

on a :

$$\forall R < \infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{n-R}^{n+R} \int_{S^1} |u_s|_J^2 dt ds = 0 .$$

On considère alors la suite :

$$v_n(s, t) = u(s + n, t)$$

qui est dans $\mathcal{M}(H, J)$. D'après le résultat ci-dessus, puisque $\phi_{H,J}(v_n) = \phi_{H,J}(u)$, il existe une suite $s_n \rightarrow +\infty$ et $v \in \mathcal{M}(H, J)$ tels que :

$$v_{s_n} \rightarrow v \text{ dans } C_{loc}^\infty(Z, M) .$$

Mais la convergence locale implique :

$$\forall R < \infty, \int_{n-R}^{n+R} \int_{S^1} |v_s|_J^2 dt ds = 0$$

donc $\Phi_{H,J}(v) = 0$. D'après (2.1.16), il existe donc $\gamma_+ \in \mathcal{P}(H)$ telle que $v(s, t) = \gamma_+(t)$. La convergence C_{loc}^∞ de $u(s_n + s, t)$ vers v entraîne la convergence C^∞ de $u(s_n, t)$ vers $\gamma_+(t)$, et le même argument s'applique à l'autre extrémité. On a en outre, avec $\gamma_s(t) = u(s, t)$:

$$A_H(\gamma_{s-n}) - A_H(\gamma_{s_n}) = \int_{s-n}^{s_n} \int_{S^1} |u_s|_J^2 dt ds$$

d'où, après passage à la limite

$$A_H(\gamma_-) - A_H(\gamma_+) = \Phi_{H,J}(u) .$$

Dans le cas général, ces extrémités n'ont aucune raison d'être uniques (on a un point d'accumulation, pas une limite), et donc une trajectoire de Floer n'a pas forcément de bord bien défini. Par contre, on a le

Lemme 2.2.7 *Si γ_+ est une orbite isolée de H , on a*

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} d(u(s, t), \gamma_+) = 0$$

et si γ_- est une orbite isolée de H , on a

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} d(u(s, t), \gamma_-) = 0$$

où d désigne la distance euclidienne, et la convergence est uniforme.

Démonstration : On se fixe une famille de voisinages tubulaires de l'image de γ_+ de la forme

$$V_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n / d(z, \gamma_+) < \varepsilon\} .$$

Pour $\varepsilon < \varepsilon_1$, V_ε ne contiendra pas d'autre orbite périodique de H que les courbes

$$t \mapsto \gamma_+(t + t_0) , t_0 \in S^1$$

(cette famille n'existe bien sûr que si H est autonome). On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite (S_n, t_n) avec $S_n \rightarrow +\infty$ tels que:

$$d(u(S_n, t_n), \gamma_+) > \varepsilon .$$

On sait déjà qu'il existe une suite s_n telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u(s_n, t) = \gamma_+(t) \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty .$$

On peut donc en fait supposer

$$d(u(S_n, t_n), \gamma_+) = \frac{1}{2}\varepsilon_1 .$$

On peut aussi supposer par compacité que $t_n \rightarrow t_\infty$ et que :

$$u(S_n, t_n) \rightarrow z_\infty$$

avec

$$d(z_\infty, \gamma_+) = \frac{1}{2}\varepsilon_1 .$$

On considère la suite $u_n(s, t) = u(s + S_n, t)$. On en déduit comme précédemment que (après extraction) u_n converge localement vers $v : Z \rightarrow M$ vérifiant :

$$\Phi_{H,J}(v) = 0$$

par conséquent, $v(s, t) = \gamma(t)$ est une orbite 1-périodique de H . Mais la convergence locale implique que $v(0, t_\infty) = z_\infty$. Par conséquent

$$\gamma(t) = \phi_t^H(z_\infty) \in V_{\varepsilon_1} \setminus \gamma_+$$

ce qui est contradictoire. Le même raisonnement s'applique à l'autre extrémité.

Remarque 2.2.8 Dans le cas d'un hamiltonien autonome, on est obligé de considérer des voisinages S^1 -invariants de ses orbites périodiques en raison de l'action libre de S^1 sur celles-ci. A priori, $u(s, t)$ pourrait donc s'enrouler autour de γ_+ pour $s \rightarrow +\infty$.

2.2.4 Trajectoires d'extrémités non dégénérées

Avec les notation du lemme 2.2.6, commençons par le

Lemme 2.2.9 Si γ_+ est une orbite non dégénérée de H , on a

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s, t) = \gamma_+ \text{ dans } C^\infty(S^1)$$

et si γ_- est une orbite isolée de H , on a

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s, t) = \gamma_-(t) \text{ dans } C^\infty(S^1) .$$

Démonstration : Maintenant, l'action libre de S^1 a disparu et on peut considérer des vrais voisinages de γ_+ dans $C^\infty(S^1)$. On peut trouver $\varepsilon_1 > 0$ tel que, si γ est une orbite 1-périodique de H , on a pour tout $t \in S^1$

$$| \gamma(t) - \gamma_+(t) | < \varepsilon_1 \Rightarrow \gamma(t) = \gamma_+(t) .$$

Commençons par montrer

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s, t) = \gamma_+(t) \text{ dans } C^0(S^1) . \quad (2.2.6)$$

On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite (S_n, t_n) avec $S_n \rightarrow +\infty$ telle que :

$$| u(S_n, t_n) - \gamma_+(t_n) | > \varepsilon .$$

On peut à nouveau supposer

$$| u(S_n, t_n) - \gamma_+(t_n) | = \frac{1}{2} \varepsilon_1 .$$

La suite $u_n(s, t) = u(s + S_n, t)$ convergera encore, après extraction, vers une orbite 1-périodique γ de H , et $t_n \rightarrow t_\infty \in S^1$. Par conséquent, on a

$$| \gamma(t_\infty) - \gamma_+(t_\infty) | = \frac{1}{2} \varepsilon_1$$

ce qui est contradictoire, d'où (2.2.6). En outre, cette convergence dans $C^0(S^1)$ entraîne la convergence dans $C^\infty(S^1)$, puisque toutes les trajectoires $u_n(s, t) = u(s + S_n, t)$ convergent maintenant vers γ_+ dans $C_{loc}^\infty(Z, \mathbb{C}^n)$. On en déduit

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s, t) = \gamma_+ \text{ dans } C^\infty(S^1)$$

et on fait le même raisonnement pour l'autre extrémité. En outre, on voit ainsi que, pour les courbes $u(s, \cdot)$ avec $s \rightarrow \pm\infty$, les convergences dans $C^0(S^1)$ et dans $C^\infty(S^1)$ sont équivalentes: c'est une conséquence directe de la régularité elliptique.

On considère maintenant x et $y \in \mathcal{P}(H)$ et on suppose qu'elles sont non dégénérées. Elles ont en particulier un indice de Conley-Zehnder bien déterminé (*confer* [SZ92] et (2.1.7)) et sont des valeurs critiques de la fonctionnelle d'action :

$$\mu(x, H) \in \mathbb{Z} \text{ et } A_H(x) \in \mathbb{R} .$$

Nous avons vu que l'énergie des connexions $u \in \mathcal{M}(x, y, H, J)$ était donnée par :

$$\Phi_{H,J}(u) = A_H(x) - A_H(y) .$$

Une formule similaire donne la dimension virtuelle de $\mathcal{M}(x, y, H, J)$ via la théorie Fredholm (voir [SZ92])

Proposition 2.2.10 $\dim_v \mathcal{M}(x, y, H, J) = \mu(x, H) - \mu(y, H)$

c'est à dire qu'après une perturbation générique de J , $\mathcal{M}(x, y, H, J)$ est une variété de dimension $\mu(x, H) - \mu(y, H)$.

2.3 Homologie symplectique

Nous allons rappeler ici la construction de l'homologie symplectique dans $\mathbb{C}^n$ de [FH94] (on considérera uniquement l'homologie à valeur dans $\mathbb{Z}_2$, suffisant à notre propos). Nous allons également décrire de quelle manière on peut perturber une paire (H, J) donnée pour obtenir une paire générique. La connaissance précise de ces perturbation (en particulier de leur support) sera importante par la suite pour pouvoir appliquer des arguments de convexité à des paires génériques.

2.3.1 Paires admissibles

Donnons nous un ouvert borné U de $\mathbb{C}^n$. On considère la classe $\mathcal{H}_{ad}(U)$ des hamiltoniens $C^\infty : S^1 \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

1. $H < 0$ sur $S^1 \times \bar{U}$.
2. H est standard à l'infini (voir définition 2.2.1).
3. Toutes les orbites 1-périodiques de H sont non dégénérées, i.e. 1 n'est pas valeur propre du linéarisé du flot de H le long d'une orbite 1-périodique.

On appellera de tels hamiltoniens des hamiltoniens admissibles. On considère également la classe $\mathcal{J}_{ad}$ des structures presque complexes J sur $S^1 \times \mathbb{C}^n$ (i.e. dépendant du temps) telles que :

1. J est calibrée par ω_0 .
2. J est standard à l'infini (voir définition 2.2.1).

D'après le lemme 2.2.2, on a donc en fait une situation compacte, c'est à dire que H n'a pas d'orbites 1-périodiques à l'infini et donc que $\mathcal{P}(H)$ est fini, et les trajectoires de Floer restent toutes dans un compact.

2.3.2 Homologie de Floer dans $\mathbb{C}^n$

Comme la situation est compacte, on peut à présent construire l'homologie de Floer d'une paire admissible comme dans [SZ92]. L'idée essentielle de l'homologie symplectique est d'utiliser non seulement la graduation par l'indice de Conley-Zehnder, mais aussi la filtration par la fonctionnelle d'action. On considère une paire admissible (H, J) . D'après les lemmes 2.2.6 et 2.2.9, on a en particulier une décomposition :

$$\mathcal{M}(H, J) = \bigcup_{x, y \in \mathcal{P}(H)} \mathcal{M}(x, y, J, H) . \quad (2.3.1)$$

Après une perturbation générique de J décrite plus loin, on sait que pour x et $y \in \mathcal{P}(H)$:

$$\mathcal{M}(x, y, H, J) \text{ est une variété de dimension } \mu(x, H) - \mu(y, H) . \quad (2.3.2)$$

On considère alors le complexe de Floer associé aux orbites périodiques admissibles de H :

$$C(H) = \bigoplus_{x \in \mathcal{P}(H)} \mathbb{Z}_2 \cdot x .$$

On a ici une filtration par l'action, i.e. on considère :

$$C^a(H) = \bigoplus_{x \in \mathcal{P}(H), A_H(x) < a} \mathbb{Z}_2 \cdot x \text{ pour } a > -\infty$$

et on a aussi la graduation par l'indice de Conley-Zehnder :

$$C^a(H) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C_k^a(H)$$

avec :

Définition 2.3.1 Pour $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$C_k^a(H) = \bigoplus_{\mu(x,H)=k, A_H(x) < a} \mathbb{Z}_2 \cdot x$$

Si $\mu(y) = \mu(x) - 1$, $\mathcal{M}(x, y, H, J)$ est une variété de dimension 1, avec une action libre de $\mathbb{R}$ par translation. Par conséquent

$$\tilde{\mathcal{M}}(x, y, J, H) = \mathcal{M}(x, y, H, J) / \mathbb{R} \quad (2.3.3)$$

est une variété de dimension 0. De plus, elle est compacte en raison de la décomposition (2.3.1) et de la convergence locale, et est donc constituée d'un nombre fini de points. On note alors :

$$\delta(x, y) = \# \tilde{\mathcal{M}}(x, y, J, H) \text{ modulo } 2 \text{ si } \mu(x, H) - \mu(y, H) = 1 \quad (2.3.4)$$

et on définit :

$$\partial_k(x) = \bigoplus_{\mu(y,H)=k-1} \delta(x, y) \cdot y \text{ si } \mu(x, H) = k . \quad (2.3.5)$$

Mais on sait (voir (2.1.17)) que si $A_H(x) < A_H(y)$, alors $\mathcal{M}(x, y, H, J) = \emptyset$, donc si $A_H(x) < A_H(y)$, alors $\delta(x, y) = 0$. Par conséquent, l'opérateur ∂ respecte la filtration par l'action :

$$\partial_k : C_k^a(H) \rightarrow C_{k-1}^a(H) . \quad (2.3.6)$$

On considère maintenant, pour $-\infty < a \leq b \leq +\infty$:

$$C_k^{[a,b[}(H) = C_k^b(H) / C_k^a(H) \quad (2.3.7)$$

c'est à dire qu'on ne considère que les orbites d'action dans $[a, b[$. L'opérateur ∂_k induit alors un opérateur :

$$\partial_k : C_k^{[a,b[}(H) \rightarrow C_{k-1}^{[a,b[}(H) . \quad (2.3.8)$$

Le point clef est que cet opérateur $\partial : C^{[a,b[}(H) \rightarrow C^{[a,b[}(H)$ vérifie, comme dans le cas compact (voir [FH94])

Théorème 2.3.2 $\partial \circ \partial = 0$

car la perte de compacité de $\mathcal{M}(x, y, H, J)$ est due uniquement aux brisures de trajectoires et que le bord d'une variété de dimension 1 est constitué d'un nombre pair de points. On peut donner la

Définition 2.3.3 *L'homologie de Floer de la paire (H, J) est l'homologie du complexe $(C^{[a,b]}(H), \partial)$:*

$$HF_k^{[a,b]}(H, J) = \text{Ker}(\partial_k) / \text{Im}(\partial_{k+1})$$

qui est indépendante du J admissible et générique choisi.

2.3.3 Perturbations génériques

On se donne un hamiltonien admissible $H \in \mathcal{H}_{ad}$. On va énoncer la partie “générique” du théorème 5.1 de [FHS95] (voir aussi le théorème 3.1.2 de [MS94]). Il faut le faire de façon relativement précise, car nous aurons besoin de renseignements sur le support des perturbations. L'avantage de perturber J , et pas H , pour obtenir une paire (J, H) générique, est qu'on peut “choisir le support” des perturbations de J , et en particulier conserver des “paires convexes” tout en ayant une paire générique. Dans [FHS95] et [MS94], contrairement à notre cas, les variétés considérées sont compactes. Ce fait est compensé ici par le fait que toutes les trajectoires que l'on considère sont dans un compact dès que l'on considère une paire standard à l'infini.

Définition 2.3.4 *On définit l'opérateur $\partial_{J,H}$ sur $C^\infty(Z, \mathbb{C}^n)$ par*

$$\partial_{J,H}(u) = u_s - J(t, u)u_t + J(t, u)X_H(t, u) .$$

On considère son linéarisé en $u \in \mathcal{M}(x, y, J, H)$

$$D_u : W^{k,p}(Z, \mathbb{C}^n) \rightarrow W^{k-1,p}(Z, \mathbb{C}^n) \quad (2.3.9)$$

et (voir par exemple [SZ92]) D_u est un opérateur Fredholm d'indice

$$\mu(u) = \mu(x) - \mu(y) . \quad (2.3.10)$$

On pose alors

Définition 2.3.5 *Soient $x \neq y$ deux orbites périodiques non dégénérées de H . Une structure presque complexe J est dite (H, x, y) -régulière si l'opérateur D_u est surjectif pour tout u dans $\mathcal{M}(x, y, J, H)$. On note*

$$\mathcal{J}_{reg}(H, x, y) = \{J \in \mathcal{J}_{ad} / J \text{ est } (H, x, y)\text{-régulière}\} .$$

Si (H, J) est (x, y) -régulière, alors :

$$\mathcal{M}(x, y, J, H) \text{ est une variété de dimension } \mu(x) - \mu(y) . \quad (2.3.11)$$

On définit alors

$$\mathcal{J}_{reg}(H) = \bigcap_{x \neq y \in \mathcal{P}_{ad}(H)} \mathcal{J}_{reg}(H, x, y) \quad (2.3.12)$$

l'espace des structures presque complexes rendant toutes les connexions entre orbites périodiques non dégénérées de H régulières. On peut maintenant citer le théorème 5.1 de [FHS95] (en rappelant qu'on se ramène à nos trajectoires de Floer par la substitution $s \mapsto -s$)

Théorème 2.3.6 $\mathcal{J}_{reg}(H)$ est un G_δ de $\mathcal{J}_{ad}$.

Remarque 2.3.7 Ce théorème est en fait énoncé dans le cas d'une variété compacte, mais (voir remarque 5.4. de [FHS95]) il reste valide dans le cas où (H, J) est standard à l'infini puisque toutes les trajectoires sont dans un compact.

Cependant, on a besoin d'un énoncé plus précis, suggéré par la remarque 5.2 de [FHS95] (et par la remarque p. 35 de [MS94]). Donnons nous $H \in \mathcal{H}_{ad}$ et $J_1 \in \mathcal{J}_{ad}$. On se donne aussi deux orbites 1- périodiques distinctes et non dégénérées de H : x et y et un ouvert borné V séparant x et y , c'est à dire

$$V = V_2 \setminus \bar{V}_1 \text{ avec } x \in V_1 \text{ et } y \in \mathbb{C}^n \setminus \bar{V}_2 .$$

On note alors

$$\mathcal{J}(J_1, V) = \{J \in \mathcal{J}_{ad} / J = J_1 \text{ hors de } V \times S^1\} \quad (2.3.13)$$

et aussi

$$\mathcal{J}_{reg}(H, x, y, J_1, V) = \mathcal{J}_{reg}(H, x, y) \cap \mathcal{J}(J_1, V) .$$

La démonstration du théorème 5.1 dans [FHS95] (et celle du théorème 3.1.2 de [MS94]) permet en fait de montrer

Proposition 2.3.8 $\mathcal{J}_{reg}(H, x, y, J_1, V)$ est un G_δ de $\mathcal{J}(J_1, V)$.

C'est à dire que si une trajectoire de Floer est forcée de traverser une région où J est générique, elle doit être elle aussi générique. Pour voir ceci, nous allons reprendre en partie la démonstration de [FHS95] du théorème 2.3.6.

On se fixe $u_0 \in C^\infty(Z, \mathbb{C}^n)$ telle que

$$u_0(s, t) = x(t) \text{ pour } s < -1 \text{ et } u_0(s, t) = y(t) \text{ pour } s > 1$$

et on considère

$$\mathcal{B} = \{u / u - u_0 \in W^{1,p}(Z, \mathbb{C}^n)\} \quad (2.3.14)$$

ainsi que le complété $\mathcal{J}^l$ de $\mathcal{J}_{ad}$ pour la topologie C^l avec $l > 2$ (il est en effet important de travailler ici avec des variétés de Banach, donc on est obligé dans un premier temps de considérer des structures presque complexes de classe C^l ; la généricité pour tout l entraîne finalement la généricité C^∞). On considère l'application

$$\mathcal{F} : (J \in \mathcal{J}^l, u \in \mathcal{B}) \mapsto \partial_{J,H}(u) \in L^p(Z, \mathbb{C}^n) . \quad (2.3.15)$$

Il s'agit de montrer que $\mathcal{F}^{-1}(0)$ est une variété de Banach, ce qui implique le théorème 2.3.6 par des arguments standard (en particulier le théorème de Sard-Smale, voir [SZ92]). $D\mathcal{F}$ étant un opérateur Fredholm, il suffit en fait de

montrer que l'image de $D\mathcal{F}$ en $(J, u) \in \mathcal{F}^{-1}(0)$ est dense. On pose $q = p^*$ (c'est à dire $p^{-1} + q^{-1} = 1$) et on considère $l \in L^q(Z, \mathbb{C}^n)$ qui s'annule sur l'image de $D\mathcal{F}$ en (J, u) . Comme l satisfait une équation elliptique, il s'agit de trouver, pour utiliser le théorème d'Aronszajn (ou, de façon équivalente, le théorème de prolongement analytique découlant du principe de similarité de Carleman) un ouvert non vide sur lequel l s'annule. Dans [SZ92], les auteurs considèrent l'ensemble $\mathcal{R}(u) \subset Z$ des points réguliers de u (on retire les points doubles et les points où $u_s = 0$) et montrent que c'est un ouvert dense (théorème 4.3). Ils montrent ensuite que l s'annule sur $\mathcal{R}(u)$, donc sur Z , et concluent.

Dans notre cas, on part d'une structure presque complexe J_1 et on considère le complété $\mathcal{J}_V^l$ de $\mathcal{J}(J_1, V)$ pour la topologie C^l . On a alors une application

$$\mathcal{F}_V : (J \in \mathcal{J}_V^l, u \in B) \mapsto \partial_{J,H} u \in L^p(Z, \mathbb{C}^n) . \quad (2.3.16)$$

Il s'agit pour nous de montrer que l'image de $D\mathcal{F}_V$ en (J, u) est dense. Si l'on considère $l \in L^q(Z, \mathbb{C}^n)$ qui s'annule sur l'image de $D\mathcal{F}_V$, la démonstration de [SZ92] permet de montrer que l s'annule sur :

$$\mathcal{R}(u) \cap u^{-1}(V) .$$

Or $u^{-1}(V)$ est par hypothèse un ouvert non vide, et $\mathcal{R}(u)$ est un ouvert dense : l s'annule donc sur un ouvert non vide, et donc sur Z entier. Le reste de la démonstration de [SZ92] restant valable dans notre cas, cela termine la preuve de la proposition 2.3.8.

2.3.4 Perturbations admissibles

Nous allons décrire ici les perturbations admissibles d'un hamiltonien autonome décrites dans [CFHW96], section 2, et [FHW94], section 2.1, qui brisent l'action libre de S^1 sur les orbites 1-périodiques. On se donne un hamiltonien autonome H et une orbite 1-périodique de H transversalement non dégénérée $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{C}^n$, c'est à dire que 1 est valeur propre de multiplicité 1 du linéarisé. On considère un voisinage tubulaire U de l'image de γ ne rencontrant pas d'autre orbite 1-périodique de H . On définit l'espace des perturbations :

$$\mathcal{H} = \{k \in C^\infty(S^1 \times U) / \nabla k(t, x) \leq 1 \ \forall t, x\} . \quad (2.3.17)$$

Pour $k \in \mathcal{H}$ et $\delta > 0$, on définit $H_\delta = H + \delta k$. Notons qu'a priori H_δ n'est défini que sur $S^1 \times U$: on ne demande pas a priori aux perturbations de s'annuler au bord de U , mais nous verrons plus loin qu'on peut se ramener à ce cas. Le lemme 2.1 de [CFHW96] contient en particulier le

Lemme 2.3.9 *Soit $V \subset U$ un voisinage tubulaire de γ . Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour $\delta < \varepsilon$, toutes les orbites périodiques de H_δ dans U sont dans V .*

Considérons maintenant $E = T^*S^1 \times \mathbb{C}^{n-1}$ symplectique standard, c'est à dire muni de coordonnées (q, p, Q, P) avec $q \in S^1$, $p \in \mathbb{R}$, $Q + iP \in \mathbb{C}^{n-1}$ avec :

$$\omega = dq \wedge dp + dQ \wedge dP .$$

On dispose d'un plongement de $O_{S^1} \times 0 \subset E$ dans $\mathbb{C}^n$ défini par :

$$(q, 0, 0, 0) \mapsto \gamma(q) .$$

Le fibré normal à γ étant trivialisable, on peut prolonger ce plongement en un symplectomorphisme $\Gamma : (B_R, \omega) \rightarrow (V_R, \omega_0)$, où V_R est un voisinage tubulaire de γ et où :

$$B_R = \{(q, p, Q, P) \in E \mid p^2 + Q^2 + P^2 \leq R^2\} .$$

On pose également pour $r < R$:

$$V_r = \Gamma^{-1}(B_r) .$$

Donnons nous maintenant une fonction de Morse h_0 sur S^1 possédant exactement un minimum égal à -1 en 0 et un maximum égal à 1 en $\frac{1}{2}$. On définit k_1 par :

$$k_1(t, q, p, Q, P) = h_0(q - t) .$$

La fonction $k := k_1 \circ \Gamma^{-1}$ appartient alors à $\mathcal{H}$. $H_\delta = H + \delta k$ possède deux orbites périodiques évidentes :

$$\gamma^-(t) = \gamma(t) \text{ et } \gamma^+(t) = \gamma(t + \frac{1}{2})$$

d'action respective :

$$A_{K_\delta}(\gamma^\pm) = A_H(\gamma) \mp \delta$$

associées aux points critiques de h_0 , mais l'action libre de S^1 a disparu. En fait, la proposition 2.2 de [CFHW96] contient en particulier le

Lemme 2.3.10 *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $\delta < \varepsilon$, les seules orbites périodiques de H_δ sont $\gamma^\pm$, et elles sont toutes deux non dégénérées. De plus, elles ont pour indice de Conley-Zehnder*

$$\mu(\gamma_+, H_\delta) = \mu(\gamma_-, H_\delta) + 1 .$$

Il reste maintenant à localiser cette construction : on se donne une fonction décroissante $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ égale à 1 pour $x < 1$ et à 0 pour $x > 4$, et on définit $\rho_r(x) = \rho(\frac{x}{r^2})$. On considère alors pour $r > 0$:

$$\tilde{k}_1(q, p, Q, P) = \rho_r(p^2 + Q^2 + P^2) k_1(q, p, Q, P)$$

et $\tilde{k} = \tilde{k}_1 \circ \Gamma^{-1}$. On définit de même $K_\delta = H + \delta \tilde{k}$, prolongé par H hors de U , qui coïncide avec H hors de V_{2r} et avec H_δ dans V_r . Alors on a le

Lemme 2.3.11 *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $\delta < \varepsilon$, les seules orbites périodiques de K_δ dans U sont $\gamma^\pm$, et elles sont toutes deux non dégénérées.*

En effet, d'après le lemme 2.3.9, étant donné que $a\tilde{k} \in \mathcal{H}$ pour a assez petit, il existe $\varepsilon > 0$ telle que toutes les orbites périodiques de K_δ sont dans V_r pour $\delta < a\varepsilon$. Or $K_\delta = H_\delta$ sur V_r , donc le lemme 2.3.10 permet de conclure.

On se donne maintenant un hamiltonien H dont les orbites 1-périodiques transversalement non dégénérées sont en nombre fini : on nomme ces orbites γ_i , pour $1 \leq i \leq N$. On se donne des voisinages tubulaires deux à deux disjoints U_i de chacune de ces orbites. Pour chacune de ces orbites, la proposition précédente fournit une fonction $\tilde{k}_i$ sur $S^1 \times \mathbb{C}^n$ et un réel $\varepsilon_i > 0$ tel que, quand on remplace H par $H + \delta\tilde{k}_i$ pour $\delta < \varepsilon_i$, l'orbite γ_i se scinde en exactement deux orbites non dégénérées $\gamma_i^\pm$ dans U_i . Il ne reste plus qu'à définir :

$$\varepsilon = \inf \varepsilon_i \text{ et } k = \varepsilon \sum \tilde{k}_i$$

et on a la

Proposition 2.3.12 *Soit H un hamiltonien autonome, et V un voisinage de ses orbites 1-périodiques transversalement non dégénérées. Il existe une fonction k à support dans $S^1 \times V$ telle que, pour $\delta < 1$ chaque orbite 1-périodique γ de H se scinde en deux orbites 1-périodiques $\gamma^\pm$ non dégénérées de*

$$K_\delta(t, x) = H(x) + \delta k(t, x) \quad (2.3.18)$$

vérifiant

$$\gamma^\pm \subset V, \quad A_{K_\delta}(\gamma^\pm) = A_H(\gamma) \mp \delta \text{ et } \mu(\gamma^+, K_\delta) = \mu(\gamma^-, K_\delta) + 1. \quad (2.3.19)$$

2.3.5 Propriétés fonctorielles

Les propriétés fonctorielles de l'homologie de Floer dans $\mathbb{C}^n$ des hamiltoniens admissibles pour U permet alors de définir l'homologie symplectique de U comme la limite de l'homologie de Floer de hamiltoniens tendant vers 0 dans U et vers l'infini hors de U . Les définitions et résultats suivants proviennent tous de [FH94].

Homotopies croissantes

On considère deux paires admissibles génériques (H_1, J_1) et (H_2, J_2) telles que $H_1 \leq H_2$ sur $S^1 \times \mathbb{C}^n$. On appelle homotopie croissante entre (H_1, J_1) et (H_2, J_2) une paire

$$(L(s, t, z), \tilde{J}(s, t, z)) \text{ pour } s \in \mathbb{R}, t \in S^1, z \in \mathbb{C}^n$$

telle que, en définissant

$$L^s(t, z) := L(s, t, z), \quad \tilde{J}^s(t, z) = \tilde{J}(s, t, z),$$

$\tilde{J}^s$ soit une structure admissible et qu'il existe $R > 0$ et une fonction C^∞ $\mu(s) > 0$ vérifiant

$$L^s(t, z) = \mu(s) |z|^2 \text{ pour } z \notin B^{2n}(R)$$

avec la condition

$$\mu(s) \in \pi\mathbb{N} \Rightarrow \mu'(s) > 0 \quad (2.3.20)$$

(c'est à dire qu'on demande que $(L^s, \tilde{J}^s)$ soit standard à l'infini, sauf en un nombre fini de points où (2.2.1) est remplacé par (2.3.20)). On demande de plus

$$((L^s, \tilde{J}^s)) = (H_1, J_1) \quad \text{pour } s \leq -s_0 \quad (2.3.21)$$

$$((L^s, \tilde{J}^s)) = (H_2, J_2) \quad \text{pour } s \geq s_0 \quad (2.3.22)$$

$$\frac{\partial L}{\partial s}(s, t, z) \geq 0 \quad \text{pour tous } s, t, z. \quad (2.3.23)$$

Si $x \in \mathcal{P}(H_1)$ et $y \in \mathcal{P}(H_2)$, on définit de façon analogue à la définition 2.1.2 l'espace des trajectoires de Floer généralisées

$$\mathcal{M}(x, y, \tilde{J}, L) = \{u \in C^\infty(Z, \mathbb{C}^n) \text{ vérifiant (2.3.24), (2.3.25) et (2.3.26)}\}$$

$$u_s - \tilde{J}(s, u)u_t = -\tilde{J}(s, t, u)X_{L^s}(t, u) \quad (2.3.24)$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s, t) = x(t) \text{ dans } C^1(S^1) \quad (2.3.25)$$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s, t) = y(t) \text{ dans } C^1(S^1). \quad (2.3.26)$$

On a alors (théorème 24 de [FH94])

Théorème 2.3.13 *Il existe une homotopie croissante entre (H_1, J_1) et (H_2, J_2) telle que $\mathcal{M}(x, y, \tilde{J}, L)$ est une variété de dimension*

$$\dim \mathcal{M}(x, y, \tilde{J}, L) = \mu(x, H_1) - \mu(y, H_2) \quad (2.3.27)$$

de plus, si $\mathcal{M}(x, y, \tilde{J}, L) \neq \emptyset$, alors

$$A_{H_1}(x) \geq A_{H_2}(y). \quad (2.3.28)$$

Le problème essentiel est d'empêcher les solutions de (2.3.24) de partir à l'infini. On part pour cela d'une homotopie croissante $(L, \tilde{J})$ et on lui associe une "homotopie à croissance lente"

$$L_c(s, t, z) = L\left(\frac{s}{c}, t, z\right) \text{ et } \tilde{J}_c(s, t, z) = \tilde{J}\left(\frac{s}{c}, t, z\right)$$

vérifiant

$$0 \leq \frac{\partial L_c}{\partial s} \leq \beta c^{-1} \quad (2.3.29)$$

pour c suffisamment grand, la condition (2.3.29) la condition (2.3.20) forcent les solutions de (2.3.24) à rester dans un compact et fournissent des bornes L_1^2 , ce qui suffit pour conclure. La formule (2.3.28) résulte d'un calcul analogue à (2.1.15) en raison de la condition (2.3.23). Ceci permet d'associer à $(L, \tilde{J})$, de façon analogue à (2.3.5), une application

$$\Psi_{L, \tilde{J}} : C_k^a(H_1, J_1) \rightarrow C_k^a(H_2, J_2)$$

obtenue en comptant modulo 2 le cardinal de $\mathcal{M}(x, y, \tilde{J}, L)$ pour $\mu(x, H_1) = \mu(y, H_2)$. On montre ensuite que la seule perte de compacité de $\mathcal{M}(x, y, \tilde{J}, L)$ est due aux brisures des solutions de (2.3.24) en une nouvelle solution de (2.3.24) et en trajectoires de Floer associées à (H_1, J_1) ou à (H_2, J_2) . Ceci permet de montrer que $\Psi_{L, \tilde{J}}$ définit un morphisme de chaînes, et induit donc une application

$$\tilde{\Psi}_{L, \tilde{J}} : HF_k^{[a, b[}(H_1, J_1) \rightarrow HF_k^{[a, b[}(H_2, J_2) . \quad (2.3.30)$$

On montre ensuite que cette application est indépendante de l'homotopie croissante $(L, \tilde{J})$ choisie, et on l'appelle **morphisme de monotonie** $m(H_1, H_2)$. Il résulte de la preuve de la proposition 35 de [FH94] la

Proposition 2.3.14 *Soit $(L, \tilde{J})$ une homotopie croissante entre (H_1, J_1) et (H_2, J_2) . On suppose que son diagramme de Cerf dans l'intervalle $[a, b]$, pour $-\infty < a \leq b < +\infty$*

$$\mathcal{C}(L) = \left[\bigcup_{s \in \mathbb{R}} A_{L^s}(\mathcal{P}(L^s)) \right] \cap [a, b]$$

est trivial, i.e. vérifie

$$\mathcal{C}(L) \simeq [A_{H_1}(\mathcal{P}(H_1)) \cap [a, b]] \times \mathbb{R} . \quad (2.3.31)$$

Alors le morphisme de monotonie

$$m(H_1, H_2) : HF_k^{[a, b[}(H_1, J_1) \rightarrow HF_k^{[a, b[}(H_2, J_2)$$

est un isomorphisme.

C'est à dire que s'il n'y a pas de naissance ou de mort de point critiques de la fonctionnelle d'action entre a et b , et si aucune branche du diagramme de Cerf ne franchit $\{a, b\}$, alors l'homologie de Floer entre les niveaux a et b est inchangée au cours de l'homotopie.

Le système inductif

On définit une relation d'ordre partiel par :

$$(H_1, J_1) \prec (H_2, J_2) \Leftrightarrow H_1 \leq H_2 \text{ sur } S^1 \times \mathbb{C}^n \quad (2.3.32)$$

pour deux paires admissibles génériques (H_1, J_1) et (H_2, J_2) . Dans ces conditions, on a construit un morphisme naturel pour $a > -\infty$

$$m(H_1, H_2) : HF_k^{[a, b[}(H_1, J_1) \rightarrow HF_k^{[a, b[}(H_2, J_2) \quad (2.3.33)$$

donné par une homotopie monotone entre H_1 et H_2 . Comme l'ensemble des paires admissibles est inductif, et que ces morphismes de monotonie constituent un système inductif, on peut définir l'homologie symplectique comme la limite inductive des homologies de Floer via ces morphismes, pour $-\infty < a \leq b \leq +\infty$:

Définition 2.3.15

$$S_k^{[a, b[}(U) = \varinjlim HF_k^{[a, b[}(H, J)$$

On notera

$$M(H, J) : HF_k^{[a, b[}(H, J) \rightarrow S_k^{[a, b[}(U) \quad (2.3.34)$$

le morphisme donné par la limite inductive.

Remarque 2.3.16 *Étant donnée une paire (H, J) standard à l'infini et $a < b$, on dispose de l'homologie $HF_*^{[a, b[}(H, J)$ dès que toutes les orbites de H dont l'action est dans $[a, b[$ sont non dégénérées et que toutes les trajectoires de Floer entre ces orbites sont génériques. En partant d'une paire (H_0, J_0) standard à l'infini pour laquelle les orbites de H dont l'action est dans $[a, b[$ sont transversalement non dégénérées, les propositions 2.3.8 et 2.3.12 nous permettent de perturber H_0 au voisinage de ses orbites dont l'action est dans $[a, b[$ et J_0 dans un ouvert séparant ces orbites pour obtenir une paire (H_1, J_1) pour laquelle le morphisme de limite inductive $M(H_1, J_1)$ existe.*

Triangle exact

Pour une paire admissible générique (H, J) , et pour $-\infty < a \leq b \leq c \leq +\infty$, on a une suite exacte courte naturelle :

$$0 \longrightarrow C_k^{[a, b[}(H, J) \longrightarrow C_k^{[a, c[}(H, J) \longrightarrow C_k^{[b, c[}(H, J) \longrightarrow 0$$

qui fournit en homologie une suite exacte longue $\Delta_{a, b, c}(H, J)$:

$$HF_k^{[a, b[}(H, J) \longrightarrow HF_k^{[a, c[}(H, J) \longrightarrow HF_k^{[b, c[}(H, J) \xrightarrow{\partial_k} HF_{k-1}^{[a, b[}(H, J)$$

et, après passage à la limite inductive, on obtient le triangle exact $\Delta_{a, b, c}(U)$:

$$S_k^{[a, b[}(U) \longrightarrow S_k^{[a, c[}(U) \longrightarrow S_k^{[b, c[}(U) \xrightarrow{\partial_k} S_{k-1}^{[a, b[}(U) \quad (2.3.35)$$

Application induite par l'inclusion

Si $U \subset V$ sont deux ouverts de M , l'inclusion :

$$\mathcal{H}_{ad}(V) \hookrightarrow \mathcal{H}_{ad}(U)$$

et les morphismes de monotonie dans $\mathcal{H}_{ad}(U)$ fournissent par passage à la limite inductive un morphisme induit par l'inclusion (également appelé morphisme de monotonie dans [FH94])

$$i_{U, V}^* : S_k^{[a, b[}(V) \rightarrow S_k^{[a, b[}(U) \quad (2.3.36)$$

qui se comporte de façon “naturelle”, c'est à dire que si $U \subset V \subset W$, alors

$$i_{U, W}^* = i_{U, V}^* \circ i_{V, W}^* \quad (2.3.37)$$

Invariance par isotopie

On notera dans toute la suite $\mathcal{D}$ le groupe des symplectomorphismes à support compact :

$$\phi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

Étant donné $\phi \in \mathcal{D}$ (on a besoin d'un symplectomorphisme ambiant), on peut transporter H et J par ϕ . Après passage à la limite inductive, on dispose donc d'un isomorphisme:

$$\phi_{\#} : S_k^{[a,b]}(\phi(U)) \rightarrow S_k^{[a,b]}(U) . \quad (2.3.38)$$

Si maintenant $\phi(U) \subset V$, on peut composer $\phi_{\#}$ par le morphisme de monotonie $i_{\phi(U),V}^*$, pour obtenir un morphisme :

$$\phi^* : S_k^{[a,b]}(V) \rightarrow S_k^{[a,b]}(U) . \quad (2.3.39)$$

On dispose également du morphisme induit sur les triangles exacts :

$$\phi^* : \Delta_{a,b,c}(V) \rightarrow \Delta_{a,b,c}(U) . \quad (2.3.40)$$

L'invariance par isotopie se traduit par le

Théorème 2.3.17 *Si ψ_s est un chemin lisse dans $\mathcal{D}$ tel que $\psi_s(U) \subset V$ pour tout s , alors $\psi_s^* = \psi_0^*$*

En identifiant U et $\psi_0(U)$, on peut supposer $\phi_0 = id$. L'idée est de considérer $H \in \mathcal{H}_{ad}(U)$ et les hamiltoniens

$$H_{\varepsilon}(t, z) = H(t, \psi_{\varepsilon}^{-1}(z))$$

qui sont dans $\mathcal{H}_{ad}(\psi_{\varepsilon}(U))$. Par une construction analogue à (2.3.30), les auteurs construisent pour ε proche de 0 un "isomorphisme de proximité"

$$\phi : HF_k^{[a,b]}(H_{\varepsilon}, J_{\varepsilon}) \rightarrow HF_k^{[a,b]}(H, J)$$

donné par la trivialité du diagramme de Cerf de l'homotopie $H_{s\varepsilon}$. De plus, étant donné $K \in \mathcal{H}_{ad}(V)$ tel que

$$K(t, z) \leq H_s(t, z) \quad \forall t, s, z$$

cet isomorphisme de proximité commute avec les morphismes de monotonie. Ils montrent ensuite que, pour ε assez petit, étant donné $x \in \mathcal{P}(H)$, une unique solution de (2.3.24) relie $\psi_{\varepsilon}^{-1}(x)$ à x , et que ce sont les seules solutions isolées de (2.3.24) (l'idée est de voir (2.3.24) comme une perturbation compacte de (2.1.9)). Cela permet d'identifier ϕ avec l'application naturelle

$$\psi_{\varepsilon\#} : HF_k^{[a,b]}(H_{\varepsilon}, J_{\varepsilon}) \rightarrow HF_k^{[a,b]}(H, J)$$

donnée par le transport par ψ_{ε}^{-1} . Cette application commute donc avec les morphismes de monotonie, ce qui implique $\psi_{\varepsilon}^* = i_{U,V}^*$ pour ε assez petit. En suivant l'isotopie ψ_s , on en déduit le théorème 2.3.17.

Chapitre 3

Homologie symplectique locale d'un ouvert de type contact restreint

3.1 Suite cofinale adaptée

Nous allons voir ici que, si $\Sigma = \partial U$ est de type contact restreint et si son spectre d'action est discret et injectif (voir 1.2.4), on peut construire une famille cofinale (H_λ, J_λ) telle que les orbites d'action positive et les trajectoires de Floer d'aire bornée sont situées dans U . Cette construction est à la base de toutes les propriétés de l'homologie symplectique d'un ouvert de type contact restreint que nous étudierons par la suite.

3.1.1 Famille cofinale idéale

On reprend les notations de la section 1.1. On rappelle que d'après (1.1.12), on a

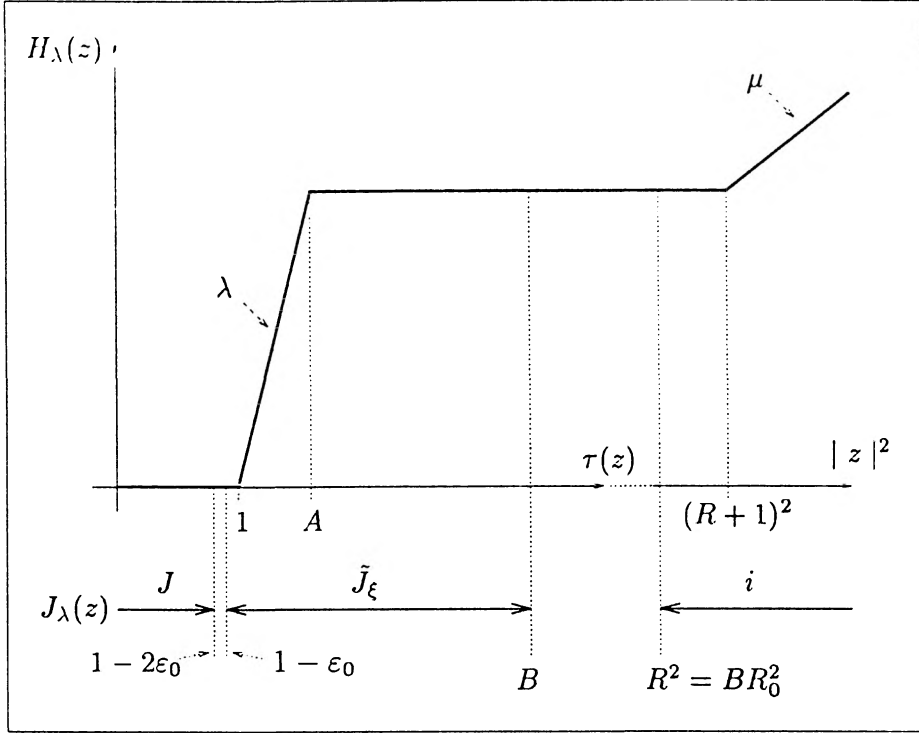
$$\bar{U}_a \subset B(R_0\sqrt{a}) \text{ pour } a \geq 1 .$$

On part d'une structure presque complexe calibrée J sur U , et on se fixe une structure presque complexe J_ξ calibrée par $d\sigma$ sur le fibré symplectique $\xi \rightarrow \Sigma$, qui, d'après le lemme 1.3.8, détermine une unique structure spéciale $\tilde{J}_\xi$ sur

$$W = \Psi(\hat{\Sigma}) .$$

On choisit $\lambda \notin \mathcal{S}(\Sigma)$ et $\mu \notin \pi\mathbb{N}$, et on considère la paire idéale de la figure 3.1. Après lissage, les orbites 1-périodiques de H_λ seront de 5 types (voir figure 3.2):

1. les constantes dans U , notées $\boxed{U}$
2. les orbites situées au voisinage de $\{\tau = 1\}$, associées aux caractéristiques fermées de Σ , notées $\boxed{\partial^+ U}$
3. les orbites situées au voisinage de $\{\tau = A\}$, associées aux caractéristiques fermées de Σ , notées $\boxed{\partial^- U}$

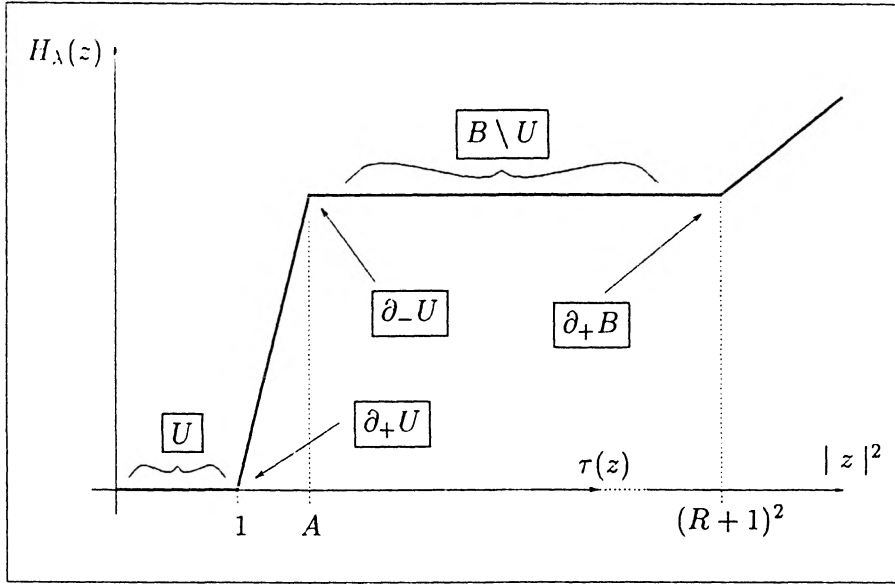
FIG. 3.1 – Paire $(H_\lambda, \tilde{J}_\lambda)$ idéale

4. les constantes dans $B^{2n}(R+1) \setminus U_A$, notées $\boxed{B \setminus U}$
5. les orbites situées au voisinage de $\{|z| = R+1\}$, associées aux caractéristiques fermées de $S^{2n}(R)$, notées $\boxed{\partial^+ B}$.

La forme de H_λ assure que les orbites $\boxed{U}$ ont une action proche de 0 et que les orbites $\boxed{\partial^+ U}$ ont une action proche de $\mathcal{S}(\Sigma)$. On va faire tendre λ vers $+\infty$ et jouer sur les paramètres $A(\lambda), B(\lambda)$ et $\mu(\lambda)$ pour que

- la pente μ tende vers $+\infty$
- l'action des orbites de type $\boxed{\partial^- U}$, $\boxed{B \setminus U}$ et $\boxed{\partial^+ B}$ tende uniformément vers $-\infty$.

Si l'on se fixe $a > -\infty$, les orbites périodiques intervenant pour λ assez grand dans $HF_*^{[a,b]}(H_\lambda, J_\lambda)$ seront de type $\boxed{U}$ ou $\boxed{\partial^+ U}$, et donc situées dans U . Il est en outre crucial que les trajectoires de Floer reliant ces orbites périodiques soient elles aussi situées dans U . D'après le principe du maximum (lemme 1.3.9), ces trajectoires de Floer ne peuvent être tangentes intérieurement ni à Σ_S pour $1 < S < B$, ni à $S(r)$ pour $r > R$; en particulier, elles ne peuvent pas sortir de $B(R)$. Malheureusement, on n'a pas une situation convexe dans $B(R) \setminus U_B$, et les trajectoires pourraient a priori sortir de U_B en restant dans $B(R)$. Dans ce cas, ces trajectoires seront des courbes $\tilde{J}_\xi$ -holomorphes propres dans $U^{[\frac{1}{2}B, B]}$ (si l'on suppose $B > 2A$), et c'est une estimation de leur aire, qui se traduit par

FIG. 3.2 – Orbites 1-périodiques de H_λ

le lemme suivant, qui empêchera cette situation et permettra de montrer que ces trajectoires restent dans U .

Lemme 3.1.1 *Soit J_ξ une structure presque complexe calibrée sur ξ . Il existe une constante $C_1(J_\xi) > 0$ telle que, pour tout $B > 0$, si J est une structure presque complexe calibrée sur $\mathbb{C}^n$ telle que*

$$J = \tilde{J}_\xi \text{ sur } U^{[\frac{1}{2}B, B]}$$

et si u est une courbe J -holomorphe s'appuyant à la fois sur $\Sigma_{\frac{1}{2}B}$ et sur Σ_B , on a

$$A(u) \geq C_1(J_\xi)B. \quad (3.1.1)$$

Démonstration: On pose $b = \ln(B)$ et on considère la structure complexe $J_1 = \psi_b^* J$ sur $U^{[\frac{1}{2}, 1]}$. Comme les structures presque complexe spéciales sont par définition ψ_s -invariantes, on a

$$J_1 = \tilde{J}_\xi \text{ sur } U^{[\frac{1}{2}, 1]}.$$

La courbe $u_1 = \psi_b^{-1}(u)$ est alors une courbe J_1 -holomorphe s'appuyant à la fois sur $\Sigma_{\frac{1}{2}}$ et sur Σ . On considère la distance euclidienne standard d sur $\mathbb{C}^n$ et on pose

$$r = \frac{1}{3}d(\Sigma_{\frac{1}{2}}, \Sigma).$$

Comme u_1 touche à la fois sur $\Sigma_{\frac{1}{2}}$ et Σ , il existe un point z_0 tel que

$$B^{2n}(u_1(z_0), r) \subset U^{[1, 2]}.$$

La composante connexe u_2 de $u_1 \cap B^{2n}(u_1(z_0), r)$ passant par $u_1(z_0)$ s'appuie alors sur $S^{2n-1}(u_1(z_0), r)$, et est $\tilde{J}_\xi$ -holomorphe. Le lemme de monotonie de

Gromov (voir par exemple [Sik94], Proposition 4.3.1) implique l'existence d'une constante C_1 , ne dépendant que de r et de $\tilde{J}_\xi$, telle que

$$\mathcal{A}(u_2) \geq C_1 .$$

Comme $\tilde{J}_\xi$ ne dépend que de J_ξ et que r est fixé, C_1 ne dépend que de J_ξ . Comme J_1 est calibrée par ω_0 , on en déduit

$$\mathcal{A}(u_1) \geq C_1(J_\xi) . \quad (3.1.2)$$

On a de plus

$$\psi_b^* \omega_0 = B\omega_0$$

d'où

$$\mathcal{A}(u) = B\mathcal{A}(\gamma_1) \quad (3.1.3)$$

et on déduit (3.1.1) de (3.1.2) et (3.1.3).

D'après la remarque 2.3.16, il suffira de perturber H_λ dans U pour obtenir, pour λ assez grand, un hamiltonien admissible pour $S_*^{[a,b]}(U)$. De plus, il suffira de perturber J_λ dans U pour obtenir une structure complexe admissible générique pour $S_*^{[a,b]}(U)$. Les lemmes 1.3.9 et 3.1.1 permettront de montrer que, dans cette situation générique, les trajectoires de Floer impliquées restent dans U .

3.1.2 Hamiltonien lisse

Le lissage va nous contraindre à alourdir les notations, mais la situation est essentiellement la même qu'à la figure 3.1. On se fixe un $\varepsilon_0 > 0$. On part d'une structure presque complexe J sur U , et on se fixe une structure J_ξ le long de Σ , qui détermine une unique structure spéciale $\tilde{J}_\xi$ sur W . Comme on suppose $\mathcal{S}(\Sigma)$ discret et injectif, on a

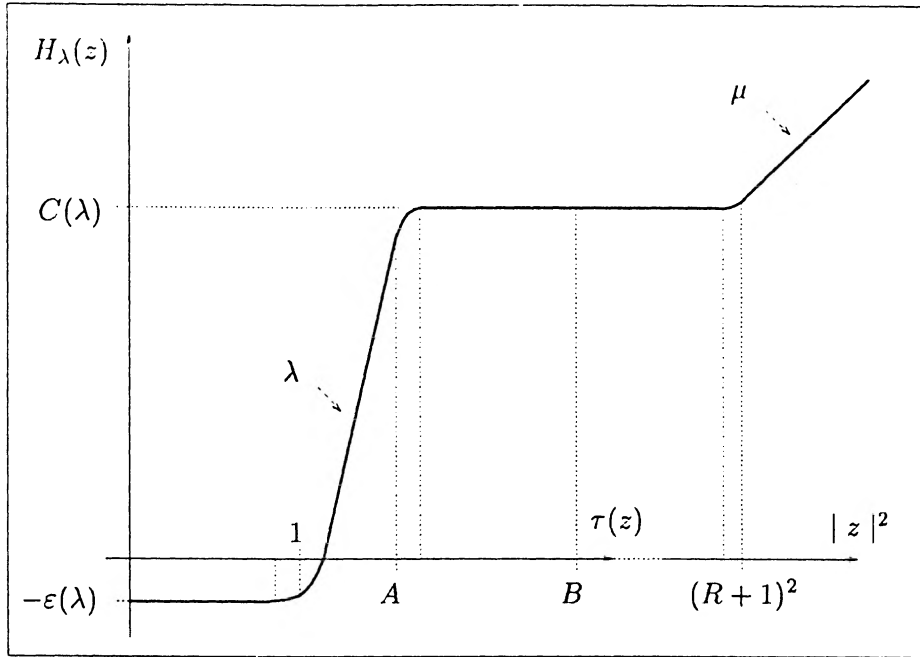
$$\mathcal{S}(\Sigma) = \{0 < T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n < \dots\} .$$

On choisit maintenant un grand $\lambda \notin \mathcal{S}(\Sigma)$. Il existera alors $\eta_\lambda > 0$ tel que

$$]\lambda - \eta_\lambda, \lambda] \cap \mathcal{S}(\Sigma) = \emptyset . \quad (3.1.4)$$

On se donne ensuite $\varepsilon(\lambda) > 0$ (petit) et $A(\lambda) > 1$ (grand), puis $\nu(\lambda) > \lambda^{-1}\varepsilon(\lambda)$. On considère une fonction $h_\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ telle que

- $h_\lambda(S) = -\varepsilon$ si $S \in [0, 1 - \nu]$
- h_λ est convexe sur $[1 - \nu, 1 + \nu]$
- $h_\lambda(1) < 0$ et $h'_\lambda(1) = T_0/2$
- $h'_\lambda(S) = \lambda$ si $S \in [1 + \nu, A]$
- h_λ est concave sur $[A, A + \nu]$

FIG. 3.3 – Hamiltonien lisse H_λ

$$- h_\lambda(S) = C(\lambda) \text{ si } S \geq A + \nu$$

où l'on a posé

$$C(\lambda) = (A(\lambda) - 1)\lambda. \quad (3.1.5)$$

On choisit ensuite $B(\lambda) > 2(A(\lambda) + \nu(\lambda))$ et $\mu(\lambda) \notin \pi\mathbb{N}$ avec $\mu(\lambda) > 0$, et on pose

$$R(\lambda) = R_0 \sqrt{B(\lambda)}. \quad (3.1.6)$$

On se donne une fonction $g_\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ telle que

- $g_\lambda(S) = C(\lambda)$ si $S < (R+1)^2 - \nu$
- g_λ est convexe sur $[(R+1)^2 - \nu, (R+1)^2]$
- $g'_\lambda(S) = \mu$ si $S > (R+1)^2$.

On définit maintenant $H_\lambda \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ (voir figure 3.3) par

- $H_\lambda(z) = -\varepsilon(\lambda)$ si $z \in U_{1-\varepsilon_0}$
- $H_\lambda = h_\lambda \circ \tau$ sur $U^{[1-\varepsilon_0, A+\nu]}$
- $H_\lambda(z) = C(\lambda)$ sur $B^{2n}(R) \setminus U_{A+\nu}$
- $H_\lambda(z) = g_\lambda(|z|^2)$ si $z \notin B^{2n}(R)$.

On peut alors considérer comme dans le cas précédent une structure presque complexe J_λ calibrée par ω_0 vérifiant

$$- J_\lambda = J \text{ dans } U_{1-2\varepsilon_0}$$

- $J_\lambda = \tilde{J}_\xi$ dans $U^{[1-\varepsilon_0, B]}$
- $J_\lambda = i$ hors de $B^{2n}(R)$.

3.1.3 Orbites périodiques de H_λ

On va déterminer les orbites 1-périodiques de H_λ en utilisant le lemme 1.1.9 : si $H = h \circ \tau$, elles sont situées dans $\tau^{-1}(S)$, avec $h'(S) \in \mathcal{S}(\Sigma)$ et ont pour action $Sh'(S) - h(S)$. On introduit

$$\Sigma^1 = S^{2n-1}(R)$$

pour laquelle (voir exemples 1.1.4 et 1.1.6)

$$\tau_1(z) = \frac{1}{R^2} |z|^2 \text{ et } \mathcal{S}(\Sigma^1) = \{k\pi R^2 / k \in \mathbb{N}^*\}.$$

Par conséquent, hors de $B^{2n}(R)$, H_λ est de la forme $g_1 \circ \tau_1$ avec

$$g_1(S_1) = g_\lambda(R^2 S_1).$$

On a en particulier $g'_1(S_1) = R^2 \mu \notin \mathcal{S}(\Sigma^1)$ pour $S_1 > (1 + R^{-1})^2$, donc H_λ n'a pas d'orbite 1-périodique hors de $B^{2n}(R + 1)$. D'après la définition de η_λ , on sait de plus qu'une solution de $h'_\lambda(S) \in \mathcal{S}(\Sigma)$ vérifie $h'_\lambda(S) \in [T_0, \lambda - \eta_\lambda]$. On a donc les familles suivantes d'orbites périodiques

1. les constantes dans $U_{1-\nu}$, notées $\boxed{U}$. Elles ont pour action

$$a_1(\lambda) = \varepsilon(\lambda) \tag{3.1.7}$$

2. les orbites associées aux solutions de $h'_\lambda(S_k) = T_k$ dans $[1, 1 + \nu]$, notées $\boxed{\partial^+ U}$. Elles ont pour action

$$a_2^k(\lambda) = S_k T_k - h_\lambda(S_k) \in [T_0, (1 + \nu)\lambda] \tag{3.1.8}$$

3. les orbites associées aux solutions de $h'_\lambda(S'_k) = T_k$ dans $[A, A + \nu]$, notées $\boxed{\partial^- U}$. Elles ont pour action

$$a_3^k(\lambda) = S'_k T_k - h_\lambda(S'_k) \in [T_0 A - C(\lambda), (\lambda - \eta_\lambda)(A + \nu) - (C(\lambda) - \lambda \nu)]$$

et en particulier une action inférieure à

$$a_3(\lambda) = 2\lambda - A(\lambda)\eta_\lambda \tag{3.1.9}$$

4. les constantes dans $B^{2n}(\sqrt{(R + 1)^2 - \nu})$, notées $\boxed{B \setminus U}$. Elles ont pour action

$$a_4(\lambda) = -C(\lambda) \tag{3.1.10}$$

5. les orbites associées aux solutions de $g'_1(S''_k) = k\pi R^2$ dans $[(1 + R^{-1})^2 - \nu R^{-2}, (1 + R^{-1})^2]$, notées $\boxed{\partial^+ B}$. Elles ont une action $S''_k g'_1(S''_k) - g_1(S''_k)$, inférieure à $(R + 1)^2 \mu - C(\lambda)$, d'où, compte tenu de (3.1.6), inférieure à

$$a_5(\lambda) = 2R_0^2 B(\lambda)\mu(\lambda) - C(\lambda). \tag{3.1.11}$$

3.1.4 Estimation de l'énergie des trajectoires de Floer

Le point crucial de cette construction est l'estimation suivante.

Lemme 3.1.2 *Soit (H, J) une paire dépendant du temps. On suppose que*

$$(H, J) = (H_\lambda, J_\lambda) \text{ hors de } S^1 \times U_{1+\nu} . \quad (3.1.12)$$

On considère $x, y \in \mathcal{P}(H) \cap U_{1+\nu}$ et $u \in \mathcal{M}(x, y, J, H)$ telle que

$$u(Z) \not\subset \bar{U}_{1+\nu} . \quad (3.1.13)$$

On a alors l'estimation

$$(A_H(x) - A_H(y)) \geq C_1(J_\xi)B(\lambda) \quad (3.1.14)$$

où $C_1(J_\xi) > 0$ est défini par le lemme 3.1.1.

Démonstration Comme (H, J) est spéciale pour $S^{2n-1}(R)$ hors de $B^{2n}(R)$, le lemme 1.3.9 implique que

$$u(Z) \subset B^{2n}(R) . \quad (3.1.15)$$

En effet, les extrémités x et y de u sont toutes deux dans $B(R)$, et u ne peut pas toucher intérieurement $B(r)$ pour $r > R$. De même, (H, J) est spéciale pour Σ dans $U^{[1+\nu, B]}$, donc u ne peut pas toucher intérieurement Σ_S pour $1 - \tau < S < B$, donc doit forcément sortir de U_B :

$$u(Z) \not\subset U_B . \quad (3.1.16)$$

On peut donc se donner une valeur régulière α de $\tau \circ u$ dans $]A + \nu, \frac{1}{2}B[$ et découper u comme indiqué sur la figure 3.4, c'est à dire considérer

$$Z_- = (\tilde{\tau} \circ u)^{-1}([\alpha, +\infty[)$$

où $\tilde{\tau}$ prolonge $f \circ \tau$ (voir l'exemple 1.1.8), avec f donnée par la figure 3.5.

On voit tout d'abord que $u(Z_-) \subset B^{2n}(R) \setminus U_{A+\nu}$, où H est constante et $J = J_\lambda$. Par conséquent, u vérifie sur Z_- l'équation

$$u_s - Ju_t = 0$$

c'est à dire qu'elle est anti-holomorphe. Comme J_λ est calibrée par ω_0 , on en déduit

$$\int_{Z_-} u^* \omega_0 \leq \mathcal{A}(u \cap U^{[\frac{1}{2}B, B]}) .$$

Mais J_λ est spéciale sur $U^{[\frac{1}{2}B, B]}$ et (3.1.16) implique que $u \cap U^{[\frac{1}{2}B, B]}$ s'appuie à la fois sur Σ_B et sur $\Sigma_{\frac{1}{2}B}$. Le lemme 3.1.1 entraîne donc

$$\int_{Z_-} u^* \omega_0 \leq -C_1(J_\xi)B .$$

Mais dans Z_- , on a

$$\omega_0(u_s, u_t) = \omega_0(u_s, -Ju_s) = -|u_s|_J^2$$

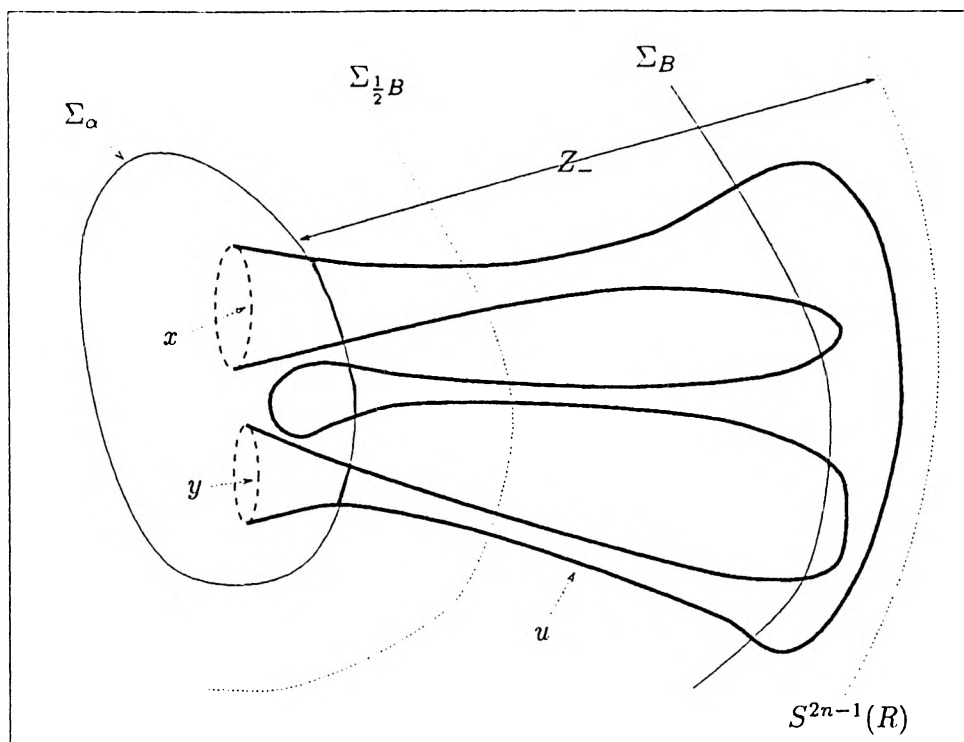
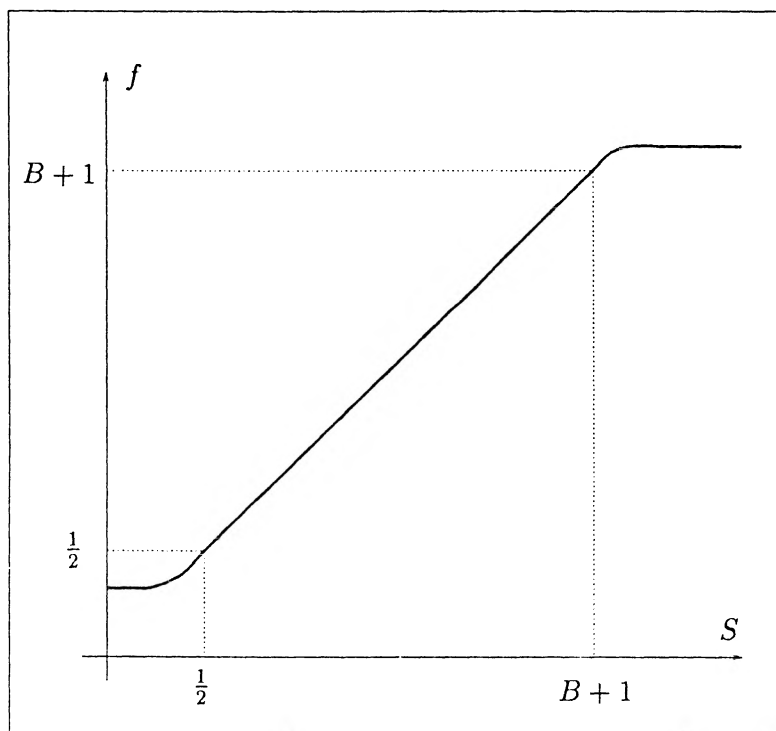


FIG. 3.4 – Découpe de la trajectoire

FIG. 3.5 – Prolongement $f \circ \tau$ de τ

d'où l'estimation

$$\int_{Z_-} |u_s|_J^2 \geq C_1(J_\xi)B . \quad (3.1.17)$$

Or, en raison de (2.1.14) et (2.1.15), on a:

$$A_H(x) - A_H(y) = \int_Z |u_s|_J^2 dt ds \geq \int_{Z_-} |u_s|_J^2 dt ds$$

et (3.1.17) entraîne donc (3.1.14).

3.1.5 Construction d'une suite cofinale

On va à présent utiliser les estimations qui précèdent pour montrer qu'on peut choisir les constantes $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $\varepsilon(\lambda)$ et $\mu(\lambda)$ pour obtenir une famille cofinale ayant les propriétés souhaitées. Pour exclure les orbites $\boxed{\partial^- U}$, $\boxed{B \setminus U}$ et $\boxed{\partial^+ B}$, il suffit que les fonctions a_3 , a_4 et a_5 définies par (3.1.9), (3.1.10) et (3.1.11) tendent vers $-\infty$ en $+\infty$. Comme

$$a_4(\lambda) \leq a_3(\lambda)$$

il suffit d'obtenir

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} a_3(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (2\lambda - A(\lambda)\eta_\lambda) = -\infty \quad (3.1.18)$$

et

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} a_5(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (2R_0^2 B(\lambda)\mu(\lambda) - (A(\lambda) - 1)\lambda) = -\infty . \quad (3.1.19)$$

Pour obtenir une famille cofinale pour l'ordre $\prec$ défini par (2.3.32), il suffit que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mu(\lambda) = +\infty \quad (3.1.20)$$

et

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \varepsilon(\lambda) = 0 \quad (3.1.21)$$

puisque (3.1.19) entraîne alors

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{C(\lambda)}{R^2(\lambda)} = +\infty .$$

En outre, pour pouvoir montrer que les trajectoires de Floer restent dans $U_{1+\nu}$ à l'aide du lemme 3.1.2, nous aurons également besoin de

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{B(\lambda)}{\lambda} = +\infty . \quad (3.1.22)$$

De plus, il suffit de le faire pour une famille λ tendant vers $+\infty$ (c'est à dire qu'on n'a pas besoin de faire varier λ continûment). Il sera de plus utile d'obtenir une famille croissante pour $\prec$. On choisit donc pour commencer une suite strictement croissante λ_n vérifiant

$$\lambda_n > 0 , \lambda_n \notin \mathcal{S}(\Sigma) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$$

et une suite strictement décroissante ε_n vérifiant

$$\varepsilon_n > 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$$

ce qui réalisera (3.1.21). On choisit ensuite une suite strictement décroissante η_n vérifiant

$$]\lambda_n - \eta_n, \lambda_n] \cap \mathcal{S}(\Sigma) = \emptyset, \eta_n > 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n = 0.$$

On peut alors choisir une suite strictement croissante A_n telle que

$$A_n > 3 \frac{\lambda_n}{\eta_n}$$

ce qui réalisera (3.1.18). On définit ensuite

$$B_n = \frac{1}{2R_0} (A_n - 1) \sqrt{\lambda_n} > \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2R_0} (3 \frac{\lambda_n}{\eta_n} - 1)$$

ce qui réalisera (3.1.22), et on choisit enfin suite strictement croissante μ_n vérifiant

$$\mu_n \notin \pi\mathbb{N}, 0 < \mu_n \leq \frac{1}{2R_0} \sqrt{\lambda_n} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = +\infty$$

ce qui réalisera (3.1.19) et (3.1.20). On peut résumer cette construction par le

Lemme 3.1.3 *La famille (H_λ, J_λ) , $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ est croissante et cofinale pour $\prec$. L'action de ses orbites de type $\boxed{\partial_- U}$, $\boxed{B \setminus U}$ et $\boxed{\partial_+ B}$ est inférieure à $D(\lambda)$. L'action de ses orbites de type $\boxed{\partial_+ U}$ est dans $[T_0, +\infty[$, celle de ses orbites de type $\boxed{U}$ est égale à $\varepsilon(\lambda)$. Elle vérifie en outre le lemme 3.1.2 avec*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} D(\lambda) = -\infty, \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \varepsilon(\lambda) = 0 \text{ et } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{B(\lambda)}{\lambda} = +\infty.$$

3.2 Description de l'homologie symplectique d'un ouvert de type contact restreint

Nous allons maintenant utiliser la famille cofinale construite précédemment pour décrire $S_*^{[a,b]}(U)$, $-\infty < a < b < +\infty$ si U est de type contact restreint. On montrera que $S_*^{[a,b]}(U)$ est “locale”, c'est à dire qu'en perturbant H_λ et J_λ dans U , on obtient une famille cofinale générique telle que les orbites et les trajectoires de Floer considérées sont toutes situées dans U . Nous en déduirons en particulier que, dans une situation générique, les morphismes de monotonie définissant l'homologie symplectique finissent par devenir des isomorphismes. Si l'on ne s'intéresse qu'à l'homologie symplectique de U au voisinage de 0, il suffira de perturber H_λ et J_λ dans $U_{1-\varepsilon_0}$, où H_λ sera une petite fonction de Morse f . Les orbites périodiques seront les points critiques de f , et les trajectoires de Floer, ne pouvant sortir de $U_{1-\varepsilon_0}$, seront des lignes de gradient de f , ce qui nous fournira un isomorphisme entre $S_*^{[0,\varepsilon]}(U)$ et $H_{*+n}(U, \partial U)$. On supposera dans toute cette section que $\mathcal{S}(\Sigma)$ est non dégénéré.

3.2.1 Familles cofinales génériques

On se fixe $a \in \mathbb{R}$, et on part de la famille (H_λ, J_λ) pour $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ construite précédemment. Les orbites 1-périodiques de H_λ dont l'action ne tend pas uniformément vers $-\infty$ sont de deux types:

1. les constantes dans $U_{1-\nu}$ (orbites de type $\boxed{U}$), d'action proche de 0
2. les orbites associées aux caractéristiques fermées de ∂U (orbites de type $\boxed{\partial^+ U}$), situées dans $U^{[1,1+\nu]}$, d'action proche de $\mathcal{S}(\Sigma) \cap [T_0, \lambda]$, où

$$T_0 = \inf \mathcal{S}(\Sigma) > 0 .$$

Par conséquent, pour λ assez grand, ces orbites seront les seules orbites périodiques de H_λ d'action supérieure à a . D'après la remarque 2.3.16, il suffit de perturber ces orbites périodiques-ci pour obtenir une famille cofinale admissible pour $S_*^{[a,b]}(U)$, avec $b \geq a$. On s'intéresse pour commencer aux orbites de type $\boxed{U}$: on définit

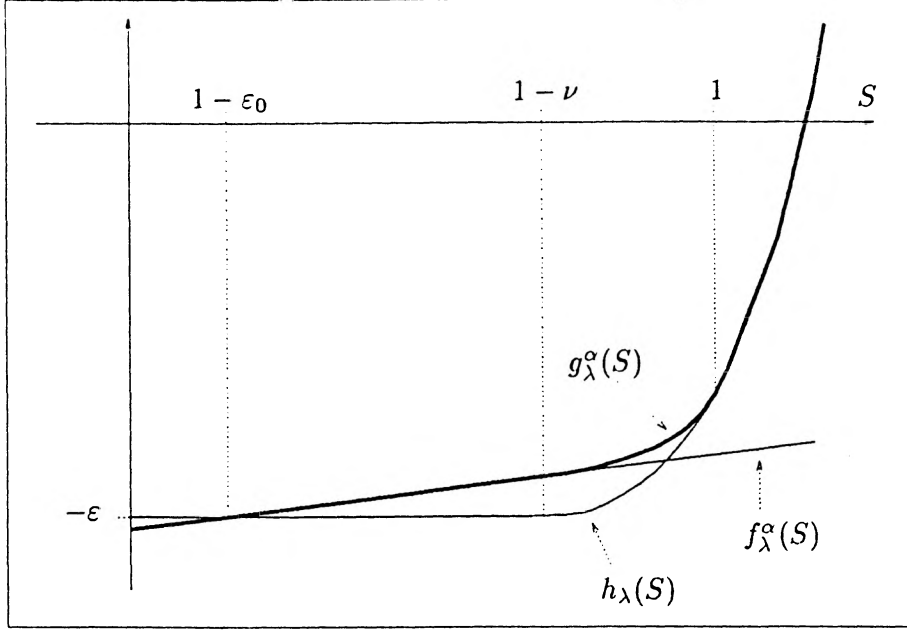
$$f_\lambda^\alpha(S) = -\varepsilon(\lambda) + \alpha(S - 1 + \varepsilon_0) \text{ pour } S > 0 .$$

On rappelle que $H_\lambda = -\varepsilon(\lambda)$ dans $U_{1-\varepsilon_0}$ et $H_\lambda = h_\lambda \circ \tau$ dans $U^{[1-\varepsilon_0, A+\nu]}$ avec $h'_\lambda(1) = \frac{1}{2}T_0$. Pour α assez petit, on peut alors trouver une fonction g_λ^α (voir figure 3.6) telle que:

- $g_\lambda^\alpha = f_\lambda^\alpha$ dans $]0, 1 - \nu]$
- g_λ^α est convexe dans $]1 - \nu, 1[$
- $g_\lambda^\alpha = h_\lambda$ dans $[1, A + \nu]$.

On se donne maintenant $f \in C^\infty(U)$ telle que

- f est de Morse dans $U_{1-\varepsilon_0}$

FIG. 3.6 – Interpolation g_λ^α

- f possède un unique minimum local, atteint en $z_0 \in U_{1-3\epsilon_0}$ avec $f(z_0) = -1$ (U est supposé connexe)
- tous les autres points critiques de f sont dans $U^{1-2\epsilon_0, 1-\epsilon_0[}$
- $-1 \leq f(z) < 0$ pour tout $z \in U_{1-\epsilon_0}$
- $f = \tau - (1 - \epsilon_0)$ dans $U^{1-\epsilon_0, 1[}$.

On définit $H_\lambda^\alpha \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ par

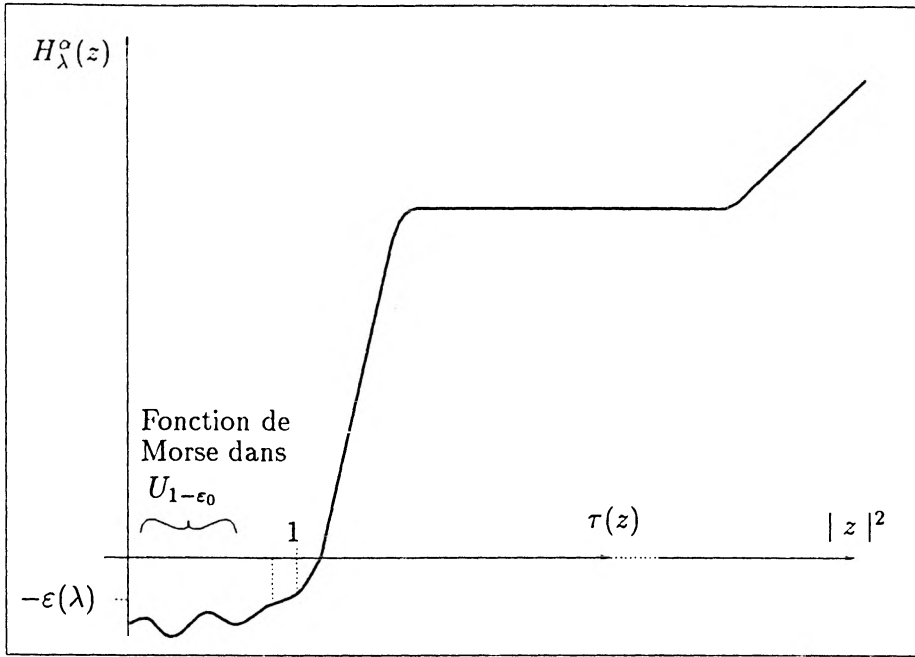
- $H_\lambda^\alpha = -\epsilon(\lambda) + \alpha f$ dans $U_{1-\epsilon_0}$
- $H_\lambda^\alpha = g_\lambda^\alpha \circ \tau$ dans $U^{1-\epsilon_0, 1[}$
- $H_\lambda^\alpha = H_\lambda$ hors de U .

C'est à dire qu'on a "morsifié" le plateau dans $U_{1-\nu}$ comme symbolisé par la figure 3.7. Pour α assez petit, le hamiltonien H_λ^α est alors un hamiltonien admissible pour $S_*^{[a, T_0]}(U)$. En effet, il existera un $T_f > 0$ tel que toutes les orbites périodiques non constantes de f ont une période au moins égale à T_f (voir par exemple [SZ92]). Par conséquent, pour $\alpha < T_f$, les seules orbites 1-périodique de H_λ^α dans U sont les points critiques de f . Elles sont par conséquent non dégénérées, et le lemme 7.2 de [SZ92] entraîne, avec nos conventions

$$\mu(x, H_\lambda^\alpha) = n - i_M(x, f) \text{ si } x \in \text{Crit}(f) \quad (3.2.1)$$

où i_M désigne l'indice de Morse. De plus, H_λ^α n'a pas d'autre orbite 1-périodique d'action dans $[a, T_0[$, puisque $H_\lambda^\alpha = H_\lambda$ hors de U , et $H_\lambda^\alpha = g_\lambda^\alpha \circ \tau$ dans $U^{1-\epsilon_0, 1[}$ avec g_λ^α proche de h_λ . En notant

$$\mathcal{P}^{[a, b]}(H) := \{x \in \mathcal{P}(H) / A_H(x) \in [a, b]\} \quad (3.2.2)$$

FIG. 3.7 – Hamiltonien de Morse H_λ^α

on aura alors

$$\mathcal{P}^{[a, T_0]}(H_\lambda^\alpha) = \text{Crit}(f) \subset U_{1-\varepsilon_0}. \quad (3.2.3)$$

On notera $\boxed{\tilde{U}}$ ces orbites.

Comme on suppose que $\mathcal{S}(\Sigma)$ est non dégénéré, le hamiltonien H_λ est transversalement non dégénéré hors de $U_{1-\nu}$. La proposition 2.3.12 montre qu'on peut maintenant choisir une fonction k_λ à support dans $S^1 \times U^{1, 1+\nu}$ telle que, pour δ assez petit, toutes les orbites 1-périodiques non constantes de

$$H_{\lambda, \delta}^\alpha = H_\lambda^\alpha + \delta k_\lambda \quad (3.2.4)$$

sont non dégénérées et sont des perturbations $\gamma_\pm$ des orbites 1-périodiques $\gamma \in \boxed{\partial_+ U}$ de H_λ , qui vérifient

$$A_{H_{\lambda, \delta}^\alpha}(\gamma_\pm) = A_{H_\lambda}(\gamma) \mp \delta.$$

On notera $\boxed{\tilde{\partial}_+ U}$ ces orbites: pour δ assez petit, leur action sera encore dans $]T_0, \lambda[$. On aura alors pour tout $b \geq a$:

$$\mathcal{P}^{[a, b]}(H_{\lambda, \delta}^\alpha) = \boxed{\tilde{U}} \cup \boxed{\tilde{\partial}_+ U} \quad (3.2.5)$$

et le hamiltonien $H_{\lambda, \delta}^\alpha$ est donc admissible pour $S_*^{[a, b]}(U)$.

On s'intéresse maintenant aux perturbations génériques de J_λ . La proposition 2.3.8 implique qu'il suffit de perturber J_λ dans $U^{[1-2\varepsilon_0, 1-\varepsilon_0]}$ pour obtenir une structure presque complexe J_λ^α telle que toutes les trajectoires de Floer entre orbites de type $\boxed{\tilde{U}}$ (les points critiques de f) soient génériques. De plus,

d'après le théorème 8.1 de [SZ92], on peut choisir cette perturbation de telle sorte que le flot du gradient $\nabla_{J_\lambda^\alpha} f$ soit de type Morse-Smale, c'est à dire que les variétés stable et instable s'intersectent transversalement. D'après la remarque 2.3.16, on aura alors, en se fixant une fonction décroissante $\alpha(\lambda)$ de telle sorte que la famille $H_\lambda^{\alpha(\lambda)}$ soit croissante (par rapport à λ)

$$S_k^{[a,b]}(U) = \lim_{\rightarrow} HF_k^{[a,b]}(H_\lambda^\alpha, J_\lambda^\alpha) \text{ pour } -\infty < a \leq b < T_0. \quad (3.2.6)$$

De même, d'après la proposition 2.3.8, il suffit de perturber J_λ dans $U^{[1-2\varepsilon_0, 1+\nu]}$ pour obtenir une structure presque complexe $J_{\lambda,\delta}^\alpha$ telle que toutes les trajectoires de Floer entre les orbites périodiques de $H_{\lambda,\delta}^\alpha$ de type $\boxed{\tilde{U}}$ ou $\boxed{\tilde{\partial}_+ U}$ sont génériques. On a donc (en se fixant des fonctions décroissantes $\alpha(\lambda)$ et $\delta(\lambda)$ tendant vers 0 pour avoir une famille croissante de hamiltoniens $H_{\lambda,\delta(\lambda)}^{\alpha(\lambda)}$)

$$S_k^{[a,b]}(U) = \lim_{\rightarrow} HF_k^{[a,b]}(H_{\lambda,\delta}^\alpha, J_{\lambda,\delta}^\alpha) \text{ pour } -\infty < a \leq b \leq +\infty. \quad (3.2.7)$$

Les point cruciaux sont les

Lemme 3.2.1 *On se fixe $-\infty < a \leq b \leq +\infty$. Pour λ assez grand, si $x, y \in \mathcal{P}^{[a,b]}(H_{\lambda,\delta}^\alpha)$ et $u \in \mathcal{M}(x, y, J_\lambda^\alpha, H_{\lambda,\delta}^\alpha)$, alors $u(Z) \subset U_{1+\nu}$.*

Lemme 3.2.2 *On se fixe $-\infty < a \leq b < T_0$. Pour λ assez grand, si $x, y \in \mathcal{P}^{[a,b]}(H_\lambda^\alpha)$ et si $u \in \mathcal{M}(x, y, J_\lambda^\alpha, H_\lambda^\alpha)$, alors $u(Z) \subset U_{1-\varepsilon_0}$.*

Démonstrations: Supposons qu'une trajectoire de $(H_{\lambda,\delta}^\alpha, J_{\lambda,\delta}^\alpha)$ ou de $(H_\lambda^\alpha, J_\lambda^\alpha)$ sorte de $U_{1+\nu}$. Comme

$$(H_{\lambda,\delta}^\alpha, J_{\lambda,\delta}^\alpha) = (H_\lambda^\alpha, J_\lambda^\alpha) = (H_\lambda, J_\lambda) \text{ hors de } S^1 \times U_{1+\nu}$$

le lemme 3.1.2 implique alors:

$$\frac{1}{2}C_1(J_\xi)B(\lambda) \leq (A_{H_{\lambda,\delta}^\alpha}(x) - A_{H_{\lambda,\delta}^\alpha}(y)) \leq (1+\nu)\lambda + \delta - a$$

en raison de (3.1.8). Mais on a toujours

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{B(\lambda)}{\lambda} = +\infty$$

ce qui est contradictoire pour λ suffisamment grand, d'où le lemme 3.2.1. Supposons maintenant $u \in \mathcal{M}(x, y, J_\lambda^\alpha, H_\lambda^\alpha)$ avec

$$x, y \in \text{Crit}(f) \subset U_{1-\varepsilon_0}.$$

On sait déjà d'après ce qui précède que $u(Z) \subset U_{1+\nu}$. Mais comme

$$(H_\lambda^\alpha, J_\lambda^\alpha) = (H_\lambda, J_\lambda) \text{ hors de } S^1 \times U_{1-\varepsilon_0}$$

la paire $(H_\lambda^\alpha, J_\lambda^\alpha)$ est de contact dans $U^{[1-\varepsilon_0, 1+\nu]}$. Le lemme 1.3.9 implique que u ne peut pas être tangente intérieurement à Σ_S dans cette région. Comme ses extrémités sont dans $U_{1-\varepsilon_0}$, le lemme 3.2.2 est prouvé.

3.2.2 Homologie symplectique “intrinsèque”

On peut maintenant donner une définition “intrinsèque” de l’homologie symplectique (voir [Vit] où le point de vue est “cohomologique”, c’est à dire que le sens des trajectoires est l’inverse du nôtre, et [CFH95] pour une construction voisine). L’adjectif “intrinsèque” signifie ici non pas qu’elle ne dépend que de la variété symplectique (U, ω_0) , mais qu’elle ne dépend que de la variété à bord $(\bar{U}, \omega_0)$ (voir la section 5 de [CFH95]). On considère la variété symplectique

$$\hat{U} = U \cup U^{[1, +\infty[} . \quad (3.2.8)$$

On considère les paires (K, J) qui vérifient, pour un certain $S_0 > 1$

- $K(t, z) = k_\infty \tau(z)$ dans $S^1 \times U^{[S_0, +\infty[}$ avec $k_\infty \notin \mathcal{S}(\partial U)$
- $K(t, z) < 0$ si $z \in U$
- J est standard dans $U^{[S_0, +\infty[}$

et on les ordonne selon $\prec$ défini comme précédemment par

$$(K_1, J_1) \prec (K_2, J_2) \Leftrightarrow K_1 \leq K_2 \text{ sur } S^1 \times \hat{U} . \quad (3.2.9)$$

La condition $k_\infty \notin \mathcal{S}(\partial U)$ implique que les orbites 1-périodiques de K sont situées dans un compact de $\hat{U}$, et le principe du maximum (lemme 1.3.9) implique que les trajectoires de Floer restent dans ce compact. On peut donc encore définir $HF_k^{[a, b]}(K, J)$ avec les mêmes propriétés fonctorielles (en particulier les mêmes morphismes de monotonie qu’en 2.3.5), et pour $-\infty < a < b < +\infty$

$$HF_k^{[a, b]}(U) = \lim_{\rightarrow} HF_k^{[a, b]}(K, J) . \quad (3.2.10)$$

Cette construction est possible dès que ∂U est de type contact, c’est à dire que le champ η vérifiant (1.1.2) n’a besoin d’être défini qu’au voisinage de ∂U .

Remarque 3.2.3 *Il résulte de la section 2.2.1 que pour $R > 0$:*

$$HF_k^{[a, b]}(B^{2n}(R)) \equiv S_k^{[a, b]}(B^{2n}(R))$$

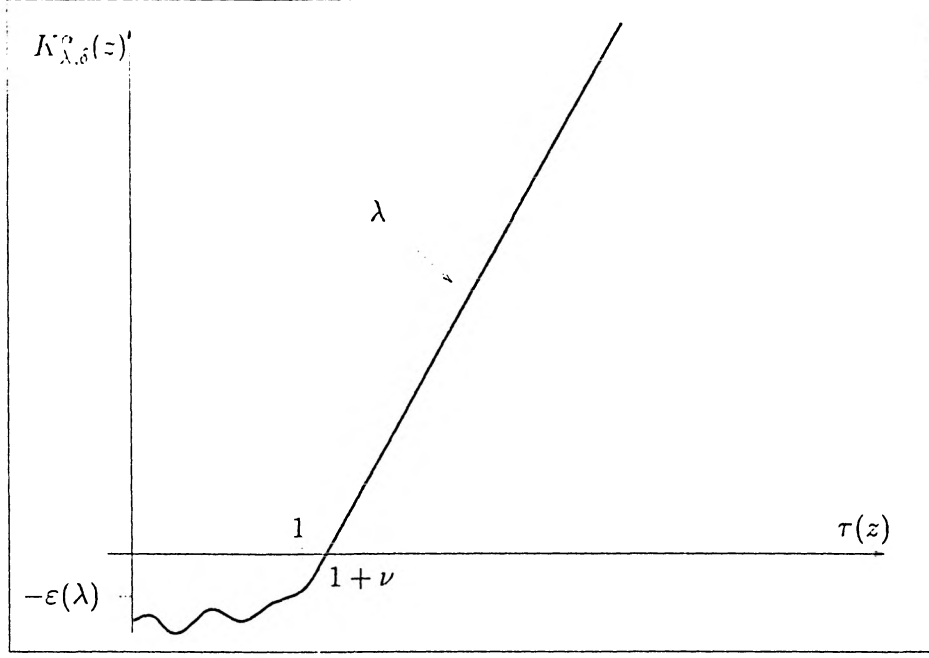
puisque l’on considère les mêmes paires admissibles.

Si U est de type contact restreint, on modifie la famille cofinale définie précédemment pour obtenir une famille cofinale “intrinsèque” (c’est à dire définie sur $S^1 \times \hat{U}$). On considère pour $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ le hamiltonien $K_{\lambda, \delta}^\alpha$ de la figure 3.8. Il est défini par

- $K_{\lambda, \delta}^\alpha = H_{\lambda, \delta}^\alpha$ dans $S^1 \times U_A$
- $K_{\lambda, \delta}^\alpha(t, z) = \lambda(\tau(z) - A) + h_\lambda(A)$ si $z \notin U_A$.

On définit $\tilde{J}_{\lambda, \delta}^\alpha$ par

- $\tilde{J}_{\lambda, \delta}^\alpha = J_{\lambda, \delta}^\alpha$ dans $S^1 \times U_A$

FIG. 3.8 – Hamiltonien intrinsèque $K_{\lambda, \delta}^{\alpha}$

$$- \tilde{J}_{\lambda, \delta}^{\alpha}(t, z) = \tilde{J}_{\varepsilon}(z) \text{ si } z \notin U_A .$$

et on obtient ainsi une famille cofinale générique, d'où par définition

$$HF_k^{[a, b]}(U) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} HF_k^{[a, b]}(K_{\lambda, \delta}^{\alpha}, \tilde{J}_{\lambda, \delta}^{\alpha}) \text{ pour } -\infty < a < b < +\infty . \quad (3.2.11)$$

On définit de la même façon par “troncature” de $(H_{\lambda}^{\alpha}, J_{\lambda}^{\alpha})$ une famille $(K_{\lambda}^{\alpha}, \tilde{J}_{\lambda}^{\alpha})$ pour laquelle

$$HF_k^{[a, b]}(U) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} HF_k^{[a, b]}(K_{\lambda}^{\alpha}, \tilde{J}_{\lambda}^{\alpha}) \text{ pour } -\infty < a < b < T_0 . \quad (3.2.12)$$

Les limites (3.2.11) et (3.2.12) peuvent en fait être renforcés en le

Lemme 3.2.4 Soient $-\infty < a < b < +\infty$ avec $a, b \notin S(\Sigma)$. Pour λ suffisamment grand, le morphisme de limite inductive

$$M(K_{\lambda, \delta}^{\alpha}, \tilde{J}_{\lambda, \delta}^{\alpha}) : HF_k^{[a, b]}(K_{\lambda, \delta}^{\alpha}, \tilde{J}_{\lambda, \delta}^{\alpha}) \rightarrow HF_k^{[a, b]}(U) \quad (3.2.13)$$

est un isomorphisme. De même, pour $-\infty < a < b < T_0$, le morphisme

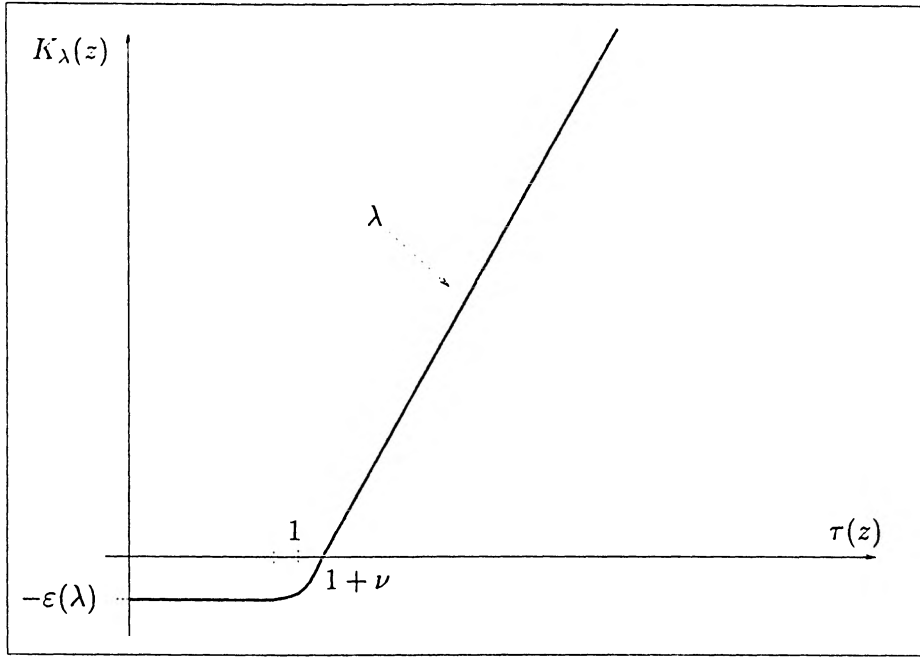
$$M(K_{\lambda}^{\alpha}, \tilde{J}_{\lambda}^{\alpha}) : HF_k^{[a, b]}(K_{\lambda}^{\alpha}, \tilde{J}_{\lambda}^{\alpha}) \rightarrow HF_k^{[a, b]}(U) \quad (3.2.14)$$

est un isomorphisme.

Ce lemme est un corollaire immédiat du

Lemme 3.2.5 Soient $-\infty < a < b < +\infty$ avec $a, b \notin S(\Sigma)$. Pour λ_1 suffisamment grand et $\lambda_2 > \lambda_1$, le morphisme de monotonie

$$HF_k^{[a, b]}(K_{\lambda_1, \delta_1}^{\alpha_1}, \tilde{J}_{\lambda_1, \delta_1}^{\alpha_1}) \xrightarrow{m(K_1, K_2)} HF_k^{[a, b]}(K_{\lambda_2, \delta_2}^{\alpha_2}, \tilde{J}_{\lambda_2, \delta_2}^{\alpha_2}) \quad (3.2.15)$$

FIG. 3.9 – Hamiltonien K_λ

est un isomorphisme. De même, pour $-\infty < a < b < T_0$, le morphisme

$$HF_k^{[a,b]}(K_{\lambda_1}^{\alpha_1}, \tilde{J}_{\lambda_1}^{\alpha_1}) \xrightarrow{m(K_1, K_2)} HF_k^{[a,b]}(K_{\lambda_2}^{\alpha_2}, \tilde{J}_{\lambda_2}^{\alpha_2}) \quad (3.2.16)$$

est un isomorphisme.

Démonstration: On considère deux valeurs $\lambda_2 > \lambda_1 > b$. On se fixe également $r > 0$ tel que

$$([\lambda_1 - r, \lambda_1 + r] \cup [\lambda_2 - r, \lambda_2 + r]) \cap \mathcal{S}(\Sigma) = \emptyset.$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, on considère le hamiltonien K_λ de la figure 3.9: on ne suppose pas cette fois $\lambda \notin \mathcal{S}(\Sigma)$, mais on fait dans $\hat{U}$ la même construction qu'en 3.1.2: on considère une fonction $h_\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ telle que

- $h_\lambda(S) = -\varepsilon(\lambda)$ si $S \in [0, 1 - \nu(\lambda)]$
- h_λ est convexe sur $[1 - \nu(\lambda), 1 + \nu(\lambda)]$
- $h_\lambda(1) < 0$ et $h'_\lambda(1) = T_0/2$
- $h_\lambda(S) = \lambda(S - 1 - \nu(\lambda))$ si $S > 1 + \nu(\lambda)$.

On définit maintenant $K_\lambda \in C^\infty(\hat{U})$ (voir figure 3.3) par

- $K_\lambda(z) = -\varepsilon(\lambda)$ si $z \in U_{1-\varepsilon_0}$
- $K_\lambda = h_\lambda \circ \tau$ sur $U^{[1-\varepsilon_0, +\infty[}$.

C'est à dire que si λ fait partie de notre famille cofinale, on obtient K_λ à partir de H_λ comme précédemment par "troncature". En plus des orbites périodiques transversalement non dégénérées $\boxed{U}$ et $\boxed{\partial_+ U}$ étudiées précédemment, pour $\lambda \in \mathcal{S}(\Sigma)$, le hamiltonien K_λ présente une famille d'orbites 1-périodiques à l'infini

$$\gamma_0^S = \{S\} \times \gamma_0 \text{ pour } S \geq 1 + \nu(\lambda)$$

où γ_0 est la caractéristique fermée de Σ d'aire λ . Comme

$$K_\lambda = \lambda(\tau - 1 - \nu(\lambda)) \text{ pour } S \geq 1 + \nu(\lambda)$$

l'action de cette famille d'orbites périodiques est constante, avec

$$A_{K_\lambda}(\gamma_0^S) = \lambda(1 + \nu(\lambda)) .$$

On peut alors faire exactement la même construction que précédemment, pour obtenir un hamiltonien $K_{\lambda,\delta}^\alpha$ dont toutes les orbites 1-périodiques d'action inférieure à λ soient non dégénérées. On peut de plus choisir des fonctions $\alpha(\lambda)$ et $\delta(\lambda)$ telles que

$$\tilde{K}_\lambda(t, z) := K_{\lambda,\delta(\lambda)}^{\alpha(\lambda)}(t, z)$$

vérifie

$$\tilde{K}_{\lambda_1} = K_{\lambda_1,\delta_1}^{\alpha_1}, \tilde{K}_{\lambda_2} = K_{\lambda_2,\delta_2}^{\alpha_2} \text{ et } \frac{\partial \tilde{K}_\lambda}{\partial \lambda}(t, z) \geq 0 .$$

On peut alors construire une homotopie croissante $L : Z \times \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}$ entre $K_{\lambda_1,\delta_1}^{\alpha_1}$ et $K_{\lambda_2,\delta_2}^{\alpha_2}$ telle que

$$L(s, t, z) = \tilde{K}_s(z) \text{ pour } \lambda_1 + r < s < \lambda_2 - r$$

qui vérifiera

$$L(s, t, z) = \theta(s)\tau(z) \text{ pour } z \notin U_{S_0}$$

avec la condition (analogue à (2.3.20))

$$\theta(s) \in \mathcal{S}(\Sigma) \Rightarrow \theta'(s) > 0 . \quad (3.2.17)$$

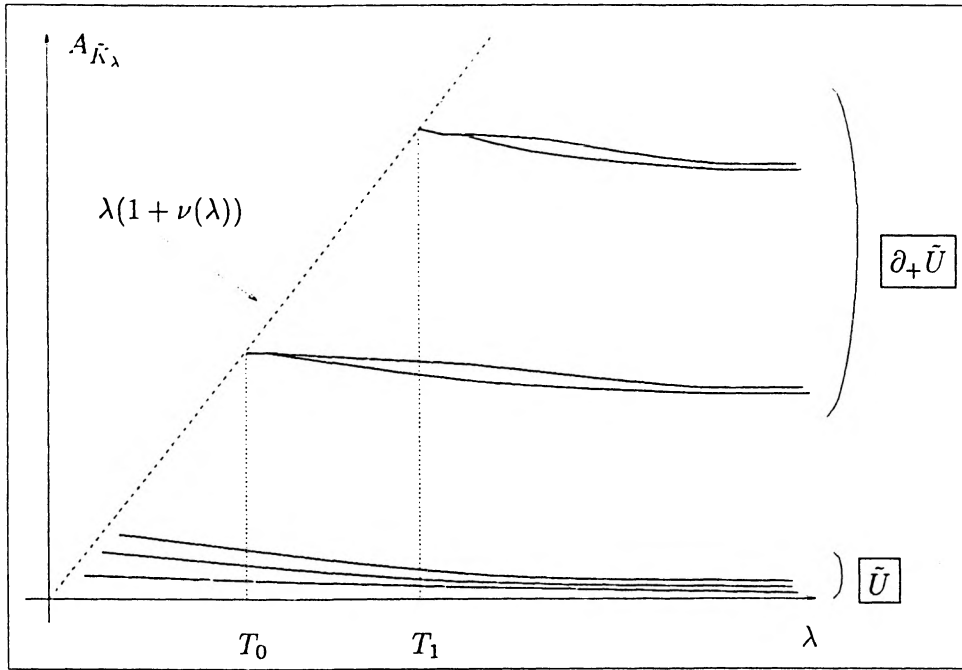
On construit également une homotopie $\hat{J}$ standard hors de U_{S_0} entre $\tilde{J}_{\lambda_1}^{\alpha_1}$ et $\tilde{J}_{\lambda_2}^{\alpha_2}$. Après reparamétrage, l'"homotopie à croissance lente" associée

$$L_c(s, t, z) = L\left(\frac{s}{c}, t, z\right) \text{ et } \hat{J}_c(s, t, z) = \hat{J}\left(\frac{s}{c}, t, z\right)$$

vérifiera encore la condition (3.2.17). Une telle "homotopie à croissance lente" va nous fournir le morphisme de monotonie

$$\tilde{\Psi}_{L,\hat{J}} : HF_k^{[a,b]}(K_{\lambda_1,\delta_1}^{\alpha_1}, \tilde{J}_{\lambda_1}^{\alpha_1}) \rightarrow HF_k^{[a,b]}(K_{\lambda_2,\delta_2}^{\alpha_2}, \tilde{J}_{\lambda_2}^{\alpha_2}) .$$

De façon identique à la proposition 2.3.14, il suffit de montrer que le diagramme de Cerf de L dans l'intervalle $[a, b]$ est trivial pour conclure que $\tilde{\Psi}_{L,\hat{J}}$ est un isomorphisme. On étudie donc le diagramme de Cerf de $\tilde{K}_\lambda$ (voir figure 3.10). Toutes les branches sont au voisinage de $\{0\} \cup \mathcal{S}(\Sigma)$ pour λ assez grand, et les

FIG. 3.10 – Diagramme de Cerf de L

seules bifurcations de ce diagramme sont les naissances d'orbites périodiques pour $\lambda \in \mathcal{S}(\Sigma)$ (voir figure 3.10). Elles ont lieu au niveau

$$\lambda(1 + \nu(\lambda)) > \lambda_1 > b$$

donc $[a, b]$ ne contient aucune bifurcation. De plus, la condition $a, b \notin \mathcal{S}(\Sigma)$ entraîne qu'une branche associée à une orbite de type $\tilde{\partial}_+ U$ ne peut pas traverser $\{a, b\}$ si λ_1 est assez grand. Comme l'action des orbites de type $\tilde{U}$ est décroissante et tend vers 0, les branches associées ne peuvent pas non plus traverser $\{a, b\}$ pour λ_1 assez grand. Par conséquent, le diagramme de Cerf $\tilde{K}_\lambda$ dans l'intervalle $[a, b]$ est trivial, donc celui de L l'est également. On en déduit

$$HF_k^{[a, b]}(K_{\lambda_1, \delta_1}^{\alpha_1}, \bar{J}_{\lambda_1}^{\alpha_1}) \xrightarrow{\sim} HF_k^{[a, b]}(K_{\lambda_2, \delta_2}^{\alpha_2}, \bar{J}_{\lambda_2}^{\alpha_2})$$

ce qui prouve (3.2.15). Une démonstration identique montre (3.2.16).

3.2.3 Unicité de l'homologie symplectique

Nous allons montrer ici la

Proposition 3.2.6 *Si U est de type contact restreint et si $-\infty < a \leq b < +\infty$ vérifient $a, b \notin \mathcal{S}(\Sigma)$, alors*

$$S_k^{[a, b]}(U) = HF_k^{[a, b]}(U)$$

C'est à dire que l'homologie symplectique dans $\mathbb{C}^n$ coïncide avec l'homologie symplectique "intrinsèque" définie ci-dessus. On part des familles cofinales croissantes $(H_{\lambda,\delta}^\alpha, J_{\lambda,\delta}^\alpha)$ et $(K_{\lambda,\delta}^\alpha, \tilde{J}_{\lambda,\delta}^\alpha)$ avec $\alpha = \alpha(\lambda)$ et $\delta = \delta(\lambda)$ construites ci-dessus. Commençons par le

Lemme 3.2.7 *Soient $-\infty < a \leq b \leq +\infty$, avec $a, b \notin S(\Sigma)$. Pour λ assez grand*

$$HF_k^{[a,b]}(H_{\lambda,\delta}^\alpha, J_{\lambda,\delta}^\alpha) = HF_k^{[a,b]}(K_{\lambda,\delta}^\alpha, \tilde{J}_{\lambda,\delta}^\alpha) .$$

Démonstration: Les orbites 1-périodiques de $K_{\lambda,\delta}^\alpha$ sont les orbites $\boxed{\tilde{U}}$ et $\boxed{\tilde{\partial}_+ U}$, c'est à dire $\mathcal{P}^{[a,b]}(H_{\lambda,\delta}^\alpha)$ pour λ assez grand. On a donc pour λ assez grand

$$\mathcal{P}^{[a,b]}(H_{\lambda,\delta}^\alpha) = \mathcal{P}^{[a,b]}(K_{\lambda,\delta}^\alpha) .$$

En outre, d'après le lemme 3.2.1, les trajectoires de Floer associées à $(H_{\lambda,\delta}^\alpha, J_{\lambda,\delta}^\alpha)$ restent dans $U_{1+\nu}$, et sont donc des trajectoires de Floer de $(K_{\lambda,\delta}^\alpha, \tilde{J}_{\lambda,\delta}^\alpha)$. Comme de plus ces dernières ne peuvent pas sortir de $U_{1+\nu}$ d'après le principe du maximum, on a

$$\mathcal{M}(x, y, J_{\lambda,\delta}^\alpha, H_{\lambda,\delta}^\alpha) = \mathcal{M}(x, y, \tilde{J}_{\lambda,\delta}^\alpha, K_{\lambda,\delta}^\alpha) \text{ pour } x, y \in \mathcal{P}^{[a,b]}(H_{\lambda,\delta}^\alpha)$$

ce qui prouve le lemme. Il en résulte

Lemme 3.2.8 *Soient $-\infty < a < b < +\infty$ avec $a, b \notin S(\Sigma)$. Pour λ_1 suffisamment grand et $\lambda_2 > \lambda_1$, le morphisme de monotonie*

$$HF_k^{[a,b]}(H_{\lambda_1,\delta_1}^{\alpha_1}, J_{\lambda_1}^{\alpha_1}) \xrightarrow{m(H_1, H_2)} HF_k^{[a,b]}(H_{\lambda_2,\delta_2}^{\alpha_2}, J_{\lambda_2}^{\alpha_2})$$

est un isomorphisme.

Démonstration: De façon analogue à la preuve du lemme 3.2.7, il résulte des preuves du théorème 12 de [FH94] et du lemme de "slow monotone isotopy" (page 108) de [CFH95] qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} HF_k^{[a,b]}(K_{\lambda_1,\delta_1}^{\alpha_1}, \tilde{J}_{\lambda_1}^{\alpha_1}) & \xrightarrow{m(K_1, K_2)} & HF_k^{[a,b]}(K_{\lambda_2,\delta_2}^{\alpha_2}, \tilde{J}_{\lambda_2}^{\alpha_2}) \\ \downarrow = & & \downarrow = \\ HF_k^{[a,b]}(H_{\lambda_1,\delta_1}^{\alpha_1}, J_{\lambda_1}^{\alpha_1}) & \xrightarrow{m(H_1, H_2)} & HF_k^{[a,b]}(H_{\lambda_2,\delta_2}^{\alpha_2}, J_{\lambda_2}^{\alpha_2}) \end{array} \quad (3.2.18)$$

En effet, en considérant des "homotopies à croissance lente" entre $H_{\lambda_1,\delta_1}^{\alpha_1}$ et $H_{\lambda_2,\delta_2}^{\alpha_2}$, le lemme 3.1.2 permet, comme au lemme 3.2.1, de montrer que les solutions de (2.3.24) (voir section 2.3.5) ne peuvent pas sortir de U_A . On obtient donc les mêmes trajectoires de Floer généralisées, et donc les mêmes morphismes de monotonie pour les paires relatives à $\mathbb{C}^n$ et pour les paires intrinsèques. Le lemme 3.2.8 résulte donc des lemmes 3.2.5 et 3.2.7. On en déduit comme corollaire immédiat que (3.2.7) se renforce en la

Proposition 3.2.9 *Soient $-\infty < a < b < +\infty$ avec $a, b \notin S(\Sigma)$. Pour λ suffisamment grand, le morphisme de limite inductive*

$$M(H_{\lambda,\delta}^\alpha, J_\lambda^\alpha) : HF_k^{[a,b]}(H_{\lambda,\delta}^\alpha, J_\lambda^\alpha) \rightarrow S_k^{[a,b]}(U)$$

est un isomorphisme.

La proposition 3.2.6 découle alors des propositions 3.2.4 et 3.2.9 et du lemme 3.2.7.

Remarque 3.2.10 Nous n'avons pour l'instant considéré que les familles cofinales croissantes $H_{\lambda, \delta(\lambda)}^{\alpha(\lambda)}$, $K_{\lambda, \delta(\lambda)}^{\alpha(\lambda)}$ et $K_{\lambda}^{\alpha(\lambda)}$ pour $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$. Par le même argument qu'au lemme 3.2.5, les propositions 3.2.4 et 3.2.9 ainsi que le lemme 3.2.7 restent bien entendu vrais pour toutes les paires $(H_{\lambda, \delta}^{\alpha}, J_{\lambda, \delta}^{\alpha})$, $(K_{\lambda, \delta}^{\alpha}, \tilde{J}_{\lambda, \delta}^{\alpha})$ et $(K_{\lambda}^{\alpha}, \tilde{J}_{\lambda}^{\alpha})$ avec

$$\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}, \quad 0 < \alpha < \alpha(\lambda), \quad 0 < \delta < \delta(\lambda).$$

3.2.4 Homologie au voisinage de 0

Nous allons prouver ici la

Proposition 3.2.11 Si U est de type contact restreint et si $-\infty < a \leq 0 < b < T_0$, alors

$$S_k^{[a, b]}(U) \simeq H_{n+k}(U, \partial U).$$

On considère pour cela les paires “admissibles au voisinage de 0” $(H_{\lambda}^{\alpha}, J_{\lambda}^{\alpha})$ et $(K_{\lambda}^{\alpha}, \tilde{J}_{\lambda}^{\alpha})$ construites ci-dessus. Une démonstration identique à celle du lemme 3.2.7 montre le

Lemme 3.2.12 Soient $-\infty < a \leq b < T_0$. Pour λ assez grand

$$HF_k^{[a, b]}(H_{\lambda}^{\alpha}, J_{\lambda}^{\alpha}) = HF_k^{[a, b]}(K_{\lambda}^{\alpha}, \tilde{J}_{\lambda}^{\alpha}).$$

Il en découle comme précédemment à l'aide du lemme 3.2.4 et de la remarque 3.2.10 que (3.2.6) se renforce en la

Proposition 3.2.13 Soient $-\infty < a < b < T_0$. Pour λ suffisamment grand, et $\alpha < \alpha(\lambda)$, le morphisme de limite inductive

$$M(H_{\lambda}^{\alpha}, J_{\lambda}^{\alpha}) : HF_k^{[a, b]}(H_{\lambda}^{\alpha}, J_{\lambda}^{\alpha}) \rightarrow S_k^{[a, b]}(U)$$

est un isomorphisme.

Démonstration de la proposition 3.2.11: Nous savons déjà (voir (3.2.1) et (3.2.3)) que pour λ assez grand

$$\mathcal{P}^{[a, T_0]}(H_{\lambda}^{\alpha}) = \boxed{\tilde{U}} = \text{Crit}(f) \subset U_{1-\varepsilon_0} \quad (3.2.19)$$

avec

$$\mu(x, H_{\lambda}^{\alpha}) = n - i_M(x, f) \text{ si } x \in \text{Crit}(f). \quad (3.2.20)$$

En outre, d'après le lemme 3.2.2, pour λ assez grand, si $x, y \in \mathcal{P}^{[a, b]}(H_{\lambda}^{\alpha})$ et si $u \in \mathcal{M}(x, y, J_{\lambda}^{\alpha}, H_{\lambda}^{\alpha})$, alors $u(Z) \subset U_{1-\varepsilon_0}$. Les trajectoires de Floer que l'on considère ici se situent donc toutes dans la région où $H_{\lambda}^{\alpha} = -\varepsilon(\lambda) + \alpha f$ est

C^2 -petit. D'après le théorème 7.3 de [SZ92], elles sont donc indépendantes de t et vérifient l'équation

$$\frac{d}{ds}u = \alpha \nabla_{J_\lambda^\alpha} f . \quad (3.2.21)$$

De plus, par construction de J_λ^α , le flot de gradient (3.2.21) est de type Morse-Smale. Le complexe de Floer $C_k^{[a,b]}(H_\lambda^\alpha, J_\lambda^\alpha)$ est donc constitué des points critiques de f d'indice de Morse $n - k$, et l'opérateur ∂_k est obtenu en comptant modulo 2 les lignes de gradient de f allant d'un point d'indice de Morse $l = n - k$ à un point d'indice $l + 1$. De plus, le gradient de f pointe vers l'extérieur de U au voisinage de ∂U . Le complexe considéré est donc le complexe de Thom-Smale-Witten associé à f , et son homologie en degré l est $H_{2n-l}(U, \partial U)$ (puisque'il faut changer f en $-f$ pour obtenir une fonction coercitive, c'est à dire dont le gradient pointe vers l'intérieur au voisinage du bord). Il en résulte (voir [Sal90])

Lemme 3.2.14

$$HF_k^{[a,b]}(H_\lambda^\alpha, J_\lambda^\alpha) = H_{n+k}(U, \partial U)$$

et on en déduit la proposition 3.2.11 à l'aide de la proposition 3.2.13. On obtient comme corollaire la

Remarque 3.2.15 *On a montré que pour $a \leq 0 < b < T_0$ et λ assez grand, $C_k^{[a,b]}(H_\lambda^\alpha, J_\lambda^\alpha)$ est engendré par les points critiques de f d'indice de Morse $n - k$. Si on perturbe H_λ^α hors de U sans introduire d'orbite d'action dans $[a, b]$, on conservera cette propriété. Comme $HF_k^{[a,b]}(H_\lambda^\alpha, J)$ est indépendant du J générique et standard à l'infini choisi, le lemme 3.2.14 restera vrai après perturbation de J_λ^α et de H_λ^α . On aura en particulier pour λ assez grand et $\alpha < \alpha(\lambda)$, $\delta < \delta(\lambda)$*

$$HF_k^{[a,b]}(H_{\lambda,\delta}^\alpha, J_{\lambda,\delta}^\alpha) = H_{n+k}(U, \partial U)$$

et $C_k^{[a,b]}(H_{\lambda,\delta}^\alpha, J_{\lambda,\delta}^\alpha)$ est engendré par les points critiques de f d'indice de Morse $n - k$.

Chapitre 4

Applications de l'homologie symplectique locale d'un ouvert de type contact restreint

4.1 Capacité par homologie symplectique

Dans [FW94], les auteurs définissent une capacité symplectique c , grâce au calcul explicite de l'homologie symplectique des boules. Nous allons rappeler leurs définitions et leurs résultats, et nous verrons que, dans le cas où U est de type contact restreint, on peut la voir comme la limite de l'énergie d'une suite de trajectoires de Floer associées à la famille cofinale générique construite précédemment. Ce sont ces trajectoires de minmax qui nous fourniront une courbe holomorphe après passage à la limite.

4.1.1 Homologie symplectique des boules

On notera dans cette section

$$S_k^{[a,b]}(r) := S_k^{[a,b]}(B^{2n}(r)) .$$

Commençons par rappeler un lemme facile (voir [FW94], page 605)

Lemme 4.1.1 $S_k^{[\alpha^2 a, \alpha^2 b]}(\alpha U) = S_k^{[a,b]}(U)$ pour $\alpha > 0$

En effet, si (H, J) est une paire admissible et générique pour U , on définit

$$H_\alpha(t, z) = \alpha^2 H(t, \alpha^{-1} z) \text{ et } J(t, z) = J(t, \alpha^{-1} z)$$

qui est une paire admissible et générique pour αU . Le complexe de Floer de (H_α, J_α) s'obtient à partir de celui de (H, J) en prenant l'homothétie $z \mapsto \alpha z$ dans $\mathbb{C}^n$ et en multipliant la valeur de la fonctionnelle d'action par α^2 . Après passage à la limite inductive, on en déduit le lemme.

L'étude de l'homologie de Floer de hamiltoniens de la forme $H = h(|z|^2)$

(c'est à dire, dans notre terminologie, de hamiltoniens de contact pour $S^{2n-1}(1)$) fournit, dans [FW94], les résultats suivants

Lemme 4.1.2

$$\begin{aligned} S_n^{[a,b]}(r) &= \mathbb{Z}_2 \text{ si } -\infty < a \leq 0 < \pi r^2 < b < +\infty, & S_n^{[a,b]}(r) &= 0 \text{ sinon.} \\ S_{n+1}^{[a,b]}(r) &= \mathbb{Z}_2 \text{ si } 0 < a < \pi r^2 < b \leq +\infty, & S_{n+1}^{[a,b]}(r) &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Ceci résulte du corollaire 2 de [FW94] et du lemme 4.1.1.

L'inclusion $B^{2n}(r) \subset B^{2n}(R)$ pour $r \leq R$ fournit un morphisme de monotonie

$$S_n^{[0,\varepsilon]}(R) \xrightarrow{i_{R,r}} S_n^{[0,\varepsilon]}(r). \quad (4.1.1)$$

On a alors

Lemme 4.1.3 $i_{R,r}$ est un isomorphisme si $0 < \varepsilon < \pi r^2$.

Ce lemme est démontré page 596 (dans la preuve de la proposition 6) et page 598 (dans la preuve du théorème 1) dans [FW94].

Remarque 4.1.4 La proposition 3.2.11 implique que dans ce cas,

$$S_n^{[0,\varepsilon]}(R) = S_n^{[0,\varepsilon]}(r) = H_{2n}(B^{2n}, \partial B^{2n}).$$

On peut en fait voir $i_{R,r}$ comme l'application

$$H_{2n}(B^{2n}(R), \partial B^{2n}(R)) \rightarrow H_{2n}(B^{2n}(r), \partial B^{2n}(r))$$

induite par l'inclusion, qui est un isomorphisme, ce qui nous fournit une autre preuve de ce lemme.

L'ingrédient principal est ensuite le morphisme de monotonie

$$\Delta_{0,\varepsilon,b}(R) \rightarrow \Delta_{0,\varepsilon,b}(r)$$

donné par l'inclusion $B^{2n}(r) \subset B^{2n}(R)$. On en extrait en particulier le diagramme commutatif dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccc} S_{n+1}^{[0,b]}(R) & \longrightarrow & S_{n+1}^{[\varepsilon,b]}(R) & \xrightarrow{\delta_{n+1}^R} & S_n^{[0,\varepsilon]}(R) & \longrightarrow & S_n^{[0,b]}(R) \\ \downarrow & & \downarrow I_{R,r} & & \downarrow i_{R,r} & & \downarrow \\ S_{n+1}^{[0,b]}(r) & \longrightarrow & S_{n+1}^{[\varepsilon,b]}(r) & \xrightarrow{\delta_{n+1}^r} & S_n^{[0,\varepsilon]}(r) & \longrightarrow & S_n^{[0,b]}(r) \end{array} \quad (4.1.2)$$

On a alors (voir [FW94], proposition 6) le

Lemme 4.1.5 $I_{R,r}$ est un isomorphisme si $0 < a < \pi r^2 < \pi R^2 < b$

En effet, le diagramme (4.1.2) s'écrit alors en raison du lemme 4.1.2

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\delta_{n+1}^R} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \\ \downarrow & & \downarrow I_{R,r} & & \downarrow i_{R,r} & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\delta_{n+1}^r} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

Donc δ_{n+1}^R et δ_{n+1}^r sont des isomorphismes, et on conclut grâce au lemme 4.1.3.

4.1.2 Définition de c

Soit U un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}^n$. Pour $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 < \infty$, $b \geq \varepsilon_2$ et $k \in \mathbb{N}$, on a une application naturelle :

$$S_k^{[\varepsilon_1, b]}(U) \rightarrow S_k^{[\varepsilon_2, b]}(U) .$$

On obtient ainsi un système projectif permettant de définir :

$$S_k^{]0, b]}(U) = \varprojlim S_k^{[\varepsilon, b]}(U) \quad (4.1.3)$$

la limite projective étant prise sur les ε (tendant vers 0) tels que $0 < \varepsilon \leq b$. Le lemme 4.1.2 entraîne ([FW94], proposition 4)

Lemme 4.1.6 *Pour $0 < \pi r^2 < b$,*

$$S_{n+1}^{]0, b]}(r) \simeq \mathbb{Z}_2 .$$

On considère alors r_1 et r_2 tels que $0 < \varepsilon < \pi r_1^2 \leq \pi r_2^2 < b$: on dispose de l'isomorphisme du lemme 4.1.5

$$S_{n+1}^{[\varepsilon, b]}(B^{2n}(r_2)) \xrightarrow{I_{r_1, r_2}} S_{n+1}^{[\varepsilon, b]}(B^{2n}(r_1))$$

qui fournit, après passage à la limite (4.1.3) $\varepsilon \rightarrow 0$, un isomorphisme

$$S_{n+1}^{]0, b]}(r_2) \xrightarrow{\tilde{I}_{r_1, r_2}} S_{n+1}^{]0, b]}(r_1) . \quad (4.1.4)$$

On a construit un système inductif qui leur permet de définir l'homologie symplectique d'un point comme la limite pour $r \rightarrow 0$ de l'homologie symplectique d'une boule de rayon r . On a en particulier, comme toutes les flèches sont des isomorphismes de $\mathbb{Z}_2$

$$\Theta = \varinjlim S_{n+1}^{]0, b]}(B^{2n}(r)) \simeq \mathbb{Z}_2 \quad (4.1.5)$$

la limite inductive étant prise sur $0 < \pi r^2 < b$.

Pour $z \in U$, on considère un symplectomorphisme à support compact $\phi_z \in \mathcal{D}$ envoyant 0 sur z et $B^{2n}(r)$ dans U . On dispose ainsi d'une application :

$$\phi_z^* : S_{n+1}^{[\varepsilon, b]}(U) \rightarrow S_{n+1}^{[\varepsilon, b]}(B^{2n}(r))$$

et, après passage aux limites $\varepsilon \rightarrow 0$ puis $r \rightarrow 0$ d'un morphisme

$$\sigma_U^b : S_{n+1}^{]0, b]}(U) \rightarrow \Theta \quad (4.1.6)$$

qui, par transitivité du groupe des isotopies hamiltoniennes et par invariance par isotopie, ne dépend pas du $z \in U$ choisi. La capacité c est alors définie par

Définition 4.1.7 $c(U) = \inf \{ b / \sigma_U^b \text{ est surjectif} \} .$

Pour un ouvert non borné V , on définit

Définition 4.1.8 $c(V) = \sup \{ c(U) / U \text{ ouvert borné avec } U \subset V \} .$

Alors (voir [FW94], théorème 6)

Théorème 4.1.9 *c est une capacité relative.*

La croissance est due au fait que, si $B^{2n}(r) \subset U \subset V$, on a une factorisation due au morphisme de monotonie

$$\begin{array}{ccc} S_n^{[\varepsilon, b]}(V) & \xrightarrow{\quad} & S_n^{[\varepsilon, b]}(r) \\ & \searrow i_{U,V}^* & \nearrow \\ & S_n^{[\varepsilon, b]}(U) & \end{array}$$

induisant, après passage aux limites, une factorisation

$$\begin{array}{ccc} S_n^{[0, b]}(V) & \xrightarrow{\sigma_V^b} & \Theta \\ & \searrow i_{U,V}^* & \nearrow \sigma_U^b \\ & S_n^{[0, b]}(U) & \end{array}$$

Donc σ_V^b surjectif entraîne σ_U^b surjectif, ce qui implique $c(U) \leq c(V)$. Le lemme 4.1.1 entraîne $c(\alpha U) = \alpha^2 c(U)$ pour $\alpha > 0$. Pour $\phi \in \mathcal{D}$, l'isomorphisme $\phi_\#$ entre $S_n^{[\varepsilon, b]}(U)$ et $S_n^{[\varepsilon, b]}(\phi(U))$ implique $c(U) = c(\phi(U))$. Le calcul de l'homologie symplectique d'un ellipsoïde

$$E(r_1, \dots, r_n) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{k=1}^n \left| \frac{z_k}{r_k} \right|^2 < 1\}$$

avec $r_1 < \dots < r_n$ montre que

$$c(E(r_1, \dots, r_n)) = \pi r_1^2$$

ce qui implique la normalisation

$$c(B^{2n}(1)) = c(B^2(1) \times \mathbb{C}^{n-1}) = \pi .$$

Remarque 4.1.10 *Comme l'homologie symplectique requiert des objets standard à l'infini, on ne peut faire agir que $\mathcal{D}$, et on a uniquement invariance par symplectomorphisme ambiant: on ne peut donc ainsi définir qu'une capacité relative.*

4.1.3 Cas d'un ouvert de type contact restreint

On a de même une application naturelle pour $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$

$$S_k^{[0, \varepsilon_1]}(U) \rightarrow S_k^{[0, \varepsilon_2]}(U)$$

permettant de définir

$$S_k^0(U) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_k^{[0, \varepsilon]}(U) . \quad (4.1.7)$$

On suppose maintenant que U est de type contact restreint. La proposition 3.2.11 entraîne

$$S_k^0(U) = H_{n+k}(U, \partial U) \quad (4.1.8)$$

et en particulier

$$S_n^0(U) = H_{2n}(U, \partial U) = \mathbb{Z}_2$$

puisque l'on a supposé U connexe. On écrit le triangle d'homologie symplectique $\Delta_{0,\varepsilon,b}(U)$: on a en particulier l'homomorphisme naturel :

$$S_n^{[0,\varepsilon]}(U) \rightarrow S_n^{[0,b]}(U)$$

qui fournit, après passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, un homomorphisme :

$$H_{2n}(U, \partial U) \xrightarrow{i_U^b} S_n^{[0,b]}(U) . \quad (4.1.9)$$

D'autre part, on a le

Lemme 4.1.11 *Pour b assez grand, $i_U^b(1) = 0$.*

Démonstration: On considère $B^{2n}(r) \subset U \subset B^{2n}(R)$. Les morphismes de monotonie fournissent le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccc} S_{n+1}^{[0,b]}(R) & \longrightarrow & S_{n+1}^{[\varepsilon,b]}(R) & \xrightarrow{\delta} & S_n^{[0,\varepsilon]}(R) & \longrightarrow & S_n^{[0,b]}(R) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow i_R & & \downarrow \\ S_{n+1}^{[0,b]}(U) & \longrightarrow & S_{n+1}^{[\varepsilon,b]}(U) & \longrightarrow & S_n^{[0,\varepsilon]}(U) & \longrightarrow & S_n^{[0,b]}(U) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow i_r & & \downarrow \\ S_{n+1}^{[0,b]}(r) & \longrightarrow & S_{n+1}^{[\varepsilon,b]}(r) & \longrightarrow & S_n^{[0,\varepsilon]}(r) & \longrightarrow & S_n^{[0,b]}(r) \end{array} \quad (4.1.10)$$

Dans lequel $i_r \circ i_R = i_{R,r}$ est un isomorphisme pour $\varepsilon < \pi r^2$ d'après le lemme 4.1.3, donc i_R est un isomorphisme. Après passage à la limite projective $\varepsilon \rightarrow 0$, les deux premières lignes de (4.1.10) deviennent

$$\begin{array}{ccccccc} S_{n+1}^{[0,b]}(R) & \longrightarrow & S_{n+1}^{[0,b]}(R) & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & S_n^{[0,b]}(R) \\ \downarrow & & \downarrow & & \sim \downarrow \tilde{i}_R & & \downarrow \\ S_{n+1}^{[0,b]}(U) & \longrightarrow & S_{n+1}^{[0,b]}(U) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{i_U^b} & S_n^{[0,b]}(U) \end{array} \quad (4.1.11)$$

Pour $b > \pi R^2$, (4.1.11) se lit, d'après le lemme 4.1.2

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z}_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \sim \downarrow \tilde{i}_R & & \downarrow g \\ S_{n+1}^{[0,b]}(U) & \longrightarrow & S_{n+1}^{[0,b]}(U) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{i_U^b} & S_n^{[0,b]}(U) \end{array} \quad (4.1.12)$$

Comme les lignes sont exactes, δ est un isomorphisme, d'où $f(1) = 0$. Mais (4.1.12) commute, donc, comme $\tilde{i}_R$ est un isomorphisme,

$$i_U^b(1) = i_U^b(\tilde{i}_R(1)) = g(f(1)) = 0$$

ce qui prouve le lemme 4.1.11. On considère alors

Définition 4.1.12 $C(U) = \inf\{b/i_U^b(1) = 0\}$

et on a le

Lemme 4.1.13 Si U est de type contact restreint, $C(U) = c(U)$.

Démonstration: On considère $B^{2n}(r_1) \subset B(r) \subset U \subset B^{2n}(R)$. Les morphismes de monotonie fournissent le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
 S_{n+1}^{[0,b]}(R) & \longrightarrow & S_{n+1}^{[\varepsilon,b]}(R) & \longrightarrow & S_n^{[0,\varepsilon]}(R) & \longrightarrow & S_n^{[0,b]}(R) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow i_R & & \downarrow \\
 S_{n+1}^{[0,b]}(U) & \longrightarrow & S_{n+1}^{[\varepsilon,b]}(U) & \xrightarrow{\delta_U} & S_n^{[0,\varepsilon]}(U) & \longrightarrow & S_n^{[0,b]}(U) \\
 \downarrow & & \downarrow I_r & & \downarrow i_r & & \downarrow \\
 S_{n+1}^{[0,b]}(r) & \longrightarrow & S_{n+1}^{[\varepsilon,b]}(r) & \xrightarrow{\delta_r} & S_n^{[0,\varepsilon]}(r) & \longrightarrow & S_n^{[0,b]}(r) \\
 \downarrow & & \downarrow I_{r,r_1} & & \downarrow & & \downarrow \\
 S_{n+1}^{[0,b]}(r_1) & \longrightarrow & S_{n+1}^{[\varepsilon,b]}(r_1) & \longrightarrow & S_n^{[0,\varepsilon]}(r_1) & \longrightarrow & S_n^{[0,b]}(r_1)
 \end{array} \tag{4.1.13}$$

A nouveau, $i_r \circ i_R = i_{R,r}$ est un isomorphisme pour $\varepsilon < \pi r^2$ d'après le lemme 4.1.3, donc i_r est un isomorphisme. Après passage à la limite projective $\varepsilon \rightarrow 0$, les trois dernières lignes de (4.1.13) deviennent

$$\begin{array}{ccccccc}
 S_{n+1}^{[0,b]}(U) & \longrightarrow & S_{n+1}^{[0,b]}(U) & \xrightarrow{\delta_U} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{i_U^b} & S_n^{[0,b]}(U) \\
 \downarrow & & \downarrow I_r & & \sim \downarrow \tilde{i}_r & & \downarrow \\
 S_{n+1}^{[0,b]}(r) & \longrightarrow & S_{n+1}^{[0,b]}(r) & \xrightarrow{\delta_r} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & S_n^{[0,b]}(r) \\
 \downarrow & & \downarrow \tilde{I}_{r,r_1} & & \downarrow & & \downarrow \\
 S_{n+1}^{[0,b]}(r_1) & \longrightarrow & S_{n+1}^{[0,b]}(r_1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & S_n^{[0,b]}(r_1)
 \end{array}$$

Pour $b > \pi r^2$, $\tilde{I}_{r,r_1}$ est l'isomorphisme définissant Θ . On passe alors à la limite projective $r_1 \rightarrow 0$, ce qui fournit

$$\begin{array}{ccccccc}
 S_{n+1}^{[0,b]}(U) & \longrightarrow & S_{n+1}^{[0,b]}(U) & \xrightarrow{\delta_U} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{i_U^b} & S_n^{[0,b]}(U) \\
 \downarrow & & \downarrow I_r & & \sim \downarrow \tilde{i}_r & & \downarrow \\
 S_{n+1}^{[0,b]}(r) & \longrightarrow & S_{n+1}^{[0,b]}(r) & \xrightarrow{\delta_r} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & S_n^{[0,b]}(r) \\
 & & \sim \downarrow \tilde{I} & & & & \\
 & & \Theta & & & &
 \end{array}$$

avec

$$\sigma_u^b = \tilde{I} \circ \tilde{I}_r .$$

Mais d'après le lemme 4.1.2, $S_{n+1}^{[0,b]}(r) = 0$, et comme $S_{n+1}^{[0,b]}(r) = \mathbb{Z}_2$, il en résulte que δ_r est un isomorphisme. On a donc la situation suivante

$$\begin{array}{ccccc}
 S_{n+1}^{[0,b]}(U) & \xrightarrow{\delta_U} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{i_U^b} & S_n^{[0,b]}(U) \\
 \downarrow \sigma_U^b & & \sim \downarrow \tilde{i}_r & & \\
 0 \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\delta_r} & \mathbb{Z}_2 &
 \end{array} \quad (4.1.14)$$

Il en résulte que σ_U^b est surjectif si et seulement si δ_U est surjectif. Comme les lignes de (4.1.14) sont exactes, c'est équivalent à $i_U^b(1) = 0$, d'où le lemme 4.1.13.

4.1.4 Trajectoire de minmax

On a donc obtenu pour U de type contact restreint

$$b < c(U) \Rightarrow i_U^b(1) \neq 0 \text{ et } b < c(U) \Rightarrow i_U^b(1) = 0$$

avec pour $0 < \varepsilon < T_0$ et $\varepsilon \leq b$

$$S_n^{[0,\varepsilon]}(U) \xrightarrow{i_U^b} S_n^{[0,b]}(U) . \quad (4.1.15)$$

Nous allons maintenant traduire géométriquement cette propriété par l'existence d'une trajectoire de Floer. On considère pour cela la famille cofinale générique $(H_{\lambda,\delta}^\alpha, J_{\lambda,\delta}^\alpha)$ construite précédemment, avec

$$\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\} , 0 < \alpha < \alpha(\lambda) , 0 < \delta < \delta(\lambda) .$$

Pour alléger les notations, on note cette paire (H, J) . On considère alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 HF_n^{[0,\varepsilon]}(H, J) & \xrightarrow{i_H^b} & HF_n^{[0,b]}(H, J) \\
 \downarrow M(H,J) & & \downarrow M(H,J) \\
 S_n^{[0,\varepsilon]}(U) & \xrightarrow{i_U^b} & S_n^{[0,b]}(U)
 \end{array} \quad (4.1.16)$$

D'après la proposition 3.2.9 et la remarque 3.2.10, si $b \notin \mathcal{S}(\Sigma)$, les flèches verticales sont des isomorphismes pour λ assez grand. On sait d'autre part (voir le lemme 3.2.14 et la remarque 3.2.15) que si

$$\varepsilon(\lambda) + \alpha < \varepsilon$$

(ce qui est le cas pour λ assez grand), on a

$$HF_n^{[0, \varepsilon]}(H, J) = HM_0(f)$$

où l'homologie de Morse $HM_0(f)$ est engendrée par l'unique minimum local de f situé en z_0 , c'est à dire

$$HF_n^{[0, \varepsilon]}(H, J) = \mathbb{Z}_2 \cdot z_0 .$$

De plus, si $b > c(U)$, $b \notin \mathcal{S}(\Sigma)$ alors $i_U^b(1) = 0$. Pour $\lambda > \lambda_0(b)$, on aura donc $i_H^b(z_0) = 0$. On peut donc définir un **niveau de minmax** $c(H, J)$ par :

$$c(H, J) = \inf \{ b / i_H^b(z_0) = 0 \} \quad (4.1.17)$$

qui vérifiera

$$\limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} c(H_{\lambda, \delta}^\alpha, J_{\lambda, \delta}^\alpha) \leq c(U) .$$

De même, si $b < c(U)$, $b \notin \mathcal{S}(\Sigma)$ alors $i_U^b(1) \neq 0$. Pour $\lambda > \lambda_0(b)$, on aura donc $i_H^b(z_0) \neq 0$. Il en résulte

$$\liminf_{\lambda \rightarrow +\infty} c(H_{\lambda, \delta}^\alpha, J_{\lambda, \delta}^\alpha) \geq c(U)$$

d'où finalement

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} c(H_{\lambda, \delta}^\alpha, J_{\lambda, \delta}^\alpha) = c(U) . \quad (4.1.18)$$

D'autre part, la définition de $c(H, J)$ et celle de l'homologie de Floer entraînent:

$$b < c(H, J) \Rightarrow \exists x \in C_{n+1}^{[0, b]}(H) / \partial_{n+1} x = z_0$$

et

$$b > c(H, J) \Rightarrow \exists x \in C_{n+1}^{[0, b]}(H) / \partial_{n+1} x = z_0 .$$

On en déduit par l'absurde qu'il existe une orbite 1-périodique de H , qu'on note $\gamma_{H, J}$, qui vérifie :

- $\mu(\gamma_{H, J}) = n + 1$ et $A_H(\gamma_{H, J}) = c(H, J)$
- $\mathcal{M}(\gamma_{H, J}, z_0, H, J) \neq \emptyset$.

On appellera $\gamma_{H, J}$ l'**orbite de minmax** associée à (H, J) . On peut aussi choisir $u_{H, J} \in \mathcal{M}(\gamma_{H, J}, z_0, H, J)$, qu'on appellera une **trajectoire de minmax** associée à (H, J) (il n'y a pas a priori de choix canonique de $u_{H, J}$, on se contente de la choisir). L'application $u := u_{H, J} : Z \rightarrow \mathbb{C}^n$ vérifie donc:

$$\frac{\partial}{\partial s} u - J(u) \frac{\partial}{\partial s} u = -J(u) X_H(u) \text{ sur } Z \quad (4.1.19)$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s, t) = \gamma_{H, J}(t) \quad (4.1.20)$$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s, t) = z_0 \quad (4.1.21)$$

$$\Phi_{H, J}(u) = A_H(\gamma_{H, J}) - A_H(z_0) = c(H, J) - \varepsilon(\lambda) - \alpha . \quad (4.1.22)$$

En outre, les seules orbites d'action supérieure à ε de H sont les orbites de type $\boxed{\tilde{\partial}_+ U}$, donc

$$\gamma_{H,J} \in \boxed{\tilde{\partial}_+ U} \quad (4.1.23)$$

et $A_H(\gamma_{H,J})$ est uniformément majorée (par $c(U) + 1$, par exemple), donc le lemme 3.2.1 entraîne

$$u(Z) \subset U_{1+\nu} . \quad (4.1.24)$$

4.2 Construction d'une courbe holomorphe

4.2.1 Stratégie de la preuve du théorème

On va maintenant prouver l'inégalité

$$w(U) \leq c(U)$$

pour U de type contact restreint, en utilisant les constructions précédentes. D'après le théorème 4.1.9 et la proposition 1.2.15, il suffit en fait de prouver que, si $\mathcal{S}(\Sigma)$ est non dégénéré, ce qu'on supposera dans toute la suite,

$$w(U_{1-3\varepsilon_0}) \leq c(U)$$

étant donné que le ε_0 que nous avons utilisé peut être choisi arbitrairement petit. On va en fait montrer l'inégalité équivalente

$$\forall \varepsilon > 0, w(U_{1-3\varepsilon_0}) \leq c(U) + \varepsilon$$

c'est à dire (voir lemme 1.2.12) qu'étant donnée une structure presque complexe J sur $\mathbb{C}^n$ calibrée par ω_0 et un point z_0 de $U_{1-3\varepsilon_0}$, il existe une courbe J -holomorphe passant par z_0 et proprement appliquée dans $U_{1-2\varepsilon_0}$ d'aire inférieure à $c(U) + \varepsilon$.

Pour ce faire, on utilise la construction de la section 3.2.1 et on applique les résultats de la section 4.1.4 : on choisit λ assez grand pour que

$$c(H_{\lambda,\delta}^\alpha, J_{\lambda,\delta}^\alpha) - \varepsilon(\lambda) - \alpha \leq c(U) + \varepsilon \text{ si } 0 < \alpha < \alpha(\lambda), 0 < \delta < \delta(\lambda)$$

et on obtient une trajectoire de minmax $u_{\lambda,\delta}^\alpha$ d'énergie inférieure à $c(U) + \varepsilon$ reliant z_0 à une orbite de $\tilde{\partial}_+ U$, qui est par construction située hors de U . Par la suite, on fixe λ et on fait tendre α et δ vers 0 pour faire converger $u_{\lambda,\delta}^\alpha$ vers une trajectoire de Floer associée à (H_λ, J_λ) , dont l'intersection avec $U_{1-2\varepsilon_0}$ est une courbe J -holomorphe d'aire inférieure à $c(U) + \varepsilon$. Le point le plus délicat est de montrer qu'elle passe par z_0 et qu'elle est non constante (on ne peut plus appliquer le lemme 2.2.9, car la situation limite est complètement dégénérée dans $U_{1-\nu(\lambda)}$, et le théorème 2.2.4 ne fournit qu'une convergence locale).

Pour résoudre ce problème, nous allons commencer par "rigidifier" la situation au voisinage de z_0 (section 4.2.2), c'est à dire perturber J en une structure J^r constante dans $B^{2n}(z_0, r)$ pour nous placer dans une situation linéaire au voisinage de z_0 . On fait ensuite pour J^r la construction précédente, qui nous fournit une trajectoire de minmax,

Dans cette situation rigide, nous pourrions montrer (section 4.2.3) que pour λ fixé et (α, δ) tendant vers 0, la trajectoire de minmax ainsi obtenue converge vers une trajectoire de Floer u_λ^r associée à (H_λ, J_λ^r) reliant z_0 à une orbite de type $\partial_+ U$.

On utilisera ensuite (section 4.2.4) un argument du à Floer, Hofer et Viterbo (voir [FHV90], proposition 4.6) pour montrer que, lorsque r tend vers 0 (c'est à dire lorsqu'on "assouplit" la situation), la trajectoire u_λ^r converge globalement

vers une trajectoire de Floer u_λ associée à (H_λ, J_λ) reliant z_0 à une orbite de type $\boxed{\partial_+ U}$.

Il suffira ensuite (section 4.2.5) de “découper” u_λ , c’est à dire de considérer une valeur régulière τ_0 de $\tau \circ u_\lambda$ dans $]1 - 3\varepsilon_0, 1 - 2\varepsilon_0[$ et $v = u \cap U_{\tau_0}$, pour obtenir (après conjugaison dans Z) une courbe J -holomorphe ayant toutes les propriétés souhaitées.

4.2.2 Rigidification locale

On part d’une structure presque complexe J sur $\mathbb{C}^n$ calibrée par ω_0 , et on se donne $z_0 \in U_{1-3\varepsilon_0}$ et $\varepsilon > 0$. On peut supposer sans restriction

$$z_0 = 0 \text{ et } J(z_0) = i . \quad (4.2.1)$$

On se fixe pour commencer $\tilde{r} > 0$ tel que $B^{2n}(2\tilde{r}) \subset U_{1-3\varepsilon_0}$. On se donne une fonction $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

- $\rho(x) = 0$ si $x \leq 1$
- $\rho(x) = 1$ si $x \geq 4$
- $0 \leq \rho'(x) \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

et on pose pour $r \leq \tilde{r}$:

$$J^r(z) = J\left(z \cdot \rho\left(\frac{|z|^2}{r^2}\right)\right) .$$

C’est une structure presque complexe sur $\mathbb{C}^n$ calibrée par ω_0 qui vérifie

- $J^r = i$ dans $B^{2n}(r)$
- $J^r = J$ hors de $B^{2n}(2r)$.

On se donne aussi, comme à la section 3.2.1 une fonction $f \in C^\infty(U)$ telle que

- f est de Morse dans $U_{1-\varepsilon_0}$
- f possède un unique minimum local, atteint en 0 avec $f(z_0) = -1$
- tous les autres points critiques de f sont dans $U^{]1-2\varepsilon_0, 1-\varepsilon_0[}$
- $-1 \leq f(z) < 0$ pour tout $z \in U_{1-\varepsilon_0}$
- $f = \tau - (1 - \varepsilon_0)$ dans $U^{[1-\varepsilon_0, 1[}$.

On suppose de plus ici

$$f(z) = -1 + |z|^2 \text{ pour } z \in B^{2n}(r) . \quad (4.2.2)$$

Pour alléger les notations, on notera jusqu’à la section 4.2.4 J pour J^r , c’est à dire qu’on suppose

$$J(z) = i \text{ pour } z \in B^{2n}(r) . \quad (4.2.3)$$

On fait maintenant les constructions des sections 3.1 et 3.2.1 qui nous donnent des hamiltoniens H_λ , $H_{\lambda,\delta}$ et $H_{\lambda,\delta}^\alpha$, ainsi qu'une structure presque complexe J_λ qui est spéciale hors de $U_{1-\varepsilon_0}$ et coïncide avec J dans $U_{1-2\varepsilon_0}$, avec

$$\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}, \quad 0 < \alpha < \alpha(\lambda), \quad 0 < \delta < \delta(\lambda).$$

On peut ensuite perturber J_λ dans $U^{[1-2\varepsilon_0, 1+\nu]}$ pour obtenir une structure générique $J_{\lambda,\delta}^\alpha$ puisque toutes les trajectoires considérées sont forcées de traverser cette région. On aura donc en particulier

$$J_{\lambda,\delta}^\alpha(t, z) = i \text{ et } H_{\lambda,\delta}^\alpha(t, z) = -\varepsilon(\lambda) - \alpha + \alpha |z|^2 \text{ pour } z \in B^{2n}(r).$$

La section 4.1.4 nous fournit alors

- un nombre $c(H_{\lambda,\delta}^\alpha, J_{\lambda,\delta}^\alpha)$ avec

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} c(H_{\lambda,\delta}^\alpha, J_{\lambda,\delta}^\alpha) = c(U) \quad (4.2.4)$$

- une orbite 1-périodique de $H_{\lambda,\delta}^\alpha$ notée $\gamma_{\lambda,\delta}^\alpha$ de type $\boxed{\partial_+ \tilde{U}}$ et d'action $c(H_{\lambda,\delta}^\alpha, J_{\lambda,\delta}^\alpha)$.
- une trajectoire de Floer de $(H_{\lambda,\delta}^\alpha, J_{\lambda,\delta}^\alpha)$ contenue dans $U_{1+\nu(\lambda)}$ et reliant $\gamma_{\lambda,\delta}^\alpha$ à 0, d'énergie

$$\Phi_{H_{\lambda,\delta}^\alpha, J_{\lambda,\delta}^\alpha}(u_{\lambda,\delta}^\alpha) = c(H_{\lambda,\delta}^\alpha, J_{\lambda,\delta}^\alpha) - \varepsilon(\lambda) - \alpha \quad (4.2.5)$$

Pour λ assez grand, on aura en raison de (4.2.4)

$$c(H_{\lambda,\delta}^\alpha, J_{\lambda,\delta}^\alpha) \leq c(U) + \varepsilon$$

ce qui implique en raison de (4.2.5)

$$\Phi_{H_{\lambda,\delta}^\alpha, J_{\lambda,\delta}^\alpha}(u_{\lambda,\delta}^\alpha) \leq c(U) + \varepsilon - \varepsilon(\lambda) - \alpha$$

On fixe maintenant λ assez grand. On choisit alors deux suites α_n et δ_n tendant vers 0 et on notera par la suite

$$H_n := H_{\lambda,\delta_n}^{\alpha_n}, \quad J_n := J_{\lambda,\delta_n}^{\alpha_n}, \quad u_n := u_{\lambda,\delta_n}^{\alpha_n}, \quad \gamma_n := \gamma_{\lambda,\delta_n}^{\alpha_n}$$

et on va étudier la convergence de la suite u_n .

4.2.3 Convergence de la trajectoire de minmax

Commençons par rappeler les propriétés importantes de u_n . Elle vérifie

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} u_n(s, t) = \gamma_n(t) \notin U \quad (4.2.6)$$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} u_n(s, t) = z_0 \quad (4.2.7)$$

$$\Phi_{H_n, J_n}(u_n) \in [T_0, c(u) + \varepsilon - \varepsilon(\lambda) - \alpha_n] \quad (4.2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} u_n - J_n(t, u_n) \frac{\partial}{\partial t} u_n = -J_n(t, u_n) X_{H_n}(t, u_n) \quad (4.2.9)$$

$$u_n(Z) \subset U_{1+\nu} \quad (4.2.10)$$

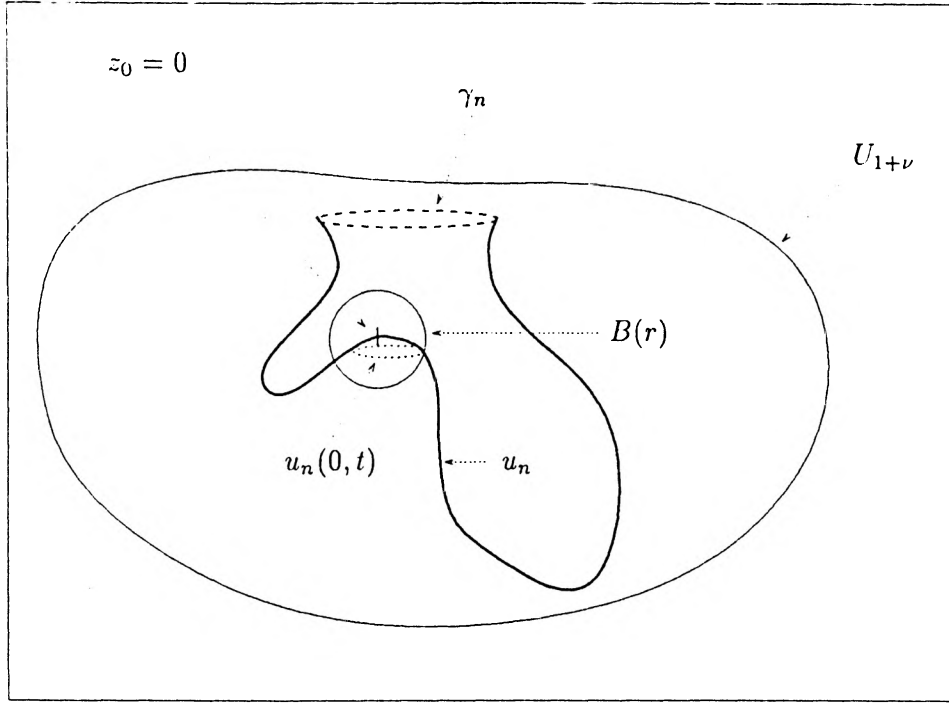


FIG. 4.1 – Trajectoire de minmax

avec

$$J_n(t, z) = i \quad \text{si } z \in B^{2n}(r) \quad (4.2.11)$$

$$H_n(t, z) = -\varepsilon(\lambda) - \alpha_n + \alpha_n |z|^2 \quad \text{si } z \in B^{2n}(r). \quad (4.2.12)$$

On commence par fixer un paramétrage: on sait que :

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} u_n(s, t) = \gamma_n(t) \text{ et } \lim_{s \rightarrow +\infty} u_n(s, t) = 0 \text{ dans } C^\infty(S^1).$$

Il existera donc $(s_n, t_n) \in Z$ tel que :

$$u_n(s_n, t_n) \in S^{2n-1}(r) \text{ et } s > s_n \Rightarrow u_n(s, t) \in B^{2n}(r).$$

Quitte à poser :

$$\tilde{u}^n(s, t) = u^n(s + s_n, t)$$

on peut supposer $s_0 = 0$, c'est à dire que u_n vérifie (voir figure 4.1)

$$u_n(0, t_n) \in S^{2n-1}(r) \text{ et } s > 0 \Rightarrow u_n(s, t) \in B^{2n}(r). \quad (4.2.13)$$

Cela revient à quotienter par l'action libre de $\mathbb{R}$ sur les connexions. On sait que $(H_n, J_n) \rightarrow (H_\lambda, J_\lambda)$ dans $C^\infty(\mathbb{C}^n)$. Par le théorème 2.2.4, on en déduit que, quitte à extraire une sous-suite, il existe une trajectoire $u \in \mathcal{M}(H_\lambda, J_\lambda)$ telle que

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } C_{loc}^\infty(Z, \mathbb{C}^n) \quad (4.2.14)$$

avec en raison de (4.2.8)

$$\Phi_{H_\lambda, J_\lambda}(u) \leq c(U) + \varepsilon - \varepsilon(\lambda). \quad (4.2.15)$$

On sait de plus que $u_n(Z) \subset U_{1+\nu(\lambda)}$, donc on a aussi

$$u(Z) \subset U_{1+\nu(\lambda)} . \quad (4.2.16)$$

D'après le lemme 2.2.6, il existe $\gamma_{\pm} \in \mathcal{P}(H_{\lambda})$ et une suite réelle s_n telles que

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} s_n = \pm\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow \pm\infty} u(s_n, t) = \gamma_{\pm}(t) \text{ dans } C^{\infty}(S^1) .$$

Mais $H_{\lambda} = -\varepsilon(\lambda)$ dans $U_{1-\nu(\lambda)}$, donc on n'est pas dans une situation où les orbites sont isolées, et on ne peut pas appliquer le lemme 2.2.9: la courbe limite u n'a pas forcément d'extrémités bien définies. On va pourtant montrer le lemme suivant, qui est le point crucial de cette section.

Lemme 4.2.1

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s, t) = 0 \text{ dans } C^0(S^1)$$

Démonstration: On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $r_1 > 0$ et une suite (S_n, T_n) avec $S_n \rightarrow +\infty$ telle que :

$$u_n(S_n, T_n) \notin B^{2n}(r_1) .$$

Dans le cas contraire, on obtient une "équicontinuité à l'infini", c'est à dire

$$\forall r_1 > 0 , \exists S_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} , \forall s > S_0 , \forall t \in S^1 , u_n(s, t) \in B^{2n}(r_1) .$$

Comme u_n converge vers u dans $C_{loc}^{\infty}(Z, \mathbb{C}^n)$, cette équicontinuité implique le lemme 4.2.1.

On sait d'après (4.2.7) que u_n "atterrit" en 0, i.e.

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} u_n(s, t) = 0$$

on peut alors supposer $0 < r_1 < \frac{1}{2}r$ et :

$$u_n(S_n, T_n) \in S^{2n-1}(r_1) \text{ et } s > S_n \rightarrow u_n(s, t) \in B^{2n}(r_1) .$$

On reparamètre à nouveau, i.e. on considère la suite :

$$v_n(s, t) = u_n(s + S_n, t) . \quad (4.2.17)$$

Quitte à extraire, elle convergera localement vers $v : Z \rightarrow U_{1+\nu(\lambda)}$ comme précédemment, où v vérifie :

$$v_s - J_{\lambda} v_t = -J_{\lambda} X_{H_{\lambda}} \text{ et } \Phi_{H_{\lambda}, J_{\lambda}}(v) \leq c(U) + \varepsilon .$$

De plus, on sait d'après (4.2.13) et (4.2.17) que:

$$v_n(s, t) \in B^{2n}(r) \text{ pour tout } s > -S_n .$$

Comme $S_n \rightarrow +\infty$, on en déduit d'après la convergence locale:

$$v(Z) \subset B^{2n}(r) .$$

On s'intéresse alors aux extrémités de v : on sait d'après le lemme 2.2.6 qu'il existe une suite réelle s_n et des orbites 1-périodiques de H_λ : $\gamma_\pm$ situées dans $B^{2n}(r)$ et vérifiant :

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} s_n = \pm\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \pm\infty} v(s_n, t) = \gamma_\pm(t) \text{ et } \Phi_{H,J}(v) = A_H(\gamma_-) - A_H(\gamma_+).$$

Mais $H_\lambda = -\varepsilon(\lambda)$ dans $B^{2n}(r)$, donc $\gamma_\pm$ sont des orbites constantes ayant la même action $\varepsilon(\lambda)$:

$$\Phi_{H,J}(v) = 0$$

et (2.1.16) nous assure donc que v est constante. Comme $v_n(0, T_n) \in S^{2n}(r_1)$, on peut par compacité supposer (quitte à extraire encore) que :

$$v(0, T_\infty) = z_1 \in S^{2n-1}(r_1)$$

et donc $v(Z) = z_1$. Par conséquent, pour tout $r_2 > 0$, on aura pour n assez grand :

$$v_n(0, t) \in B^{2n}(z_1, r_2) \text{ pour tout } t \in S^1. \quad (4.2.18)$$

Mais, d'après (4.2.13) et (4.2.17), on sait que :

$$v_n([-S_n, +\infty[\times S^1) \subset B^{2n}(r) \quad (4.2.19)$$

et, d'après (4.2.11) et (4.2.12), on a dans $B^{2n}(r)$:

$$J_n(t, z) = i \text{ et } H_n(t, z) = -\varepsilon(\lambda) - \alpha_n + \alpha_n |z|^2. \quad (4.2.20)$$

On en déduit alors :

$$X_{H_n}(z) = 2\alpha_n iz$$

et v_n vérifie donc pour $s \geq -S_n$:

$$\frac{\partial}{\partial s} v_n - i \frac{\partial}{\partial t} v_n = -i X_{H_n}(v_n) = 2\alpha_n \cdot v_n.$$

On considère alors :

$$w_n(s, t) = e^{-2\alpha_n s} v_n(s, t)$$

qui vérifie d'après (4.2.7), (4.2.13) et (4.2.17), puisque $\alpha_n > 0$:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} w_n(s, t) = 0 \text{ et } w_n([0, +\infty[\times S^1) \subset B^{2n}(r). \quad (4.2.21)$$

De plus, comme on est dans une situation linéaire en raison de (4.2.20), on a pour $s \geq 0$:

$$\frac{\partial}{\partial s} w_n - i \frac{\partial}{\partial t} w_n = 0$$

(d'où l'utilité d'avoir rigidifié la situation). On considère alors :

$$\tilde{\Phi} : [0, +\infty[\times S^1 \rightarrow \bar{D} \setminus 0$$

définie par :

$$\tilde{\Phi}(s, t) = e^{2\pi(-s+it)}$$

et on pose : $\bar{w}_n(z) = w_n(\bar{\Phi}^{-1}(z))$ pour $z \in \bar{D}^*$. On en déduit que $\bar{w}_n$ vérifie

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{w}_n + i \frac{\partial}{\partial y} \bar{w}_n = 0$$

et $\bar{w}_n$ est donc une courbe holomorphe sur

$$\bar{D}^* = \{z \in \mathbb{C} / 0 < |z| \leq 1\}$$

qui, d'après (4.2.21), admet un prolongement continu à $\bar{D}$ avec $\bar{w}_n(0) = 0$. Le point $0 \in \bar{D}$ est donc une singularité artificielle de $\bar{w}_n$, qui est donc holomorphe sur $\bar{D}$. Elle vérifie

$$\bar{w}_n(0) = 0 \text{ et } \bar{w}_n(\partial D) \subset B^{2n}(z_1, r_2)$$

d'après (4.2.18). Le principe du maximum implique alors (puisque toutes les sphères de $\mathbb{C}^n$ sont i -convexes):

$$0 \in \bar{w}_n(\bar{D}) \subset B(z_1, r_2)$$

et on débouche sur une contradiction en prenant r_2 assez petit ($r_2 < r_1$). On a donc démontré le lemme 4.2.1. Il en résulte le

Corollaire 4.2.2

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s, t) = 0 \text{ dans } C^\infty(S^1) .$$

En effet, on applique l'argument précédent. La courbe $\bar{u} = u \circ \bar{\Phi}^{-1}$ est une courbe holomorphe sur $\bar{D}^*$ admettant un prolongement continu à $\bar{D}$, donc possède une singularité artificielle en 0, et est donc de classe C^∞ sur $\bar{D}$. En repassant sur Z , la courbe $u = \bar{u} \circ \bar{\Phi}$ vérifie donc le corollaire 4.2.2. (On a même une convergence exponentielle). On va en déduire le

Lemme 4.2.3 *Il existe une orbite 1-périodique non constante γ de H_λ , de type $\boxed{\partial_+ U}$, telle que*

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} d(u(s, t), \gamma) = 0 . \quad (4.2.22)$$

On a de plus

$$A_{H_\lambda}(\gamma) \leq c(U) + \varepsilon . \quad (4.2.23)$$

Démonstration: Il suffit de prouver (4.2.22) car (4.2.23) résultera alors de (4.2.15) et du lemme 2.2.7. Comme on a fixé le paramétrage en (4.2.13), on sait que (quitte à extraire à nouveau)

$$\exists t_\infty \in S^1 \text{ avec } u(0, t_\infty) \in S^{2n-1}(r)$$

et donc

$$\text{la trajectoire limite } u \text{ est } \mathbf{non constante} \quad (4.2.24)$$

en raison du lemme 4.2.1 (c'est en fait ce point qui est le point difficile à montrer). On sait de plus d'après le lemme 2.2.6 qu'il existe

$$s_n \rightarrow -\infty \text{ et } \gamma_-(t) = \lim_{n \rightarrow -\infty} u(s_n, t)$$

qui est une orbite périodique de H_λ . Deux cas sont possibles :

- Soit γ_- est une orbite non constante de H_λ située dans $U^{[1-\nu(\lambda), 1+\nu(\lambda)]}$ (en raison de (4.2.16)). Dans ce cas, elle est forcément isolée car $\mathcal{S}(\Sigma)$ est supposé discret et h_λ est strictement convexe dans cette région, et on a donc une “vraie” extrémité en raison du lemme 2.2.7, ce qui prouve le lemme 4.2.3.
- Soit γ_- est constante dans $U_{1-\nu(\lambda)}$

Nous allons montrer que ce dernier cas est impossible. Dans le cas contraire, comme la paire (H_λ, J_λ) est de contact dans $U^{[1-\varepsilon_0, 1+\nu(\lambda)]}$ et que $u(Z) \subset U_{1+\nu(\lambda)}$, le lemme 1.3.9 implique que u ne peut pas sortir de $U_{1-\nu(\lambda)}$ où sont situées ses deux extrémités (le fait que γ_- ne soit qu'une valeur d'adhérence n'est pas gênant ici en raisonnant sur des portions finies de cylindre). Mais $H_\lambda = -\varepsilon(\lambda)$ dans $U_{1-\nu(\lambda)}$, donc on aurait

$$A_{H_\lambda}(\gamma_-) = A_{H_\lambda}(0) = -\varepsilon(\lambda) .$$

Donc d'après le lemme 2.2.6

$$\Phi_{H_\lambda, J_\lambda}(u) = 0 .$$

Par conséquent, d'après la formule (2.1.16), u est indépendante de s et c'est une orbite de H_λ : elle est donc non constante, ce qui contredit (4.2.24) et le lemme 4.2.3 est démontré.

4.2.4 Assouplissement en 0

Nous allons maintenant reprendre les notations initiales. Pour $0 < r < \tilde{r}$, on a considéré la structure presque complexe

$$J^r(z) = J(z \cdot \rho(\frac{|z|^2}{r^2})) \quad (4.2.25)$$

avec $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant

- $\rho(x) = 0$ si $x \leq 1$
- $\rho(x) = 1$ si $x \geq 4$
- $0 \leq \rho'(x) \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On a ensuite construit une structure J_λ^r calibrée telle que

- $J_\lambda^r = J^r$ dans $U_{1-2\varepsilon_0}$
- J_λ^r est spéciale dans $U^{[1-\varepsilon_0, 1+\nu(\lambda)]}$

et un hamiltonien $H_\lambda : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

- $H_\lambda = -\varepsilon(\lambda)$ dans $U_{1-\varepsilon_0}$

$$- H_\lambda = h_\lambda \circ \tau \text{ dans } U^{[1-\varepsilon_0, 1+\nu(\lambda)]}$$

et on a obtenu une orbite 1-périodique γ_λ^r de H_λ de type $\boxed{\partial_+ U}$ et d'action

$$A_{H_\lambda}(\gamma_\lambda^r) \leq c(U) + \varepsilon$$

et une trajectoire de Floer u_λ^r de (H_λ, J_λ^r) située dans $U_{1+\nu(\lambda)}$ reliant γ_λ^r et 0

$$\frac{\partial}{\partial s} u_\lambda^r - J_\lambda^r(u_\lambda^r) \frac{\partial}{\partial t} u_\lambda^r = -J_\lambda^r(u_\lambda^r) X_{H_\lambda}(u_\lambda^r)$$

avec

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} u_\lambda^r(s, t) = 0 \text{ dans } C^\infty(S^1)$$

et

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} d(u_\lambda^r(s, t), \gamma_\lambda^r) = 0 .$$

Nous allons maintenant faire tendre r vers 0 pour nous ramener à la structure presque complexe initiale dans $U_{1-2\varepsilon_0}$, le hamiltonien H_λ étant fixé. On a en raison de (4.2.25)

$$DJ^r(z) = DJ \circ \left[\rho \left(\frac{|z|^2}{r^2} \right) + 2\rho' \left(\frac{|z|^2}{r^2} \right) \cdot \frac{|z|^2}{r^2} \right]$$

d'où

$$\| DJ^r \|_{C^0(B^{2n}(2r))} \leq 5 \| DJ \|_{C^0(B^{2n}(2r))} \leq 5C$$

avec

$$C = \| J \|_{C^1(B^{2n}(2\bar{r}))} .$$

On a alors, puisque $J^r(0) = J(0)$

$$\| J_r - J \|_{C^0(B^{2n}(2r))} \leq 12C \cdot r$$

et

$$\| J_r \|_{C^1(B^{2n}(2r))} \leq 6C .$$

Comme $J^r = J$ hors de $B^{2n}(2r)$, on en déduit

$$\| J^r - J \|_{C^0(\mathbb{C}^n)} \leq 12C \cdot r$$

d'où

$$\| J_\lambda^r - J_\lambda \|_{C^0(\mathbb{C}^n)} \leq 12C \cdot r$$

et

$$\| J_\lambda^r \|_{C^1(\mathbb{C}^n)} \leq \| J_\lambda \|_{C^1(\mathbb{C}^n)} + 6C .$$

On choisit maintenant une suite r_n tendant vers 0 et on notera à présent

$$J_n := J_\lambda^{r_n} .$$

La suite J_n converge donc vers J dans $C^0(\mathbb{C}^n)$ et est bornée dans $C^1(\mathbb{C}^n)$. On pose également

$$u_n := u_\lambda^{r_n} , \gamma_n := \gamma_\lambda^{r_n}$$

et on va étudier la convergence de la suite u_n . Comme J_n est bornée dans $C^1(\mathbb{C}^n)$ et vérifie $J_n(0) = i$, le lemme 1.3.3 entraîne l'existence de $r_0 > 0$ tel que

$$\text{pour } z_1 \in B^{2n}(r_0) \text{ et } r_1 \leq 2r_0, S^{2n-1}(z_1, r_1) \text{ est } J_n\text{-convexe.} \quad (4.2.26)$$

On peut de plus prendre r_0 assez petit pour que

$$B^{2n}(3r_0) \subset U_{1-3\varepsilon_0}.$$

On commence de nouveau par fixer un paramétrage: on sait que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} d(u_n(s, t), \gamma_n) = 0$$

avec $\gamma_n \subset U^{[1-\nu(\lambda), 1+\nu(\lambda)]}$ et

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} u_n(s, t) = 0.$$

On peut donc à nouveau imposer

$$u_n(0, t_n) \in S^{2n-1}(r_0) \text{ et } s > 0 \Rightarrow u_n(s, t) \in B^{2n}(r_0). \quad (4.2.27)$$

On sait que $J_n \rightarrow J_\lambda$ dans $C^0(\mathbb{C}^n)$ et que J_n est bornée dans $C^1(\mathbb{C}^n)$. Par le théorème 2.2.5, on en déduit que, quitte à extraire une sous-suite, il existe une trajectoire $u \in \mathcal{M}(H_\lambda, J_\lambda)$ telle que

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } C_{loc}^1(Z, \mathbb{C}^n) \quad (4.2.28)$$

avec

$$u(Z) \subset U_{1+\nu(\lambda)} \text{ et } \Phi_{H_\lambda, J_\lambda}(u) \leq c(U) + \varepsilon - \varepsilon(\lambda). \quad (4.2.29)$$

On est à nouveau dans une situation complètement dégénérée dans $U_{1-\nu(\lambda)}$. Le fait que u_n soit maintenant J_n -anti-holomorphe dans $U_{1-\nu(\lambda)}$ et la convexité des petites sphères vont remplacer la rigidité de la situation de la section précédente pour montrer le

Lemme 4.2.4

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s, t) = 0 \text{ dans } C^0(S^1)$$

On raisonne encore par l'absurde et on suppose qu'il existe $0 < r_1 < \frac{1}{2}r_0$ et une suite (S_n, T_n) avec $S_n \rightarrow +\infty$ telle que :

$$u_n(S_n, T_n) \in S^{2n-1}(r_1) \text{ et } s > S_n \rightarrow u_n(s, t) \in B^{2n}(r_1).$$

Comme H_λ est toujours constant dans $B^{2n}(r_0)$, la suite

$$v_n(s, t) = u_n(s + S_n, t)$$

convergera dans $C_{loc}^1(Z, \mathbb{C}^n)$ vers une constante $z_1 \in S^{2n-1}(r_1)$, et donc pour tout $r_2 > 0$, on aura pour n assez grand :

$$v_n(0, t) \in B^{2n}(z_1, r_2) \text{ pour tout } t \in S^1.$$

Cette fois, v_n vérifie dans $\mathbb{R}_+ \times S^1$ l'équation

$$\frac{\partial}{\partial s} v_n - J_n(v_n) \frac{\partial}{\partial t} v_n = 0 .$$

On pose alors directement $\bar{v}_n = v_n \times \bar{\Phi}^{-1}$, qui vérifie sur $\bar{D}^*$ l'équation

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{v}_n + J_n(\bar{v}_n) \frac{\partial}{\partial y} \bar{v}_n = 0 .$$

Cette courbe admet encore un prolongement continu à $\bar{D}$ avec $\bar{v}_n(0) = 0$, et elle est holomorphe au voisinage de 0 puisque

$$J_n(t, z) = i \text{ si } z \in B^{2n}(r_n) .$$

On a toujours une singularité artificielle en 0, et la courbe prolongée est J_n -holomorphe dans $\bar{D}$ et vérifie

$$\bar{v}_n(0) = 0 , \bar{v}_n(\bar{D}) \subset B^{2n}(r_0) \text{ et } \bar{v}_n(\partial D) \subset B^{2n}(z_1, r_2) .$$

Mais d'après (4.2.26), $S^{2n-1}(z_1, r)$ est J_n -convexe pour $r \leq 2r_0$, et on sait que $\bar{v}_n(\bar{D}) \subset B^{2n}(z_1, 2r_0)$. Le lemme 1.3.2 implique alors

$$\bar{v}_n(\bar{D}) \subset B^{2n}(z_1, r_2)$$

et on a encore contradiction pour $r_2 < r_1$, ce qui prouve le lemme 4.2.4. On a toujours le

Corollaire 4.2.5

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s, t) = 0 \text{ dans } C^\infty(S^1)$$

En effet, par l'argument précédent, la courbe $\bar{v} = v \circ \bar{\Phi}^{-1}$ est J -holomorphe dans $\bar{D}^*$, continue dans $\bar{D}$ et son aire est inférieure à $c(U) + \varepsilon$ en raison de (4.2.29). D'après le théorème 4.5.1 de [Sik94], elle s'étend en une courbe holomorphe sur $\bar{D}$, et est donc C^∞ , ce qui prouve le corollaire 4.2.5. Enfin, on a toujours le

Lemme 4.2.6 *Il existe une orbite 1-périodique non constante γ de H_λ , de type $\boxed{\partial_+ U}$, telle que*

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} d(u(s, t), \gamma) = 0 . \quad (4.2.30)$$

On a de plus

$$A_{H_\lambda}(\gamma) \leq c(U) + \varepsilon . \quad (4.2.31)$$

En effet, on aura toujours en raison de (4.2.27) $u(0, t_\infty) \in S^{2n-1}(r_0)$ et le lemme 4.2.4 montre que u est non constante, ce qui suffit à prouver le lemme 4.2.6.

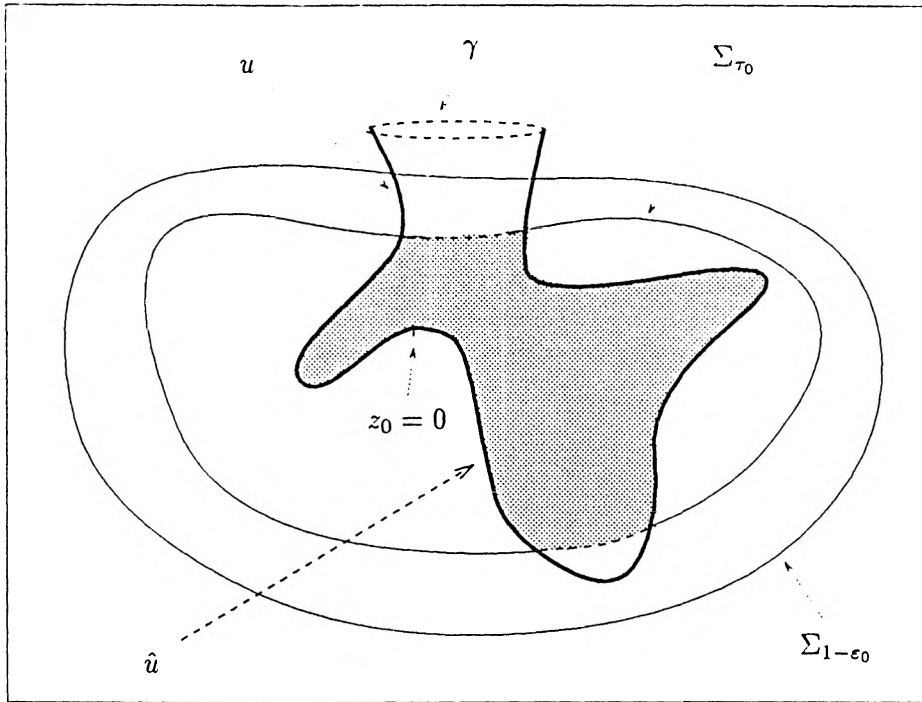


FIG. 4.2 – Découpe de la trajectoire

4.2.5 Conclusion

On a maintenant une structure J_λ calibrée par ω_0 telle que

$$J_\lambda = J \text{ dans } U_{1-2\varepsilon_0}$$

et un hamiltonien $H_\lambda: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$H_\lambda = -\varepsilon(\lambda) \text{ dans } U_{1-\varepsilon_0}$$

et on a obtenu une orbite 1-périodique γ de H_λ hors de $\dot{U}_{1-\varepsilon_0}$ et une trajectoire de Floer u de (H_λ, J_λ) située dans $U_{1+\nu(\lambda)}$ reliant γ_λ et 0

$$u_s - J_\lambda(u)u_t = -J_\lambda(u)X_{H_\lambda}(u) .$$

On commence par “se replacer dans le sens des courbes holomorphes”, c’est à dire qu’on considère

$$\bar{u}(s, t) = u(-s, t)$$

qui vérifie

$$\bar{u}_s + J_\lambda(\bar{u})\bar{u}_t = J_\lambda(\bar{u})X_{H_\lambda}(\bar{u})$$

avec

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \bar{u}(s, t) = 0 \text{ dans } C^\infty(S^1)$$

et

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} d(\bar{u}(s, t), \gamma) = 0$$

pour laquelle

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{S^1} |\bar{u}_s|_{J_\lambda}^2 dt ds \leq c(U) + \varepsilon .$$

On considère alors le prolongement $\tilde{\tau} = f \circ \tau$ de la figure 3.5, et on choisit une valeur régulière τ_0 de $\tilde{\tau} \circ u$ dans $]1 - 3\varepsilon_0, 1 - 2\varepsilon_0[$. On appelle $\mathcal{Z}$ la composante connexe de :

$$(\tilde{\tau} \circ \bar{u})^{-1}([0, \tau_0])$$

contenant $] - \infty, -S_0] \times S^1$ pour S_0 assez grand. On a en particulier le long de $\bar{u}(\mathcal{Z})$

$$J_\lambda(t, z) = J(z) \text{ et } X_{H_\lambda} = 0 .$$

Donc $\bar{u}$ vérifie dans $\mathcal{Z}$ l'équation

$$\bar{u}_s + J(\bar{u})\bar{u}_t = 0$$

et

$$\int_{\mathcal{Z}} |\bar{u}_s|_J^2 dt ds \leq \int_{\mathcal{Z}} |\bar{u}_s|_{J_\lambda}^2 dt ds \leq c(U) + \varepsilon .$$

Mais le long de $\bar{u}(\mathcal{Z})$, on a

$$|\bar{u}_s|_J^2 = \omega_0(\bar{u}_s, J(\bar{u})\bar{u}_s) = \omega_0(\bar{u}_s, \bar{u}_t)$$

donc

$$\mathcal{A}(\bar{u}(\mathcal{Z})) \leq c(U) + \varepsilon .$$

On peut comme précédemment supprimer la singularité en 0 en utilisant la représentation conforme:

$$\Psi :] - \infty, -S_0] \times S^1 \sim \bar{D}(e^{-2\pi S_0}) \setminus 0 .$$

La courbe $v = \bar{u} \circ \Psi^{-1}$ vérifie $\bar{\partial}_J v = 0$, elle est J -holomorphe dans $\bar{D}(e^{-2\pi S_0}) \setminus 0$, d'aire inférieure à $c(U) + \varepsilon$ et se prolonge continûment à $\bar{D}(e^{-2\pi S_0})$ par $v(0) = 0$. Elle est donc J -holomorphe dans $\bar{D}(e^{-2\pi S_0})$ d'après le théorème 4.5.1 de [Sik94]. On obtient ainsi une surface de Riemann S compacte à bord

$$S = \mathcal{Z} \setminus (] - \infty, -S_0] \times S^1) \cup D(e^{-2\pi S_0}) \sim \mathcal{Z} \cup \{-\infty\}$$

et une application J -holomorphe $\hat{u} : S \rightarrow \bar{U}_{1-\tau_0}$ (voir figure 4.2) vérifiant :

$$\hat{u}(\partial S) \subset \partial U_{1-\tau_0} , \hat{u}(-\infty) = 0$$

et

$$\mathcal{A}(\hat{u}) \leq c(U) + \varepsilon .$$

Comme $U_{1-\tau_0}$ constitue un voisinage de $U_{1-3\varepsilon_0}$ et que J a été prise quelconque, on a ainsi montré (voir la définition 1.2.5, le lemme 1.2.12 et la remarque 1.2.6)

$$\forall \varepsilon > 0 , w(U_{1-3\varepsilon_0}) \leq c(U) + \varepsilon$$

d'où

$$\forall \varepsilon_0 > 0 , w(U_{1-3\varepsilon_0}) \leq c(U)$$

sous l'hypothèse “ $\mathcal{S}(\partial U)$ non dégénéré”, ce qui, d'après le théorème 4.1.9 et la proposition 1.2.15, entraîne le théorème 1.

Bibliographie

- [Ben86] Bennequin (D.). – Problèmes elliptiques, surfaces de Riemann et structures symplectiques [d'après M. Gromov]. *Astérisque*, vol. 145-146, 1986, pp. 111-136. – Séminaire Bourbaki, exposé 657.
- [CFH95] Cieliebak (K.), Floer (A.) et Hofer (H.). – Symplectic homology II (a general construction). *Mathematische Zeitschrift*, vol. 218, 1995, pp. 103-122.
- [CFHW96] Cieliebak (K.), Floer (A.), Hofer (H.) et Wysocki (K.). – Applications of symplectic homology II (stability of the action spectrum). *Mathematische Zeitschrift*, vol. 223, 1996, pp. 27-45.
- [EH90a] Ekeland (I.) et Hofer (H.). – Symplectic topology and hamiltonian dynamics. *Mathematische Zeitschrift*, vol. 200, 1990, pp. 355-378.
- [EH90b] Ekeland (I.) et Hofer (H.). – Symplectic topology and hamiltonian dynamics II. *Mathematische Zeitschrift*, vol. 203, 1990, pp. 553-567.
- [Eli90] Eliashberg (Y.). – Filling by holomorphic discs and its applications. In: *Geometry of low-dimensional manifolds 2*, éd. par Donaldson (S.) et Thomas (C.B.). – Cambridge university press, 1990.
- [FH94] Floer (A.) et Hofer (H.). – Symplectic homology I (open sets in $\mathbb{C}^n$). *Mathematische Zeitschrift*, vol. 215, 1994, pp. 37-88.
- [FHS95] Floer (A.), Hofer (H.) et Salamon (D.). – Transversality in elliptic Morse theory for the symplectic action. *Duke mathematics journal*, vol. 80, 1995, pp. 251-292.
- [FHV90] Floer (A.), Hofer (H.) et Viterbo (C.). – The Weinstein conjecture in $P \times \mathbb{C}^l$. *Mathematische Zeitschrift*, vol. 203, 1990, pp. 469-482.
- [FHW94] Floer (A.), Hofer (H.) et Wysocki (K.). – Applications of symplectic homology I. *Mathematische Zeitschrift*, vol. 217, 1994, pp. 577-606.
- [Flo88] Floer (A.). – The unregularized gradient flow of the symplectic action. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 41, 1988, pp. 775-813.
- [Gro85] Gromov (M.). – Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Inventiones Mathematicae*, vol. 82, 1985, pp. 307-347.

- [Gro87] Gromov (M.). – Soft and hard symplectic geometry. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1986*. pp. 81–98.
- [HZ94] Hofer (H.) et Zehnder (E.). – *Symplectic invariants and hamiltonian dynamics*. – Birkhauser, 1994.
- [LM] Lalonde (F.) et McDuff (D.). – Energy and capacities in symplectic topology. – À paraître aux *Annals of mathematics*.
- [McD91] McDuff (D.). – Symplectic manifolds with contact type boundaries. *Inventiones Mathematicae*, vol. 103, 1991, pp. 651–671.
- [MS94] McDuff (D.) et Salamon (D.). – *J-holomorphic curves and quantum cohomology*. – American mathematical society, 1994, *University Lecture Series 6*.
- [Rob70] Robinson (R.C.). – A global approximation theorem for hamiltonian systems. *Proceedings of symposia in pure and applied mathematics*, vol. XIV, 1970, pp. 233–243.
- [Sal90] Salamon (D.). – Morse theory , the Conley index and Floer homology. *Bulletin of the London Mathematical Society*, vol. 22, 1990, pp. 113–140.
- [Sik94] Sikorav (J.C.). – Some properties of holomorphic curves in almost complex manifolds. In: *Holomorphic curves in symplectic geometry*, éd. par Audin (M.) et Lafontaine (J.), chap. V. – Birkhauser, 1994.
- [SZ92] Salamon (D.) et Zehnder (E.). – Morse theory for periodic solutions of hamiltonian systems and the Maslov index. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 45, 1992, pp. 1303–1360.
- [Tak70] Takens (F.). – Hamiltonian systems: generic properties of closed orbits and local perturbations. *Mathematische Annalen*, vol. 188, 1970, pp. 304–312.
- [Vit] Viterbo (C.). – Functors and computations in Floer homology with applications I. – Preprint.
- [Vit89] Viterbo (C.). – Capacités symplectiques et applications (d’après Ekeland-Hofer , Gromov). *Astérisque*, vol. 177-178, 1989, pp. 345–362. – Séminaire Bourbaki, exposé 714.
- [Wei77] Weinstein (A.). – *Lectures on symplectic manifolds*. – American Mathematical Society, 1977, *CBMS Lecture notes series 29*.