

THÈSES D'ORSAY

JEAN-FRANÇOIS SCHEID

Étude théorique et numérique de l'évolution morphologique d'interfaces

Thèses d'Orsay, 1994

[<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1994__0391__P0_0>](http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1994__0391__P0_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses d'Orsay » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



NUMDAM

*Thèse numérisée par la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016
et diffusée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

ORSAY
n° d'ordre :

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

THÈSE

présentée
pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

Spécialité : Mathématiques

PAR

Jean-François SCHEID

50924



Sujet : Etude théorique et numérique
de l'évolution morphologique d'interfaces.

Soutenue le : 11 janvier 1994 devant la Commission d'examen

M.	R. TEMAM	Président
M.	C. BATAILLON	
M.	M. COURNIL	Rapporteur
Mme	D. HILHORST	
M.	M. PIERRE	
M.	G. SANTARINI	
M.	C.J VAN DUIJN	Rapporteur

Je tiens tout d'abord à remercier Madame D. Hilhorst qui a dirigé cette thèse et dont la grande disponibilité m'a permis de mener à bien ces travaux. Qu'elle sache ici toute la reconnaissance que je lui porte.

Je remercie M. le Professeur R. Temam de l'intérêt qu'il porte à mes travaux en acceptant de présider le jury.

J'exprime ma reconnaissance à M. le Professeur C.J. Van Duyn pour avoir accepté d'être rapporteur et à M. le Professeur M. Pierre pour l'honneur qu'il me fait de participer au jury.

Cette thèse est le fruit d'une collaboration entre mathématiciens et physico-chimistes. Les discussions que j'ai pu avoir avec ces derniers m'ont confirmé que pour un problème donné, plusieurs démarches intellectuelles sont possibles. Aussi je veux exprimer mon estime à M. M. Cournil qui a bien voulu accepter d'être rapporteur ainsi qu'à MM. G. Santarini et C. Bataillon pour m'avoir accueilli au sein du Commissariat à l'Energie Atomique, chacun d'eux faisant preuve d'une ouverture d'esprit scientifique certaine.

Je remercie également F. Issard-Roch pour les excellents conseils qu'elle m'a généreusement prodigués, ainsi que F. Abergel avec qui j'ai eu des discussions riches et fructueuses.

Enfin je veux remercier C. Dupaix, dont j'ai apprécié la collaboration à l'aspect numérique de cette thèse, pour l'aide et le soutien qu'il m'a apportés.

Theorical and numerical study of the morphological evolution of interfaces

ABSTRACT

The aim of this thesis is to study a dissolution-growth process appearing in some corrosion phenomena where a solid phase (typically a metal) is in contact with a liquid phase. These phenomena are accompanied by a change of geometry of the interface between the two phases and the time evolution of these physical systems is directly connected to the morphology of the interface. The physical laws which govern this process lead to a law for the displacement of the interface which involves its mean curvature nonlinearly and to a parabolic equation for the concentration of the chemical species passed in the solution, so that one obtains a two-dimensional one phase Stefan problem with surface tension. The study of this problem is led by means of two different approaches. The first one is analytical : we use methods from nonlinear analysis to prove the existence and uniqueness locally in time of the solution of the Stefan problem. The second one is numerical since we present actual computations of the solution of this free boundary problem.

In Chapter 1 we present the physical context and a mathematical derivation of the equations for the concentration and for the displacement of the interface.

We consider in Chapter 2 the case that the interface is parametrized in the form $y = f(x, t)$. We use a fixed point method to prove the existence locally in time of a solution of the Stefan problem in Hölder spaces of the form $C^{l, l/2}$. We prove the uniqueness of the solution in a larger class than that in which the existence result is proven.

In Chapter 3, we consider the case that the interface Γ_t is a smooth simply connected curve. In a neighborhood of the initial interface Γ_0 , the interface Γ_t is parametrized by the arc length of Γ_0 . We prove the existence locally in time of a solution of this problem by means of a fixed point method.

In Chapter 4, we present a numerical method for the solution of this problem. The main difficulty comes from the fact that the spatial domain varies in time. We use a finite element method for discretization in space of the parabolic equation for the concentration. Two algorithms which involve different techniques for calculating the curvature term, have been implemented to compute the motion of the interface.

KEY WORDS : Stefan problem with surface tension, free boundary, system of non-linear parabolic equations.

Table des matières

INTRODUCTION	1
1 MODELISATION PHYSIQUE	5
1.1 La modélisation physique et la dérivation mathématique.	7
1.2 Les différents problèmes aux limites de l'étude analytique.	10
1.3 Les systèmes étudiés numériquement.	14
2 EXISTENCE ET UNICITÉ LOCALES EN TEMPS : Le cas d'une paramétrisation de l'interface de la forme $y = f(x,t)$	17
2.1 Introduction.	19
2.2 Quelques résultats et propriétés des espaces de Hölder utilisés.	21
2.3 Transformation sur un domaine fixe.	24
2.4 Le problème avec données initiales homogènes en $t = 0$	25
2.5 Le problème linéaire associé.	29
2.6 Le problème non-linéaire - Existence d'un point fixe.	32
2.7 Unicité	43
Appendice. On a dissolution-growth problem with surface tension : Local existence and uniqueness.	53
3 EXISTENCE LOCALE EN TEMPS : Le cas où l'interface est une courbe simple fermée	61
3.1 Introduction.	63
3.2 La paramétrisation de l'interface Γ_t et le problème (P) associé.	64
3.3 Transformation sur un domaine fixe.	69
3.4 Le problème avec données initiales homogènes en $t=0$	76
3.5 Le problème linéaire associé.	80
3.6 Le problème non-linéaire - Existence d'un point fixe.	83
Références des Chapitres 1, 2 et 3.	97
4 ETUDE NUMERIQUE	99
4.1 Introduction	101
4.2 The physical model	103

4.3	Discretization of the interface equation	108
4.4	Discretization of the equation for the concentration	116
4.5	Numerical results	125
Figures		133
Références du Chapitre 4.		165

INTRODUCTION

Qu'il s'agisse de phénomènes de cristallisation, de corrosion, de dissolution ou de croissance d'un solide dans un milieu liquide, tous ces processus ont en commun une interface délimitant deux phases en contact l'une avec l'autre. Ces interfaces sont soumises à des changements de géométrie et l'évolution de ces systèmes est alors directement liée à la morphologie de celles-ci. Afin d'étudier les différents mécanismes fondamentaux de ces phénomènes complexes, une des premières étapes est d'établir une modélisation. Le travail présenté dans cette thèse a pour origine la modélisation par G. Santarini [10] [11] d'un processus de dissolution-dépôt. Cherchant à valider ce modèle, une étude essentiellement expérimentale portant sur un système électrochimique de cuivre a été effectuée dans le cadre de la thèse de J. Jutard [6]. Le travail présenté ici se situe en continuation avec cette thèse et est consacré à l'étude analytique et numérique du problème.

L'objet de cette thèse est d'étudier un processus de dissolution-croissance, d'une part de façon analytique, par des outils d'analyse non linéaire et d'autre part d'un point de vue numérique, par simulation de l'évolution morphologique des interfaces. Le système physique considéré est constitué d'une phase solide formée d'un seul composé en contact avec une phase liquide qui est une solution diluée de ce composé. L'étude de ce système est menée en dimension deux d'espace. On s'intéresse alors à l'évolution de la concentration $C(x, y, t)$ de l'espèce chimique passée en solution, ainsi qu'à celle de l'interface Γ_t entre le solide et le liquide.

Au Chapitre 1, on décrit le contexte physique et on présente la dérivation mathématique des équations pour la concentration et le déplacement de l'interface. Le problème mathématique peut être décrit par trois équations de base :

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_t = \Delta C & \text{dans la phase liquide} \quad (1) \\ \frac{\partial C}{\partial n} = (1 - C) V_n & \text{sur l'interface } \Gamma_t \quad (2) \\ V_n = C - \alpha \exp(\gamma K) & \text{sur } \Gamma_t \quad (3) \end{array} \right.$$

où n , V_n et K sont respectivement la normale unitaire, la vitesse normale et la courbure moyenne de l'interface Γ_t , α est la concentration de saturation et γ est une constante positive proportionnelle à la tension superficielle.

L'étude analytique porte sur l'existence et l'unicité locales en temps de la solution de problèmes aux limites associés aux équations (1), (2) et (3). Une difficulté essentielle

de cette étude est liée au fait que la vitesse normale de déplacement de l'interface dépend de la courbure de façon non linéaire. L'existence et l'unicité locales en temps de la solution de problèmes d'évolution d'interfaces avec tension superficielle a été établie par de nombreux auteurs; en particulier Duchon et Robert [4] ont effectué l'étude d'un problème de type Hele-Shaw et Chen et Reitich [3] et Radkevitch [8] ont considéré le cas d'un problème de Stefan à deux phases où l'équation régissant le déplacement de l'interface est linéaire en la courbure.

On considère tout d'abord au Chapitre 2, le cas où l'interface est paramétrée sous la forme $y = f(x, t)$ et où la phase liquide est délimitée supérieurement par un bord fixe $\{y = e\}$. On impose à la concentration C une condition de type Neumann homogène sur ce bord fixe, ainsi que des conditions de périodicité en x pour C et f . Abergel, Hilhorst et Issard-Roch [1] ont montré l'existence et l'unicité de la solution au voisinage de la solution stationnaire $(f, C) = (0, \alpha)$ dans le cas où le bord supérieur du domaine est donné par $\{y = f(x, t) + e\}$. Prolongeant leur étude, nous montrons l'existence et l'unicité locales en temps de la solution de notre problème, dans les espaces fonctionnels de Hölder de type $C^{l, l/2}$. L'idée est de se ramener à un problème posé dans un domaine fixe et avec données initiales nulles. Le cadre fonctionnel est alors celui des espaces $C_0^{l, l/2}$ [2] [7] des fonctions nulles ainsi que leurs dérivées d'ordre $\left[\frac{l}{2}\right]$, en $t = 0$. On dispose alors d'estimations en fonction du temps des constantes d'injections des espaces $C_0^{l, l/2}$ dans $C_0^{l', l'/2}$ où $l' > l$. On considère tout d'abord un problème linéaire associé et on montre que ce problème admet une solution unique. Pour démontrer l'existence locale en temps de la solution du problème non linéaire, on utilise une méthode de point fixe, basée sur des résolutions successives du problème linéaire considéré précédemment. Pour démontrer l'unicité de la solution, on multiplie la différence des équations pour deux solutions par des fonctions tests bien choisies; l'unicité est ainsi établie dans des espaces de type $W_{\infty}^{m, 1}$ [7].

Nous étudions ensuite au Chapitre 3, le cas où l'interface est une courbe simple fermée. Sur le bord extérieur fixe S du domaine, on impose à la concentration C une condition de Neumann homogène. On suppose que l'interface initiale Γ_0 est telle que $\text{dist}(\Gamma_0, S) > 0$. Dans un voisinage de Γ_0 , on paramétrise alors l'interface Γ_t par l'abscisse curviligne de Γ_0 : pour $s \in [0, l_0]$,

$$\Gamma_t(s) = X_0(s) + \rho(s, t)\vec{n}_0$$

où $X_0(s)$ est la paramétrisation de Γ_0 par son abscisse curviligne s et $\vec{n}_0$ est la normale unitaire de Γ_0 , dirigée vers l'intérieur. Dans un voisinage de Γ_0 suffisamment petit, l'interface Γ_t est désormais repérée par la fonction ρ . On écrit alors le problème vérifié par C et ρ . Nous montrons l'existence locale en temps de la solution de ce problème dans des espaces de Hölder. La démarche de la démonstration est similaire à celle du Chapitre 2. On transforme tout d'abord le problème dans le domaine Ω_t en un problème dans le domaine fixe initial Ω_0 . Pour cela, on construit pour un temps suffisamment petit, un difféomorphisme qui transforme Ω_t en Ω_0 et Γ_t en Γ_0 . On se ramène ensuite à un

problème avec données initiales nulles. C'est pour ce problème que l'existence locale en temps d'une solution est établie à l'aide d'une méthode de point fixe.

Au Chapitre 4, nous présentons une méthode de résolution numérique de problèmes aux limites associés aux équations (1), (2) et (3). Une difficulté essentielle est liée au fait que le domaine varie au cours du temps. L'idée est de résoudre successivement à chaque pas de temps les équations (1) et (2) pour le calcul de la concentration et l'équation (3) pour le déplacement de l'interface.

Pour évaluer le déplacement de l'interface Γ_t , on a développé deux types d'algorithmes, basés sur deux méthodes très différentes du calcul de la courbure moyenne. L'une d'elle, due à Ikeda et Kobayashi [5], consiste à évaluer la courbure en chaque point de l'interface discrète comme l'inverse du rayon du cercle circonscrit au triangle composé de ce point et de ses deux plus proches voisins sur l'interface discrète. L'autre, due à Roosen [9] et Taylor [12] [13] consiste à évaluer une courbure moyenne pondérée associée aux segments de l'interface discrétisée.

L'équation de diffusion pour la concentration est discrétisée à l'aide d'un schéma semi-implicite en temps. Pour la discrétisation en espace, on utilise une méthode d'éléments finis avec des fonctions de base linéaires par morceaux et alternativement une triangulation fixe ou une triangulation qui varie au cours du temps de telle façon que l'interface discrétisée coïncide avec des côtés de triangles à chaque pas de temps.

Ces méthodes numériques ont été mises en oeuvre avec des conditions aux limites de Neumann homogène ou des conditions de Dirichlet sur le bord supérieur du domaine. Les résultats numériques obtenus sont compatibles avec les propriétés qualitatives de la solution. Lorsqu'on impose une condition de Neumann homogène sur le bord supérieur du domaine, ce qui correspond à un système physique fermé, on vérifie numériquement que $C(t)$ converge vers la concentration de saturation α quand $t \rightarrow +\infty$ et que l'intégrale $\int_{\Omega_t} (1 - C(x, y, t)) dx dy$ est conservée au cours du temps (ceci correspond à la conservation au cours du temps de la masse totale du composé). Par ailleurs, lorsqu'on impose une condition de Dirichlet sur le bord supérieur, on constate numériquement que la concentration C et l'interface Γ_t convergent vers une onde progressive où l'interface est donnée par $f(x, t) = f_0 + vt$ et la concentration est donnée par $C(x, y, t) = C(y - vt - f_0)$, $f_0 = \text{constante}$ étant l'interface initiale et v étant la vitesse de déplacement de f . Dans les deux cas considérés, on observe que la frontière libre se stabilise et ne présente pas de développement de dendrites. Cette étude a été effectuée en collaboration avec C. Dupaix et D. Hilhorst.

Références

- [1] F. ABERGEL, D. HILHORST, F. ISSARD-ROCH, *On a dissolution-growth problem with surface tension in the neighborhood of a stationary solution*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 24, No. 2 (1993), p. 299-316.

- [2] B.V. BAZALIÏ , S.P. DEGTYAREV, *On classical solvability of the multidimensional Stefan problem for convective motion of a viscous incompressible fluid*, Math. USSR Sbornik, Vol. 60 (1988), No. 1.
- [3] X. CHEN, F. REITICH, *Local existence and uniqueness of solutions of the Stefan problem with surface tension and kinetic undercooling*, J. Math. Anal. Appl. 164 (1992), p. 350-362.
- [4] J. DUCHON, R. ROBERT, *Evolution d'une interface par capillarité et diffusion de volume I. Existence locale en temps*, Ann. Inst. H. Poincaré, 1 (1984), p. 361-378.
- [5] T. IKEDA, R. KOBAYASHI, *Numerical approach to interfacial dynamics*, Proc. of Workshop on nonlinear PDE and appli. (1989)
- [6] J. JUTARD, *Instabilités interfaciales morphologiques. Etude de l'évolution d'une electrode de cuivre soumise à une réaction électrochimique*, Thèse de doctorat, 1993.
- [7] O.A. LADYŽENSKAJA, V.A. SOLONNIKOV, N.N. URAL'CEVA, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Translations of Mathematical Monographs Volume 23, Providence R.I, American Mathematical Society 1968.
- [8] E. RADKEVITCH, *The Gibbs-Thomson correction and conditions for the classical solution of the modified Stefan problem*, Soviet Mathematics Doklady 43, No 1 (1991).
- [9] A. ROOSEN, *Modeling crystal growth in a diffusion field with fully-faceted crystals*, Ph. D. thesis, University of New Jersey, 1993.
- [10] G. SANTARINI, *Théorie de l'instabilité interfaciale morphologique. Cas des phénomènes de dissolution et de dépôt. Première partie*, J. de Chimie Physique, 1985, 82, no1.
- [11] G. SANTARINI, *Théorie de l'instabilité interfaciale morphologique. Cas des phénomènes de dissolution et de dépôt. Deuxième partie*, J. de Chimie Physique, 1985, 82, no4.
- [12] J. TAYLOR, J. CAHN, A. HANDWERKER, *I- Geometric models of crystal growth*, Acta metall. mater. Vol. 40, No 7, p. 1443-1474, 1992.
- [13] J. TAYLOR, J. CAHN, A. HANDWERKER, *II- Mean curvature and weighted mean curvature*, Acta metall. mater. Vol. 40, No 7, p. 1475-1485, 1992.

Chapitre 1

MODELISATION PHYSIQUE

1.1 La modélisation physique et la dérivation mathématique.

De nombreux phénomènes physiques, qu'ils soient naturels ou industriels, présentent une phase solide en contact avec une phase liquide, chacune d'elles évoluant par échange de matière. Ces phénomènes s'accompagnent d'un changement de géométrie de l'interface entre ces deux phases. On s'intéresse plus particulièrement à l'évolution morphologique de ces interfaces. Dans cette thèse, le phénomène physique considéré à l'origine est un processus de corrosion ou de dépôt, où typiquement un métal se trouve en contact avec un milieu liquide avec lequel il interagit. Ce phénomène est alors modélisé de la façon suivante.

On considère un système constitué d'une phase solide formée d'un seul composé et une phase liquide incompressible qui est une solution diluée du composé. On suppose que l'évolution dans le temps de ce système met en jeu deux types de processus : un processus homogène de diffusion de matière dans la phase liquide, rendant compte de la migration de l'espèce chimique dans le liquide, et un processus hétérogène de dissolution-croissance localisé à l'interface entre solide et liquide. Nous allons alors établir les équations traduisant ces différents processus en dimension deux d'espace.

Commençons par fixer un certain nombre de notations. Soient Ω_t le domaine occupé par le liquide et Γ_t l'interface entre le solide et le liquide. On désigne par $C(x, y, t)$ la concentration de l'espèce chimique passée en solution, dépendant des variables d'espace (x, y) et du temps t .

Les équations gouvernant l'évolution de la concentration et de l'interface se déduisent alors des lois physiques suivantes :

i) Bilan de matière

On suppose que le liquide est au repos et qu'un chaque point de l'interface, la diminution de volume du solide est exactement égale à l'augmentation de volume du liquide, de sorte que la vitesse de convection est négligeable. On néglige également tous les autres flux par rapport au flux de diffusion. Si l'on note J le flux de diffusion, la première loi de Fick donne

$$J = -D \operatorname{grad}(C), \quad (1.1)$$

où le coefficient de diffusion D est une constante positive.

Soit ω_t un sous domaine arbitraire se décomposant en ω_t^l , la partie occupée par la phase liquide et ω_t^s par la phase solide, c'est-à-dire $\omega_t = \omega_t^l \cup \omega_t^s$ (voir Figure 1.1).

La conservation de masse dans ω_t se traduit par une quantité de matière constante dans ω_t à chaque instant. Autrement dit,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left(\int_{\omega_t} C \, dx dy \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\int_{\omega_t^l} C \, dx dy \right) + \frac{d}{dt} \left(\int_{\omega_t^s} \frac{1}{V} \, dx dy \right), \end{aligned} \quad (1.2)$$

où V étant le volume molaire du solide, $\frac{1}{V}$ représente la concentration dans la phase solide.

De plus, on désigne par n^l (respectivement n^s) le vecteur unitaire normal à la frontière $\partial\omega_t^l$ (resp. $\partial\omega_t^s$) de ω_t^l (resp. ω_t^s) dirigé vers l'intérieur de ω_t^l (resp. ω_t^s) (voir Figure 1.1). Enfin, on note $\mathcal{V}_{n^l}$ (resp. $\mathcal{V}_{n^s}$) la vitesse normale à $\partial\omega_t^l$ (resp. $\partial\omega_t^s$).

L'équation (1.2) s'écrit alors

$$0 = \int_{\omega_t^l} C_t dx dy - \int_{\partial\omega_t^l} C \mathcal{V}_{n^l} d\sigma - \int_{\partial\omega_t^s} \frac{1}{V} \mathcal{V}_{n^s} d\sigma. \quad (1.3)$$

Par ailleurs, en posant $\tilde{\Gamma} = \Gamma_t \cap \omega_t$ la partie de l'interface contenue dans ω_t (voir Figure 1.1), on a

$$\int_{\partial\omega_t^l} C \mathcal{V}_{n^l} d\sigma = \int_{\tilde{\Gamma}} C V_n d\sigma + \int_{\partial\omega_t^l \setminus \tilde{\Gamma}} C \mathcal{V}_{n^l} d\sigma \quad (1.4)$$

$$\text{et } \int_{\partial\omega_t^s} \frac{1}{V} \mathcal{V}_{n^s} d\sigma = - \int_{\tilde{\Gamma}} \frac{1}{V} V_n d\sigma, \quad (1.5)$$

où n est la normale unitaire à l'interface Γ_t , dirigée vers l'intérieur de la phase liquide et où V_n est la vitesse normale à Γ_t .

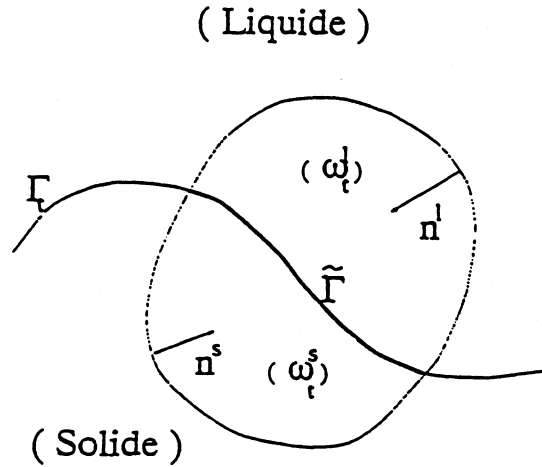


Figure 1.1
Décomposition du sous domaine ω_t en ω_t^l et ω_t^s .

En reportant les équations (1.4) et (1.5) dans (1.3) et en utilisant le fait que $J.n^l = C \mathcal{V}_{n^l}$, on obtient

$$0 = \int_{\omega_t^l} C_t dx dy + \int_{\tilde{\Gamma}} \left(\frac{1}{V} - C \right) V_n d\sigma - \int_{\partial\omega_t^l \setminus \tilde{\Gamma}} J.n^l d\sigma. \quad (1.6)$$

L'équation (1.6) a lieu pour tout sous domaine ω_t . En particulier, pour $\omega_t = \omega_t^l$, c'est-à-dire pour $\omega_t^s = \emptyset$ ou bien encore pour $\tilde{\Gamma} = \emptyset$, l'équation (1.6) se réduit à

$$\int_{\omega_t^l} C_t dx dy = \int_{\partial\omega_t^l} J.n^l d\sigma. \quad (1.7)$$

De plus, grâce à (1.1), on a

$$\begin{aligned} \int_{\partial\omega_t^l} J.n^l d\sigma &= -D \int_{\partial\omega_t^l} \frac{\partial C}{\partial n^l} d\sigma \\ &= D \int_{\omega_t^l} \Delta C dx dy, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\int_{\omega_t^l} C_t dx dy = D \int_{\omega_t^l} \Delta C dx dy,$$

pour tout $\omega_t^l \subset \Omega_t$. Nous obtenons ainsi l'équation de diffusion :

$$C_t = D\Delta C \quad \text{dans la phase liquide.} \quad (1.8)$$

En substituant alors (1.7) dans l'équation (1.6) il vient

$$\int_{\tilde{\Gamma}} \left(\frac{1}{V} - C \right) V_n d\sigma + \int_{\tilde{\Gamma}} J.n d\sigma = 0,$$

pour tout $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma_t$. On obtient ainsi l'équation à l'interface :

$$-J.n = D \frac{\partial C}{\partial n} = \left(\frac{1}{V} - C \right) V_n \quad \text{sur l'interface } \Gamma_t. \quad (1.9)$$

ii) Loi de dissolution-croissance du solide

On suppose que la cinétique de dissolution-croissance à l'interface suit la loi suivante :

$$V_n = h(C, K),$$

où h est une fonction cinétique, dépendante du type de réaction considéré et modifiée par la courbure moyenne K de l'interface.

Dans toute cette étude, nous considérons une réaction d'interface du premier ordre et une loi de Gibbs-Thomson pour introduire la dépendance de la courbure moyenne K [8]. On considère ainsi la loi cinétique suivante

$$h(C, K) = \Lambda V \left(C - S_0 e^{\gamma K} \right),$$

où Λ est une constante cinétique, S_0 est la concentration de saturation de la solution et la constante positive γ est proportionnelle à la tension superficielle de l'interface. Avec ce choix particulier de la fonction cinétique h , on a

$$V_n = \Lambda V (C - S_0 e^{\gamma K}) \quad \text{sur } \Gamma_t. \quad (1.10)$$

Remarque 1.1. Le domaine de validité de la loi cinétique (1.10) est déterminé par le domaine de variation de l'argument γK de l'exponentielle. La valeur de γK ne doit pas être trop grande. En pratique et notamment dans le cadre de l'étude numérique, on impose à γK de ne pas excéder la valeur 2.

Remarque 1.2. D'autres types de réactions d'interface peuvent être considérés. Une réaction d'ordre deux, par exemple, prendrait en compte la concentration C de façon quadratique (voir [3] pour plus de détails). L'étude menée ici en serait cependant sensiblement différente.

Le système est donc mathématiquement régi par les trois équations fondamentales

$$\begin{cases} C_t = D \Delta C & \text{dans la phase liquide } \Omega_t & (1.11) \\ D \frac{\partial C}{\partial n} = \left(\frac{1}{V} - C \right) V_n & \text{sur l'interface } \Gamma_t & (1.12) \\ V_n = \Lambda V (C - S_0 e^{\gamma K}) & \text{sur } \Gamma_t & (1.13) \end{cases}$$

Les équations de base étant maintenant établies, nous précisons ci-dessous les problèmes aux limites étudiés dans cette thèse.

1.2 Les différents problèmes aux limites de l'étude analytique.

Dans l'étude analytique, on suppose que la concentration $\frac{1}{V}$ de la phase solide est beaucoup plus grande que la concentration C de l'espèce en solution. La relation d'interface (1.12) devient donc

$$D \frac{\partial C}{\partial n} = \frac{1}{V} V_n \quad \text{sur l'interface } \Gamma_t. \quad (2.1)$$

On particularise alors le système en considérant d'une part le cas d'une interface paramétrée sous la forme $y = f(x, t)$, et d'autre part le cas où l'interface est une courbe simple fermée. On précise notamment les conditions aux limites et les données initiales pour chacun des cas.

1.2.1 Cas d'une interface paramétrée sous la forme $y = f(x, t)$.

On suppose que l'interface est décrite par le graphe $\Gamma_t = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, y = f(x, t)\}$. Nous envisageons alors le cas où la phase liquide est délimitée par un bord supérieur fixe d'ordonnée e .

On pose $Q_f = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, (x, y) \in \Omega_t\}$ où la phase liquide Ω_t est définie par $\Omega_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, t) < y < e\}$.

La vitesse normale V_n et la courbure moyenne K de l'interface s'expriment alors par

$$V_n = \frac{f_t}{(1 + f_x^2)^{1/2}} \quad \text{et} \quad K = -\frac{f_{xx}}{(1 + f_x^2)^{3/2}}.$$

Les équations (2.1) et (1.13) s'écrivent alors

$$D \frac{\partial C}{\partial n}(x, f(x, t), t) = \frac{1}{V} \frac{f_t}{(1 + f_x^2)^{1/2}} \quad (2.2)$$

$$\frac{f_t}{(1 + f_x^2)^{1/2}} = \Lambda V \left(C(x, f(x, t), t) - S_0 \exp \left(-\gamma \frac{f_{xx}}{(1 + f_x^2)^{3/2}} \right) \right) \quad (2.3)$$

Conditions aux limites et données initiales.

On suppose que C et f sont périodiques de période $2L$ dans la direction x , c'est-à-dire

$$\begin{cases} C(x + 2L, y, t) = C(x, y, t), & (x, y, t) \in Q_f \\ f(x + 2L, t) = f(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (2.4)$$

On suppose de plus que C satisfait une condition de Neumann homogène sur le bord supérieur fixe du domaine :

$$\frac{\partial C}{\partial y}(x, e, t) = 0 \quad \text{pour } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+. \quad (2.5)$$

Enfin, on impose des données initiales $2L$ -périodiques en x :

$$\begin{cases} f(x, 0) = f_0(x), & x \in \mathbb{R} \\ C(x, y, 0) = C_0(x, y), & (x, y, t) \in Q_{f_0} \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f_0(x) < y < e\}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Adimensionalisation du problème.

Afin d'obtenir des équations sans dimension, on pose :

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{e}, \tilde{L}) = \frac{\Lambda}{D} (x, y, e, L), \quad \tilde{t} = \frac{\Lambda^2}{D} t,$$

$$\tilde{\gamma} = \frac{\Lambda}{D} \gamma, \quad \tilde{\alpha} = V S_0,$$

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{\Lambda}{D} f(x, t), \quad \tilde{C}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = V C(x, y, t).$$

En omettant les *tildes* des notations, les équations (1.11), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) et (2.6) se transforment en :

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_t = \Delta C & \text{dans } Q_f \equiv \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, f(x, t) < y < e\}, \\ \left(C - \frac{\partial C}{\partial n}\right)(x, f(x, t), t) = \alpha \exp\left(\frac{-\gamma f_{xx}}{(1 + f_x^2)^{3/2}}(x, t)\right), & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ \frac{\partial C}{\partial y}(x, e, t) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ C(x + 2L, y, t) = C(x, y, t), & (x, y, t) \in Q_f \\ C(x, y, 0) = C_0(x, y), \quad (x, y) \in \Sigma_f \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f_0(x) < y < e\}, \\ \frac{f_t}{(1 + f_x^2)^{1/2}} = -\alpha \exp\left(\frac{-\gamma f_{xx}}{(1 + f_x^2)^{3/2}}(x, t)\right) + C(x, f(x, t), t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ f(x + 2L, t) = f(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ f(x, 0) = f_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

1.2.2 Cas où l'interface est une courbe simple fermée.

On suppose que l'interface Γ_t est une courbe simple fermée et que la phase liquide Ω_t est un domaine de $\mathbb{R}^2$ simplement connexe, délimité extérieurement par un bord fixe régulier $\mathcal{S}$ et intérieurement par l'interface Γ_t .

Conditions aux limites et données initiales.

On suppose que la concentration C vérifie une condition de Neumann homogène sur le bord extérieur fixe $\mathcal{S}$ de Ω_t :

$$\frac{\partial C}{\partial n_{\mathcal{S}}} = 0, \quad \text{sur } \mathcal{S},$$

où $n_{\mathcal{S}}$ est la normale unitaire au bord fixe $\mathcal{S}$.

Par ailleurs, on choisit les données initiales :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Gamma_{t=0} &= \Gamma_0 \\ C(x, y, 0) &= C_0(x, y) \end{array} \right. \quad (x, y) \in \Omega_0, \quad (2.7)$$

où Γ_0 est une courbe simple fermée et régulière et Ω_0 est le domaine initial délimité par Γ_0 et $\mathcal{S}$.

La fonction C et l'interface Γ_t vérifient alors le problème

$$\begin{cases} C_t = D\Delta C & \text{dans } Q \equiv \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, (x, y) \in \Omega_t\}, \\ D\frac{\partial C}{\partial n} = \frac{1}{V} V_n & \text{sur } \Sigma \equiv \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, (x, y) \in \Gamma_t\}, \\ \frac{\partial C}{\partial n_{\mathcal{S}}} = 0, & \text{sur } \mathcal{S} \times \mathbb{R}^+, \\ C(x, y, 0) = C_0(x, y) & (x, y) \in \Omega_0, \\ \begin{cases} V_n = \Lambda V (C - S_0 \exp(\gamma K)) & \text{sur } \Sigma, \\ \Gamma_{t=0} = \Gamma_0. \end{cases} \end{cases}$$

Adimensionalisation du problème.

On paramétrise l'interface Γ_t par son abscisse curviligne s :

$$\begin{aligned} \Gamma_t : [0, l] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto (x(s, t), y(s, t)). \end{aligned}$$

On pose alors

$$\begin{aligned} (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{s}, \tilde{t}) &= \frac{\Lambda}{D} (x, y, s, l), \quad \tilde{t} = \frac{\Lambda^2}{D} t, \\ \tilde{\gamma} &= \frac{\Lambda}{D} \gamma, \quad \tilde{\alpha} = V S_0, \\ \tilde{C}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) &= V C(x, y, t). \end{aligned}$$

On définit de plus l'interface transformée suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\tilde{t}} : [0, \tilde{l}] &\longleftarrow \mathbb{R}^2 \\ \tilde{s} &\longmapsto (\tilde{x}(\tilde{s}, \tilde{t}), \tilde{y}(\tilde{s}, \tilde{t})) = \frac{\Lambda}{D} (x(s, t), y(s, t)) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\tilde{\Gamma}_{\tilde{t}}(\tilde{s}) = \frac{\Lambda}{D} \Gamma_t(s).$$

On définit de la même façon, le domaine $\tilde{\Omega}_{\tilde{t}}$ transformé de Ω_t .

Il s'agit alors d'écrire les équations vérifiées par $\tilde{C}$ et $\tilde{\Gamma}_{\tilde{t}}$. Si l'on note $\tilde{\vec{n}}$, $\tilde{V}_{\tilde{n}}$ et $\tilde{K}$ respectivement la normale unitaire, la vitesse normale à $\tilde{\Gamma}_{\tilde{t}}$ et sa courbure moyenne, on montre aisément que

$$\tilde{\vec{n}} = \vec{n}, \quad V_n = \Lambda \tilde{V}_{\tilde{n}} \quad \text{et} \quad K = \frac{\Lambda}{D} \tilde{K}.$$

La fonction $\tilde{C}$ et l'interface $\tilde{\Gamma}_t$ vérifient donc le problème suivant, où les *tildes* ont été supprimés des notations

$$\begin{cases} C_t = \Delta C & \text{dans } Q \equiv \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, (x, y) \in \Omega_t\}, \\ \frac{\partial C}{\partial n} = V_n & \text{sur } \Sigma \equiv \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, (x, y) \in \Gamma_t\}, \\ \frac{\partial C}{\partial n_S} = 0 & \text{sur } \mathcal{S} \times \mathbb{R}^+, \\ C(x, y, 0) = C_0(x, y) & (x, y) \in \Omega_0, \\ \begin{cases} V_n = (C - \alpha \exp(\gamma K)) & \text{sur } \Sigma, \\ \Gamma_{t=0} = \Gamma_0. \end{cases} \end{cases}$$

Remarque 2.1. Le choix d'une condition de Neumann homogène n'est pas essentiel à l'étude analytique de ces problèmes. On aurait tout aussi bien pu envisager une condition de type Dirichlet.

1.3 Les systèmes étudiés numériquement.

On suppose que l'interface Γ_t est une courbe périodique en x , non nécessairement décrite par un graphe. Nous considérons alors deux types de problèmes :

1) Le problème de Neumann.

Le bord supérieur du domaine Ω_t est un plan fixe $\mathcal{B} \equiv \{y = e\}$. La concentration C satisfait la condition de Neumann homogène

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad \text{sur } \mathcal{B} = \{y = e\}.$$

2) Le problème de Dirichlet.

La phase liquide est une couche de diffusion : le bord supérieur $\mathcal{B}_t \equiv \{y = d(t) + e\}$ de Ω_t est un plan se déplaçant à une vitesse $d'(t)$ telle que l'aire du domaine Ω_t est conservée au cours du temps. La concentration C satisfait la condition de Dirichlet

$$C = g \quad \text{sur } \mathcal{B}_t = \{y = d(t) + e\},$$

où g est une fonction donnée.

Par ailleurs, pour les deux problèmes considérés (Neumann et Dirichlet), on suppose que C et Γ_t sont $2L$ -périodiques en x . Ceci nous permet d'obtenir un problème équivalent dans un domaine que l'on note également Ω_t , borné dans la direction x , avec $x \in (0, 2L)$.

Pour cela, on impose à C et Γ_t des conditions de périodicité que l'on explicite ci-dessous.

Par souci de simplification, on fait l'hypothèse que Γ_t ne possède qu'un seul point d'abscisse $x = 0$. Autrement dit, Γ_t est un graphe dans un voisinage de $\{x = 0\}$. Pour $t \geq 0$, les conditions de périodicité pour la concentration s'écrivent alors

$$(C_1) \begin{cases} C(0, \cdot, t) = C(2L, \cdot, t) \\ \frac{\partial C}{\partial x}(0, \cdot, t) = \frac{\partial C}{\partial x}(2L, \cdot, t) \end{cases}$$

et pour l'interface Γ_t , si Γ_t est paramétrée par son abscisse curviligne s , c'est-à-dire si

$$\begin{aligned} \Gamma_t : [0, l] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto (x(s, t), y(s, t)), \end{aligned}$$

elles s'écrivent

$$(C_2) \begin{cases} x(0, t) = x(l, t) + 2L, & y(0, t) = y(l, t) \\ \frac{\partial x}{\partial s}(0, t) = \frac{\partial x}{\partial s}(l, t), & \frac{\partial y}{\partial s}(0, t) = \frac{\partial y}{\partial s}(l, t). \end{cases}$$

Remarque 3.1. Sans l'hypothèse simplificatrice précédente, la condition (C_2) porterait sur tous les points de Γ_t d'abscisse $x = 0$. Cependant, l'étude numérique montre que cette hypothèse est vérifiée dans le cas du problème de dissolution-croissance étudié : si l'interface initiale est de la forme $y = f_0(x)$, alors l'interface peut être paramétrée en tout temps sous la forme $y = f(x, t)$.

Enfin, on impose des données initiales vérifiant les conditions de périodicité (C_1) et (C_2) :

$$\begin{cases} \Gamma_{t=0} = \Gamma_0 \\ C(x, y, 0) = C_0(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in \Omega_0,$$

où Ω_0 est le domaine initial, délimité par Γ_0 .

On obtient donc le problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_t = D\Delta C & \text{dans } Q, \\ D\frac{\partial C}{\partial n} = \left(\frac{1}{V} - C\right) V_n & \text{sur } \Sigma, \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial n_B}(x, e, t) = 0 \\ \text{ou} \\ C(x, d(t) + e, t) = g(x) \end{array} \right. & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ C \text{ satisfait la condition de périodicité } (C_1), & \\ C(x, y, 0) = C_0(x, y) & (x, y) \in \Omega_0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} V_n = \Lambda.V(C - S_0 \exp(\gamma K)) & \text{sur } \Sigma, \\ \Gamma_t \text{ satisfait la condition de périodicité } (C_2), \\ \Gamma_{t=0} = \Gamma_0, \end{array} \right.$$

où $Q \equiv \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, (x, y) \in \Omega_t\}$ et $\Sigma \equiv \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, (x, y) \in \Gamma_t\}$.

En reprenant l'adimensionalisation effectuée au paragraphe 1.2.2 dans le cas où l'interface est une courbe simple fermée et en posant de plus $\tilde{e} = \frac{\Lambda}{D}e$, $\tilde{d}(\tilde{t}) = \frac{\Lambda}{D}d(t)$ et $\tilde{g}(\tilde{x}) = g(x)$, on obtient le problème sans dimension suivant où les *tildes* ont été supprimés des notations

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_t = \Delta C & \text{dans } Q \\ \frac{\partial C}{\partial n} = (1 - C) V_n & \text{sur } \Sigma, \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial n_B}(x, e, t) = 0 \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ \text{ou} \\ C(x, d(t) + e, t) = g(x) \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \end{array} \right. \\ C \text{ satisfait la condition de périodicité } (C_1), \\ C(x, y, 0) = C_0(x, y) & (x, y) \in \Omega_0, \\ \left\{ \begin{array}{ll} V_n = (C - \alpha \exp(\gamma K)) & \text{sur } \Sigma, \\ \Gamma_t \text{ satisfait la condition de périodicité } (C_2), \\ \Gamma_{t=0} = \Gamma_0, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où $Q \equiv \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, (x, y) \in \Omega_t\}$ et $\Sigma \equiv \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, (x, y) \in \Gamma_t\}$.

Chapitre 2

EXISTENCE ET UNICITÉ LOCALES EN TEMPS : Le cas d'une paramétrisation de l'interface de la forme $y = f(x,t)$

2.1 Introduction.

Le système considéré est constitué d'une phase solide formée d'un seul composé et d'une phase liquide incompressible qui est une solution diluée de ce composé. L'évolution en temps de ce système, qui modélise le phénomène de corrosion décrit au chapitre précédent, est régie mathématiquement par les trois équations fondamentales,

$$C_t = \Delta C \text{ dans la phase liquide,}$$

où $C = C(x, y, t)$ est la concentration de l'espèce chimique dans la phase liquide,

$$\frac{\partial C}{\partial n} \big|_{\Gamma_t} = V_n,$$

où Γ_t est l'interface entre solide et liquide, n est le vecteur unitaire normal à l'interface, dirigé vers le liquide, et V_n est la vitesse normale à Γ_t donnée par la loi cinétique [6]

$$V_n = C|_{\Gamma_t} - \alpha \exp(\gamma K),$$

où α et γ sont des constantes positives, γ étant proportionnelle à la tension superficielle, et K est la courbure moyenne de l'interface.

Dans ce chapitre, nous étudions ce système en considérant le cas où la phase liquide est délimitée par un bord supérieur fixe d'ordonnée e , et l'on suppose que la concentration C satisfait une condition de Neumann homogène sur ce bord fixe. On suppose de plus, que l'interface Γ_t est décrite par le graphe $\Gamma_t = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, y = f(x, t)\}$. Les fonctions f et C vérifient alors le problème

$$(P) \left\{ \begin{array}{ll} C_t = \Delta C & \text{dans } Q_f \equiv \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, f(x, t) < y < e\}, \quad (1.1) \\ \left(C - \frac{\partial C}{\partial n}\right)(x, f(x, t), t) = \alpha \exp\left(\frac{-\gamma f_{xx}}{(1 + f_x^2)^{3/2}}(x, t)\right), & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad (1.2) \\ \frac{\partial C}{\partial y}(x, e, t) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad (1.3) \\ C(x + 2L, y, t) = C(x, y, t), & (x, y, t) \in Q_f \quad (1.4) \\ C(x, y, 0) = C_0(x, y), \quad (x, y) \in \Sigma_f \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f_0(x) < y < e\}, & (1.5) \\ \frac{f_t}{(1 + f_x^2)^{1/2}} = -\alpha \exp\left(\frac{-\gamma f_{xx}}{(1 + f_x^2)^{3/2}}(x, t)\right) + C(x, f(x, t), t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad (1.6) \\ f(x + 2L, t) = f(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad (1.7) \\ f(x, 0) = f_0(x), & x \in \mathbb{R} \quad (1.8) \end{array} \right.$$

Les conditions (1.4) et (1.7) expriment la périodicité de la concentration et de l'interface dans la direction x . En outre, les données initiales f_0 et C_0 qui sont périodiques en x ,

de période $2L$, vérifient les conditions de compatibilité :

$$(H_0) \begin{cases} \frac{\partial C_0}{\partial n}(x, f_0(x)) = C_0(x, f_0(x)) - \alpha \exp\left(\frac{-\gamma f_0''}{(1 + f_0'^2)^{3/2}}(x)\right), & x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial C_0}{\partial y}(x, e) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Abergel, Hilhorst et Issard-Roch [1] ont montré l'existence et l'unicité de la solution au voisinage de la solution stationnaire $(f, C) = (0, \alpha)$, pour le problème (P) dans le cas où le domaine spatial est la couche de diffusion $\{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, f(x, t) < y < f(x, t) + e\}$.

L'objet de ce chapitre est d'établir l'existence et l'unicité locales en temps de la solution du problème (P) . Plus précisément, on va montrer le résultat suivant :

Théorème 1.1

Soit $f_0 \in C_{\text{per}}^{4+\lambda}(\mathbb{R})$ avec $\sup_{\mathbb{R}} |f_0| \leq \frac{e}{3}$ et $C_0 \in C_{\text{per}}^{3+\lambda}(\overline{\Sigma}_f)$, pour $0 < \lambda < 1$. Il existe $T > 0$ tel que le problème (P) admet une solution unique

$$(f, C) \in C_{\text{per}}^{3+\lambda, (3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T) \times C_{\text{per}}^{2+\lambda, (2+\lambda)/2}(\overline{Q}_{f,T}),$$

où $\Sigma_T \equiv \mathbb{R} \times (0, T)$ et $Q_{f,T} \equiv \{(x, y, t) \in Q_f, t \in (0, T)\}$.

La démonstration du théorème est organisée de la façon suivante.

Au paragraphe 2, on rappelle les définitions des espaces de Hölder que nous utilisons, ainsi qu'un certain nombre de propriétés dans ces espaces.

Au paragraphe 3, on transforme le problème (P) en un problème $(\hat{P})$ sur un domaine fixe.

On transforme ensuite, au paragraphe 4, le problème $(\hat{P})$ en un problème (P^0) avec données initiales homogènes en $t = 0$, comme cela est fait par Bazaliï et Degtyarev [2], dans le cadre d'un problème de Stefan décrivant le déplacement d'un fluide visqueux incompressible. L'idée est d'utiliser des espaces de Hölder à données initiales nulles pour lesquels il y a des estimations des constantes d'injections en fonction du temps. C'est pour ce problème (P^0) que l'on établit l'existence locale en temps d'une solution.

Pour cela, on considère au paragraphe 5, un problème linéaire associé et on montre qu'il existe une solution unique de ce problème, pour un temps T suffisamment petit.

Puis, au paragraphe 6, on donne la preuve de l'existence locale en temps d'une solution du problème (P^0) , en utilisant une méthode de point fixe.

Enfin, l'unicité de la solution du problème (P) est établie au paragraphe 7.

2.2 Quelques résultats et propriétés des espaces de Hölder utilisés.

2.2.1 Les espaces de Hölder utilisés.

Les espaces utilisés sont les espaces de Hölder $C^{l,l/2}(\overline{Q}_T)$ et $C^{l,l/2}(\overline{\Sigma}_T)$ définis par Ladyženskaja, Solonnikov et Ural'ceva [7] où

$$Q_T = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, T), 0 < y < 1\} \text{ et } \Sigma_T = \mathbb{R} \times (0, T),$$

que l'on dénotera souvent par

$$C^{m+\lambda, (m+\lambda)/2}(\overline{Q}_T) \text{ et } C^{m+\lambda, (m+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T) \text{ avec } m = [l] \text{ et } \lambda = l - [l],$$

$[l]$ désignant la partie entière de l . On rappelle alors la définition de ces espaces :

Pour une fonction $u : \overline{Q}_T \rightarrow \mathbb{R}$, on note $D_t^r D_X^s u$ les dérivées partielles de u , c'est-à-dire $D_t^r D_X^s u = \frac{\partial^{r+s} u}{\partial t^r \partial x^{s_1} \partial y^{s_2}}$, avec $X = (x, y)$ et $s = s_1 + s_2$. Alors

$$C^{m+\lambda, (m+\lambda)/2}(\overline{Q}_T) = \left\{ u : \overline{Q}_T \rightarrow \mathbb{R}, D_t^r D_X^s u \in C^0(\overline{Q}_T), \right. \\ \left. \text{pour } 0 \leq 2r + s < \lambda + m, \text{ telle que } \|u\|_{Q_T}^{(\lambda+m)} < +\infty \right\}$$

avec la norme

$$\|u\|_{Q_T}^{(\lambda+m)} = \langle u \rangle_{Q_T}^{(\lambda+m)} + \sum_{j=0}^m \sum_{(2r+s=j)} \max_{Q_T} |D_t^r D_X^s u|,$$

où

$$\langle u \rangle_{Q_T}^{(\lambda+m)} = \sum_{(2r+s=m)} \langle D_t^r D_X^s u \rangle_{X, Q_T}^{(\lambda)} + \sum_{(0 < \lambda+m-2r-s < 2)} \langle D_t^r D_X^s u \rangle_{t, Q_T}^{(\frac{\lambda+m-2r-s}{2})}$$

et, pour $\rho_0 > 0$ et $0 < \alpha < 1$,

$$\langle u \rangle_{X, Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{\substack{(X, t), (X', t) \in \overline{Q}_T \\ |X - X'| \leq \rho_0}} \frac{|u(X, t) - u(X', t)|}{|X - X'|^\alpha}, \\ \langle u \rangle_{t, Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{\substack{(X, t), (X, t') \in \overline{Q}_T \\ |t - t'| \leq \rho_0}} \frac{|u(X, t) - u(X, t')|}{|t - t'|^\alpha}.$$

Remarque 2.1. Ces espaces sont des espaces de Banach pour les normes considérées. Par ailleurs, ces normes dépendent de ρ_0 , mais pour différents $\rho_0 > 0$, elles sont équivalentes.

On définit également les espaces

$$C_{\text{per}}^{l,l/2}(\overline{Q}_T) = \left\{ v \in C^{l,l/2}(\overline{Q}_T), \right. \\ \left. v(x+2L, y, t) = v(x, y, t) \text{ pour tout } (x, y, t) \in Q_T \right\}$$

des fonctions $2L$ -périodiques dans la direction des x et de façon similaire $C_{\text{per}}^{l,l/2}(\overline{\Sigma}_T)$. Par la suite, l'indice *per* fera toujours référence à des fonctions $2L$ -périodiques dans la direction x .

Finalement, on rappelle la définition des espaces de Hölder à données initiales homogènes donnée par Ladyženskaja, Solonnikov et Ural'ceva [7, page 301] :

$$C_0^{l,l/2}(\overline{Q}_T) = \left\{ v \in C^{l,l/2}(\overline{Q}_T), \frac{\partial^j v}{\partial t^j} \Big|_{t=0} = 0 ; j = 0, \dots, \left[\frac{l}{2} \right] \right\}.$$

Comme on le verra au Lemme 2.5 ci-dessous, on peut obtenir une estimation en fonction du temps T , des constantes d'injections dans ces espaces.

2.2.2 Propriétés des espaces de Hölder utilisés.

On donne ci-dessous un certain nombre de propriétés relatives aux espaces de Hölder utilisés. On commence tout d'abord par rappeler un résultat qui sera abondamment utilisé par la suite.

Lemme 2.2

(i) Soit $m \in \mathbb{N}$. Il existe une constante $C > 0$ dépendant seulement de m telle que

$$\|fg\|_{Q_T}^{(m+\lambda)} \leq C \|f\|_{Q_T}^{(m+\lambda)} \|g\|_{Q_T}^{(m+\lambda)}$$

pour tout $f, g \in C^{m+\lambda, (m+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$, $0 < \lambda < 1$.

(ii) Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left\| \frac{1}{f} \right\|_{Q_T}^{(1+\lambda)} \leq C (\|f\|_{Q_T}^{(1+\lambda)})^2$$

pour tout $f \in C^{1+\lambda, (1+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$, telle que $f \geq 1$.

(iii) Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\varphi \circ f\|_{Q_T}^{(1+\lambda)} \leq C \|\varphi\|_{(-M, M)}^{(1+\lambda)} \max \left(1, (\|f\|_{Q_T}^{(1+\lambda)})^2 \right)$$

pour tout $f \in C^{1+\lambda, (1+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$, telle que $-M \leq f \leq M$ et pour tout $\varphi \in C^{1+1}([-M, M])$ (espace des fonctions continûment dérivables à dérivées lipschitziennes).

Remarque 2.3. On utilisera le Lemme 2.2 (i) dans le cas où $g \in C^{m+\lambda, (m+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$ et $f \in C^{m+\lambda, (m+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$. On travaillera alors implicitement avec $\tilde{f}(x, y, t) = f(x, t)$ pour tout $(x, y, t) \in \overline{Q}_T$, de sorte que $\tilde{f} \in C^{m+\lambda, (m+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$ et $\|\tilde{f}\|_{Q_T}^{(m+\lambda)} = \|f\|_{\Sigma_T}^{(m+\lambda)}$.

On rappelle ensuite un résultat dû à Abergel et al. [1] permettant d'estimer les termes exponentiels. On note

$$\chi(s) = \exp(\gamma s) - 1 - \gamma s$$

χ vérifie alors les propriétés suivantes :

Lemme 2.4

(i) Il existe $\delta_0 > 0$ tel que, pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$ et pour tout $r \in C^{1+\lambda, (1+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$ vérifiant $\|r\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq \delta$, on a

$$\|\chi(r)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq \gamma^2 C \left(\|r\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \right)^2$$

où C est une constante indépendante de λ .

(ii) Il existe $\delta_0 > 0$ tel que, pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$ et pour tout $r, r' \in C^{1+\lambda, (1+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$ vérifiant $\|r\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)}, \|r'\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq \delta$, il existe $c = c(\delta_0)$ tel que

$$\|\chi(r) - \chi(r')\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c \|r - r'\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \max \left(\|r\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)}, \|r'\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \right).$$

Enfin, on donne un résultat d'estimation en fonction du temps T des constantes d'injections dans les espaces de Hölder $C_0^{l, l/2}(\overline{Q}_T)$ à données initiales homogènes [2]. C'est l'objet du lemme suivant qui étend un résultat de Ladyženskaja, Solonnikov et Ural'ceva [7, Lemme 4.1, page 302].

Lemme 2.5

Soit $l' > l > 0$ et $v \in C_0^{l', l'/2}(\overline{Q}_T)$. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|v\|_{Q_T}^{(l)} \leq c T^{(l'-l)/2} \|v\|_{Q_T}^{(l')}.$$

2.3 Transformation sur un domaine fixe.

On transforme le domaine Q_f dans le domaine fixe $\hat{Q}$ défini par $\hat{Q} = \{(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, 0 < \hat{y} < 1\}$, à l'aide du changement de variables :

$$\hat{x} = x, \quad \hat{y} = \frac{y - f(x, t)}{e - f(x, t)} = 1 - \frac{e - y}{e - f(x, t)}, \quad \hat{t} = t$$

et on pose

$$\hat{C}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}) = C(x, y, t), \quad \hat{f}(\hat{x}, \hat{t}) = f(x, t).$$

Les nouvelles fonctions $\hat{C}$ et $\hat{f}$ vérifient alors le problème $(\hat{P})$ suivant :

$$\begin{cases}
 \hat{C}_t = \hat{C}_{\hat{x}\hat{x}} + \frac{1}{(e - \hat{f}(\hat{x}, \hat{t}))^2} (1 + (1 - \hat{y})^2 \hat{f}_{\hat{x}}^2) \hat{C}_{\hat{y}\hat{y}} \\
 \quad - \frac{1 - \hat{y}}{e - \hat{f}(\hat{x}, \hat{t})} \left(\hat{f}_{\hat{x}\hat{x}} - \hat{f}_t + \frac{2\hat{f}_{\hat{x}}^2}{e - \hat{f}(\hat{x}, \hat{t})} \right) \hat{C}_{\hat{y}} - \frac{2(1 - \hat{y})}{e - \hat{f}(\hat{x}, \hat{t})} \hat{f}_{\hat{x}} \hat{C}_{\hat{x}\hat{y}}, \\
 \text{dans } \hat{Q} = \{(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, 0 < \hat{y} < 1\} \quad (3.1) \\
 \\
 \hat{C}(\hat{x}, 0, \hat{t}) - \frac{(1 + \hat{f}_{\hat{x}}^2)^{1/2}}{e - \hat{f}(\hat{x}, \hat{t})} \hat{C}_{\hat{y}}(\hat{x}, 0, \hat{t}) + \frac{\hat{f}_{\hat{x}}}{(1 + \hat{f}_{\hat{x}}^2)^{1/2}} \hat{C}_{\hat{x}}(\hat{x}, 0, \hat{t}) \\
 \quad = \alpha \exp\left(\frac{-\gamma \hat{f}_{\hat{x}\hat{x}}}{(1 + \hat{f}_{\hat{x}}^2)^{3/2}}\right), \quad (\hat{x}, \hat{t}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad (3.2) \\
 \\
 \hat{C}_{\hat{y}}(\hat{x}, 1, \hat{t}) = 0 \quad (\hat{x}, \hat{t}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad (3.3) \\
 \hat{C}(\hat{x} + 2L, \hat{y}, \hat{t}) = \hat{C}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}) \quad \text{dans } \hat{Q} \quad (3.4) \\
 \hat{C}(\hat{x}, \hat{y}, 0) = \hat{C}_0(\hat{x}, \hat{y}) \quad (\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R} \times (0, 1), \quad (3.5) \\
 \text{et} \\
 \hat{f}_t = - (1 + \hat{f}_{\hat{x}}^2)^{1/2} \left(\alpha \exp\left(\frac{-\gamma \hat{f}_{\hat{x}\hat{x}}}{(1 + \hat{f}_{\hat{x}}^2)^{3/2}}\right) - \hat{C}(\hat{x}, 0, \hat{t}) \right) \quad (\hat{x}, \hat{t}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad (3.6) \\
 \hat{f}(\hat{x} + 2L, \hat{t}) = \hat{f}(\hat{x}, \hat{t}) \quad (\hat{x}, \hat{t}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad (3.7) \\
 \hat{f}(\hat{x}, 0) = \hat{f}_0(\hat{x}) \quad \hat{x} \in \mathbb{R}. \quad (3.8)
 \end{cases}$$

Par ailleurs, les données initiales $\hat{C}_0$ et $\hat{f}_0$ sont périodiques en $\hat{x}$, de période $2L$ et satisfont les conditions de compatibilité $(\hat{H}_0)$:

$$\begin{aligned}
(\hat{H}_0) \left\{ \begin{aligned} & \hat{C}_0(\hat{x}, 0) + \frac{\hat{f}_0'}{(1 + \hat{f}_0'^2)^{1/2}} \hat{C}_{0\pm}(\hat{x}, 0) - \frac{(1 + \hat{f}_0'^2)^{1/2}}{e - \hat{f}_0} \hat{C}_{0\mp}(\hat{x}, 0) \\ & \quad = \alpha \exp\left(\frac{-\gamma \hat{f}_0''}{(1 + \hat{f}_0'^2)^{3/2}}\right) \end{aligned} \right. \quad \hat{x} \in \mathbb{R} \quad (3.9) \\
\left\{ \begin{aligned} & \hat{C}_{0\mp}(\hat{x}, 1) = 0 \end{aligned} \right. \quad \hat{x} \in \mathbb{R} \quad (3.10).
\end{aligned}$$

Remarque 3.1. Dans ce qui suit, on omettra les *chapeaux* des notations.

2.4 Le problème avec données initiales homogènes en $t = 0$.

On utilise les espaces $C_{0,\text{per}}^{l,l/2}(\overline{Q}_T)$, pour lesquels grâce au Lemme 2.5, on connaît des estimations en fonction du temps T des constantes d'injections. On va donc transformer le problème $(\hat{P})$ en un problème à données initiales nulles.

On suppose que les données initiales sont telles que $C_0 \in C_{\text{per}}^{3+\lambda}(\mathbb{R} \times [0, 1])$ et $f_0 \in C_{\text{per}}^{4+\lambda}(\mathbb{R})$ avec $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_0(x)| \leq \frac{e}{3}$.

On montre ci-dessous qu'il existe des fonctions

$$\begin{aligned}
v(x, y, t) &\in C_{\text{per}}^{3+\lambda, (3+\lambda)/2}(\overline{Q}_T) \\
\text{et } h(x, t) &\in C_{\text{per}}^{4+\lambda, (4+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)
\end{aligned}$$

telles que

$$\begin{cases} v(x, y, 0) = C_0(x, y) \\ v_t(x, y, 0) = C_t(x, y, 0) = C^{(1)}(x, y) \end{cases} \quad (4.1)$$

et

$$\begin{cases} h(x, 0) = f_0(x) \\ h_t(x, 0) = f_t(x, 0) = f^{(1)}(x) \end{cases} \quad (4.2)$$

où $C^{(1)}$ et $f^{(1)}$ sont déterminés à partir des équations différentielles (3.1) et (3.6) du problème $(\hat{P})$ à l'instant initial $t = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= f_t(x, 0) \\
&= -(1 + f_0'^2)^{1/2} \left(\alpha \exp\left(\frac{-\gamma f_0''}{(1 + f_0'^2)^{3/2}}\right) - C_0(x, 0) \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
C^{(1)}(x, y) &= C_t(x, y, 0) \\
&= C_{0_{xx}} + \frac{1}{(e - f_0)^2} \left(1 + (1 - y)^2 f_0'^2 \right) C_{0_{yy}} - \frac{2(1 - y)}{e - f_0} f_0' C_{0_{xy}} \\
&\quad - \frac{1 - y}{e - f_0} \left(f_0'' - f^{(1)} + \frac{2f_0'^2}{e - f_0} \right) C_{0_y}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Construction des fonctions v et h :

1) Comme $f_0 \in C_{\text{per}}^{4+\lambda}(\mathbb{R})$ et $C_0 \in C_{\text{per}}^{3+\lambda}(\mathbb{R} \times [0, 1])$, il est clair que $f^{(1)} \in C_{\text{per}}^{2+\lambda}(\mathbb{R})$. Grâce à Ladyženskaja, Solonnikov et Ural'ceva [7, Thm. 4.3, page 299], on peut construire $h(x, t) \in C_{\text{per}}^{4+\lambda, (4+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$ tel que $h(x, 0) = f_0(x)$ et $h_t(x, 0) = f^{(1)}(x)$.

2) De la régularité de f_0 et C_0 , il vient $C^{(1)} \in C_{\text{per}}^{1+\lambda}(\mathbb{R} \times [0, 1])$. Grâce à [7, Thm. 4.1, page 298], les fonctions C_0 et $C^{(1)}$ sont prolongeables à l'espace $\mathbb{R}^2$ tout entier : il existe $\tilde{C}_0 \in C_{\text{per}}^{3+\lambda}(\mathbb{R}^2)$ et $\tilde{C}^{(1)} \in C_{\text{per}}^{1+\lambda}(\mathbb{R}^2)$ telles que $\tilde{C}_0|_{\mathbb{R} \times (0, 1)} = C_0$ et $\tilde{C}^{(1)}|_{\mathbb{R} \times (0, 1)} = C^{(1)}$. En utilisant à nouveau le Théorème 4.3 de [7, page 299], on montre qu'il existe $\tilde{v}(x, y, t) \in C_{\text{per}}^{3+\lambda, (3+\lambda)/2}(\mathbb{R}^2 \times [0, T])$ telle que $\tilde{v}(x, y, 0) = \tilde{C}_0(x, y)$ et $\tilde{v}_t(x, y, 0) = \tilde{C}^{(1)}(x, y)$.

On prend alors $v = \tilde{v}|_{Q_T} \in C_{\text{per}}^{3+\lambda, (3+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$ qui vérifie :

$$\begin{aligned}
v(x, y, 0) &= \tilde{C}_0|_{\mathbb{R} \times (0, 1)} = C_0 \\
v_t(x, y, 0) &= \tilde{C}^{(1)}|_{\mathbb{R} \times (0, 1)} = C^{(1)}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, il est important de pouvoir contrôler la fonction h , afin d'éviter qu'elle n'atteigne le bord supérieur $\{y = e\}$. Il suffit pour cela de se restreindre à des temps T suffisamment petits, comme le montre le résultat suivant :

Lemme 4.1

Soit h la fonction définie par (4.2). Il existe $T^* > 0$, tel que pour tout T , $0 < T \leq T^*$, $\sup_{\Sigma_T} |h| \leq \frac{e}{2}$.

Démonstration :

Par développement de Taylor de h , pour $(x, t) \in \Sigma_T$, il existe θ , $0 < \theta < t$ tel que $h(x, t) = h(x, 0) + t h_t(x, \theta)$. Alors $|h(x, t)| \leq |f_0| + t |h_t(x, \theta)|$, pour $(x, t) \in \Sigma_T$. Ainsi $\sup_{\Sigma_T} |h| \leq \sup_{\mathbb{R}} |f_0| + cT$, avec $c = c(f_0, C_0) > 0$.

Puisque par hypothèse $\sup_{\mathbb{R}} |f_0| \leq \frac{e}{3}$, on choisit T^* tel que $\frac{e}{3} + cT^* \leq \frac{e}{2}$, soit $T^* \leq \frac{e}{6c}$.

Remarque 4.2. Toutes les constantes T considérées par la suite sont choisies telles que $T \leq T^*$, même s'il n'en est pas fait mention explicitement.

On pose

$$\begin{cases} g(x, t) = f(x, t) - h(x, t) \\ u(x, y, t) = C(x, y, t) - v(x, y, t). \end{cases}$$

Par construction, les fonctions g et u vérifient :

$$\begin{aligned} g(x, 0) &= g_t(x, 0) = 0 \\ u(x, y, 0) &= u_t(x, y, 0) = 0. \end{aligned}$$

Il s'agit à présent d'écrire les équations pour (g, u) à partir du problème $(\hat{P})$, et d'obtenir de cette façon un problème à données initiales nulles. On sépare alors les termes linéaires des termes non-linéaires en g et u (ainsi que leurs dérivées). Par exemple, dans l'équation (3.2) du problème $(\hat{P})$, obtenue en substituant $f = g + h$ et $C = u + v$, il apparaît en particulier le terme exponentiel $E \equiv \alpha \exp\left(\frac{-\gamma(g_{xx} + h_{xx})}{(1 + (g_x + h_x)^2)^{3/2}}\right)$. En décomposant

$$\frac{1}{(1 + (g_x + h_x)^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1 + h_x^2)^{3/2}} + \left[\frac{1}{(1 + (g_x + h_x)^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1 + h_x^2)^{3/2}} \right],$$

on obtient

$$E = \alpha \exp\left(\frac{-\gamma h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}}\right) \exp\left(\frac{-\gamma g_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}} + \mathcal{N}\right),$$

où $\mathcal{N}$ est un terme quadratique en les dérivées de g par rapport à x . On voit ainsi que la partie linéaire en g_{xx} de E est $-\frac{\alpha\gamma}{(1 + h_x^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{-\gamma h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}}\right) g_{xx}$.

On montre ainsi que (g, u) vérifie le problème

$$(P^0) \left\{ \begin{array}{ll} u_t - (u_{xx} + a_{11}u_{yy} + a_{12}u_{xy}) + a_{13}u_y = F_1(g, u) & \text{dans } Q_T \\ u - (b_1u_x + b_2u_y) \\ + \frac{\alpha\gamma}{(1+h_x^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{-\gamma h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}}\right) g_{xx} = F_2(g, u) & \text{sur } \mathbb{R} \times \{y=0\} \times (0, T) \\ u_y(x, 1, t) = F_3(g, u) & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T) \\ u(x+2L, y, t) = u(x, y, t) & \text{dans } Q_T \\ u(x, y, 0) = u_t(x, y, 0) = 0 & (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, 1) \\ \text{et} \\ g_t - \frac{\alpha\gamma}{(1+h_x^2)} \exp\left(\frac{-\gamma h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}}\right) g_{xx} = F_4(g, u) & \text{sur } \mathbb{R} \times \{y=0\} \times (0, T) \\ g(x+2L, t) = g(x, t) & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T) \\ g(x, 0) = g_t(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

où les coefficients a_{ij} ($i = 1, 2, j = 1, 2, 3$) et b_i ($i = 1, 2$) sont donnés par

$$a_{11} = a_{11}(x, y, t) = \frac{1 + (1-y)^2 h_x^2}{(e-h)^2} \quad (4.5)$$

$$a_{12} = a_{12}(x, y, t) = -2 \left(\frac{1-y}{e-h} \right) h_x \quad (4.6)$$

$$a_{13} = a_{13}(x, y, t) = \left(\frac{1-y}{e-h} \right) \left(h_{xx} - h_t + \frac{2h_x^2}{e-h} \right) \quad (4.7)$$

$$b_1 = b_1(x, t) = -\frac{h_x}{(1+h_x^2)^{1/2}} \quad (4.8)$$

$$b_2 = b_2(x, t) = \frac{(1+h_x^2)^{1/2}}{e-h} \quad (4.9)$$

pour $(x, y, t) \in Q_T$, et les seconds membres F_i , $i = 1, 2, 3$ par

$$\begin{aligned} F_1(g, u) &= N_{11}(u_{yy} + v_{yy}) + N_{12}(u_{xy} + v_{xy}) + N_{13}(u_y + v_y) \\ &\quad - v_t + v_{xx} + a_{11}v_{yy} + a_{12}v_{xy} - a_{13}v_y \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} F_2(g, u) &= N_{21}(u_x + v_x) + N_{22}(u_y + v_y) + b_1v_x + b_2v_y - v \\ &\quad + \alpha \left[\exp\left(\frac{-\gamma(g_{xx} + h_{xx})}{(1+(g_x + h_x)^2)^{3/2}}\right) + \frac{\gamma g_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{-\gamma h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$F_3(g, u) = v_y(x, 1, t) \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}
F_4(g, u) = & \left(1 + (g_x + h_x)^2\right)^{1/2} (u(x, 0, t) + v(x, 0, t)) - h_t \\
& - \alpha \left(1 + (g_x + h_x)^2\right)^{1/2} \exp\left(\frac{-\gamma(g_{xx} + h_{xx})}{(1 + (g_x + h_x)^2)^{3/2}}\right) \\
& + \frac{\gamma}{1 + h_x^2} \exp\left(\frac{-\gamma h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}}\right) g_{xx}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

avec

$$N_{11} = N_{11}(g) = \frac{1}{(e - g - h)^2} \left[(1 - y)^2 (g_x + 2h_x) g_x - \frac{1 + (1 - y)^2 h_x^2}{(e - h)^2} g (g - 2(e - h)) \right] \tag{4.14}$$

$$N_{12} = N_{12}(g) = -\frac{2(1 - y)}{e - g - h} \left(g_x + \frac{h_x}{e - h} g \right) \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
N_{13} = N_{13}(g) = & -\frac{1 - y}{e - g - h} \left[g_{xx} - g_t + \frac{2(g_x + 2h_x)}{e - g - h} g_x \right. \\
& \left. + \frac{1}{e - h} \left(h_{xx} - h_t + 2h_x^2 \left(\frac{1}{e - h} + \frac{1}{e - g - h} \right) \right) g \right]
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$N_{21} = N_{21}(g) = -h_x \left[\frac{1}{(1 + (g_x + h_x)^2)^{1/2}} - \frac{1}{(1 + h_x^2)^{1/2}} \right] - \frac{g_x}{(1 + (g_x + h_x)^2)^{1/2}} \tag{4.17}$$

$$N_{22} = N_{22}(g) = \frac{1}{e - g - h} \left[(1 + (g_x + h_x)^2)^{1/2} - (1 + h_x^2)^{1/2} + \frac{(1 + h_x^2)^{1/2}}{e - h} g \right] \tag{4.18}$$

2.5 Le problème linéaire associé.

Dans cette section, on introduit un problème linéaire associé au problème (P^0) et l'on montre qu'il admet une unique solution. Plus précisément, on considère le problème linéaire $(P_1^l) - (P_2^l)$:

$$(P_1^l) \left\{ \begin{array}{ll} u_t - (u_{xx} + a_{11}u_{yy} + a_{12}u_{xy}) + a_{13}u_y = F_1(x, y, t) & \text{dans } Q_T \\ u(x, 0, t) - (b_1u_x + b_2u_y)(x, 0, t) \\ \quad + \frac{\alpha\gamma}{(1 + h_x^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{-\gamma h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}}\right) g_{xx}(x, t) = F_2(x, t) & \text{dans } \Sigma_T \\ u_y(x, 1, t) = F_3(x, t) & (x, t) \in \Sigma_T \\ u(x + 2L, y, t) = u(x, y, t) & \text{dans } Q_T \\ u(x, y, 0) = 0 & (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, 1) \end{array} \right.$$



$$(P_2^l) \begin{cases} g_t - \frac{\alpha\gamma}{(1+h_x^2)} \exp\left(\frac{-\gamma h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}}\right) g_{xx} = F_4(x, t) & (x, t) \in \Sigma_T \\ g(x+2L, t) = g(x, t) & (x, t) \in \Sigma_T \\ g(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

avec $F_1 \in C_{0,\text{per}}^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_T)$, $F_i \in C_{0,\text{per}}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$, pour $i = 2, \dots, 4$,
et $h \in C_{\text{per}}^{4+\lambda,(4+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$, pour $\lambda \in (0, 1)$.

Théorème 5.1

Pour $0 < T \leq T^*$, le problème $(P_1^l) - (P_2^l)$ admet une solution unique

$$(g, u) \in C_{0,\text{per}}^{3+\lambda,(3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T) \times C_{0,\text{per}}^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{Q}_T).$$

De plus, il existe $c(T) > 0$ qui reste bornée lorsque T tend vers 0, telle que :

$$\|u\|_{Q_T}^{(2+\lambda)} + \|g\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \leq c(T) \left(\|F_1\|_{Q_T}^{(\lambda)} + \sum_{i=2}^4 \|F_i\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \right).$$

Démonstration :

1) Résolution du problème (P_2^l)

On définit l'opérateur $\mathcal{F}$ par :

$$\mathcal{F}g = g_t - \frac{\alpha\gamma}{(1+h_x^2)} \exp\left(-\gamma \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}}\right) g_{xx}.$$

On déduit des Lemmes 2.2 et 2.4 que le coefficient de g_{xx} dans $\mathcal{F}$, c'est-à-dire $\frac{\alpha\gamma}{(1+h_x^2)} \exp\left(-\gamma \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}}\right)$, appartient à $C_{\text{per}}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$. De plus, il existe μ et $\nu > 0$ tels que

$$0 < \mu \leq \frac{\alpha\gamma}{(1+h_x^2)} \exp\left(-\gamma \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}}\right) \leq \nu.$$

Par conséquent l'équation $\mathcal{F}g = 0$ est uniformément parabolique. D'après Ladyženskaja, Solonnikov et Ural'ceva [7, Thm. 5.1, page 320 pour le problème (5.2)], le problème (P_2^l) admet une solution unique $g \in C_{\text{per}}^{3+\lambda,(3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$ telle que $\|g\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \leq c_1 \|F_4\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)}$ où la constante c_1 ne dépend pas de F_4 .

Par ailleurs, puisque $F_4 \in C_{0,\text{per}}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$ et que

$$(g_t)|_{t=0} = \left(F_4 + \frac{\alpha\gamma}{(1+h_x^2)} \exp\left(\frac{-\gamma h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}}\right) g_{xx} \right) \Big|_{t=0} = 0,$$

on a $g \in C_{0,\text{per}}^{3+\lambda,(3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$ et on déduit de [7, Thm. 5.4, page 322 pour le problème (5.2)],

que la constante $c_1 = c_1(T)$ reste bornée lorsque T tend vers 0.

2) Résolution du problème (P_1')

On résout le problème (P_1') où $g \in C_{0,\text{per}}^{3+\lambda,(3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$, est la solution unique du problème (P_2') . On écrit alors le problème (P_1') de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}u \equiv u_t - (u_{xx} + a_{11}u_{yy} + a_{12}u_{xy}) + a_{13}u_y = F_1(x, t) & \text{dans } Q_T \\ u(x, 0, t) - \mathcal{B}u(x, 0, t) = \tilde{F}_2(x, t) & (x, t) \in \Sigma_T \\ u_y(x, 1, t) = F_3(x, t) & (x, t) \in \Sigma_T \\ u(x + 2L, y, t) = u(x, y, t) & \text{dans } Q_T \\ u(x, y, 0) = 0 & (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, 1) \end{array} \right.$$

où

$$\mathcal{B}u(x, y, t) \equiv b_1(x, t)u_x(x, y, t) + b_2(x, t)u_y(x, y, t),$$

$$\tilde{F}_2(x, t) \equiv F_2(x, t) - \frac{\alpha\gamma}{(1 + h_x^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{-\gamma h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}}\right) g_{xx}$$

$$\text{et } F_1 \in C_{0,\text{per}}^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_T), F_2, F_3 \in C_{0,\text{per}}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T).$$

On vérifie ci-dessous les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité pour les problèmes paraboliques linéaires [7, Thm. 5.3, page 320 pour le problème (5.4)].

a) L'équation $\mathcal{L}u = 0$ est *uniformément parabolique* :

en remarquant que $a_{11} = \frac{1}{(e-h)^2} + \frac{a_{12}^2}{4}$, on montre que pour $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, il existe μ et $\nu > 0$ tels que

$$\nu\xi^2 \leq \xi_1^2 + a_{11}(x, y, t)\xi_2^2 + a_{12}(x, y, t)\xi_1\xi_2 \leq \mu\xi^2, \text{ pour } (x, y, t) \in \overline{Q}_T.$$

b) Les coefficients $b_1(x, t)$ et $b_2(x, t)$ de l'opérateur $\mathcal{B}$ vérifient sur Σ_T la propriété :

$$\exists \delta > 0, \quad \left| \sum_{i=1}^2 b_i(x, t) n_i(x) \right| \geq \delta \quad (5.1)$$

où $n_i(x)$ est la normale extérieure à $\partial\Omega$, si $\Omega = \mathbb{R} \times \{y = 0\}$. Cette condition exprime que le vecteur $b = (b_1, b_2)$ n'appartient pas au plan tangent à $\partial\Omega$. En effet, puisque la normale à $\partial\Omega$ s'écrit $n = (n_1, n_2) = (0, -1)$, on déduit du Lemme 4.1 que les coefficients de $\mathcal{B}$ satisfont :

$$\left| \sum_{i=1}^2 b_i(x, t) n_i(x) \right| = |b_2(x, t)| = \frac{(1 + h_x^2)^{1/2}}{|e - h|} \geq \delta = \frac{2}{e}.$$

c) Pour $h \in C_{\text{per}}^{3+\lambda, (3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$ et $g \in C_{0, \text{per}}^{3+\lambda, (3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$, il est clair que $\tilde{F}_2 \in C_{0, \text{per}}^{1+\lambda, (1+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$, puisque $\tilde{F}_2(x, 0) = F_2(x, 0) = 0$. Par conséquent, $\tilde{F}_2$ satisfait la condition de compatibilité d'ordre 0, $\tilde{F}_2|_{t=0} = (u(x, 0, t) - \mathcal{B}u(x, 0, t))|_{t=0} = 0$. De plus on a l'estimation

$$\|\tilde{F}_2\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c \left(\|F_2\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} + \|g\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \right).$$

Ainsi, l'équation $\mathcal{L}u = 0$ est uniformément parabolique et ses coefficients appartiennent à $C_{\text{per}}^{\lambda, \lambda/2}(\overline{\Sigma}_T)$, les coefficients de $\mathcal{B}$ vérifient la condition (5.1) et enfin $F_1 \in C_{0, \text{per}}^{\lambda, \lambda/2}(\overline{Q}_T)$, $\tilde{F}_2$ et $F_3 \in C_{0, \text{per}}^{1+\lambda, (1+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$.

Par conséquent, grâce à [7, Thm. 5.3 pour le problème (5.4)], le problème (P_1^I) admet une solution unique $u \in C_{\text{per}}^{2+\lambda, (2+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \|u\|_{\overline{Q}_T}^{(2+\lambda)} &\leq c_3 \left(\|F_1\|_{\overline{Q}_T}^{(\lambda)} + \|\tilde{F}_2\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} + \|F_3\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \right) \\ &\leq c_4 \left(\|F_1\|_{\overline{Q}_T}^{(\lambda)} + \|F_2\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} + \|F_3\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} + \|g\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \right). \end{aligned}$$

Comme de plus $u_t|_{t=0} = (F_1 + u_{xx} + a_{11}u_{yy} + a_{12}u_{xy} - a_{13}u_y)|_{t=0} = 0$, on a $u \in C_{0, \text{per}}^{2+\lambda, (2+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$ et on déduit de [7, Thm. 5.4, page 322 pour le problème (5.4)'], que la constante $c_4 = c_4(T)$ reste bornée quand T tend vers 0.

2.6 Le problème non-linéaire - Existence d'un point fixe.

On commence par établir la régularité des seconds membres (termes non-linéaires) $F_i(g, u), i = 1, \dots, 4$, en fonction de celles de g et u .

Proposition 6.1

Soient T tel que $0 < T \leq T^*$ et $g \in C_{0, \text{per}}^{3+\lambda, (3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$ avec $\sup_{\Sigma_T} |g| \leq \frac{\epsilon}{3}$ et $u \in C_{0, \text{per}}^{2+\lambda, (2+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$.

Alors

$$F_1(g, u) \in C_{0, \text{per}}^{\lambda, \lambda/2}(\overline{Q}_T), \text{ et } F_i(g, u) \in C_{0, \text{per}}^{1+\lambda, (1+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T), \text{ pour } i = 2, \dots, 4.$$

Démonstration :

On étudie successivement les différents termes $F_i(g, u)$, pour $i = 1, \dots, 4$.

1) On rappelle que

$$\begin{aligned} F_1(g, u) &= N_{11}u_{yy} + N_{12}u_{xy} + N_{13}u_y + N_{11}v_{yy} + N_{12}v_{xy} + N_{13}v_y \\ &\quad - v_t + v_{xx} + a_{11}v_{yy} + a_{12}v_{xy} - a_{13}v_y. \end{aligned}$$

Il est clair que $F_1(g, u) \in C_{\text{per}}^{\lambda, \lambda/2}(\overline{Q}_T)$.

Il reste alors à montrer que $F_1(g, u)(x, y, 0) = 0$. On a :

$$\begin{aligned} F_1(g, u)(x, y, 0) &= N_{11}(0)v_{yy}(0) + N_{12}(0)v_{xy}(0) + N_{13}(0)v_y(0) \\ &\quad - v_t(x, y, 0) + v_{xx}(x, y, 0) + a_{11}(0)v_{yy}(x, y, 0) \\ &\quad + a_{12}(0)v_{xy}(x, y, 0) - a_{13}(0)v_y(x, y, 0). \end{aligned}$$

Or $N_{11}(0) = N_{12}(0) = N_{13}(0) = 0$. Alors, grâce aux conditions initiales (4.1) et (4.2) vérifiées (par construction) par v et h , il vient

$$\begin{aligned} F_1(g, u)(x, y, 0) &= -C^{(1)}(x, y) + C_{0_{xx}} + \frac{1}{(e - f_0)^2} \left(1 + (1 - y)^2 f_0'^2 \right) C_{0_{yy}} \\ &\quad - \frac{2(1 - y)}{e - f_0} f_0' C_{0_{xy}} - \frac{1 - y}{e - f_0} \left(f_0'' - f^{(1)} + \frac{2f_0'^2}{e - f_0} \right) C_{0_y} \\ &= 0, \end{aligned}$$

par les définitions (4.3) et (4.4) de $f^{(1)}$ et $C^{(1)}$.

2) En utilisant les Lemmes 2.2 et 2.4 pour traiter le terme exponentiel, on établit que $F_2(g, u) \in C_{\text{per}}^{1+\lambda, (1+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$.

Par ailleurs, puisque $N_{21}(0) = N_{22}(0) = 0$,

$$\begin{aligned} F_2(g, u)(x, 0, 0) &= -\frac{h_x}{(1 + h_x^2)^{1/2}}(x, 0)v_x(x, 0, 0) + \frac{(1 + h_x^2)^{1/2}}{e - h}(x, 0)v_y(x, 0, 0) \\ &\quad - v(x, 0, 0) + \alpha \exp \left(-\gamma \frac{h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}} \right) (x, 0) \\ &= \alpha \exp \left(-\gamma \frac{f_0''}{(1 + f_0'^2)^{3/2}} \right) - C_0(x, 0) \\ &\quad - \frac{f_0'}{(1 + f_0'^2)^{1/2}} C_{0_x}(x, 0) + \frac{(1 + f_0'^2)^{1/2}}{e - f_0} C_{0_y}(x, 0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

grâce à la condition de compatibilité (3.9) vérifiée par f_0 et C_0 .

3) De façon évidente $F_3 \in C_{\text{per}}^{1+\lambda, (1+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$, et de plus

$$\begin{aligned} F_3(x, 1, 0) &= v_y(x, 1, 0) \\ &= C_{0_y}(x, 1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

grâce à la condition de compatibilité (3.10) vérifiée par C_0 .

4) De manière semblable à $F_2(g, u)$, on montre facilement que $F_4(g, u) \in C_{\text{per}}^{1+\lambda, (1+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} F_4(g, u)(x, 0, 0) &= (1 + h_x^2)^{1/2}(x, 0)v(x, 0, 0) \\ &\quad - \alpha(1 + h_x^2)^{1/2} \exp\left(-\gamma \frac{h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}}\right)(x, 0) - h_t(x, 0), \end{aligned}$$

soit,

$$\begin{aligned} F_4(g, u)(x, 0, 0) &= -(1 + f_0'^2)^{1/2}C_0(x, 0) \\ &\quad - \alpha(1 + f_0'^2)^{1/2} \exp\left(-\gamma \frac{f_0''}{(1 + f_0'^2)^{3/2}}\right) - f^{(1)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

par la définition (4.3) de $f^{(1)}$.

La proposition suivante donne une estimation des termes non linéaires. Ce résultat permettra d'établir que l'application itérative associée au problème non linéaire (P^0) est une contraction stricte d'une boule dans elle-même et donc qu'elle admet un point fixe unique dans cette boule.

On pose $A \equiv C_{0, \text{per}}^{3+\lambda, (3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T) \times C_{0, \text{per}}^{2+\lambda, (2+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$. On définit alors la norme $\|\cdot\|_A$ sur A par $\|(g, u)\|_A = \|g\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} + \|u\|_{Q_T}^{(2+\lambda)}$ pour $(g, u) \in A$.

Proposition 6.2

(i) Soit $0 < \delta_0 \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Il existe une constante $c = c(\delta_0, T)$ qui reste bornée quand T tend vers 0, telle que pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$ et tout

$$(g_1, u_1), (g_2, u_2) \in A \equiv C_{0, \text{per}}^{3+\lambda, (3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T) \times C_{0, \text{per}}^{2+\lambda, (2+\lambda)/2}(\overline{Q}_T),$$

vérifiant $\max(\|(g_1, u_1)\|_A, \|(g_2, u_2)\|_A) \leq \delta$, on a

$$\begin{aligned} \|F_1(g_1, u_1) - F_1(g_2, u_2)\|_{Q_T}^{(\lambda)} + \sum_{i=2}^4 \|F_i(g_1, u_1) - F_i(g_2, u_2)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \\ \leq c(T) (T^{1/2} + \delta) \|(g_1 - g_2, u_1 - u_2)\|_A; \end{aligned}$$

(ii) Il existe une constante $c' = c'(T)$ qui reste bornée quand T tend vers 0, telle que

$$\|F_1(0, 0)\|_{Q_T}^{(\lambda)} + \sum_{i=2}^4 \|F_i(0, 0)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c'(T) T^{1/2}.$$

Démonstration du point i) de la Proposition 6.2 :

1) *Estimation du terme* $F_1(g_1, u_1) - F_1(g_2, u_2)$

On décompose ce terme de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
F_1(g_1, u_1) - F_1(g_2, u_2) &= N_{11}(g_1) [u_{1_{yy}} - u_{2_{yy}}] + N_{12}(g_1) [u_{1_{xy}} - u_{2_{xy}}] \\
&\quad + N_{13}(g_1) [u_{1_y} - u_{2_y}] \\
&\quad + [N_{11}(g_1) - N_{11}(g_2)] (u_{2_{yy}} + v_{yy}) \\
&\quad + [N_{12}(g_1) - N_{12}(g_2)] (u_{2_{xy}} + v_{xy}) \\
&\quad + [N_{13}(g_1) - N_{13}(g_2)] (u_{2_y} + v_y)
\end{aligned} \tag{6.1}$$

On voit alors qu'il faut estimer $N_{1i}(g_1)$ et les différences $N_{1i}(g_1) - N_{1i}(g_2)$, pour $i = 1, \dots, 3$.

a) Estimation de $N_{1i}(g_1)$, pour $i = 1, \dots, 3$.

Compte tenu des expressions (4.14), (4.15) et (4.16) des termes N_{1i} , on montre que $\|N_{1i}(g_1)\|_{\Sigma_T}^{(\lambda)} \leq c\|g_1\|_{Q_T}^{(2+\lambda)}$, pour $i = 1, \dots, 3$. Par conséquent, grâce au Lemme 2.5, on obtient

$$\|N_{1i}(g_1)\|_{Q_T}^{(\lambda)} \leq c(T)T^{1/2}\|g_1\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)},$$

pour $i = 1, \dots, 3$, où $c(T)$ reste bornée lorsque T tend vers 0.

b) Estimation de $N_{1i}(g_1) - N_{1i}(g_2)$, pour $i = 1, \dots, 3$.

Le calcul est effectué pour $N_{13}(g_1) - N_{13}(g_2)$, les deux autres termes étant estimés de façon similaire. On écrit la différence $N_{13}(g_1) - N_{13}(g_2)$ sous la forme

$$\begin{aligned}
N_{13}(g_1) - N_{13}(g_2) &= \alpha_1(g_1 - g_2) + \alpha_2 [(g_{1_{xx}} - g_{2_{xx}}) - (g_{1_t} - g_{2_t})] \\
&\quad + \alpha_3(g_{1_x}^2 - g_{2_x}^2) + \alpha_4(g_{1_x} - g_{2_x}) \\
&\quad + \alpha_5 \left[\frac{1}{e - g_2 - h} - \frac{1}{e - g_1 - h} \right] \\
&\quad + \alpha_6 \left[\frac{1}{(e - g_2 - h)^2} - \frac{1}{(e - g_1 - h)^2} \right]
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{e - h} \left[h_{xx} - h_t + \frac{2h_x^2}{e - h} \right], \\
\alpha_2 &= \alpha_2(g_1) = -\frac{1 - y}{e - g_1 - h}, \\
\alpha_3 &= \alpha_3(g_1) = -\frac{2(1 - y)}{(e - g_1 - h)^2}, \\
\alpha_4 &= \alpha_4(g_1) = -\frac{4(1 - y)h_x}{(e - g_1 - h)^2}, \\
\alpha_5 &= \alpha_5(g_2) = (1 - y)(g_{2_{xx}} + g_{2_t}) - 2h_x^2, \\
\alpha_6 &= \alpha_6(g_2) = 2(1 - y)(g_{2_x} + 2h_x)g_{2_x},
\end{aligned}$$

et par conséquent $\alpha_i \in C_{\text{per}}^{\lambda, \lambda/2}(Q_T)$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \|N_{13}(g_1) - N_{13}(g_2)\|_{Q_T}^{(\lambda)} &\leq c \left(\|g_1 - g_2\|_{\Sigma_T}^{(\lambda)} + \|g_{1,xx} - g_{2,xx}\|_{\Sigma_T}^{(\lambda)} + \|g_{1,t} - g_{2,t}\|_{\Sigma_T}^{(\lambda)} \right. \\ &\quad + \|g_{1,x}^2 - g_{2,x}^2\|_{\Sigma_T}^{(\lambda)} + \|g_{1,x} - g_{2,x}\|_{\Sigma_T}^{(\lambda)} \\ &\quad + \left\| \frac{1}{e - g_2 - h} - \frac{1}{e - g_1 - h} \right\|_{\Sigma_T}^{(\lambda)} \\ &\quad \left. + \left\| \frac{1}{(e - g_2 - h)^2} - \frac{1}{(e - g_1 - h)^2} \right\|_{\Sigma_T}^{(\lambda)} \right), \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \|N_{13}(g_1) - N_{13}(g_2)\|_{Q_T}^{(\lambda)} &\leq c_1 \left(\|g_1 - g_2\|_{\Sigma_T}^{(2+\lambda)} + \left\| \frac{1}{e - g_2 - h} - \frac{1}{e - g_1 - h} \right\|_{\Sigma_T}^{(\lambda)} \right. \\ &\quad \left. + \left\| \frac{1}{(e - g_2 - h)^2} - \frac{1}{(e - g_1 - h)^2} \right\|_{\Sigma_T}^{(\lambda)} \right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Puisque

$$\frac{1}{e - g_2 - h} - \frac{1}{e - g_1 - h} = \left(\int_0^1 \frac{d\theta}{[e - h - (\theta g_2 + (1 - \theta)g_1)]^2} \right) (g_2 - g_1),$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{e - g_2 - h} - \frac{1}{e - g_1 - h} \right\|_{\Sigma_T}^{(\lambda)} &\leq c_2 \int_0^1 \left(\| [e - h - (\theta g_2 + (1 - \theta)g_1)]^2 \|_{\Sigma_T}^{(\lambda)} \right)^2 d\theta \|g_1 - g_2\|_{\Sigma_T}^{(\lambda)} \\ &\leq c_3 \left(\|e - h - g_1\|_{\Sigma_T}^{(\lambda)} + \|g_1 - g_2\|_{\Sigma_T}^{(\lambda)} \right)^4 \|g_1 - g_2\|_{\Sigma_T}^{(\lambda)} \\ &\leq c_4 \|g_1 - g_2\|_{\Sigma_T}^{(\lambda)}. \end{aligned}$$

De même, on obtient une estimation identique pour $\left\| \frac{1}{(e - g_2 - h)^2} - \frac{1}{(e - g_1 - h)^2} \right\|_{\Sigma_T}^{(\lambda)}$.

L'inégalité (6.2) devient ainsi

$$\|N_{13}(g_1) - N_{13}(g_2)\|_{Q_T}^{(\lambda)} \leq c_5 \left(\|g_1 - g_2\|_{\Sigma_T}^{(2+\lambda)} + \|g_1 - g_2\|_{\Sigma_T}^{(\lambda)} \right),$$

soit

$$\|N_{13}(g_1) - N_{13}(g_2)\|_{Q_T}^{(\lambda)} \leq c_6 \left(\|g_1 - g_2\|_{\Sigma_T}^{(2+\lambda)} \right).$$

Et compte tenu du Lemme d'injection 2.5,

$$\|N_{13}(g_1) - N_{13}(g_2)\|_{Q_T}^{(\lambda)} \leq c(T) T^{1/2} \|g_1 - g_2\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)},$$

où $c(T)$ reste bornée lorsque T tend vers 0.

Un calcul analogue donne le même type d'estimation pour les deux autres termes $N_{11}(g_1) - N_{11}(g_2)$ et $N_{12}(g_1) - N_{12}(g_2)$. Dans ces conditions, les estimations obtenues en a) et b) et l'expression (6.1) de $F_1(g_1, u_1) - F_1(g_2, u_2)$ permettent d'obtenir

$$\begin{aligned} \|F_1(g_1, u_1) - F_1(g_2, u_2)\|_{Q_T}^{(\lambda)} &\leq c_1(T)T^{1/2}\|g_1\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \left(\|u_{1_{yy}} - u_{2_{yy}}\|_{Q_T}^{(\lambda)} + \|u_{1_{xy}} - u_{2_{xy}}\|_{Q_T}^{(\lambda)} \right. \\ &\quad \left. + \|u_{1_y} - u_{2_y}\|_{Q_T}^{(\lambda)} \right) + c_2(T)T^{1/2}\|g_1 - g_2\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)}, \end{aligned}$$

soit

$$\|F_1(g_1, u_1) - F_1(g_2, u_2)\|_{Q_T}^{(\lambda)} \leq c(T)T^{1/2} \|(g_1 - g_2), (u_1 - u_2)\|_A.$$

2) Estimation du terme $F_2(g_1, u_1) - F_2(g_2, u_2)$

On écrit ce terme sous la forme

$$\begin{aligned} F_2(g_1, u_1) - F_2(g_2, u_2) &= N_{21}(g_1)[u_{1_x} - u_{2_x}] + N_{22}(g_1)[u_{1_y} - u_{2_y}] \\ &\quad + [N_{21}(g_1) - N_{21}(g_2)](u_{2_x} + v_x) \\ &\quad + [N_{22}(g_1) - N_{22}(g_2)](u_{2_y} + v_y) \\ &\quad + \alpha[E_1(g_1) - E_2(g_2)], \quad \text{en } y = 0 \end{aligned}$$

où

$$E_1(g) = \exp\left(\frac{-\gamma(g_{xx} + h_{xx})}{(1 + (g_x + h_x)^2)^{3/2}}\right) + \frac{\gamma g_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{-\gamma h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}}\right).$$

Comme précédemment en 1), on a $\|N_{2i}(g_1)\|_{\Sigma_T}^{(\lambda)} \leq c(T)T^{1/2}\|g_1\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)}$ et $\|N_{2i}(g_1) - N_{2i}(g_2)\|_{\Sigma_T}^{(\lambda)} \leq c(T)T^{1/2}\|g_1 - g_2\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)}$, pour $i = 1, 2$, où $c(T)$ reste bornée quand T tend vers 0.

Il s'agit à présent d'estimer le terme exponentiel $E_1(g_1) - E_2(g_2)$. Pour cela, on écrit

$$\begin{aligned} E_1(g_1) - E_1(g_2) &= \exp\left(\frac{-\gamma h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}}\right) \left[\chi(G_1) - \chi(G_2) \right] \quad (e_1) \\ &\quad + \gamma(g_{2_{xx}} + h_{xx}) \left(\frac{1}{(1 + (g_{2_x} + h_x)^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1 + (g_{1_x} + h_x)^2)^{3/2}} \right) \quad (e_2) \\ &\quad + \gamma(g_{2_{xx}} - g_{1_{xx}}) \left(\frac{1}{(1 + (g_{1_x} + h_x)^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1 + h_x^2)^{3/2}} \right) \quad (e_3) \end{aligned}$$

où

$$\chi(G_i) = \exp(\gamma G_i) - 1 - \gamma G_i$$

et

$$G_i = h_{xx} \left[\frac{1}{(1 + h_x^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1 + (g_{i_x} + h_x)^2)^{3/2}} \right] - \frac{g_{i_{xx}}}{(1 + (g_{i_x} + h_x)^2)^{3/2}}, \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

On estime alors les trois termes $(e_1), (e_2)$ et (e_3) :

A partir de l'expression ci-dessus de G_i , il vient

$$\|G_i\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c_1 \|g_{i_x}\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} + c_2 \|g_{i_{xx}}\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)},$$

soit

$$\|G_i\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c \|g_i\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)}.$$

Par conséquent, pour $\|g_i\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \leq \delta$, on obtient grâce au Lemme 2.4 (ii) :

$$\|\chi(G_1) - \chi(G_2)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c \|G_1 - G_2\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \max(\|G_1\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)}, \|G_2\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)}). \quad (6.3)$$

En outre, on écrit

$$\begin{aligned} G_1 - G_2 &= (g_{1_{xx}} + h_{xx}) \left[\frac{1}{(1 + (g_{2_x} + h_x)^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1 + (g_{1_x} + h_x)^2)^{3/2}} \right] \\ &\quad + \frac{g_{2_{xx}} - g_{1_{xx}}}{(1 + (g_{2_x} + h_x)^2)^{3/2}} \\ &= 3(g_{1_{xx}} + h_{xx}) \left(\int_0^1 \frac{z}{(1 + z^2)^{5/2}} \Big|_{z=\theta g_{1_x} + (1-\theta)g_{2_x} + h_x} d\theta \right) (g_1 - g_2)_x \\ &\quad + \frac{(g_2 - g_1)_{xx}}{(1 + (g_{2_x} + h_x)^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

et alors $\|G_1 - G_2\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c \|g_1 - g_2\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)}$. L'inégalité (6.3) devient alors

$$\|\chi(G_1) - \chi(G_2)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c \|g_1 - g_2\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \max(\|g_1\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)}, \|g_2\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)}),$$

soit

$$\|\chi(G_1) - \chi(G_2)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c\delta \|g_1 - g_2\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)}. \quad (6.4)$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \|e_2\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} &\leq c_1 \|g_{1_x} - g_{2_x}\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \\ &\leq c_1 \|g_1 - g_2\|_{\Sigma_T}^{(2+\lambda)} \\ &\leq c(T) T^{1/2} \|g_1 - g_2\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \end{aligned} \quad (6.5)$$

et

$$\begin{aligned} \|e_3\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} &\leq c_2 \|g_{1_x}\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \|g_{1_{xx}} - g_{2_{xx}}\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \\ &\leq c_2 \|g_1\|_{\Sigma_T}^{(2+\lambda)} \|g_1 - g_2\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \\ &\leq c_2 \delta \|g_1 - g_2\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Ainsi, en regroupant les inégalités (6.4), (6.5) et (6.6), on obtient l'estimation suivante pour le terme exponentiel :

$$\begin{aligned}
\|E_1(g_1) - E_1(g_2)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} &\leq c \sum_{i=1}^3 \|e_i\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \\
&\leq c_1 \|\chi(G_1) - \chi(G_2)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} + c_2 \delta \|g_1 - g_2\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \\
&\quad + c(T) T^{1/2} \|g_1 - g_2\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \\
&\leq c(T) (\delta + T^{1/2}) \|g_1 - g_2\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)},
\end{aligned}$$

où $c(T)$ reste bornée quand T tend vers 0. De ce fait,

$$\begin{aligned}
\|F_2(g_1, u_1) - F_2(g_2, u_2)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} &\leq c(T) (\delta + T^{1/2}) \|g_1 - g_2\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \\
&\leq c(T) (\delta + T^{1/2}) \|(g_1 - g_2), (u_1 - u_2)\|_A.
\end{aligned}$$

3) *Estimation du terme $F_3(g_1, u_1) - F_3(g_2, u_2)$.*

Il n'y a rien à estimer car $F_3(g_1, u_1) - F_3(g_2, u_2) = 0$.

4) *Estimation du terme $F_4(g_1, u_1) - F_4(g_2, u_2)$.*

On écrit ce terme sous la forme

$$\begin{aligned}
F_4(g_1, u_1) - F_4(g_2, u_2) &= \left[(1 + (g_{1x} + h_x)^2)^{1/2} - (1 + (g_{2x} + h_x)^2)^{1/2} \right] (u_1 + v) \\
&\quad + (1 + (g_{2x} + h_x)^2)^{1/2} (u_1 - u_2) \\
&\quad - \alpha [E_2(g_1) - E_2(g_2)], \quad \text{en } y = 0,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
E_2(g) &= (1 + (g_x + h_x)^2)^{1/2} \exp \left(\frac{-\gamma(g_{xx} + h_{xx})}{(1 + (g_x + h_x)^2)^{3/2}} \right) \\
&\quad + \frac{\gamma}{1 + h_x^2} \exp \left(\frac{-\gamma h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}} \right) g_{xx}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\|F_4(g_1, u_1) - F_4(g_2, u_2)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} &\leq c_1 \left\| (1 + (g_{1x} + h_x)^2)^{3/2} - (1 + (g_{2x} + h_x)^2)^{3/2} \right\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \\
&\quad + c_2 \|u_1 - u_2\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} + c_3 \|E_2(g_1) - E_2(g_2)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)}.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned}
&(1 + (g_{1x} + h_x)^2)^{1/2} - (1 + (g_{2x} + h_x)^2)^{1/2} \\
&= (g_{1x} - g_{2x}) \int_0^1 \frac{z + h_x}{(1 + (z + h_x)^2)^{1/2}} \Big|_{z=\theta g_{1x} + (1-\theta)g_{2x}} d\theta,
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \|F_4(g_1, u_1) - F_4(g_2, u_2)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} &\leq c_1 \|g_{1x} - g_{2x}\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} + c_2 \|u_1 - u_2\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \\ &\quad + c_3 \|E_2(g_1) - E_2(g_2)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Il reste alors à estimer le terme exponentiel $E_2(g_1) - E_2(g_2)$. Pour cela, on le décompose de la façon suivante :

$$\begin{aligned} E_2(g_1) - E_2(g_2) &= \exp\left(\frac{-\gamma h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}}\right) \left[(1+(g_{2x}+h_x)^2)^{1/2} [\chi(G_1) - \chi(G_2)] \right. \\ &\quad + \left((1+(g_{1x}+h_x)^2)^{1/2} - (1+(g_{2x}+h_x)^2)^{1/2} \right) \exp(\gamma G_1) \\ &\quad + \gamma (1+(g_{2x}+h_x)^2)^{1/2} (g_{1xx} + h_{xx}) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{(1+(g_{2x}+h_x)^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1+(g_{1x}+h_x)^2)^{3/2}} \right) \\ &\quad \left. + \gamma (g_{1xx} - g_{2xx}) \left(\frac{1}{1+h_x^2} - \frac{1}{1+(g_{2x}+h_x)^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

On obtient de cette façon

$$\begin{aligned} \|E_2(g_1) - E_2(g_2)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} &\leq c_1 \|g_{1x} - g_{2x}\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} + c_2 \|\chi(G_1) - \chi(G_2)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \\ &\quad + c_3 \|g_{2x}\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \|g_{1xx} - g_{2xx}\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)}. \end{aligned}$$

Grâce à l'estimation de $\|\chi(G_1) - \chi(G_2)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)}$ obtenue précédemment, on a

$$\|E_2(g_1) - E_2(g_2)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c_1 \|g_1 - g_2\|_{\Sigma_T}^{(2+\lambda)} + c_2 \delta \|g_1 - g_2\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)},$$

et compte tenu du Lemme 2.5, il vient

$$\|E_2(g_1) - E_2(g_2)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c(T)(\delta + T^{1/2}) \|g_1 - g_2\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)}.$$

L'inégalité (6.7) devient alors

$$\begin{aligned} \|F_4(g_1, u_1) - F_4(g_2, u_2)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} &\leq c(T) \left(T^{1/2} \|u_1 - u_2\|_{\Sigma_T}^{(2+\lambda)} \right. \\ &\quad \left. + (\delta + T^{1/2}) \|g_1 - g_2\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \right) \end{aligned}$$

et donc

$$\|F_4(g_1, u_1) - F_4(g_2, u_2)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c(T)(\delta + T^{1/2}) \|(g_1 - g_2), (u_1 - u_2)\|_A.$$

Démonstration du point ii) de la Proposition 6.2 :

On estime successivement les termes $F_i(0, 0)$, pour $i = 1, \dots, 4$.

On a $F_1(0, 0) = -v_t + v_{xx} + a_{11}v_{yy} + a_{12}v_{xy} - a_{13}v_y$.

Par conséquent, pour $v \in C_{\text{per}}^{3+\lambda,(3+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$, $F_1(0,0) \in C_{\text{per}}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$ et $\|F_1(0,0)\|_{Q_T}^{(1+\lambda)} \leq c\|v\|_{Q_T}^{(3+\lambda)}$. En fait, $F_1(0,0) \in C_{0,\text{per}}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$ par construction de v . Donc par le Lemme 2.5,

$$\begin{aligned} \|F_1(0,0)\|_{Q_T}^{(\lambda)} &\leq c(T)T^{1/2}\|F_1(0,0)\|_{Q_T}^{(1+\lambda)} \\ &\leq c(T)T^{1/2}\|v\|_{Q_T}^{(3+\lambda)} \\ &\leq c'(T)T^{1/2}. \end{aligned}$$

Remarque 6.3. Une régularité $C^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}$ pour v , n'aurait pas suffi pour montrer que $\|F_1(0,0)\|_{Q_T}^{(\lambda)} \rightarrow 0$ quand $T \rightarrow 0$. Il faut imposer une régularité $C^{3+\lambda,(3+\lambda)/2}$ pour pouvoir appliquer le Lemme d'injection 2.5. Par conséquent, on doit choisir la donnée initiale $C_0 \in C_{\text{per}}^{3+\lambda}(\mathbb{R} \times [0,1])$.

De plus, on a $F_2(0,0) = (b_1v_x + b_2v_y - v)(x,0,t) + \alpha \exp\left(\frac{-\gamma h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}}\right)$. Par conséquent, pour $v \in C_{\text{per}}^{3+\lambda,(3+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$ et $h \in C_{\text{per}}^{4+\lambda,(4+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$, on voit que $F_2(0,0) \in C_{\text{per}}^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$. En fait $F_2(0,0) \in C_{0,\text{per}}^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$ grâce aux conditions de compatibilité (3.9) et (3.10) vérifiées par f_0 et C_0 . Alors comme précédemment, on obtient

$$\|F_2(0,0)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c'(T)T^{1/2}.$$

Remarque 6.4. Ici encore, on a besoin de choisir $v \in C_{\text{per}}^{3+\lambda,(3+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$ et $h \in C_{\text{per}}^{4+\lambda,(4+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$, ce qui nécessite $(f_0, C_0) \in C_{\text{per}}^{4+\lambda}(\mathbb{R}) \times C_{\text{per}}^{3+\lambda}(\mathbb{R} \times [0,1])$.

Les deux autres termes se traitent de la même façon, en écrivant

$$\begin{aligned} F_3(0,0) &= v_y(x,1,t), \\ F_4(0,0) &= (1+h_x^2)^{1/2} \left(v(x,0,t) - \alpha \exp\left(\frac{-\gamma h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}}\right) \right) - h_t. \end{aligned}$$

La Proposition 6.2 est ainsi démontrée.

Nous sommes alors en mesure d'établir le résultat d'existence pour le problème complet (P^0) de la section 2.4.

Théorème 6.5

Soit $f_0 \in C_{\text{per}}^{4+\lambda}(\mathbb{R})$ avec $\sup_{\mathbb{R}} |f_0| \leq \frac{\epsilon}{3}$ et $C_0 \in C_{\text{per}}^{3+\lambda}(\mathbb{R} \times [0,1])$, pour $0 < \lambda < 1$.

Il existe $\tilde{T} \leq T^*$ tel que le problème (P^0) admet une solution

$$(g, u) \in A \equiv C_{0,\text{per}}^{3+\lambda,(3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_{\tilde{T}}) \times C_{0,\text{per}}^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{Q}_{\tilde{T}}).$$

Démonstration :

On considère l'application

$$\mathcal{T} : (g, u) \mapsto \mathcal{T}(g, u) = (g', u')$$

où (g', u') est la solution du problème linéaire avec les seconds membres $F_i(g, u)$, $i = 1, \dots, 4$. Par la Proposition 6.1 et le Théorème 5.1 relatif au problème linéaire, $\mathcal{T}$ est bien définie sur $A \equiv C_{0, \text{per}}^{3+\lambda, (3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T) \times C_{0, \text{per}}^{2+\lambda, (2+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$. On va montrer que sur un intervalle de temps $[0, T]$ suffisamment petit, l'application $\mathcal{T}$ est une contraction stricte et applique une certaine boule de A dans elle-même.

Soit $(g_1, u_1), (g_2, u_2) \in A$. D'après le cas linéaire (Théorème 5.1),

$$\|\mathcal{T}(g_1, u_1)\|_A = \|(g'_1, u'_1)\|_A \leq c(T) \left(\|F_1(g_1, u_1)\|_{Q_T}^{(\lambda)} + \sum_{i=2}^4 \|F_i(g_1, u_1)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \right)$$

et donc

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(g_1, u_1) - \mathcal{T}(g_2, u_2)\|_A &\leq c(T) \left(\|F_1(g_1, u_1) - F_1(g_2, u_2)\|_{Q_T}^{(\lambda)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=2}^4 \|F_i(g_1, u_1) - F_i(g_2, u_2)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \right). \end{aligned}$$

Compte tenu de la proposition 6.2 (i), pour $\|(g_1, u_1)\|_A \leq \delta$ et $\|(g_2, u_2)\|_A \leq \delta$, on a

$$\|\mathcal{T}(g_1, u_1) - \mathcal{T}(g_2, u_2)\|_A \leq c(T) (T^{1/2} + \delta) \|(g_1 - g_2), (u_1 - u_2)\|_A,$$

où $c(T)$ reste bornée quand $T \rightarrow 0$. Donc il existe $\delta > 0$ et $\tilde{T}$, $0 < \tilde{T} < T^*$, tels que

$$c(T) (T^{1/2} + \delta) \leq \frac{1}{2} \quad \text{pour tout } T < \tilde{T}.$$

$\mathcal{T}$ est alors une *contraction stricte* de $B(0, \delta) \cap A$ dans A .

On cherche maintenant à montrer que $\mathcal{T}$ laisse invariant dans A une certaine boule. Pour cela, on écrit

$$\|\mathcal{T}(g, u)\|_A \leq \|\mathcal{T}(g, u) - \mathcal{T}(0, 0)\|_A + \|\mathcal{T}(0, 0)\|_A. \quad (6.8)$$

D'autre part, on déduit de l'étude du cas linéaire (Théorème 5.1) et de la proposition 6.2 (ii) que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(0, 0)\|_A &\leq c(T) \left(\|F_1(0, 0)\|_{Q_T}^{(\lambda)} + \sum_{i=2}^4 \|F_i(0, 0)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \right) \\ &\leq \tilde{c}(T) T^{1/2}. \end{aligned}$$

Dans ces conditions, l'inégalité (6.8) devient

$$\begin{aligned}\|T(g, u)\|_A &\leq c(T) (T^{1/2} + \delta) \|(g, u)\|_A + \tilde{c}(T) T^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2} \|(g, u)\|_A + \tilde{c}(T) T^{1/2},\end{aligned}$$

grâce au choix précédent de T et δ . Finalement δ étant fixé, on choisit T suffisamment petit afin d'avoir

$$\tilde{c}(T) T^{1/2} \leq \frac{1}{2} \delta$$

et donc

$$\|T(g, u)\|_A \leq \delta.$$

On a ainsi montré que $\mathcal{T}(B(0, \delta)) \subset B(0, \delta)$.

Par conséquent, $\mathcal{T} : B(0, \delta) \cap A \longrightarrow B(0, \delta) \cap A$ est une contraction stricte. $\mathcal{T}$ admet donc un unique point fixe dans $B(0, \delta) \cap A$.

2.7 Unicité

Dans cette section, on établit l'unicité de la solution du problème $(\hat{P})$ sur un domaine fixe, introduit à la section 2.3. On écrit tout d'abord le problème $(\hat{P})$ sous la forme suivante notée $(\mathcal{P})$. On omet aussi les chapeaux des notations.

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{ll} C_t = C_{xx} + M_{11}(f)C_{yy} + M_{12}(f)C_{xy} + M_{13}(f)C_y, & \text{dans } Q_T \quad (7.1) \\ C(x, 0, t) - \frac{(1 + f_x^2)^{1/2}}{e - f} C_y(x, 0, t) + \frac{f_x}{(1 + f_x^2)^{1/2}} C_x(x, 0, t) \\ \quad = \alpha \exp\left(\frac{-\gamma f_{xx}}{(1 + f_x^2)^{3/2}}\right), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T) \quad (7.2) \\ C_y(x, 1, t) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T) \quad (7.3) \\ C(x + 2L, y, t) = C(x, y, t), & \text{dans } Q_T \quad (7.4) \\ C(x, y, 0) = C_0(x, y), & (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, 1) \quad (7.5) \\ \text{et} & \\ f_t = -(1 + f_x^2)^{1/2} \left(\alpha \exp\left(\frac{-\gamma f_{xx}}{(1 + f_x^2)^{3/2}}\right) - C(x, 0, t) \right), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T) \quad (7.6) \\ f(x + 2L, t) = f(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T) \quad (7.7) \\ f(x, 0) = f_0(x), & x \in \mathbb{R} \quad (7.8). \end{array} \right.$$

où

$$M_{11}(f) = \frac{1 + (1-y)^2 f_x^2}{(e-f)^2}, \quad (7.9)$$

$$M_{12}(f) = -2 \left(\frac{1-y}{e-f} \right) f_x, \quad (7.10)$$

$$M_{13}(f) = - \left(\frac{1-y}{e-f} \right) \left(f_{xx} - f_t + \frac{2f_x^2}{e-f} \right). \quad (7.11)$$

L'unicité est prouvée pour une classe de fonctions plus large que celle pour laquelle le résultat d'existence de la section 2.6 a été établi.

Théorème 7.1

Il existe au plus une solution (f, C) du problème $(\mathcal{P})$ telle que
 $f \in L^\infty(0, T; W^{3,\infty}(\mathbb{R}))$ avec $\sup_{\Sigma_T} |f| \leq \frac{e}{3}$, $f_t \in L^\infty(\Sigma_T)$
 et $C \in L^\infty(0, T; W^{2,\infty}(\mathbb{R} \times (0, 1)))$, $C_t \in L^\infty(Q_T)$.

Démonstration :

Soient (f_1, C_1) et (f_2, C_2) deux solutions du problème $(\mathcal{P})$. On multiplie tout d'abord la différence de l'équation (7.1) pour (f_1, C_1) et (f_2, C_2) par $C_1 - C_2$ et l'on intègre sur $[-L, L] \times [0, 1]$ puis par parties en x . Nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)^2 + \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)_x^2 \\ &= \int_0^1 \int_{-L}^L \left[M_{11}(f_1) C_{1_{yy}} + M_{12}(f_1) C_{1_{xy}} + M_{13}(f_1) C_{1_y} \right. \\ & \quad \left. - M_{11}(f_2) C_{2_{yy}} - M_{12}(f_2) C_{2_{xy}} - M_{13}(f_2) C_{2_y} \right] (C_1 - C_2) \\ &= \int_0^1 \int_{-L}^L C_{1_{yy}} [M_{11}(f_1) - M_{11}(f_2)] (C_1 - C_2) \\ & \quad + \int_0^1 \int_{-L}^L C_{1_{xy}} [M_{12}(f_1) - M_{12}(f_2)] (C_1 - C_2) \\ & \quad + \int_0^1 \int_{-L}^L C_{1_y} [M_{13}(f_1) - M_{13}(f_2)] (C_1 - C_2) \\ & \quad + \int_0^1 \int_{-L}^L M_{11}(f_2) (C_1 - C_2)_{yy} (C_1 - C_2) \quad (e_1) \\ & \quad + \int_0^1 \int_{-L}^L M_{12}(f_2) (C_1 - C_2)_{xy} (C_1 - C_2) \quad (e_2) \\ & \quad + \int_0^1 \int_{-L}^L M_{13}(f_2) (C_1 - C_2)_y (C_1 - C_2). \end{aligned}$$

En intégrant par parties les termes (e_1) et (e_2) respectivement en y et x , il vient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)^2 + \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)_x^2 \\
&= \int_0^1 \int_{-L}^L C_{1yy} [M_{11}(f_1) - M_{11}(f_2)] (C_1 - C_2) \quad (E_1) \\
&+ \int_0^1 \int_{-L}^L C_{1xy} [M_{12}(f_1) - M_{12}(f_2)] (C_1 - C_2) \quad (E_2) \\
&+ \int_0^1 \int_{-L}^L C_{1y} [M_{13}(f_1) - M_{13}(f_2)] (C_1 - C_2) \quad (E_3) \\
&- \int_{-L}^L M_{11}(f_2) (C_1 - C_2) (C_1 - C_2)_y(x, 0, t) dx \quad (E_4) \\
&- \int_0^1 \int_{-L}^L [(M_{11}(f_2))_y + (M_{12}(f_2))_x - M_{13}(f_2)] (C_1 - C_2) (C_1 - C_2)_y \quad (E_5) \\
&- \int_0^1 \int_{-L}^L M_{11}(f_2) (C_1 - C_2)_y^2 - \int_0^1 \int_{-L}^L M_{12}(f_2) (C_1 - C_2)_y (C_1 - C_2)_x \quad (E_6).
\end{aligned}$$

On va alors estimer les différents termes E_i , pour $i = 1, \dots, 6$. Pour cela, on montre tout d'abord le lemme suivant:

Lemme 7.2

Soient (f_1, C_1) , (f_2, C_2) deux solutions du problème $(\mathcal{P})$ telles que $C_1, C_2 \in L^\infty(0, T; W^{2,\infty}(\mathbb{R} \times (0, 1)))$, $f_1, f_2 \in L^\infty(0, T; W^{3,\infty}(\mathbb{R}))$ avec $\sup_{\Sigma_T} |f_1|, \sup_{\Sigma_T} |f_2| \leq \frac{\epsilon}{3}$ et $f_{1t}, f_{2t} \in L^\infty(\Sigma_T)$. Alors:

- i) $M_{11}(f_1) - M_{11}(f_2) = m_{11}(x, y, t)(f_1 - f_2) + m_{12}(x, y, t)(f_1 - f_2)_x$
- ii) $M_{12}(f_1) - M_{12}(f_2) = m_{21}(x, y, t)(f_1 - f_2) + m_{22}(x, y, t)(f_1 - f_2)_x$
- iii) $M_{13}(f_1) - M_{13}(f_2) = m_{31}(x, y, t)(f_1 - f_2) + m_{32}(x, y, t)(f_1 - f_2)_x$
 $+ m_{33}(x, y, t)(f_1 - f_2)_{xx} + m_{34}(x, y, t)(C_1 - C_2)(x, 0, t)$
- iv) $(f_1 - f_2)_t = a_1(x, t)(f_1 - f_2)_{xx} + a_2(x, t)(f_1 - f_2)_x$
 $+ a_3(x, t)(C_1 - C_2)(x, 0, t)$
- v) $(C_1 - C_2)_y(x, 0, t) = b_1(x, t)(f_1 - f_2) + b_2(x, t)(f_1 - f_2)_x$
 $+ b_3(x, t)(f_1 - f_2)_{xx} + b_4(x, t)(C_1 - C_2)(x, 0, t)$
 $+ b_5(x, t)(C_1 - C_2)_x(x, 0, t),$

avec

$m_{ij} \in L^\infty(0, T; W^{2,\infty}(\mathbb{R} \times (0, 1)))$, pour $i, j = 1, 2$;

$m_{3j} \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\mathbb{R} \times (0, 1)))$, pour $j = 1, \dots, 4$;

$a_i \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\mathbb{R}))$, pour $i = 1, \dots, 3$ et il existe $\chi > 0$ tel que $a_1 \geq \chi$;

$b_i \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\mathbb{R}))$, pour $i = 1, \dots, 5$.

Démonstration du Lemme 7.2 :

La démonstration de i) et ii) est directe puisque par un simple calcul, on obtient

$$\begin{aligned} m_{11}(x, y, t) &= \frac{1 + (1 - y)^2 f_{2x}^2}{(e - f_1)^2 (e - f_2)^2} (2e - f_1 - f_2) \\ m_{12}(x, y, t) &= \frac{(1 - y)^2 (f_1 + f_2)_x}{(e - f_1)^2} \\ m_{21}(x, y, t) &= \frac{-2(1 - y) f_{1x}}{(e - f_1)(e - f_2)} \\ m_{22}(x, y, t) &= \frac{-2(1 - y)}{e - f_2} \end{aligned}$$

Pour la démonstration de iv), on forme la différence de l'équation (7.6) pour f_1 et f_2 , que l'on écrit sous la forme

$$\begin{aligned} (f_1 - f_2)_t &= - \left[(1 + f_{1x}^2)^{1/2} - (1 + f_{2x}^2)^{1/2} \right] \left[\alpha \exp \left(\frac{-\gamma f_{1xx}}{(1 + f_{1x}^2)^{3/2}} \right) - C_1(x, 0, t) \right] \\ &\quad - \alpha (1 + f_{2x}^2)^{1/2} \left[\exp \left(\frac{-\gamma f_{1xx}}{(1 + f_{1x}^2)^{3/2}} \right) - \exp \left(\frac{-\gamma f_{2xx}}{(1 + f_{2x}^2)^{3/2}} \right) \right] \\ &\quad + (1 + f_{2x}^2)^{1/2} (C_1 - C_2)(x, 0, t). \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$(1 + f_{1x}^2)^{1/2} - (1 + f_{2x}^2)^{1/2} = \left(\int_0^1 \frac{z}{(1 + z^2)^{1/2}} \bigg|_{z=\theta f_{1x} + (1-\theta)f_{2x}} d\theta \right) (f_1 - f_2)_x$$

et

$$\begin{aligned} &\exp \left(\frac{-\gamma f_{1xx}}{(1 + f_{1x}^2)^{3/2}} \right) - \exp \left(\frac{-\gamma f_{2xx}}{(1 + f_{2x}^2)^{3/2}} \right) \\ &= 3\gamma f_{1xx} \left(\int_0^1 \frac{z}{(1 + z^2)^{5/2}} \exp \left(\frac{-\gamma f_{1xx}}{(1 + z^2)^{3/2}} \right) \bigg|_{z=\theta f_{1x} + (1-\theta)f_{2x}} d\theta \right) (f_1 - f_2)_x \\ &\quad - \frac{\gamma}{(1 + f_{2x}^2)^{3/2}} \left(\int_0^1 \exp \left(\frac{-\gamma w}{(1 + f_{2x}^2)^{3/2}} \right) \bigg|_{w=\theta f_{1xx} + (1-\theta)f_{2xx}} d\theta \right) (f_1 - f_2)_{xx}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$(f_1 - f_2)_t = a_1(x, t)(f_1 - f_2)_{xx} + a_2(x, t)(f_1 - f_2)_x + a_3(x, t)(C_1 - C_2)(x, 0, t)$$

où $a_i \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\mathbb{R}))$, pour $i = 1, \dots, 3$.

En particulier, on a

$$a_1(x, t) = \frac{\alpha\gamma}{(1 + f_{2x}^2)} \int_0^1 \exp \left(\frac{-\gamma w}{(1 + f_{2x}^2)^{3/2}} \right) \bigg|_{w=\theta f_{1xx} + (1-\theta)f_{2xx}} d\theta,$$

ce qui implique $a_1 \geq \chi$ pour une constante $\chi > 0$.

L'expression v) de $(C_1 - C_2)_y(x, 0, t)$ est montrée d'une façon analogue : en écrivant la différence de l'équation (7.2) pour C_{1y} et C_{2y} , il vient

$$\begin{aligned} (C_1 - C_2)_y(x, 0, t) = & \frac{e - f_1}{(1 + f_{1x}^2)^{1/2}}(C_1 - C_2) + \frac{(e - f_1)f_{1x}}{1 + f_{1x}^2}(C_1 - C_2)_x \\ & + \left(C_2 - \alpha \exp \left(\frac{-\gamma f_{2xx}}{(1 + f_{2x}^2)^{3/2}} \right) \right) \left[\frac{e - f_1}{(1 + f_{1x}^2)^{1/2}} - \frac{e - f_2}{(1 + f_{2x}^2)^{1/2}} \right] \\ & + C_{2xx} \left[\frac{e - f_1}{1 + f_{1x}^2} f_{1x} - \frac{e - f_2}{1 + f_{2x}^2} f_{2x} \right] \\ & - \alpha \frac{e - f_1}{(1 + f_{1x}^2)^{1/2}} \left[\exp \left(\frac{-\gamma f_{1xx}}{(1 + f_{1x}^2)^{3/2}} \right) - \exp \left(\frac{-\gamma f_{2xx}}{(1 + f_{2x}^2)^{3/2}} \right) \right]. \end{aligned}$$

On conclut alors comme précédemment, en utilisant les développements de Taylor avec reste intégral.

Enfin, la démonstration du point iii) est basée sur le fait que l'on peut décomposer directement la différence $M_{13}(f_1) - M_{13}(f_2)$ sous la forme

$$\begin{aligned} M_{13}(f_1) - M_{13}(f_2) = & \tilde{a}_1(x, y, t)(f_1 - f_2) + \tilde{a}_2(x, y, t)(f_1 - f_2)_x \\ & + \tilde{a}_3(x, y, t)[(f_1 - f_2)_{xx} + (f_1 - f_2)_t] \end{aligned}$$

où $\tilde{a}_i \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\mathbb{R} \times (0, 1)))$, pour $i = 1, \dots, 3$.

Compte tenu de l'expression iv) de $(f_1 - f_2)_t$ établie auparavant, on obtient l'expression iii) de $M_{13}(f_1) - M_{13}(f_2)$, ce qui termine la démonstration du Lemme 7.2.

Dans ces conditions, on a les estimations

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 & \leq K_1 \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)(f_1 - f_2) + K_2 \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)(f_1 - f_2)_x \\ & \leq K_3 \left(\int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)^2 + \int_{-L}^L (f_1 - f_2)^2 dx \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_x^2 dx \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E_3 & \leq K_4 \left(\int_0^1 \int_{-L}^L (f_1 - f_2)(C_1 - C_2) + \int_0^1 \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_x (C_1 - C_2) \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)(x, 0, t)(C_1 - C_2) + \int_0^1 \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_{xx} (C_1 - C_2) \right), \end{aligned}$$

soit,

$$E_3 \leq K_5 \left(\int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)^2 + \int_{-L}^L (C_1 - C_2)^2(x, 0, t) dx + \int_{-L}^L (f_1 - f_2)^2 dx \right. \\ \left. + \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_x^2 dx \int_0^1 \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_{xx} (C_1 - C_2) \right).$$

Par ailleurs, grâce à l'inégalité de Young, pour $\varepsilon > 0$ il existe une constante $c_\varepsilon > 0$ telle que

$$\int_0^1 \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_{xx} (C_1 - C_2) \leq \varepsilon \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_{xx}^2 dx + c_\varepsilon \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)^2.$$

Donc,

$$E_1 + E_2 + E_3 \leq c_\varepsilon \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)^2 + c \int_{-L}^L (C_1 - C_2)^2(x, 0, t) dx \\ + c \left(\int_{-L}^L (f_1 - f_2)^2 dx + \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_x^2 dx \right) + \varepsilon \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_{xx}^2 dx.$$

On rappelle alors un lemme qui permettra d'estimer l'intégrale de bord $\int_{-L}^L (C_1 - C_2)^2(x, 0, t) dx$.

On trouvera la démonstration de ce résultat dans [1].

Lemme 7.3

Soit Ω un domaine Lipschitzien borné dans $\mathbb{R}^2$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que

$$\int_{\partial\Omega} w^2(s) ds \leq \varepsilon \int \int_{\Omega} (\text{grad } w)^2 dX + C_\varepsilon \int \int_{\Omega} w^2 dX$$

pour tout $w \in H^1(\Omega)$.

Par conséquent, il existe $C'_\varepsilon > 0$ telle que

$$\int_{-L}^L (C_1 - C_2)^2(x, 0, t) dx \leq \varepsilon \int_0^1 \int_{-L}^L (\text{grad } (C_1 - C_2))^2 + C'_\varepsilon \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)^2.$$

Ainsi,

$$E_1 + E_2 + E_3 \leq \varepsilon \int_0^1 \int_{-L}^L (\text{grad } (C_1 - C_2))^2 + C''_\varepsilon \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)^2 \\ + c \left(\int_{-L}^L (f_1 - f_2)^2 dx + \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_x^2 dx \right) + \varepsilon \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_{xx}^2 dx.$$

Par ailleurs, en substituant l'expression de $(C_1 - C_2)_y(x, 0, t)$ dans E_4 , et en utilisant l'inégalité de Young pour le terme où apparaît alors $(f_1 - f_2)_{xx}$, on obtient

$$\begin{aligned} E_4 \leq & c \left(\int_{-L}^L (f_1 - f_2)^2 dx + \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_x^2 dx \right) + \varepsilon \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_{xx}^2 dx \\ & + C_\varepsilon'' \int_{-L}^L (C_1 - C_2)^2(x, 0, t) dx \\ & + \int_{-L}^L M_{11}(f_2) b_5 (C_1 - C_2)(C_1 - C_2)_x(x, 0, t) dx. \end{aligned}$$

En outre, l'intégration par parties du dernier terme donne

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L M_{11}(f_2) b_5 (C_1 - C_2)(C_1 - C_2)_x(x, 0, t) dx \\ = -\frac{1}{2} \int_{-L}^L (M_{11}(f_2) b_5)_x (C_1 - C_2)^2(x, 0, t) dx. \end{aligned}$$

En utilisant alors le Lemme 7.3, il vient

$$\begin{aligned} E_4 \leq & \varepsilon \int_0^1 \int_{-L}^L (\text{grad } (C_1 - C_2))^2 + c_\varepsilon \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)^2 \\ & + c \left(\int_{-L}^L (f_1 - f_2)^2 dx + \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_x^2 dx \right) + \varepsilon \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_{xx}^2 dx. \end{aligned}$$

On pose $\mathcal{M}(x, y, t) = (M_{11}(f_2))_y + (M_{12}(f_2))_x - M_{13}(f_2)$.

Il est clair que $\mathcal{M} \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\mathbb{R} \times (0, 1)))$. Le terme E_5 s'écrit alors

$$E_5 = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-L}^L \mathcal{M} \frac{\partial}{\partial y} ((C_1 - C_2)^2).$$

En intégrant par parties et en remarquant que $\mathcal{M}(x, 1, t) = 0$, on obtient

$$E_5 = -\frac{1}{2} \int_{-L}^L \mathcal{M} (C_1 - C_2)^2(x, 0, t) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-L}^L (\mathcal{M})_y (C_1 - C_2)^2.$$

Par conséquent, grâce au Lemme 7.3, il vient

$$E_5 \leq \varepsilon \int_0^1 \int_{-L}^L (\text{grad } (C_1 - C_2))^2 + c_\varepsilon \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)^2.$$

Enfin, le terme E_6 est évalué en remarquant tout d'abord que

$$M_{11}(f) = \frac{1}{4} M_{12}^2(f) + \frac{1}{(e - f)^2},$$

et en appliquant l'inégalité de Young : pour une constante $\delta \in (0,1)$ qui sera choisie ultérieurement, on obtient

$$\begin{aligned} E_6 &\leq -\frac{1}{4} \int_0^1 \int_{-L}^L M_{12}^2(f_2)(C_1 - C_2)_y^2 - \int_0^1 \int_{-L}^L \frac{1}{(e - f_2)^2} (C_1 - C_2)_y^2 \\ &\quad + (1 - \delta) \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)_x^2 + \frac{1}{4(1 - \delta)} \int_0^1 \int_{-L}^L M_{12}^2(f_2)(C_1 - C_2)_y^2 \\ &\leq (1 - \delta) \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)_x^2 - K_1 \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)_y^2 \\ &\quad + \frac{\delta K_2}{4(1 - \delta)} \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)_y^2, \end{aligned}$$

où $K_1 = (\|(e - f_2)^2\|_{L^\infty(\Sigma_T)})^{-1} < +\infty$ et $K_2 = \|M_{12}^2(f_2)\|_{L^\infty(Q_T)} < +\infty$.

On choisit alors $\delta \in (0,1)$ tel que $\frac{\delta K_2}{4(1 - \delta)} \leq \frac{K_1}{2}$, soit $\delta \leq \frac{2K_1}{K_2 + 2K_1} < 1$. Ainsi,

$$E_6 \leq (1 - \delta) \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)_x^2 - \frac{K_1}{2} \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)_y^2.$$

Finalement, on choisit $\delta = \min\left(1, \frac{2K_1}{K_2 + 2K_1}, \frac{K_1}{2}\right)$, de sorte que

$$E_6 \leq (1 - \delta) \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)_x^2 - \delta \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)_y^2.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)^2 + \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)_x^2 \\ &\leq \varepsilon \int_0^1 \int_{-L}^L (\text{grad } (C_1 - C_2))^2 + C_\varepsilon \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)^2 \\ &\quad + (1 - \delta) \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)_x^2 - \delta \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)_y^2 \\ &\quad + \varepsilon \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_{xx}^2 dx + c \left(\int_{-L}^L (f_1 - f_2)^2 dx + \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_x^2 dx \right). \end{aligned}$$

Soit,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)^2 &\leq (\varepsilon - \delta) \int_0^1 \int_{-L}^L (\text{grad } (C_1 - C_2))^2 \\ &\quad + C_\varepsilon \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)^2 + \varepsilon \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_{xx}^2 dx \\ &\quad + c \left(\int_{-L}^L (f_1 - f_2)^2 dx + \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_x^2 dx \right) \quad (7.12) \end{aligned}$$

On multiplie ensuite l'équation iv) du Lemme 7.2 donnant l'expression de $(f_1 - f_2)_t$, par $f_1 - f_2$, et on intègre par parties pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-L}^L (f_1 - f_2)^2 dx &= - \int_{-L}^L (a_1)_x (f_1 - f_2)(f_1 - f_2)_x dx - \int_{-L}^L a_1 (f_1 - f_2)_x^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{-L}^L (a_2)_x (f_1 - f_2)^2 dx + \int_{-L}^L a_3 (f_1 - f_2)(C_1 - C_2)(x, 0, t) dx. \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 7.3, il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-L}^L (f_1 - f_2)^2 dx &\leq \varepsilon \int_0^1 \int_{-L}^L (\text{grad } (C_1 - C_2))^2 + C_\varepsilon \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)^2 \\ &\quad + c_1 \int_{-L}^L (f_1 - f_2)^2 dx + c_2 \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_x^2 dx. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Finalement, on multiplie l'équation iv) du Lemme 7.2 donnant l'expression de $(f_1 - f_2)_t$, par $-(f_1 - f_2)_{xx}$, et on intègre par parties. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_x^2 dx + \int_{-L}^L a_1 (f_1 - f_2)_{xx}^2 dx \\ = -\frac{1}{2} \int_{-L}^L (a_2)_x (f_1 - f_2)_x^2 dx - \int_{-L}^L a_3 (f_1 - f_2)_{xx} (C_1 - C_2)(x, 0, t) dx. \end{aligned}$$

Grace au Lemme 7.3 et à l'inégalité de Young, on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_x^2 dx + \chi \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_{xx}^2 dx \\ \leq c \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_x^2 dx + \varepsilon \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_{xx}^2 dx \\ + \varepsilon \int_0^1 \int_{-L}^L (\text{grad } (C_1 - C_2))^2 + C_\varepsilon \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)^2. \end{aligned} \quad (7.14)$$

En additionnant les inégalités (7.12), (7.13) et (7.14), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)^2 + \int_{-L}^L (f_1 - f_2)^2 dx + \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_x^2 dx \right) \\ + (\delta - 3\varepsilon) \int_0^1 \int_{-L}^L (\text{grad } (C_1 - C_2))^2 + (\chi - 2\varepsilon) \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_{xx}^2 \\ \leq C_\varepsilon \left(\int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)^2 + \int_{-L}^L (f_1 - f_2)^2 dx + \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_x^2 dx \right). \end{aligned} \quad (7.15)$$

On pose alors

$$Y(t) = \int_0^1 \int_{-L}^L (C_1 - C_2)^2 + \int_{-L}^L (f_1 - f_2)^2 dx + \int_{-L}^L (f_1 - f_2)_x^2 dx$$

Si l'on choisit $\varepsilon = \min(\delta/3, \chi/2)$, on déduit de (7.15) l'inégalité $\frac{dY}{dt} \leq cY$, et comme $Y(0) = 0$, on conclut que $Y \equiv 0$. Ceci implique alors $C_1 = C_2$ et $f_1 = f_2$. L'unicité est ainsi démontrée.

Appendice.

On a dissolution-growth problem with surface tension : Local existence and uniqueness.

ON A DISSOLUTION-GROWTH PROBLEM WITH SURFACE TENSION : LOCAL EXISTENCE AND UNIQUENESS

J.F. Scheid

Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris-Sud
Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France

and

Commissariat à l'Energie Atomique
DTM/SCECF, B.P. n°6
92265 Fontenay-aux-Roses Cedex, France

Abstract. We consider a one-phase Stefan problem with surface tension in space dimension two. We prove the local existence and uniqueness in time of the solution, in the case where the moving interface is parametrized in the form $y = f(x, t)$.

Keywords. Stefan problem with surface tension, free boundary problem, system of nonlinear parabolic equations.

1. Introduction.

In this note, we consider a Stefan problem with surface tension modeling a corrosion phenomenon. Consider a system composed of a solid phase of a single compound in contact with an incompressible liquid phase which is a dilute solution of that compound. We are interested in the evolution in time of the interface between solid and liquid and in the concentration of the compound passed into solution. We suppose that this evolution is governed by two processes : a diffusion process in the fluid and a dissolution-growth process, located at the interface. Moreover, it is assumed that, at every point of the interface the volume decrease of the solid is exactly equal to the volume increase of the liquid. Mathematically, this leads us to the three basic equations

$$C_t = \Delta C \text{ in the liquid phase,}$$

where $C = C(x, y, t)$ is the concentration of the chemical species in the liquid,

$$\frac{\partial C}{\partial n} \Big|_{\Gamma_t} = V_n,$$

where Γ_t is the interface between solid and liquid, n is the normal unit vector to the interface, directed towards the liquid phase, and V_n is the normal velocity of the interface Γ_t given by the kinetic law [3],

$$V_n = C|_{\Gamma_t} - \alpha \exp(\gamma K),$$

where α and γ are some positive constants, γ is proportional to the surface tension of the interface, and K is the mean curvature of the interface.

In this paper, we consider the case where the liquid phase is delimited by a fixed upper boundary of y -coordinate e and we assume that the concentration C satisfies a homogeneous Neumann condition on this fixed boundary. We also suppose that the interface can be described by the graph $\Gamma_t = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, y = f(x, t)\}$. Then, f and C satisfy the problem

$$\begin{aligned}
(P) \left\{ \begin{aligned}
C_t &= \Delta C \quad \text{in } Q_f \equiv \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, f(x, t) < y < e\}, & (1.1) \\
\left(C - \frac{\partial C}{\partial n}\right)(x, f(x, t), t) &= \alpha \exp\left(\frac{-\gamma f_{xx}}{(1 + f_x^2)^{3/2}}(x, t)\right), & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ & (1.2) \\
\frac{\partial C}{\partial y}(x, e, t) &= 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ & (1.3) \\
C(x + 2L, y, t) &= C(x, y, t), & (x, y, t) \in Q_f & (1.4) \\
C(x, y, 0) &= C_0(x, y), \quad (x, y) \in \Sigma_f \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f_0(x) < y < e\}, & (1.5) \\
\frac{f_t}{(1 + f_x^2)^{1/2}} &= -\alpha \exp\left(\frac{-\gamma f_{xx}}{(1 + f_x^2)^{3/2}}(x, t)\right) + C(x, f(x, t), t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ & (1.6) \\
f(x + 2L, t) &= f(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ & (1.7) \\
f(x, 0) &= f_0(x), & x \in \mathbb{R} & (1.8)
\end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

The conditions (1.4) and (1.7) indicate the periodicity of the concentration and of the interface in the x -direction with period $2L$. In the following, we will use the subscript *per* to refer to these periodicity conditions. Moreover we suppose that the initial data f_0 and C_0 are $2L$ -periodic and satisfy suitable compatibility conditions, namely the equations (1.2) and (1.3) at time $t = 0$.

Abergel, Hilhorst and Issard-Roch [1] show the existence and uniqueness of the solution in the neighborhood of the stationary solution $(f, C) = (0, \alpha)$ for Problem (P), posed on a slightly different space domain. The purpose of this note is to sketch the proof of the following local existence and uniqueness result.

Theorem 1.1. *Let $f_0 \in C_{\text{per}}^{4+\lambda}(\mathbb{R})$ with $\sup_{\mathbb{R}} |f_0| \leq \frac{e}{3}$ and $C_0 \in C_{\text{per}}^{3+\lambda}(\overline{\Sigma}_f)$ for some $0 < \lambda < 1$. There exists a positive constant $T > 0$ such that Problem (P) has a unique solution*

$$(f, C) \in C_{\text{per}}^{3+\lambda, (3+\lambda)/2}(\Sigma_T) \times C_{\text{per}}^{2+\lambda, (2+\lambda)/2}(\overline{Q}_{f,T}),$$

where $\Sigma_T \equiv \mathbb{R} \times (0, T)$ and $Q_{f,T} \equiv \{(x, y, t) \in Q_f, t \in (0, T)\}$.

The proof of Theorem 1.1 is organized as follows.

In section 2, we recall basic properties of Hölder spaces that we use in the proof.

In section 3, we first transform Problem (P) into a problem on a fixed domain which we then transform to obtain a problem (P^0) with homogeneous initial data, as it is done by Bazaliĭ and Degtyarev [2], in the context of a Stefan problem for convective motion of a viscous incompressible flow.

We give in section 4 a result about the existence and uniqueness of the solution of a related linear problem.

In section 5, we consider the nonlinear problem and sketch the existence proof which is based on a fixed point method.

The uniqueness result that we obtain is given in section 6.

2. Preliminaries.

We use the Hölder spaces $C^{l, l/2}(\overline{Q}_T)$ as defined by Ladyženskaja, Solonnikov and Ural'ceva [4], where $Q_T = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, T), 0 < y < 1\}$ and with $l = m + \lambda$ where $m \in \mathbb{N}$ and $0 < \lambda < 1$. In this paper, we also use the Hölder spaces with homogeneous initial data

defined by

$$C_0^{l,l/2}(\overline{Q}_T) = \left\{ v \in C^{l,l/2}(\overline{Q}_T), \frac{\partial^j v}{\partial t^j} \Big|_{t=0} = 0; j = 0, \dots, [\frac{l}{2}] \right\}.$$

The following lemma [2] is essential for the construction of a strict contraction in the existence proof below.

Lemma 2.1. *Let $l' > l > 0$ and $v \in C_0^{l',l'/2}(\overline{Q}_T)$. Then, there exists a constant $c > 0$ such that*

$$\|v\|_{Q_T}^{(l)} \leq cT^{(l'-l)/2} \|v\|_{Q_T}^{(l')}.$$

3. Transformation of the problem into a problem on a fixed domain with homogeneous initial data.

We first transform Problem (P) into a problem on the fixed domain $\hat{Q} = \{(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, 0 < \hat{y} < 1\}$, by means of the change of variable and function

$$\hat{y} = \frac{y - f(x, t)}{e - f(x, t)} = 1 - \frac{e - y}{e - f(x, t)}, \text{ and } \hat{C}(x, \hat{y}, t) = C(x, y, t).$$

(In the following, we omit the *hat* in the notations.)

We suppose that the initial data are such that $C_0 \in C_{\text{per}}^{3+\lambda}(\mathbb{R} \times [0, 1])$ and $f_0 \in C_{\text{per}}^{4+\lambda}(\mathbb{R})$ with $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_0(x)| \leq \frac{e}{3}$. Following ideas of [4], we construct the functions $v(x, y, t) \in C_{\text{per}}^{3+\lambda, (3+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$ and $h(x, t) \in C_{\text{per}}^{4+\lambda, (4+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$ such that

$$\begin{cases} v(x, y, 0) = C_0(x, y) \\ v_t(x, y, 0) = C_t(x, y, 0) = C^{(1)}(x, y) \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} h(x, 0) = f_0(x) \\ h_t(x, 0) = f_t(x, 0) = f^{(1)}(x) \end{cases}$$

where $f^{(1)}$ and $C^{(1)}$ are determined by the two differential equations (1.1), (1.6) at time $t = 0$, transposed on the fixed domain $\hat{Q}$. Then we set

$$g(x, t) = f(x, t) - h(x, t) \quad \text{and} \quad u(x, y, t) = C(x, y, t) - v(x, y, t),$$

and write the equations for (g, u) in order to obtain a problem on a fixed domain, with homogeneous initial data. By separating the linear terms in g and u from the nonlinear ones, we obtain a problem of the form

$$(P^0) \left\{ \begin{array}{l} (P^1) \left\{ \begin{array}{l} u_t - (u_{xx} + a_{11}u_{yy} + a_{12}u_{xy}) + a_{13}u_y = F_1(g, u) \quad \text{in } Q \\ u - (b_1u_x + b_2u_y) \\ \quad + \frac{\alpha\gamma}{(1+h_x^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{-\gamma h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}}\right) g_{xx} = F_2(g, u) \quad \text{in } \mathbb{R} \times \{y=0\} \times \mathbb{R}^+ \end{array} \right. \\ u_y(x, 1, t) = F_3(g, u) \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x+2L, y, t) = u(x, y, t) \quad \text{in } Q \\ u(x, y, 0) = u_t(x, y, 0) = 0 \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, 1) \\ (P^2) \left\{ \begin{array}{l} g_t - \frac{\alpha\gamma}{(1+h_x^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{-\gamma h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}}\right) g_{xx} = F_4(g, u) \quad \text{in } \mathbb{R} \times \{y=0\} \times \mathbb{R}^+ \\ g(x+2L, t) = g(x, t) \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ g(x, 0) = g_t(x, 0) = 0 \quad x \in \mathbb{R} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

where the coefficients a_{ij} and b_i depend only on the function h and its derivatives, and the right hand members F_i , $i = 1, \dots, 4$ depend on the functions u and g as well as on their first and second derivatives in space.

4. The related linear problem.

We consider the linear problem obtained by freezing the right hand sides F_i , $i = 1, \dots, 4$ in Problem (P^0) and supposing that the F_i 's, $i = 1, \dots, 4$ are given functions with $F_1 \in C_{0,\text{per}}^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}_T)$ and $F_i \in C_{0,\text{per}}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$, for $i = 2, \dots, 4$. We denote by (P_1^1) and (P_1^2) the linear problems corresponding to (P^1) and (P^2) . Using classical results on linear parabolic problems [4], one can easily prove the following result.

Theorem 4.1. *Let T^* such that $\sup_{\Sigma_{T^*}} |h| \leq \frac{e}{2}$. For all $T \in [0, T^*]$, the linear problem $(P_1^1) - (P_1^2)$ has a unique solution $(g, u) \in C_{0,\text{per}}^{3+\lambda,(3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T) \times C_{0,\text{per}}^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$. Furthermore there exists $c(T) > 0$ which remains bounded for $T \rightarrow 0$ such that*

$$\|u\|_{Q_T}^{(2+\lambda)} + \|g\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \leq c(T) \left(\|F_1\|_{Q_T}^{(\lambda)} + \sum_{i=2}^4 \|F_i\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \right). \quad (4.9)$$

5. The nonlinear problem - Existence of a fixed point.

We first give some estimates which are a key ingredient in the proof of Theorem 5.3 below.

Lemma 5.1. (i) *Let $0 < \delta_0 \leq \frac{e}{3}$. There exists a constant $c = c(\delta_0, T)$ which remains bounded for $T \rightarrow 0$, such that for all $\delta \in (0, \delta_0)$ and all $(g_1, u_1), (g_2, u_2) \in A \equiv C_{0,\text{per}}^{3+\lambda,(3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T) \times C_{0,\text{per}}^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$, satisfying $\max(\|(g_1, u_1)\|_A, \|(g_2, u_2)\|_A) \leq \delta$, there holds*

$$\begin{aligned} & \|F_1(g_1, u_1) - F_1(g_2, u_2)\|_{Q_T}^{(\lambda)} + \sum_{i=2}^4 \|F_i(g_1, u_1) - F_i(g_2, u_2)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \\ & \leq c(T) (T^{1/2} + \delta) \|(g_1 - g_2, u_1 - u_2)\|_A; \end{aligned}$$

(ii) *There exists a constant $c' = c'(T)$ which remains bounded for $T \rightarrow 0$, such that*

$$\|F_1(0, 0)\|_{Q_T}^{(\lambda)} + \sum_{i=2}^4 \|F_i(0, 0)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c'(T) T^{1/2}.$$

The conditions that the initial data $f_0 \in C^{4+\lambda}(\mathbb{R})$ and $C_0 \in C^{3+\lambda}(\mathbb{R} \times [0, 1])$ are necessary for the proof of (ii). Next, we state the main result of this section.

Theorem 5.2. *Let $f_0 \in C_{\text{per}}^{4+\lambda}(\mathbb{R})$ with $\sup_{\mathbb{R}} |f_0| \leq \frac{e}{3}$ and $C_0 \in C_{\text{per}}^{3+\lambda}(\mathbb{R} \times [0, 1])$ for some $0 < \lambda < 1$. There exists a positive constant $\tilde{T}$ such that Problem (P^0) has a solution*

$$(g, u) \in A \equiv C_{0,\text{per}}^{3+\lambda,(3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_{\tilde{T}}) \times C_{0,\text{per}}^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{Q}_{\tilde{T}}).$$

Proof. We consider the mapping $\mathcal{T} : (g, u) \mapsto \mathcal{T}(g, u) = (g', u')$ where (g', u') is the solution of the related linear problem with the right-hand sides $F_i(g, u)$, $i = 1, \dots, 4$. By Theorem 4.1, $\mathcal{T}$ is well defined on $A \equiv C_{0,\text{per}}^{3+\lambda,(3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T) \times C_{0,\text{per}}^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$. We prove that $\mathcal{T}$ has a unique fixed point in a certain ball and for T small enough. In view of (4.9) and Lemma 5.1, there holds for $\|(g_1, u_1)\|_A \leq \delta$ and $\|(g_2, u_2)\|_A \leq \delta$,

$$\|\mathcal{T}(g_1, u_1) - \mathcal{T}(g_2, u_2)\|_A \leq c(T) (T^{1/2} + \delta) \|(g_1 - g_2, u_1 - u_2)\|_A.$$

We choose T and δ , such that $c(T) (T^{1/2} + \delta) \leq \frac{1}{2}$, so that $\mathcal{T}$ is strict contraction from $B(0, \delta) \cap A$ into A .

Furthermore, we write $\|\mathcal{T}(g, u)\|_A \leq \|\mathcal{T}(g, u) - \mathcal{T}(0, 0)\|_A + \|\mathcal{T}(0, 0)\|_A$, and use Lemma 5.1 (ii) to obtain

$$\|\mathcal{T}(g, u)\|_A \leq \frac{1}{2} \|(g, u)\|_A + \tilde{c}(T)T^{1/2}. \quad (5.10)$$

Thus, if g and u are such that $\|(g, u)\|_A \leq \delta$, and T satisfies $\tilde{c}(T)T^{1/2} \leq \frac{1}{2}\delta$, we deduce from (5.10) that

$$\|\mathcal{T}(g, u)\|_A \leq \delta.$$

This shows that $\mathcal{T}$ maps the set $B(0, \delta) \cap A$ into itself and we conclude that $\mathcal{T}$ has a unique fixed point in $B(0, \delta) \cap A$.

6. Uniqueness.

Using a method similar to that of [1], we prove the following uniqueness result.

Theorem 6.1. *Let T^* be such as $\sup_{\Sigma_T} |h| \leq \frac{e}{2}$. For $0 < T \leq T^*$, there exists at most one solution (f, C) of Problem (P) such that $f \in L^\infty(0, T; W^{3,\infty}(\mathbb{R}))$ with $\sup_{\Sigma_T} |f| \leq \frac{e}{3}$, $f_t \in L^\infty(\Sigma_T)$ and $C \in L^\infty(0, T; W^{2,\infty}(\mathbb{R} \times (0, 1)))$, $C_t \in L^\infty(Q_T)$.*

Acknowledgement . The author wishes to thank F. Abergel, D. Hilhorst and F. Issard-Roch for very many inspiring discussions.

References

- [1] F. ABERGEL, D. HILHORST ET F. ISSARD-ROCH, *On a dissolution-growth problem with surface tension in the neighborhood of a stationary solution*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 24, No. 2 (1993), p. 299-316.
- [2] B.V. BAZALIŇ ET S.P. DEGTYAREV, *On classical solvability of the multidimensional Stefan problem for convective motion of a viscous incompressible fluid*, Math. USSR Sbornik, Vol. 60, No. 1 (1988), p. 1-17.
- [3] F. KALEYDJIAN AND M. COUNIL, *Stability of steady states in some solid-liquid systems*, React. Solids, 2 (1986), p. 1-21.
- [4] O.A. LADYŽENSKAJA, V.A. SOLONNIKOV ET N.N. URAL'CEVA, *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*, Translations of Mathematical Monographs Volume 23, Providence R.I, American Mathematical Society 1968.

Chapitre 3

EXISTENCE LOCALE EN TEMPS : Le cas où l'interface est une courbe simple fermée



3.1 Introduction.

Dans ce chapitre, nous considérons le cas où l'interface Γ_t est une courbe de Jordan (courbe simple fermée). On dénote par Ω_t le domaine simplement connexe délimité extérieurement par le bord fixe $\mathcal{S}$ et intérieurement par l'interface Γ_t . On suppose que la concentration C satisfait une condition de Neumann homogène sur le bord extérieur fixe $\mathcal{S}$. Le problème s'exprime alors de la façon suivante :

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{ll} C_t = \Delta C & \text{dans } Q \equiv \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, (x, y) \in \Omega_t\} \\ \frac{\partial C}{\partial n} = V_n & \text{sur } \Sigma \equiv \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, (x, y) \in \Gamma_t\} \\ \frac{\partial C}{\partial n_{\mathcal{S}}} = 0 & \text{sur } \mathcal{S} \times \mathbb{R}^+ \\ C(x, y, 0) = C_0(x, y) & \text{dans } \Omega_0 \\ \text{et} \\ V_n = C - \alpha \exp(\gamma K) & \text{sur } \Sigma \\ \Gamma_{t=0} = \Gamma_0, \end{array} \right.$$

où n et $n_{\mathcal{S}}$ sont les normales unitaires intérieures respectivement à l'interface Γ_t et au bord extérieur fixe $\mathcal{S}$, V_n est la vitesse normale de l'interface Γ_t et K est sa courbure moyenne.

On suppose que l'interface initiale Γ_0 est une courbe de Jordan telle que $\text{dist}(\Gamma_0, \mathcal{S}) > 0$. Ω_0 est le domaine initial délimité extérieurement par $\mathcal{S}$ et intérieurement par Γ_0 .

Par ailleurs, on impose aux données initiales C_0 et Γ_0 les conditions de compatibilité :

$$(H_0) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial C_0}{\partial n_0} = C_0 - \alpha \exp(\gamma K_0), & \text{sur } \Gamma_0 \\ \frac{\partial C_0}{\partial n_{\mathcal{S}}} = 0, & \text{sur } \mathcal{S}, \end{array} \right.$$

où n_0 est la normale unitaire intérieure à l'interface initiale Γ_0 et K_0 est sa courbure moyenne.

L'objet de ce chapitre est d'établir un résultat d'existence locale en temps d'une solution du problème $(\mathcal{P})$ dans le cas où l'interface Γ_t est une courbe simple fermée. Le résultat principal se formule de la manière suivante :

Théorème 1.1

Soient $\Gamma_0 \in C^{4+\lambda}$ avec $\text{dist}(\Gamma_0, S) > 0$ et $C_0 \in C^{3+\lambda}(\overline{\Omega}_0)$. On suppose que Γ_0 et C_0 satisfont les conditions de compatibilité (H_0) . Alors il existe $T_0 > 0$ tel que le problème (P) admet une solution $\left(C, \Gamma = \bigcup_{0 \leq t \leq T_0} (\Gamma_t \times \{t\}) \right)$ telle que

$$C \in C^{2+\lambda, (2+\lambda)/2}(\overline{Q}_{T_0}) \text{ et } \Gamma \in C^{3+\lambda, (3+\lambda)/2},$$

où $Q_{T_0} = \bigcup_{0 \leq t \leq T_0} (\Omega_t \times \{t\})$.

Afin de démontrer le Théorème 1.1, on paramétrise l'interface Γ_t dans un voisinage de l'interface initiale Γ_0 , par l'abscisse curviligne s_1 de Γ_0 . L'interface Γ_t est alors repérée par une fonction $\rho(s_1, t)$ dans la direction de la normale $\vec{n}_0$ de Γ_0 . On obtient ainsi un problème (P) pour la concentration C et la fonction ρ , pour lequel on va montrer l'existence locale en temps d'une solution. Cette paramétrisation de l'interface Γ_t et l'obtention du problème (P) associé sont établis au paragraphe 2.

La démonstration du résultat d'existence locale du problème (P) est organisée comme celle du Chapitre 2, où l'interface était paramétrée sous la forme $y = f(x, t)$.

Au paragraphe 3, on transforme le problème (P) en un problème (P_φ) défini sur le domaine initial fixe Ω_0 . On construit pour cela, un difféomorphisme φ qui transforme le domaine Ω_t dans le domaine initial fixe Ω_0 .

On transforme ensuite, au paragraphe 4, le problème (P_φ) en un problème (P_0) à données initiales homogènes en $t = 0$ [2]. C'est pour ce problème (P_0) que l'existence locale en temps d'une solution est établie.

On considère alors au paragraphe 5, un problème linéaire associé et on montre qu'il existe une solution unique de ce problème.

Puis, au paragraphe 6, on prouve l'existence locale en temps d'une solution du problème (P_0) par une méthode de point fixe.

3.2 La paramétrisation de l'interface Γ_t et le problème (P) associé.

On commence par construire un difféomorphisme local sur un voisinage de Γ_0 . On paramétrise alors l'interface Γ_t dans ce voisinage de Γ_0 , par l'abscisse curviligne de Γ_0 .

3.2.1 Difféomorphisme local sur un voisinage de l'interface initiale Γ_0 .

Soit $\delta > 0$. On définit

$$\begin{aligned} X : [0, l_0] \times (-\delta, \delta) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s_1, s_2) &\longmapsto (x, y) = X(s_1, s_2) = (X_1, X_2) \end{aligned}$$

avec

$$X(s_1, s_2) = X_0(s_1) + s_2 \vec{n}_0(s_1) \quad (2.1)$$

où $X_0(s_1)$ est la paramétrisation de l'interface initiale Γ_0 par son abscisse curviligne s_1 , l_0 est la longueur de Γ_0 et $\vec{n}_0$ est la normale unitaire intérieure de Γ_0 .

La dérivation par rapport à l'abscisse curviligne s_1 de Γ_0 sera notée par la suite $\dot{} = \frac{\partial}{\partial s_1} $. De plus, on note $X_0(s_1) = (x_0(s_1), y_0(s_1))$ et $\vec{n}_0(s_1) = \begin{pmatrix} \dot{y}_0(s_1) \\ -\dot{x}_0(s_1) \end{pmatrix}$ et on rappelle que $|\dot{X}_0(s_1)| = 1$ par définition de l'abscisse curviligne s_1 . Par ailleurs, les formules de Frénet [5] donnent les relations suivantes :

$$\begin{cases} \vec{\tau}_0(s_1) = \dot{X}_0(s_1) & \text{vecteur unitaire tangent à } \Gamma_0 \\ \dot{\vec{\tau}}_0(s_1) = -K_0(s_1) \vec{n}_0(s_1) \\ \dot{\vec{n}}_0(s_1) = K_0(s_1) \vec{\tau}_0(s_1) \end{cases} \quad (2.2)$$

où K_0 est la courbure moyenne de Γ_0 .

On montre alors que X est un difféomorphisme de $[0, l_0] \times (-\delta, \delta)$ sur un voisinage $V_\delta(\Gamma_0)$ de l'interface initiale Γ_0 , pour δ suffisamment petit.

Proposition 2.1

Soit $\Gamma_0 \in C^{4+\lambda}$ pour $0 < \lambda < 1$, telle que $\text{dist}(\Gamma_0, \mathcal{S}) > 0$.
Pour $0 < \delta < \inf_{s_1 \in [0, l_0]} \frac{1}{|K_0|}$, X est un $C^{4+\lambda}$ -difféomorphisme de $[0, l_0] \times (-\delta, \delta)$
sur un voisinage $V_\delta(\Gamma_0)$ de Γ_0 .

Démonstration :

1) X est une bijection de $[0, l_0] \times (-\delta, \delta)$ sur $V_\delta(\Gamma_0) \equiv X([0, l_0] \times (-\delta, \delta))$: Soit $X(s_1, s_2) = (X_1, X_2) \in V_\delta(\Gamma_0)$, alors $\text{dist}(X, \Gamma_0) = |s_2|$. Il est clair que X est surjectif. On montre de plus que X est injectif. En effet, soit $X(s_1, s_2) = X(s'_1, s'_2)$ un point de $V_\delta(\Gamma_0)$, alors $|s_2| = |s'_2| = \text{dist}(X(s_1, s_2), \Gamma_0)$ et donc $s_2 = s'_2$. On a alors

$$X_0(s_1) - X_0(s'_1) = s_2 (\vec{n}_0(s'_1) - \vec{n}_0(s_1)). \quad (2.3)$$

Par développement de Taylor et en utilisant les formules de Frenet (2.2), on a $X_0(s_1) - X_0(s'_1) = (s_1 - s'_1)\vec{\tau}_0(s)$ et $\vec{n}_0(s'_1) - \vec{n}_0(s_1) = (s'_1 - s_1)K_0(\tilde{s})\vec{\tau}_0(\tilde{s})$, où s et $\tilde{s}$ sont compris entre s_1 et s'_1 . L'équation (2.3) devient $(s_1 - s'_1)\vec{\tau}_0(s) = s_2(s_1 - s'_1)K_0(\tilde{s})\vec{\tau}_0(\tilde{s})$. Si $s_1 \neq s'_1$, on a $\vec{\tau}_0(s) = -s_2K_0(\tilde{s})\vec{\tau}_0(\tilde{s})$, soit $1 = -s_2K_0(\tilde{s})\vec{\tau}_0(\tilde{s}) \cdot \vec{\tau}_0(s)$ et donc $1 \leq |s_2||K_0(\tilde{s})|$, soit $|s_2| \geq \inf_{s_1 \in [0, l_0]} \frac{1}{|K_0|}$ ce qui est exclu. Par conséquent $s_1 = s'_1$.

2) X est de classe $C^{4+\lambda}([0, l_0] \times [-\delta, \delta])$ et $DX(s_1, s_2)$ est un isomorphisme de $[0, l_0] \times (-\delta, \delta)$ puisque le jacobien de X , $Jac X$ ne s'annule pas sur $[0, l_0] \times (-\delta, \delta)$. En effet, on a

$$\frac{\partial X}{\partial s_1} = \dot{X}_0(s_1) + s_2\dot{\vec{n}}_0(s_1) = (1 + s_2K_0(s_1))\vec{\tau}_0(s_1)$$

et

$$\frac{\partial X}{\partial s_2} = \vec{n}_0(s_1),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} Jac X &= \frac{\partial X_1}{\partial s_1} \frac{\partial X_2}{\partial s_2} - \frac{\partial X_1}{\partial s_2} \frac{\partial X_2}{\partial s_1} \\ &= -(1 + s_2K_0)\dot{x}_0^2 - (1 + s_2K_0)\dot{y}_0^2, \end{aligned}$$

soit

$$Jac X = -(1 + s_2K_0). \quad (2.4)$$

Puisque $-\delta < s_2 < \delta$, on a $1 - \delta|K_0| < 1 + s_2K_0 < 1 + \delta|K_0|$. Or par le choix de δ , il vient $1 - \delta|K_0| > 0$ et par conséquent $Jac X < 0$.

Grâce à la proposition précédente, on peut définir l'application réciproque S de X :

$$\begin{aligned} S &\equiv X^{-1} : V_\delta(\Gamma_0) \longrightarrow [0, l_0] \times (-\delta, \delta) \\ (x, y) &\longrightarrow S(x, y) = (S_1(x, y), S_2(x, y)) = (s_1, s_2) \end{aligned}$$

Il est utile pour ce qui suit de connaître explicitement la différentielle DS de l'application réciproque S :

Puisque $S \circ X(s_1, s_2) = (s_1, s_2)$, on a $(DS \circ X)DX = Id$ et donc $DS \circ X = DX^{-1}$.

De plus, comme $DX = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial s_1} & \frac{\partial X_1}{\partial s_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial s_1} & \frac{\partial X_2}{\partial s_2} \end{pmatrix}$, on a

$$DX^{-1} = \frac{1}{Jac X} \begin{pmatrix} \frac{\partial X_2}{\partial s_2} & -\frac{\partial X_1}{\partial s_2} \\ -\frac{\partial X_2}{\partial s_1} & \frac{\partial X_1}{\partial s_1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\nabla S_1 = \left(\frac{\frac{\partial S_1(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial S_1(x,y)}{\partial y}} \right) = \frac{1}{JacX} \left(\frac{\frac{\partial X_2}{\partial s_2}}{-\frac{\partial X_1}{\partial s_2}} \right) = \frac{1}{JacX} \begin{pmatrix} -\dot{x}_0 \\ -\dot{y}_0 \end{pmatrix}$,

soit

$$\nabla S_1 = -\frac{1}{JacX} \vec{\tau}_0 \quad (2.5)$$

De même, $\nabla S_2 = \left(\frac{\frac{\partial S_2(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial S_2(x,y)}{\partial y}} \right) = \frac{1}{JacX} \left(\frac{-\frac{\partial X_2}{\partial s_1}}{\frac{\partial X_1}{\partial s_1}} \right) = \begin{pmatrix} \dot{y}_0 \\ -\dot{x}_0 \end{pmatrix}$,

soit

$$\nabla S_2 = \vec{n}_0. \quad (2.6)$$

3.2.2 Paramétrisation de Γ_t dans un voisinage de Γ_0 .

Soit $T > 0$ fixé et $0 < \delta < \inf_{s_1 \in [0, l_0]} \frac{1}{|K_0|}$. On introduit une fonction

$$\begin{aligned} \rho : [0, l_0] \times [0, T] &\longrightarrow (-\delta, \delta) \\ (s_1, t) &\longmapsto \rho(s_1, t), \end{aligned}$$

et l'on suppose que l'interface Γ_t est repérée dans le voisinage $V_\delta(\Gamma_0)$ par

$$\Gamma_t = \{X(s_1, s_2) \in V_\delta(\Gamma_0), s_2 = \rho(s_1, t)\}.$$

En d'autres termes, on suppose que l'interface Γ_t est paramétrée à partir de l'abscisse curviligne de Γ_0 par :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : [0, l_0] \times [0, T] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s_1, t) &\longmapsto \mathcal{C}(s_1, t) = (x(s_1, t), y(s_1, t)) \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{C}(s_1, t) = X_0(s_1) + \rho(s_1, t) \vec{n}_0(s_1) \quad (2.7)$$

On va alors écrire le problème (P) vérifié par la concentration C et la fonction ρ .

3.2.3 Le problème (P) associé à la paramétrisation de Γ_t .

On suppose que $\rho \in C^2([0, l_0] \times [0, T])$. On établit ci-dessous les expressions de la normale unitaire $\vec{n}$, de la vitesse normale V_n et de la courbure de l'interface Γ_t en fonction de ρ .

Vecteur unitaire $\vec{n}(s_1, t)$ normal à $\mathcal{C}(s_1, t)$.

Le vecteur unitaire $\vec{\tau}(s_1, t)$ tangent à $\mathcal{C}(s, t)$ s'exprime par : $\vec{\tau}(s_1, t) = \frac{\dot{\mathcal{C}}(s_1, t)}{|\dot{\mathcal{C}}(s_1, t)|}$.

On a $\dot{\mathcal{C}} = \dot{X}_0 + \dot{\rho}\vec{n}_0 + \rho\dot{\vec{n}}_0 = \dot{\rho}\vec{n}_0 + (1 + \rho K_0)\vec{\tau}_0$. On pose alors

$$J \equiv J(s_1, t) \equiv |\dot{\mathcal{C}}(s_1, t)| = \left[(1 + \rho K_0)^2 + \dot{\rho}^2 \right]^{1/2}, \quad (2.8)$$

d'où

$$\vec{\tau}(s_1, t) = \frac{1}{J} [(1 + \rho K_0)\vec{\tau}_0 + \dot{\rho}\vec{n}_0]. \quad (2.9)$$

Par conséquent, le vecteur unitaire normal à $\mathcal{C}(s_1, t)$ est donné par :

$$\vec{n}(s_1, t) = \frac{1}{J} [(1 + \rho K_0)\vec{n}_0 - \dot{\rho}\vec{\tau}_0]. \quad (2.10)$$

Vitesse normale $V_n \equiv V_n(s_1, t)$ de l'interface Γ_t .

Par définition, $V_n = V(s_1, t) \cdot \vec{n}$ où $V(s_1, t) = \frac{\partial \mathcal{C}(s_1, t)}{\partial t} = \rho_t \vec{n}_0(s_1)$. Par conséquent $V_n = \rho_t \vec{n}_0 \cdot \vec{n} = \frac{1}{J} (1 + \rho K_0) \rho_t$, soit

$$V_n = \frac{\rho_t}{\left[1 + \left(\frac{\dot{\rho}}{1 + \rho K_0} \right)^2 \right]^{1/2}}. \quad (2.11)$$

Courbure moyenne $K \equiv K(s_1, t)$ de $\mathcal{C}(s_1, t)$.

Par définition [5], $K(s_1, t) = -\frac{\vec{\mathcal{C}} \cdot \vec{n}}{|\dot{\mathcal{C}}|^2}$ (K est positive pour le cercle).

On a $\dot{\mathcal{C}} = \dot{\rho}\vec{n}_0 + (1 + \rho K_0)\vec{\tau}_0$ et donc

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{C}} &= \vec{\rho}\vec{n}_0 + \dot{\rho}\vec{n}_0 + (1 + \rho K_0)\vec{\tau}_0 + (\dot{\rho}K_0 + \rho\dot{K}_0)\vec{\tau}_0 \\ &= (\vec{\rho} - (1 + \rho K_0)K_0)\vec{n}_0 + (2\dot{\rho}K_0 + \rho\dot{K}_0)\vec{\tau}_0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$K(s_1, t) = -\frac{1}{J^3} \left[(1 + \rho K_0)\vec{\rho} - (2\dot{\rho}K_0 + \rho\dot{K}_0)\dot{\rho} - (1 + \rho K_0)^2 K_0 \right]. \quad (2.12)$$

On note $Q \equiv \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, (x, y) \in \Omega_t\}$ et $\Sigma \equiv \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, (x, y) \in \Gamma_t\}$. La concentration C et la fonction ρ vérifient alors le problème (P) suivant.

$$\begin{aligned}
(P) \left\{ \begin{array}{ll} C_t = \Delta C & \text{dans } Q \cap (0, T) \quad (2.13) \\ \frac{\partial C}{\partial n} = C - \alpha \exp(\gamma K(\rho)) & \text{sur } \Sigma \cap (0, T) \quad (2.14) \\ \frac{\partial C}{\partial n_S} = 0 & \text{sur } \mathcal{S} \times (0, T) \quad (2.15) \\ C(x, y, 0) = C_0(x, y) & \text{dans } \Omega_0 \quad (2.16) \\ \frac{\rho_t}{\left[1 + \left(\frac{\dot{\rho}}{1 + \rho K_0}\right)^2\right]^{1/2}} = C - \alpha \exp(\gamma K(\rho)) & \text{sur } \Sigma \cap (0, T) \quad (2.17) \\ \rho|_{t=0} = 0 & \quad (2.18) \end{array} \right.
\end{aligned}$$

3.3 Transformation sur un domaine fixe.

On construit tout d'abord un difféomorphisme global qui transforme le domaine Ω_t dans le domaine initial fixe Ω_0 ainsi que l'interface Γ_t en Γ_0 . Puis par application de ce difféomorphisme, on obtient un problème sur le domaine fixe Ω_0 .

3.3.1 Difféomorphisme global φ transformant Ω_t en Ω_0 .

On note $d(x, y) = \pm \text{dist}((x, y); \Gamma_0)$ la distance signée d'un point (x, y) du plan à l'interface initiale Γ_0 avec la convention

$$\begin{cases} d(x, y) \geq 0 & \text{si } (x, y) \in \overline{\Omega}_0 \\ d(x, y) \leq 0 & \text{si } (x, y) \in \overline{D}_0, \end{cases}$$

où D_0 désigne le domaine intérieur à Γ_0 .

Soit $0 < \delta < \inf_{s_1 \in [0, t_0]} \frac{1}{|K_0|}$. Pour construire une application transformant Γ_t en Γ_0 et le domaine Ω_t dans le domaine initial Ω_0 , on impose la condition

$$\Gamma_t \subset V_{\delta/4}(\Gamma_0) \quad (3.1)$$

où $V_{\delta/4}(\Gamma_0)$ est un voisinage de Γ_0 dont la frontière est à une distance $\delta/4$ de Γ_0 . Pour que la condition (3.1) soit remplie, on va montrer que l'on peut se restreindre à des temps T suffisamment petits.

Lemme 3.1

Soit $\delta > 0$. Il existe $T_\delta > 0$ tel que $\sup_{[0, t_0] \times [0, T_\delta]} |\rho| \leq \frac{\delta}{4}$.

Démonstration :

Par développement de Taylor, pour $(s_1, t) \in [0, l_0] \times [0, T]$, il existe $\theta \in (0, t)$ tel que $\rho(s_1, t) = t\rho_t(s_1, \theta)$. Comme ρ est suffisamment régulière, on a $\sup_{[0, l_0] \times [0, T]} |\rho| \leq cT$, avec

$c > 0$. On choisit alors T_δ tel que $cT_\delta \leq \frac{\delta}{4}$, soit $T_\delta \leq \frac{\delta}{4c}$.

Remarque 3.2. Toutes les constantes T considérées par la suite sont choisies telles que $T \leq T_\delta$.

On construit alors l'application φ transformant $\Sigma \cap [0, T]$ en $\Gamma_0 \times [0, T]$ et $Q \cap [0, T]$ dans $\Omega_0 \times [0, T]$, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : Q = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, T], (x, y) \in \Omega_t\} &\longrightarrow \Omega_0 \times [0, T] \\ (x, y, t) &\longmapsto \varphi(x, y, t) = (\varphi_1(x, y, t), \varphi_2(x, y, t), t) \end{aligned}$$

et on pose

$$\psi(x, y, t) = (\varphi_1(x, y, t), \varphi_2(x, y, t)).$$

a) Si $d(x, y) > \frac{3\delta}{4}$, alors $\psi(x, y, t) \equiv (x, y)$, soit $\varphi \equiv Id$;

b) Si $|d(x, y)| < \frac{\delta}{4}$, alors $\psi(x, y, t) \equiv \tilde{F}(x, y, t)$, où $\tilde{F} = F \circ S$ avec

$$F(s_1, s_2, t) = X_0(s_1) + (s_2 - \rho(s_1, t)) \vec{n}_0(s_1);$$

c) Si $\frac{\delta}{4} \leq |d(x, y)| \leq \frac{3\delta}{4}$, alors ψ est une homotopie de Id à $\tilde{F}$. Plus précisément :

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t) &= \mu(d(x, y))(x, y) \\ &+ (1 - \mu(d(x, y)))[X_0(s_1) + (s_2 - \rho(s_1, t)) \vec{n}_0(s_1)]_{|(s_1, s_2) = (S_1(x, y), S_2(x, y))} \end{aligned}$$

où $\mu \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\mu(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } |s| \geq 3\delta/4 \\ 0 & \text{si } |s| \leq \delta/4 \end{cases}$

$$\text{et } |\mu'| \leq \frac{3}{\delta}. \quad (3.2)$$

Remarque 3.3. Pour $|d(x, y)| \leq \delta$, on a $d(x, y) = s_2$ par la définition (2.1) de s_2 .

Soit $|d(x, y)| \leq \frac{3\delta}{4}$, on a alors

$$\psi(x, y, t) = \mu(s_2)(x, y) + (1 - \mu(s_2))[X_0(s_1) + (s_2 - \rho(s_1, t)) \vec{n}_0(s_1)]_{|(s_1, s_2) = (S_1(x, y), S_2(x, y))}$$

De plus, comme $(x, y) \in V_\delta(\Gamma_0)$, on peut écrire $(x, y) = X(s_1, s_2) = X_0(s_1) + s_2 \vec{n}_0(s_1)$. Pour $|d(x, y)| \leq \frac{3\delta}{4}$, l'application ψ s'exprime donc par

$$\psi(x, y, t) = X_0(s_1) + [s_2 - (1 - \mu(s_2))\rho(s_1, t)] \vec{n}_0(s_1) \quad \text{en } (s_1, s_2) = (S_1(x, y), S_2(x, y)).$$

Ainsi, on a

$$\psi(x, y, t) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } d(x, y) > 3\delta/4 \\ X_0(s_1) + [s_2 - (1 - \mu(s_2))\rho(s_1, t)]\vec{n}_0(s_1) & \text{si } |d(x, y)| \leq 3\delta/4, \end{cases} \quad (3.3)$$

$\text{en } (s_1, s_2) = (S_1(x, y), S_2(x, y)).$

ψ ainsi construite, envoie l'interface Γ_t sur l'interface initiale Γ_0 et permet le passage de Ω_t à Ω_0 . On montre alors le résultat suivant

Proposition 3.4

$$\left| \begin{array}{l} \text{Soient } 0 < \delta < \inf_{s_1 \in [0, l_0]} \frac{1}{|K_0|} \quad \text{et} \quad \rho \in C^{4+\lambda, (4+\lambda)/2}([0, 1] \times [0, T_\delta]). \\ \text{Alors } \varphi \text{ est un } C^{4+\lambda, (4+\lambda)/2}\text{-difféomorphisme de } Q \cap (\mathbb{R}^2 \times [0, T_\delta]) \text{ dans} \\ \Omega_0 \times [0, T_\delta]. \end{array} \right.$$

Démonstration :

Pour $|d(x, y)| \leq 3\delta/4$, on écrit $\varphi(x, y, t) = (X \circ h(s_1, s_2, t), t) |_{(s_1, s_2) = (S_1(x, y), S_2(x, y))}$ où

$$h(s_1, s_2, t) = (s_1, s_2 - (1 - \mu(s_2))\rho(s_1, t)).$$

Compte tenu de (3.2), pour $t \in [0, T_\delta]$, $h(\cdot, t)$ est une bijection sur $[0, l_0] \times [-\frac{3\delta}{4}, \frac{3\delta}{4}]$. Ainsi φ est une bijection de $Q \cap (\mathbb{R}^2 \times [0, T_\delta])$ dans $\Omega_0 \times [0, T_\delta]$. De plus φ est de classe $C^{4+\lambda, (4+\lambda)/2}$. On montre ensuite que la différentielle $D\varphi$ de l'application φ est un isomorphisme de $Q \cap (\mathbb{R}^2 \times [0, T_\delta])$ dans $\Omega_0 \times [0, T_\delta]$, en démontrant que $Jac\varphi$ le jacobien de φ ne s'annule pas sur $Q \cap (\mathbb{R}^2 \times [0, T_\delta])$.

Puisque $D\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $Jac\varphi = Jac\psi = \det(\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2)$, où

∇ désigne le gradient par rapport aux variables (x, y) .

Pour $d(x, y) > 3\delta/4$, il est clair que $Jac\varphi = 1$.

Pour $d(x, y) \leq 3\delta/4$, on a $\nabla\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu'\rho\dot{y}_0\nabla S_2 - (1 - \mu)(\dot{\rho}y_0 + \rho K_0\dot{x}_0)\nabla S_1$, et compte tenu des expressions (2.5) et (2.6) de ∇S_1 et ∇S_2 , il vient :

$$\nabla\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu'\rho\dot{y}_0\vec{n}_0 - \frac{(1 - \mu)}{(1 + s_2K_0)}(\dot{\rho}y_0 + \rho K_0\dot{x}_0)\vec{\tau}_0. \quad (3.4)$$

De même, on a $\nabla\varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \mu'\rho\dot{x}_0\nabla S_2 + (1 - \mu)(\dot{\rho}x_0 - \rho K_0\dot{y}_0)\nabla S_1$, d'où

$$\nabla\varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \mu'\rho\dot{x}_0\vec{n}_0 + \frac{(1 - \mu)}{(1 + s_2K_0)}(\dot{\rho}x_0 - \rho K_0\dot{y}_0)\vec{\tau}_0. \quad (3.5)$$

On en déduit alors

$$Jac \varphi = \det(\nabla \varphi_1, \nabla \varphi_2) = (1 + \mu' \rho) \left(\frac{1 + (s_2 - (1 - \mu)\rho) K_0}{1 + s_2 K_0} \right). \quad (3.6)$$

Il reste à établir que $Jac \varphi \neq 0$.

Puisque $-\frac{\delta}{4} \leq \rho \leq \frac{\delta}{4}$ et $-\frac{3\delta}{4} \leq s_2 \leq \frac{3\delta}{4}$, on a $-\delta \leq s_2 - (1 - \mu)\rho \leq \delta$, et donc $1 - \delta |K_0| \leq 1 + (s_2 - (1 - \mu)\rho) K_0 \leq 1 + \delta |K_0|$. Puisque par hypothèse $\delta < \inf_{s_1 \in [0, l_0]} \frac{1}{|K_0|}$, on a $1 - \delta |K_0| > 0$ et donc $1 + (s_2 - (1 - \mu)\rho) K_0 > 0$.

Par ailleurs $1 - |\mu'| \frac{\delta}{4} \leq 1 + \mu' \rho \leq 1 + |\mu'| \frac{\delta}{4}$. Puisque par hypothèse $|\mu'(s_2)| \leq \frac{3}{\delta}$, on a $1 + \mu' \rho \geq 1/4$ et donc $Jac \varphi > 0$.

3.3.2 Le problème (P_φ) sur le domaine initial fixe Ω_0 .

On pose

$$u(x_1, x_2, t) = C(x, y, t) \text{ avec } x_i = \varphi_i(x, y, t), \quad i = 1, 2, \text{ pour } (x, y, t) \in Q \cap [0, T].$$

On écrit alors les équations pour la fonction u .

1) Equation dans le domaine :

$$\text{On a } \Delta C = \sum_{i,j=1}^2 \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 \Delta \varphi_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, \text{ et } \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

L'équation (2.13) se traduit donc par

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^2 \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 \left(\Delta \varphi_i - \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i}, \text{ pour } (x_1, x_2) \in \Omega_0. \quad (3.7)$$

2) Equation à l'interface :

$$\text{On a } \frac{\partial C}{\partial n} = \nabla C|_{\Gamma_t} \cdot \vec{n} = \left((\nabla u|_{\Gamma_0})^T D\psi|_{\Gamma_t} \right) \cdot \vec{n} = \nabla u|_{\Gamma_0} \cdot (D\psi|_{\Gamma_t} \vec{n}).$$

On pose alors

$$\vec{\mathcal{N}} = D\psi|_{\Gamma_t} \vec{n} = (\nabla \varphi_1|_{\Gamma_t} \cdot \vec{n}, \nabla \varphi_2|_{\Gamma_t} \cdot \vec{n}).$$

L'équation à l'interface (2.14) s'écrit alors

$$u - \nabla u \cdot \vec{\mathcal{N}} = \alpha \exp(\gamma K(\rho)), \quad \text{pour } (x_1, x_2) \in \Gamma_0. \quad (3.8)$$

De plus, d'après l'expression (3.4) de $\nabla \varphi_1$, on a $\nabla \varphi_1|_{\Gamma_t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\frac{\dot{\rho} \dot{y}_0 + \rho K_0 \dot{x}_0}{1 + \rho K_0} \right) \vec{\tau}_0$.

Par conséquent, compte tenu de l'expression (2.10) de $\vec{n}$, on obtient

$$\nabla \varphi_1|_{\Gamma_t} \cdot \vec{n} = \frac{1}{J} \left[(1 + \rho K_0) \dot{y}_0 - \dot{\rho} \dot{x}_0 + \frac{\dot{\rho} \dot{y}_0 + \rho K_0 \dot{x}_0}{1 + \rho K_0} \dot{\rho} \right].$$

De même, d'après l'expression de (3.5) de φ_2 , on a $\nabla\varphi_2|_{\Gamma_t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{\dot{\rho}\dot{x}_0 - \rho K_0 \dot{y}_0}{1 + \rho K_0} \right) \vec{\tau}_0$ et donc

$$\nabla\varphi_2|_{\Gamma_t} \cdot \vec{n} = -\frac{1}{J} \left[(1 + \rho K_0) \dot{x}_0 + \dot{\rho} \dot{y}_0 + \frac{(\dot{\rho}\dot{x}_0 - \rho K_0 \dot{y}_0)}{1 + \rho K_0} \dot{\rho} \right].$$

Ainsi, $\vec{\mathcal{N}} = \frac{1}{J} \left[(1 + \rho K_0) \vec{n}_0 - \dot{\rho} \vec{\tau}_0 + \frac{\dot{\rho}}{1 + \rho K_0} (\dot{\rho} \vec{n}_0 + \rho K_0 \vec{\tau}_0) \right]$, soit

$$\vec{\mathcal{N}} = \frac{1}{J} \left[\left(1 + \rho K_0 + \frac{\dot{\rho}^2}{1 + \rho K_0} \right) \vec{n}_0 - \frac{\dot{\rho}}{1 + \rho K_0} \vec{\tau}_0 \right],$$

soit encore,

$$\vec{\mathcal{N}} = \frac{1}{1 + \rho K_0} \left[J \vec{n}_0 - \frac{\dot{\rho}}{J} \vec{\tau}_0 \right].$$

3) Equation de déplacement de l'interface :

Grâce à l'expression (2.11) de la vitesse normale V_n , l'équation (2.17) de déplacement de l'interface devient

$$\frac{\rho_t}{\left[1 + \left(\frac{\dot{\rho}}{1 + \rho K_0} \right)^2 \right]^{1/2}} = u - \alpha \exp(\gamma K(\rho)), \quad \text{pour } (x_1, x_2) \in \Gamma_0.$$

On obtient ainsi le problème (P_φ) sur le domaine fixe Ω_0

$$(P_\varphi) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, & (x_1, x_2, t) \in \Omega_0 \times (0, T) \quad (3.9) \\ u - \nabla u \cdot \vec{\mathcal{N}} = \alpha \exp(\gamma K(\rho)), & (x_1, x_2, t) \in \Gamma_0 \times (0, T) \quad (3.10) \\ \nabla u \cdot \vec{n}_S = 0, & (x_1, x_2, t) \in \mathcal{S} \times (0, T) \quad (3.11) \\ u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \Omega_0 \quad (3.12) \\ \frac{\rho_t}{\left[1 + \left(\frac{\dot{\rho}}{1 + \rho K_0} \right)^2 \right]^{1/2}} = u - \alpha \exp(\gamma K), & (x_1, x_2, t) \in \Gamma_0 \times (0, T) \quad (3.13) \\ \rho|_{t=0} = 0 & (x_1, x_2) \in \Gamma_0 \quad (3.14) \end{array} \right.$$

où

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a_{ij}(x_1, x_2, t) = \nabla \varphi_i(x, y, t) \cdot \nabla \varphi_j(x, y, t) \Big|_{(x,y,t)=\varphi^{-1}(x_1,x_2,t)} \\ b_i &= b_i(x_1, x_2, t) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(x, y, t) - \Delta \varphi_i(x, y, t) \right) \Big|_{(x,y,t)=\varphi^{-1}(x_1,x_2,t)} \\ \vec{\mathcal{N}} &= (\nabla \varphi_1|_{\Gamma_t} \cdot \vec{n}, \nabla \varphi_2|_{\Gamma_t} \cdot \vec{n}) = \frac{1}{1 + \rho K_0} \left[J \vec{n}_0 - \frac{\dot{\rho}}{J} \vec{\tau}_0 \right]. \end{aligned}$$

De plus, les données initiales u_0 et Γ_0 vérifient les conditions de compatibilité (H_0) suivantes.

$$(H_0) \begin{cases} u_0 - \nabla u_0 \cdot \vec{n}_0 = \alpha \exp(\gamma K_0) & \text{sur } \Gamma_0 \\ \nabla u_0 \cdot \vec{n}_S = 0 & \text{sur } S \end{cases} \quad (3.15)$$

$$(3.16)$$

On établit ensuite les expressions des différents coefficients a_{ij} et b_i , de façon à mettre en évidence leur dépendance respective par rapport à ρ ainsi que ses dérivées.

Expressions des coefficients $a_{ij}(x_1, x_2, t)$:

On a

$$a_{ij}(x_1, x_2, t) = \nabla \varphi_i(x, y, t) \cdot \nabla \varphi_j(x, y, t) |_{(x, y, t) = \varphi^{-1}(x_1, x_2, t)}$$

Pour $d(x, y) > 3\delta/4$, il est clair que $a_{ij} = \delta_{ij}$ pour $i, j = 1, \dots, 2$.

Pour $|d(x, y)| \leq 3\delta/4$, on établit les expressions des coefficients $a_{ij}(x_1, x_2, t)$ en écrivant

$$\begin{aligned} \nabla \varphi_1(x_1, x_2, t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu' \rho \dot{y}_0 \vec{n}_0 - \left(\frac{1 - \mu}{1 + s_2 K_0} \right) (\dot{\rho} \dot{y}_0 + \rho K_0 \dot{x}_0) \vec{\tau}_0 \\ \nabla \varphi_2(x_1, x_2, t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \mu' \rho \dot{x}_0 \vec{n}_0 + \left(\frac{1 - \mu}{1 + s_2 K_0} \right) (\dot{\rho} \dot{x}_0 - \rho K_0 \dot{y}_0) \vec{\tau}_0 \\ &\text{pour } (s_1, s_2, t) = S \circ \varphi^{-1}(x_1, x_2, t). \end{aligned}$$

On montre par un calcul direct que

$$a_{ij} = a_{ij}(\rho, \dot{\rho}) = \sum_{0 \leq k+l \leq 2} C_{k,l}^{i,j} (\rho)^k (\dot{\rho})^l \quad (3.17)$$

où les coefficients $C_{k,l}^{i,j} = C_{k,l}^{i,j}(s_1, s_2)$ sont donnés par

$$C_{0,0}^{1,1} = 1, \quad C_{0,0}^{2,2} = 1 \quad (3.18)$$

$$C_{1,0}^{1,1} = 2(\mu' \dot{y}_0^2 - \left(\frac{1 - \mu}{1 + s_2 K_0} \right) K_0 \dot{x}_0^2), \quad C_{1,0}^{2,2} = 2(\mu' \dot{x}_0^2 - \left(\frac{1 - \mu}{1 + s_2 K_0} \right) K_0 \dot{y}_0^2) \quad (3.19)$$

$$C_{0,1}^{1,1} = -2 \left(\frac{1 - \mu}{1 + s_2 K_0} \right) \dot{x}_0 \dot{y}_0, \quad C_{0,1}^{2,2} = 2 \left(\frac{1 - \mu}{1 + s_2 K_0} \right) \dot{x}_0 \dot{y}_0 \quad (3.20)$$

$$C_{2,0}^{1,1} = (\mu' \dot{y}_0)^2 + \left(\frac{1 - \mu}{1 + s_2 K_0} \right)^2 K_0^2 \dot{x}_0^2, \quad C_{2,0}^{2,2} = (\mu' \dot{x}_0)^2 + \left(\frac{1 - \mu}{1 + s_2 K_0} \right)^2 K_0^2 \dot{y}_0^2 \quad (3.21)$$

$$C_{0,2}^{1,1} = \left(\frac{1 - \mu}{1 + s_2 K_0} \right)^2 \dot{y}_0^2, \quad C_{0,2}^{2,2} = \left(\frac{1 - \mu}{1 + s_2 K_0} \right)^2 \dot{x}_0^2 \quad (3.22)$$

$$C_{1,1}^{1,1} = 2 \left(\frac{1 - \mu}{1 + s_2 K_0} \right)^2 K_0 \dot{x}_0 \dot{y}_0, \quad C_{1,1}^{2,2} = -2 \left(\frac{1 - \mu}{1 + s_2 K_0} \right)^2 K_0 \dot{x}_0 \dot{y}_0 \quad (3.23)$$

$$C_{0,0}^{1,2} = C_{0,0}^{2,1} = 0 \quad (3.24)$$

$$C_{1,0}^{1,2} = C_{1,0}^{2,1} = -2\dot{x}_0\dot{y}_0 \left[\mu' + \left(\frac{1-\mu}{1+s_2K_0} \right) K_0 \right] \quad (3.25)$$

$$C_{0,1}^{1,2} = C_{0,1}^{2,1} = \left(\frac{1-\mu}{1+s_2K_0} \right) (\dot{x}_0^2 - \dot{y}_0^2) \quad (3.26)$$

$$C_{2,0}^{1,2} = C_{2,0}^{2,1} = -\dot{x}_0\dot{y}_0 \left[(\mu')^2 - \left(\frac{1-\mu}{1+s_2K_0} \right)^2 K_0^2 \right] \quad (3.27)$$

$$C_{0,2}^{1,2} = C_{0,2}^{2,1} = -\left(\frac{1-\mu}{1+s_2K_0} \right)^2 \dot{x}_0\dot{y}_0 \quad (3.28)$$

$$C_{1,1}^{1,2} = C_{1,1}^{2,1} = -\left(\frac{1-\mu}{1+s_2K_0} \right)^2 K_0 (\dot{x}_0^2 - \dot{y}_0^2) \quad (3.29)$$

pour $(s_1, s_2, t) = S \circ \varphi^{-1}(x_1, x_2, t)$.

Expressions des coefficients $b_i(x_1, x_2, t)$:

On a $b_i = b_i(x_1, x_2, t) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(x, y, t) - \Delta \varphi_i(x, y, t) \right) \Big|_{(x,y,t)=\varphi^{-1}(x_1,x_2,t)}$.

Pour $d(x, y) > 3\delta/4$, on a $b_i = 0$ pour $i = 1, \dots, 2$.

Pour $|d(x, y)| \leq 3\delta/4$, on établit les expressions des coefficients $b_i(x_1, x_2, t)$ en écrivant tout d'abord que $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -(1-\mu)\rho_t \vec{n}_0|_{(s_1,s_2)=(S_1(x,y),S_2(x,y))}$. On pose alors

$$B_{0,1}^1(s_1, s_2) = (1-\mu)\dot{y}_0 \quad (3.30)$$

$$B_{0,1}^2(s_1, s_2) = -(1-\mu)\dot{x}_0 \quad (3.31)$$

de sorte que

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = -B_{0,1}^i(s_1, s_2) \rho_t, \quad i = 1, 2$$

pour $(s_1, s_2) = (S_1(x, y), S_2(x, y))$.

Par ailleurs, $\Delta \varphi_1 = \text{div}(\nabla \varphi_1) = \text{div}(\mu' \rho \dot{y}_0 \vec{n}_0) - \text{div}\left(\frac{1-\mu}{1+s_2K_0}(\dot{\rho}\dot{y}_0 + \rho K_0 \dot{x}_0) \vec{\tau}_0\right)$, où l'opérateur *div* désigne la divergence par rapport aux variables d'espaces (x, y) . On obtient

$$\Delta \varphi_1 = B_{2,0}^1(s_1, s_2) \bar{\rho} + B_{1,0}^1(s_1, s_2) \dot{\rho} + B_{0,0}^1(s_1, s_2) \rho$$

pour $(s_1, s_2) = (S_1(x, y), S_2(x, y))$, où

$$B_{2,0}^1(s_1, s_2) = -\frac{(1-\mu)}{(1+s_2K_0)^2} \dot{y}_0 \quad (3.32)$$

$$B_{1,0}^1(s_1, s_2) = -\frac{(1-\mu)}{(1+s_2K_0)^2} \left[2K_0 \dot{x}_0 - \frac{s_2 \dot{K}_0 \dot{y}_0}{1+s_2K_0} \right] \quad (3.33)$$

$$B_{0,0}^1(s_1, s_2) = \left(\mu'' + \frac{\mu' K_0}{1+s_2K_0} \right) \dot{y}_0 - \frac{(1-\mu)}{(1+s_2K_0)^2} \left[\frac{\dot{K}_0 \dot{x}_0}{1+s_2K_0} - K_0^2 \dot{y}_0 \right] \quad (3.34)$$

De même,

$$\Delta\varphi_2 = B_{2,0}^2(s_1, s_2) \ddot{\rho} + B_{1,0}^2(s_1, s_2) \dot{\rho} + B_{0,0}^2(s_1, s_2) \rho$$

pour $(s_1, s_2) = (S_1(x, y), S_2(x, y))$, où

$$B_{2,0}^2(s_1, s_2) = \frac{(1 - \mu)}{(1 + s_2 K_0)^2} \dot{x}_0 \quad (3.35)$$

$$B_{1,0}^2(s_1, s_2) = -\frac{(1 - \mu)}{(1 + s_2 K_0)^2} \left[2K_0 \dot{y}_0 + \frac{s_2 \dot{K}_0 \dot{x}_0}{1 + s_2 K_0} \right] \quad (3.36)$$

$$B_{0,0}^2(s_1, s_2) = -\left(\mu'' + \frac{\mu' K_0}{1 + s_2 K_0} \right) \dot{x}_0 - \frac{(1 - \mu)}{(1 + s_2 K_0)^2} \left[\frac{\dot{K}_0 \dot{y}_0}{1 + s_2 K_0} + K_0^2 \dot{x}_0 \right] \quad (3.37)$$

On obtient alors

$$b_i = b_i(\rho) = - \sum_{0 \leq k+l \leq 2} B_{k,l}^i(s_1, s_2) \frac{\partial^{k+l} \rho}{\partial s_1^k \partial t^l} \quad \text{pour } (s_1, s_2, t) = S \circ \varphi^{-1}(x_1, x_2, t) \quad (3.38)$$

3.4 Le problème avec données initiales homogènes en $t=0$

On note $Q_T = \Omega_0 \times (0, T)$ et $\Sigma_T = \Gamma_0 \times (0, T)$. Le cadre fonctionnel est celui des espaces de Hölder $C_0^{l,l/2}(\overline{Q}_T)$ à données initiales nulles, pour lesquels grâce au Lemme 2.5 du Chapitre 2, on connaît des estimations en fonction du temps T des constantes d'injections. On va donc transformer le problème (P_φ) en un problème à données initiales nulles.

On suppose que les données initiales satisfont $u_0 \in C^{3+\lambda}(\overline{\Omega}_0)$ et $\Gamma_0 \in C^{4+\lambda}$.

En reprenant la construction de la Section 4 du Chapitre 2, on montre qu'il existe des fonctions

$$w(x_1, x_2, t) \in C^{3+\lambda, (3+\lambda)/2}(\overline{Q}_T) \\ \text{et } g(s_1, t) \in C^{4+\lambda, (4+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T) \text{ avec } (s_1, t) = (S_1(x, y), t)|_{(x,y,t)=\varphi^{-1}(x_1, x_2, t)}$$

telles que

$$\begin{cases} w(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2) \\ w_t(x_1, x_2, 0) = u_t(x_1, x_2, 0) = u^{(1)}(x_1, x_2) \end{cases} \quad (4.1)$$

et

$$\begin{cases} g(s_1, 0) = \rho(s_1, 0) = 0 \\ g_t(s_1, 0) = \rho_t(s_1, 0) = \rho^{(1)}(s_1), \end{cases} \quad (4.2)$$

où $u^{(1)}$ et $\rho^{(1)}$ sont déterminés à partir des équations différentielles (3.8) et (3.12) du problème (P_φ) à l'instant initial $t = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x_1, x_2) &= u_t(x_1, x_2, 0) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}|_{t=0} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^2 b_i|_{t=0} \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \rho^{(1)}(s_1) &= \rho_t(s_1, 0) \\ &= u_0|_{\Gamma_0} - \alpha \exp(\gamma K_0) \end{aligned} \quad (4.4)$$

On pose alors

$$\begin{cases} v(x_1, x_2, t) = u(x_1, x_2, t) - w(x_1, x_2, t) \\ \sigma(s_1, t) = \rho(s_1, t) - g(s_1, t). \end{cases}$$

Par construction, les fonctions v et σ vérifient :

$$\begin{aligned} v(x_1, x_2, 0) &= v_t(x_1, x_2, 0) = 0 \\ \sigma(s_1, 0) &= \sigma_t(s_1, 0) = 0. \end{aligned}$$

Remarque 4.1. Quitte à diminuer T_δ , on a $\sup_{[0, t_0] \times [0, T_\delta]} |g| \leq \frac{\delta}{4}$.

Il s'agit à présent d'écrire les équations pour (σ, v) à partir du problème (P_φ) , et d'obtenir de cette façon un problème à données initiales homogènes en $t = 0$. On sépare alors les termes linéaires des termes non linéaires en σ et v (ainsi que leurs dérivées).

Mise en évidence des termes linéaires de l'équation en v et σ correspondant à l'équation (3.9) :

En substituant $u = v + w$ et $\rho = \sigma + g$ dans l'équation (3.9), on obtient

$$v_t + w_t - \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(\sigma + g) \frac{\partial^2 (v + w)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 b_i(\sigma + g) \frac{\partial (v + w)}{\partial x_i} = 0. \quad (4.5)$$

On montre que

$$b_i(\sigma + g) = b_i(\sigma) + b_i(g) \quad (4.6)$$

$$\text{et } a_{ij}(\sigma + g) = a_{ij}(g) + \sum_{0 < k+l \leq 2} \mathcal{R}_{k,l}^{i,j}(g) (\sigma)^k (\dot{\sigma})^l \quad (4.7)$$

où les coefficients $\mathcal{R}_{k,l}^{i,j}(g)$, pour $i, j = 1, 2$, sont donnés par

$$\mathcal{R}_{1,0}^{i,j}(g) = C_{1,0}^{i,j} + 2C_{2,0}^{i,j} g + C_{1,1}^{i,j} \dot{g} \quad (4.8)$$

$$\mathcal{R}_{0,1}^{i,j}(g) = C_{0,1}^{i,j} + C_{1,1}^{i,j} g + C_{0,2}^{i,j} \dot{g} \quad (4.9)$$

$$\mathcal{R}_{k,l}^{i,j}(g) = C_{k,l}^{i,j}, \text{ pour } k+l=2 \quad (4.10)$$

les coefficients $C_{k,l}^{i,j}$ étant définis par les expressions (3.18),..., (3.29).

On pose alors

$$R_{ij}(\sigma) = \sum_{0 < k+l \leq 2} \mathcal{R}_{k,l}^{i,j}(g) (\sigma)^k (\dot{\sigma})^l, \quad (4.11)$$

et on écrit l'équation (4.5) sous la forme

$$v_i - \sum_{j=1}^2 a_{ij}(g) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 b_i(g) \frac{\partial v}{\partial x_i} = F_1(\sigma, v)$$

où

$$\begin{aligned} F_1(\sigma, v) &= \sum_{i,j=1}^2 R_{ij}(\sigma) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^2 b_i(\sigma) \frac{\partial v}{\partial x_i} \\ &+ \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(\sigma + g) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^2 b_i(\sigma + g) \frac{\partial w}{\partial x_i} - w_i \end{aligned}$$

Mise en évidence des termes linéaires de l'équation en v et σ correspondant à l'équation (3.10) :

En substituant $u = v + w$ et $\rho = \sigma + g$ dans l'équation (3.10), on obtient

$$v + w - \nabla v \cdot \vec{\mathcal{N}}(\sigma + g) - \nabla w \cdot \vec{\mathcal{N}}(\sigma + g) = \alpha \exp(\gamma K(\sigma + g)). \quad (4.12)$$

Dans l'équation (4.12), on met en évidence les termes indépendants de σ , ainsi que les termes linéaires en $\vec{\sigma}$. En effet, si ces derniers n'étaient pas considérés dans la partie linéaire de l'équation (4.12), on serait amené à évaluer la norme $\|\vec{\sigma}\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)}$ et l'on ne pourrait utiliser le Lemme 2.5 du Chapitre 2 pour contrôler celle-ci en fonction du temps T .

La partie linéaire de $K(\sigma + g)$ est $K(g) - \frac{1 + gK_0}{[(1 + gK_0)^2 + \dot{g}^2]^{3/2}} \vec{\sigma}$.

On écrit alors

$$\begin{aligned} E \equiv \exp(\gamma K(\sigma + g)) &= \exp(\gamma K(g)) \exp(\gamma(K(\sigma + g) - K(g))) \\ &= \exp(\gamma K(g)) \exp\left(-\gamma \frac{1 + gK_0}{[(1 + gK_0)^2 + \dot{g}^2]^{3/2}} \vec{\sigma} + N\right), \end{aligned}$$

où N est un terme non linéaire en $\vec{\sigma}$. On voit ainsi que la partie linéaire en $\vec{\sigma}$ de E est $-\frac{\gamma(1 + gK_0)}{[(1 + gK_0)^2 + \dot{g}^2]^{3/2}} \exp(\gamma K(g)) \vec{\sigma}$.

De plus, puisque la partie linéaire de $\vec{\mathcal{N}}(\sigma + g)$ est $\vec{\mathcal{N}}(g)$, on écrit l'équation (4.12) sous la forme

$$v - \nabla v \cdot \vec{\mathcal{N}}(g) + \frac{\alpha \gamma (1 + gK_0) \exp(\gamma K(g))}{[(1 + gK_0)^2 + \dot{g}^2]^{3/2}} \vec{\sigma} = F_2(\sigma, v) \quad (4.13)$$

où

$$F_2(\sigma, v) = -w + \nabla w \cdot \vec{\mathcal{N}}(\sigma + g) + \nabla v \cdot [\vec{\mathcal{N}}(\sigma + g) - \vec{\mathcal{N}}(g)] \\ + \alpha \left[\exp(\gamma K(\sigma + g)) - \frac{\gamma(1 + gK_0) \exp(\gamma K(g))}{[(1 + gK_0)^2 + \dot{g}^2]^{3/2}} \vec{\sigma} \right] \quad (4.14)$$

Mise en évidence des termes linéaires de l'équation en v et σ correspondant à l'équation (3.13) :

L'équation (3.13) avec $u = v + w$ et $\rho = \sigma + g$ s'écrit

$$\sigma_t = \left[1 + \left(\frac{\dot{\sigma} + \dot{g}}{1 + (\sigma + g)K_0} \right)^2 \right]^{1/2} (v + w) - \alpha \left[1 + \left(\frac{\dot{\sigma} + \dot{g}}{1 + (\sigma + g)K_0} \right)^2 \right]^{1/2} \exp(\gamma K(\sigma + g)) - g_t. \quad (4.15)$$

La partie constante de $\left[1 + \left(\frac{\dot{\sigma} + \dot{g}}{1 + (\sigma + g)K_0} \right)^2 \right]^{1/2}$ est $\left[1 + \left(\frac{\dot{g}}{1 + gK_0} \right)^2 \right]^{1/2}$. De plus, la partie linéaire en $\vec{\sigma}$ du terme exponentiel $\left[1 + \left(\frac{\dot{\sigma} + \dot{g}}{1 + (\sigma + g)K_0} \right)^2 \right]^{1/2} \exp(\gamma K(\sigma + g))$ est $-\left[1 + \left(\frac{\dot{g}}{1 + gK_0} \right)^2 \right]^{1/2} \left(\frac{\gamma(1 + gK_0) \exp(\gamma K(g))}{[(1 + gK_0)^2 + \dot{g}^2]^{3/2}} \right) \vec{\sigma}$, soit $-\frac{\gamma \exp(\gamma K(g))}{(1 + gK_0)^2 + \dot{g}^2} \vec{\sigma}$.

Par conséquent, on écrit l'équation (4.15) sous la forme

$$\sigma_t - \frac{\alpha \gamma \exp(\gamma K(g))}{(1 + gK_0)^2 + \dot{g}^2} \vec{\sigma} = F_4(\sigma, v), \text{ dans } \Gamma_0 \times (0, T) \quad (4.16)$$

où

$$F_4(\sigma, v) = -g_t + \left[1 + \left(\frac{\dot{\sigma} + \dot{g}}{1 + (\sigma + g)K_0} \right)^2 \right]^{1/2} (v + w) \\ - \alpha \left[1 + \left(\frac{\dot{\sigma} + \dot{g}}{1 + (\sigma + g)K_0} \right)^2 \right]^{1/2} \exp(\gamma K(\sigma + g)) - \frac{\alpha \gamma \exp(\gamma K(g))}{(1 + gK_0)^2 + \dot{g}^2} \vec{\sigma}, \\ \text{dans } \Gamma_0 \times (0, T). \quad (4.17)$$

Finalement les fonctions v et ρ vérifient le problème (P_0) à données initiales homogènes

$$(P_0) \left\{ \begin{array}{ll} v_t - \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(g) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 b_i(g) \frac{\partial v}{\partial x_i} = F_1(\sigma, v), & \text{dans } \Omega_0 \times (0, T) \quad (4.18) \\ v - \nabla v \cdot \vec{\mathcal{N}}(g) + \frac{\alpha \gamma (1 + gK_0) \exp(\gamma K(g))}{[(1 + gK_0)^2 + \dot{g}^2]^{3/2}} \vec{\sigma} = F_2(\sigma, v), & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T) \quad (4.19) \\ \nabla v \cdot \vec{n}_S = F_3(\sigma, v), & \text{sur } S \times (0, T) \quad (4.20) \\ v(x_1, x_2, 0) = v_t(x_1, x_2, 0) = 0, & \text{dans } \Omega_0 \quad (4.21) \\ \sigma_t - \frac{\alpha \gamma \exp(\gamma K(g))}{(1 + gK_0)^2 + \dot{g}^2} \vec{\sigma} = F_4(\sigma, v), & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T) \quad (4.22) \\ \sigma(s_1, 0) = \sigma_t(s_1, 0) = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \quad (4.23) \end{array} \right.$$

où

$$\begin{aligned} F_1(\sigma, v) &= \sum_{i,j=1}^2 R_{ij}(\sigma) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^2 b_i(\sigma) \frac{\partial v}{\partial x_i} \\ &+ \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(\sigma + g) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^2 b_i(\sigma + g) \frac{\partial w}{\partial x_i} - w_t \end{aligned}$$

$$\text{et } R_{ij}(\sigma) = a_{ij}(\sigma + g) - a_{ij}(g) = \sum_{0 < k+l \leq 2} \mathcal{R}_{k,l}^{i,j}(g) (\sigma)^k (\dot{\sigma})^l,$$

$$\begin{aligned} F_2(\sigma, v) &= -w + \nabla w \cdot \vec{\mathcal{N}}(\sigma + g) + \nabla v \cdot [\vec{\mathcal{N}}(\sigma + g) - \vec{\mathcal{N}}(g)] \\ &+ \alpha \left[\exp(\gamma K(\sigma + g)) + \frac{\gamma (1 + gK_0) \exp(\gamma K(g))}{[(1 + gK_0)^2 + \dot{g}^2]^{3/2}} \vec{\sigma} \right] \end{aligned}$$

$$\text{et } \vec{\mathcal{N}}(g) = \frac{1}{1 + gK_0} \left[J(g) \vec{n}_0 - \frac{\dot{g}}{J(g)} \vec{\tau}_0 \right], \text{ avec } J(g) = [(1 + gK_0)^2 + \dot{g}^2]^{1/2},$$

$$F_3(\sigma, v) = -\nabla w \cdot \vec{n}_S,$$

$$\begin{aligned} F_4(\sigma, v) &= -g_t + \left[1 + \left(\frac{\dot{\sigma} + \dot{g}}{1 + (\sigma + g)K_0} \right)^2 \right]^{1/2} (v + w) \\ &- \alpha \left[1 + \left(\frac{\dot{\sigma} + \dot{g}}{1 + (\sigma + g)K_0} \right)^2 \right]^{1/2} \exp(\gamma K(\sigma + g)) - \frac{\alpha \gamma \exp(\gamma K(g))}{(1 + gK_0)^2 + \dot{g}^2} \vec{\sigma}, \\ &\text{sur } \Gamma_0 \times (0, T). \end{aligned}$$

3.5 Le problème linéaire associé.

On considère le problème linéaire associé au problème (P_0) , obtenu en supposant les seconds membres F_i , $i = 1, \dots, 4$ dans (P_0) comme des fonctions données, c'est-à-dire indépendantes de σ et v .

$$\begin{aligned}
(P_1^l) \left\{ \begin{array}{ll} v_t - \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(g) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 b_i(g) \frac{\partial v}{\partial x_i} = F_1(x_1, x_2, t), & \text{dans } \Omega_0 \times (0, T) \\ v - \nabla v \cdot \vec{\mathcal{N}}(g) + \frac{\alpha \gamma (1 + gK_0)}{[(1 + gK_0)^2 + \dot{g}^2]^{3/2}} \exp(\gamma K(g)) \vec{\sigma} = F_2(x_1, x_2, t), & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T) \\ \nabla v \cdot \vec{n}_S = F_3(x_1, x_2, t), & \text{sur } S \times (0, T) \\ v(x_1, x_2, 0) = 0, & \text{dans } \Omega_0 \end{array} \right. \\
(P_2^l) \left\{ \begin{array}{ll} \sigma_t - \frac{\alpha \gamma}{(1 + gK_0)^2 + \dot{g}^2} \exp(\gamma K(g)) \vec{\sigma} = F_4(x_1, x_2, t), & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T) \\ \sigma(s_1, 0) = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

avec $F_1 \in C_0^{\lambda, \lambda/2}(\overline{Q}_T)$, $F_i \in C_0^{1+\lambda, (1+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$, pour $i = 2, \dots, 4$,
et $g \in C^{3+\lambda, (3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$.

Théorème 5.1

Pour tout $T, 0 < T \leq T_\delta$, le problème $(P_1^l) - (P_2^l)$ admet une solution unique

$$(\sigma, v) \in C_0^{3+\lambda, (3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T) \times C_0^{2+\lambda, (2+\lambda)/2}(\overline{Q}_T).$$

De plus, il existe $c(T) > 0$, qui reste bornée quand T tend vers 0, telle que :

$$\|v\|_{Q_T}^{(2+\lambda)} + \|\sigma\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \leq c(T) \left(\|F_1\|_{Q_T}^{(\lambda)} + \sum_{i=2}^4 \|F_i\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \right).$$

Démonstration :

1) Résolution du problème (P_2^l)

On définit l'opérateur $\mathcal{F}$ par :

$$\mathcal{F}\sigma = \sigma_t - \frac{\alpha \gamma}{(1 + gK_0)^2 + \dot{g}^2} \exp(\gamma K(g)) \vec{\sigma}$$

On déduit des Lemmes 2.2 et 2.4 du Chapitre 2, que le coefficient de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire $\frac{\alpha \gamma}{(1 + gK_0)^2 + \dot{g}^2} \exp(\gamma K(g))$, appartient à $C^{1+\lambda, (1+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$. De plus, il existe μ et $\nu > 0$, tels que

$$0 < \mu \leq \frac{\alpha \gamma}{(1 + gK_0)^2 + \dot{g}^2} \exp(\gamma K(g)) \leq \nu.$$

Par conséquent l'équation $\mathcal{F}\sigma = 0$ est uniformément parabolique. On déduit alors de Ladyženskaja, Solonnikov et Ural'ceva [7], que le problème (P_2^l) admet une solution unique $\sigma \in C^{3+\lambda, (3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$ telle que $\|\sigma\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \leq c_1 \|F_4\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)}$ où la constante c_1 est indépendante de F_4 .

Par ailleurs, puisque $F_4 \in C_0^{1+\lambda, (1+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$ et que

$$(\sigma_t)|_{t=0} = \left(F_4 + \frac{\alpha\gamma}{(1+gK_0)^2 + \dot{g}^2} \exp(\gamma K(g)) \tilde{\sigma} \right) \Big|_{t=0} = 0,$$

on obtient $\sigma \in C_0^{3+\lambda, (3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$, et on déduit de [7] que la constante $c_1 = c_1(T)$ reste bornée lorsque T tend vers 0.

2) Résolution du problème (P_1^l)

On résout le problème (P_1^l) où $\sigma \in C_0^{3+\lambda, (3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$ est l'unique solution du problème (P_2^l) . On écrit alors le problème (P_1^l) sous la forme :

$$\begin{cases} \mathcal{L}v \equiv v_t - \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(g) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 b_i(g) \frac{\partial v}{\partial x_i} = F_1(x_1, x_2, t), & \text{dans } \Omega_0 \times (0, T) \\ v - \nabla v \cdot \vec{\mathcal{N}}(g) = \tilde{F}_2(x_1, x_2, t), & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T) \\ \nabla v \cdot \vec{n}_S = F_3(x_1, x_2, t), & \text{sur } S \times (0, T) \\ v(x_1, x_2, 0) = 0, & \text{dans } \Omega_0 \end{cases}$$

où

$$\tilde{F}_2(x_1, x_2, t) = F_2(x_1, x_2, t) - \frac{\alpha\gamma(1+gK_0) \exp(\gamma K(g))}{[(1+gK_0)^2 + \dot{g}^2]^{3/2}} \tilde{\sigma}, \quad \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T)$$

et $F_1 \in C_0^{\lambda, \lambda/2}(\overline{Q}_T)$, $F_2, F_3 \in C_0^{1+\lambda, (1+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$.

On vérifie ensuite les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité pour les problèmes paraboliques linéaires [7, Thm. 5.3, page 320 pour le problème (5.4)].

La fonction g étant fixée, on omet la dépendance des coefficients par rapport à g .

a) L'équation $\mathcal{L}v = 0$ est *uniformément parabolique* :

On pose $F(\xi_1, \xi_2) = a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{22}\xi_2^2$. Il s'agit alors de montrer qu'il existe $\mu, \nu > 0$ tel que pour tout $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mu(\xi_1^2 + \xi_2^2) \leq F(\xi_1, \xi_2) \leq \nu(\xi_1^2 + \xi_2^2)$$

On pose alors $X = \frac{\xi_1}{\xi_2}$ pour $\xi_2 \neq 0$ (le cas $\xi_2 = 0$ est trivial) et on est ramené à montrer que

$$\mu(1 + X^2) \leq F(X) \leq \nu(1 + X^2) \quad \text{pour tout } X \in \mathbb{R}^2,$$

où $F(X) = a_{11}X^2 + 2a_{12}X + a_{22}$.

En posant $G_\beta(X) = F(X) - \beta(1 + X^2) = (a_{11} - \beta)X^2 + 2a_{12}X + a_{22} - \beta$, on doit montrer qu'il existe $\mu, \nu > 0$ tels que $G_\mu \geq 0$ et $G_\nu \leq 0$.

Soit alors $\Delta(\beta)$ le discriminant de l'équation $G_\beta(X) = 0$. On a $\Delta(\beta) = -\beta^2 + (a_{11} + a_{22})\beta + a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$. Si $\Delta(\beta) < 0$, G_β a le même signe que $a_{11} - \beta$.

On remarque que $\Delta(0) = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -(Jac \varphi)^2 < 0$ où φ est l'application associée à la fonction g . De plus il existe $\eta_1, \eta_2 > 0$ tels que $\eta_1 \leq a_{11}, a_{22} \leq \eta_2$, puisque $a_{ii} = (\nabla \varphi_i)^2$, $i = 1, 2$. On montre alors qu'il existe $\beta_2 > \beta_1 > 0$ tels que $\Delta(\beta) < 0$ pour $\beta < \beta_1$ et $\beta > \beta_2$. Par conséquent, il existe $0 < \mu < \min(\beta_1, \eta_1)$ et $\nu > \max(\beta_2, \eta_2) > 0$ tels que $G_\mu \geq 0$ et $G_\nu \leq 0$.

b) L'opérateur $\mathcal{B}v \equiv \nabla v \cdot \vec{\mathcal{N}}(g)$ défini sur Σ_T , vérifie la propriété :

$$\exists \beta > 0, \quad |\vec{\mathcal{N}}(g) \cdot \vec{n}_0| \geq \beta \quad (5.1)$$

En effet, puisque $\vec{\mathcal{N}}(g) \cdot \vec{n}_0 = \left[1 + \left(\frac{\dot{g}}{1 + gK_0} \right)^2 \right]$, on a $\vec{\mathcal{N}}(g) \cdot \vec{n}_0 \geq 1$.

c) Pour $g \in C^{3+\lambda, (3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$ et $\sigma \in C_0^{3+\lambda, (3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$, il est clair que $\tilde{F}_2 \in C_0^{1+\lambda, (1+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$, puisque $\tilde{F}_2(x_1, x_2, 0) = F_2(x_1, x_2, 0) = 0$ sur Γ_0 . Par conséquent, $\tilde{F}_2$ satisfait la condition de compatibilité d'ordre 0, $\tilde{F}_2|_{t=0} = (v - \nabla v \cdot \vec{\mathcal{N}}(g))|_{t=0} = 0$. De plus on a l'estimation

$$\|\tilde{F}_2\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c_2 \left(\|F_2\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} + \|\sigma\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \right).$$

Ainsi, l'équation $\mathcal{L}v = 0$ est uniformément parabolique et ses coefficients appartiennent à $C^{\lambda, \lambda/2}(\overline{\Sigma}_T)$, l'opérateur $\mathcal{B}$ vérifie la condition (5.1) et enfin $F_1 \in C_0^{\lambda, \lambda/2}(\overline{Q}_T)$, $\tilde{F}_2$ et $F_3 \in C_0^{1+\lambda, (1+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$.

Par conséquent, grâce à [7, Thm. 5.3 pour le problème (5.4)], le problème (P_1^I) admet une solution unique $v \in C^{2+\lambda, (2+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$ vérifiant

$$\begin{aligned} \|v\|_{Q_T}^{(2+\lambda)} &\leq c_3 \left(\|F_1\|_{Q_T}^{(\lambda)} + \|\tilde{F}_2\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} + \|F_3\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \right) \\ &\leq c_4 \left(\|F_1\|_{Q_T}^{(\lambda)} + \|F_2\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} + \|F_3\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} + \|\sigma\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \right). \end{aligned}$$

Comme de plus $v_t|_{t=0} = \left(F_1 + \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(g) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^2 b_i(g) \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \Big|_{t=0} = 0$, on a $v \in C_0^{2+\lambda, (2+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$ et on déduit de [7, Thm. 5.4, page 322 pour le problème (5.4)], que la constante $c_4 = c_4(T)$ reste bornée quand T tend vers 0.

3.6 Le problème non-linéaire - Existence d'un point fixe.

On établit tout d'abord la régularité des seconds membres (termes non-linéaires) $F_i(\sigma, v), i = 1, \dots, 4$, en fonction de celles de σ et v .

Proposition 6.1

Soient $\sigma \in C_0^{3+\lambda, (3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$ avec $\sup_{[0, t_0] \times [0, T]} |\sigma| \leq \frac{\delta}{2}$ et $v \in C_0^{2+\lambda, (2+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$.

Alors

$F_1(\sigma, v) \in C_0^{\lambda, \lambda/2}(\overline{Q}_T)$, et $F_i(\sigma, v) \in C_0^{1+\lambda, (1+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$, pour $i = 2, \dots, 4$.

Démonstration :

On étudie successivement les différents termes $F_i(\sigma, v)$, pour $i = 1, \dots, 4$.

1) On a

$$\begin{aligned} F_1(\sigma, v) &= \sum_{i,j=1}^2 R_{ij}(\sigma) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^2 b_i(\sigma) \frac{\partial v}{\partial x_i} \\ &+ \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(\sigma + g) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^2 b_i(\sigma + g) \frac{\partial w}{\partial x_i} - w_t. \end{aligned}$$

avec

$$a_{ij}(\sigma) = \sum_{0 \leq k+l \leq 2} C_{k,l}^{i,j} \sigma^k \dot{\sigma}^l$$

Il est clair que $a_{ij}(\sigma + g) \in C^{2+\lambda, (2+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$. De plus

$$R_{ij}(\sigma) = a_{ij}(\sigma + g) - a_{ij}(g) = \sum_{0 \leq k+l \leq 2} \mathcal{R}_{k,l}^{i,j}(g) \sigma^k \dot{\sigma}^l$$

Donc $R_{ij}(\sigma) \in C_0^{2+\lambda, (2+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$. Enfin, puisque

$$b_i(\sigma) = \sum_{0 \leq k+l \leq 2} B_{k,l}^i \frac{\partial^{k+l} \rho}{\partial s_1^k \partial t^l},$$

on a $b_i(\sigma) \in C_0^{1+\lambda, (1+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$.

Ainsi $F_1(\sigma, v) \in C^{\lambda, \lambda/2}(\overline{Q}_T)$. Il reste à montrer que $F_1(\sigma, v)(x_1, x_2, 0) = 0$.

Pour $(x_1, x_2) \in \Omega_0$, on a

$$\begin{aligned} F_1(\sigma, v)(x_1, x_2, 0) &= \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(g)|_{t=0} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, x_2) - \sum_{i=1}^2 b_i(g)|_{t=0} \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x_1, x_2) - u^{(1)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

par la définition (4.3) de $u^{(1)}$.

2) Pour $g \in C^{3+\lambda, (3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$, on a $\vec{\mathcal{N}}(g) \in (C^{2+\lambda, (2+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T))^2$ et $K(g) \in C^{1+\lambda, (1+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$.

En utilisant alors le Lemme 2.4 du Chapitre 2 pour estimer le terme exponentiel, on établit que $F_2(g, u) \in C^{1+\lambda, (1+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$. Par ailleurs, pour $(x_1, x_2) \in \Gamma_0$,

$$\begin{aligned} F_2(\sigma, v)(x_1, x_2, 0) &= -w(x_1, x_2, 0) + \nabla w \cdot \vec{\mathcal{N}}(g)(x_1, x_2, 0) + \alpha \exp(\gamma K(g))(x_1, x_2, 0), \\ &= -u_0 + \nabla u_0 \cdot \vec{n}_0 + \alpha \exp(\gamma K_0), \\ &= 0, \end{aligned}$$

grâce à la condition de compatibilité (3.15) vérifiée par u_0 et Γ_0 .

3) Il est clair que $F_3 \in C^{1+\lambda, (1+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$, et de plus, pour $(x_1, x_2) \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} F_3(\sigma, v)(x_1, x_2, 0) &= -\nabla w(x_1, x_2, 0) \cdot \vec{n}_{\mathcal{S}} \\ &= -\nabla u_0(x_1, x_2, 0) \cdot \vec{n}_{\mathcal{S}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

grâce à la condition de compatibilité (3.16) vérifiée par u_0 .

4) De la même manière que pour $F_2(\sigma, v)$, on montre que $F_4(\sigma, v) \in C^{1+\lambda, (1+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$. De plus, pour $(x_1, x_2) \in \Gamma_0$,

$$\begin{aligned} F_4(\sigma, v)(x_1, x_2, 0) &= -g_t(x_1, x_2, 0) + w(x_1, x_2, 0) - \alpha \exp(\gamma K_0) \\ &= -\rho^{(1)} + u_0 - \alpha \exp(\gamma K_0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

par la définition (4.4) de $\rho^{(1)}$.

La proposition suivante donne une estimation des termes non linéaires. Ce résultat permettra d'établir que l'application itérative associée au problème non linéaire (P_0) est une contraction stricte d'une boule dans elle-même et donc qu'elle admet un point fixe unique dans cette boule.

On pose $A \equiv C_0^{3+\lambda, (3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T) \times C_0^{2+\lambda, (2+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$. On définit alors la norme $\|\cdot\|_A$ sur A par $\|(\sigma, v)\|_A = \|\sigma\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} + \|v\|_{Q_T}^{(2+\lambda)}$ pour $(\sigma, v) \in A$.

Proposition 6.2

(i) Il existe une constante $c = c(\delta, T)$ qui reste bornée quand T tend vers 0, telle que pour tout $r \in (0, \frac{\delta}{2})$ et tout

$$(\sigma_1, v_1), (\sigma_2, v_2) \in A \equiv C_0^{3+\lambda, (3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T) \times C_0^{2+\lambda, (2+\lambda)/2}(\overline{Q}_T),$$

vérifiant $\max(\|(\sigma_1, v_1)\|_A, \|(\sigma_2, v_2)\|_A) \leq r$, on a :

$$\begin{aligned} \|F_1(\sigma_1, v_1) - F_1(\sigma_2, v_2)\|_{Q_T}^{(\lambda)} + \sum_{i=2}^4 \|F_i(\sigma_1, v_1) - F_i(\sigma_2, v_2)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \\ \leq c(T) (T^{1/2} + r) \|(\sigma_1 - \sigma_2, v_1 - v_2)\|_A ; \end{aligned}$$

(ii) Il existe une constante $c' = c'(T)$ qui reste bornée quand T tend vers 0, telle que

$$\|F_1(0, 0)\|_{Q_T}^{(\lambda)} + \sum_{i=2}^4 \|F_i(0, 0)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c'(T) T^{1/2}.$$

Démonstration du point i) de la Proposition 6.2 :

1) *Estimation du terme $F_1(\sigma_1, v_1) - F_1(\sigma_2, v_2)$*

On décompose ce terme de la façon suivante :

$$\begin{aligned} F_1(\sigma_1, v_1) - F_1(\sigma_2, v_2) &= \sum_{i,j=1}^2 R_{ij}(\sigma_1) \frac{\partial^2(v_1 - v_2)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j=1}^2 [R_{ij}(\sigma_1) - R_{ij}(\sigma_2)] \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_i \partial x_j} \\ &+ \sum_{i=1}^2 b_i(\sigma_1) \frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^2 [b_i(\sigma_2) - b_i(\sigma_1)] \frac{\partial v_2}{\partial x_i} \\ &+ \sum_{i,j=1}^2 [a_{ij}(\sigma_1 + g) - a_{ij}(\sigma_2 + g)] \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \\ &+ \sum_{i,j=1}^2 [b_i(\sigma_2 + g) - b_i(\sigma_1 + g)] \frac{\partial w}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Or

$$a_{ij}(\sigma_1 + g) - a_{ij}(\sigma_2 + g) = R_{ij}(\sigma_1) - R_{ij}(\sigma_2)$$

et

$$b_i(\sigma_2 + g) - b_i(\sigma_1 + g) = b_i(\sigma_2) - b_i(\sigma_1).$$

L'équation (6.1) s'écrit alors

$$\begin{aligned}
F_1(\sigma_1, v_1) - F_1(\sigma_2, v_2) &= \sum_{i,j=1}^2 R_{ij}(\sigma_1) \frac{\partial^2(v_1 - v_2)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 b_i(\sigma_1) \frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial x_i} \\
&+ \sum_{i,j=1}^2 [R_{ij}(\sigma_1) - R_{ij}(\sigma_2)] \frac{\partial^2(v_2 + w)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 [b_i(\sigma_2) - b_i(\sigma_1)] \frac{\partial(v_2 + w)}{\partial x_i}
\end{aligned} \tag{6.2}$$

On voit alors qu'il faut estimer $b_i(\sigma_1)$, $R_{ij}(\sigma_1)$ et les différences $b_i(\sigma_2) - b_i(\sigma_1)$ et $R_{ij}(\sigma_1) - R_{ij}(\sigma_2)$, pour $i, j = 1, 2$.

a) Estimation de $b_i(\sigma_1)$ et $b_i(\sigma_2) - b_i(\sigma_1)$, pour $i = 1, 2$.

On a $b_i(\sigma_2) - b_i(\sigma_1) = b_i(\sigma_2 - \sigma_1)$, avec

$$b_i(\sigma) = - \sum_{0 \leq k+l \leq 2} B_{k,l}^i \frac{\partial^{k+l} \sigma}{\partial^k s_1 \partial^l t}, \quad \text{pour } (s_1, s_2, t) = S \circ \varphi^{-1}(x_1, x_2, t).$$

Les coefficients $B_{k,l}^i$ ne dépendent que de Γ_0 et $B_{k,l}^i \in C^{1+\lambda}(\overline{\Omega}_0)$ si $\Gamma_0 \in C^{4+\lambda}$. Par conséquent

$$\|b_i(\sigma_1)\|_{Q_T}^{(\lambda)} \leq c \|\sigma_1\|_{\Sigma_T}^{(2+\lambda)} \tag{6.3}$$

$$\text{et } \|b_i(\sigma_2) - b_i(\sigma_1)\|_{Q_T}^{(\lambda)} \leq c \|\sigma_2 - \sigma_1\|_{\Sigma_T}^{(2+\lambda)} \tag{6.4}$$

b) Estimation de $R_{ij}(\sigma_1)$ et $R_{ij}(\sigma_1) - R_{ij}(\sigma_2)$, pour $i, j = 1, 2$.

On rappelle que $R_{ij}(\sigma) = \sum_{0 \leq k+l \leq 2} \mathcal{R}_{k,l}^{i,j}(g) \sigma^k \dot{\sigma}^l$, où $\mathcal{R}_{k,l}^{i,j}(g)$ ne dépend que de Γ_0 et de g ,

avec $\mathcal{R}_{k,l}^{i,j}(g) \in C^{2+\lambda, (2+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$. Il est clair que

$$\|R_{ij}(\sigma_1)\|_{Q_T}^{(\lambda)} \leq c \|\sigma_1\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)}. \tag{6.5}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
R_{ij}(\sigma_1) - R_{ij}(\sigma_2) &= \sum_{0 \leq k+l \leq 2} \mathcal{R}_{k,l}^{i,j}(g) [(\sigma_1)^k (\dot{\sigma}_1)^l - (\sigma_2)^k (\dot{\sigma}_2)^l] \\
&= \mathcal{R}_{1,0}^{i,j}(\sigma_1 - \sigma_2) + \mathcal{R}_{0,1}^{i,j}(\dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2) + \mathcal{R}_{2,0}^{i,j}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \\
&+ \mathcal{R}_{0,2}^{i,j}(\dot{\sigma}_1^2 - \dot{\sigma}_2^2) + \mathcal{R}_{1,1}^{i,j}[\dot{\sigma}_1(\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2(\dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2)].
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|R_{ij}(\sigma_1) - R_{ij}(\sigma_2)\|_{Q_T}^{(\lambda)} \leq c \left(\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\Sigma_T}^{(\lambda)} + \|\dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2\|_{\Sigma_T}^{(\lambda)} \right),$$

soit

$$\|R_{ij}(\sigma_1) - R_{ij}(\sigma_2)\|_{Q_T}^{(\lambda)} \leq c \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)}. \tag{6.6}$$

Grâce aux estimations (6.3), (6.4), (6.5), (6.6), l'équation (6.2.) conduit à

$$\begin{aligned}
\|F_1(\sigma_1, v_1) - F_1(\sigma_2, v_2)\|_{Q_T}^{(\lambda)} &\leq c \left(\sum_{i,j=1}^2 \|\sigma_1\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \left\| \frac{\partial^2(v_1 - v_2)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{Q_T}^{(\lambda)} \right. \\
&\quad + \sum_{i=1}^2 \|\sigma_1\|_{\Sigma_T}^{(2+\lambda)} \left\| \frac{\partial(v_1 - v_2)}{\partial x_i} \right\|_{Q_T}^{(\lambda)} \\
&\quad + \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} + \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\Sigma_T}^{(2+\lambda)} \Big) \\
&\leq c \left(r \|v_1 - v_2\|_{Q_T}^{(2+\lambda)} + \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\Sigma_T}^{(2+\lambda)} \right)
\end{aligned}$$

Comme $\sigma_1 - \sigma_2 \in C_0^{3+\lambda, (3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma_T})$, par le Lemme d'injection 2.5 du Chapitre 2, on obtient

$$\|F_1(\sigma_1, v_1) - F_1(\sigma_2, v_2)\|_{Q_T}^{(\lambda)} \leq c(T) \left(r \|v_1 - v_2\|_{Q_T}^{(2+\lambda)} + T^{1/2} \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \right),$$

soit,

$$\|F_1(\sigma_1, v_1) - F_1(\sigma_2, v_2)\|_{Q_T}^{(\lambda)} \leq c(T) \left(r + T^{1/2} \right) \|(\sigma_1 - \sigma_2, v_1 - v_2)\|_A. \quad (6.7)$$

2) Estimation du terme $F_2(\sigma_1, v_1) - F_2(\sigma_2, v_2)$

On écrit ce terme sous la forme

$$\begin{aligned}
F_2(\sigma_1, v_1) - F_2(\sigma_2, v_2) &= \nabla w \cdot [\vec{\mathcal{N}}(\sigma_1 + g) - \vec{\mathcal{N}}(\sigma_2 + g)] + \nabla v_1 \cdot [\vec{\mathcal{N}}(\sigma_1 + g) - \vec{\mathcal{N}}(g)] \\
&\quad - \nabla v_2 \cdot [\vec{\mathcal{N}}(\sigma_2 + g) - \vec{\mathcal{N}}(g)] + \alpha [\exp(\gamma K(\sigma_1 + g)) \\
&\quad - \exp(\gamma K(\sigma_2 + g)) + \frac{\gamma(1 + gK_0) \exp(\gamma K(g))}{[(1 + gK_0)^2 + \dot{g}^2]^{3/2}} (\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_2)] ,
\end{aligned}$$

soit,

$$\begin{aligned}
F_2(\sigma_1, v_1) - F_2(\sigma_2, v_2) &= \nabla(w + v_1) \cdot [\vec{\mathcal{N}}(\sigma_1 + g) - \vec{\mathcal{N}}(\sigma_2 + g)] \\
&\quad + \nabla(v_1 - v_2) \cdot [\vec{\mathcal{N}}(\sigma_2 + g) - \vec{\mathcal{N}}(g)] \\
&\quad + \alpha \exp(\gamma K(g)) [\chi(K(\sigma_1 + g) - K(g)) - \chi(K(\sigma_2 + g) - K(g))] \\
&\quad + \gamma(A(\sigma_1 + g) - A(\sigma_2 + g))
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\chi(s) &= \exp(\gamma s) - 1 - \gamma s \\
A(\sigma + g) &= K(\sigma + g) - K(g) + \frac{(1 + gK_0)}{[(1 + gK_0)^2 + \dot{g}^2]^{3/2}} \vec{\sigma}.
\end{aligned}$$

a) Estimation de $\vec{\mathcal{N}}(\sigma + g) - \vec{\mathcal{N}}(g)$.

On a

$$\vec{\mathcal{N}}(\sigma) = \frac{[J^2(\sigma)\vec{n}_0 - \dot{\sigma}\vec{\tau}_0]}{(1 + \sigma K_0)J(\sigma)} \equiv \frac{\vec{N}(\sigma)}{D(\sigma, \dot{\sigma})}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\vec{N}(\sigma + g) - \vec{N}(g) &= \frac{\vec{N}(\sigma + g)}{D(\sigma + g, \dot{\sigma} + \dot{g})} - \frac{\vec{N}(\sigma)}{D(\sigma, \dot{\sigma})} \\
&= \frac{1}{D(g, \dot{g})} [\vec{N}(\sigma + g) - \vec{N}(g)] + \vec{N}(\sigma + g) \left[\frac{1}{D(\sigma + g, \dot{\sigma} + \dot{g})} - \frac{1}{D(g, \dot{g})} \right]
\end{aligned} \tag{6.8}$$

De plus, on a

$$\vec{N}(\sigma + g) - \vec{N}(g) = [2(1 + gK_0)K_0\sigma + K_0^2\sigma^2 + 2\dot{g}\dot{\sigma} + \dot{\sigma}^2] \vec{n}_0 - \dot{\sigma}\vec{\tau}_0.$$

Par conséquent

$$\|(\vec{N}(\sigma + g) - \vec{N}(g))_i\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c\|\sigma\|_{\Sigma_T}^{(2+\lambda)}, \quad \text{pour } i = 1, 2 \tag{6.9}$$

où $(.)_i$ représente les différentes composantes du vecteur considéré.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D(\sigma + g, \dot{\sigma} + \dot{g})} - \frac{1}{D(g, \dot{g})} &= \frac{1}{D(\sigma + g, \dot{\sigma} + \dot{g})} - \frac{1}{D(g, \dot{\sigma} + \dot{g})} + \frac{1}{D(g, \dot{\sigma} + \dot{g})} - \frac{1}{D(g, \dot{g})} \\
&= \sigma \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{D} \right) (\theta\sigma + g, \dot{\sigma} + \dot{g}) d\theta \\
&\quad + \dot{\sigma} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \dot{\sigma}} \left(\frac{1}{D} \right) (g, \theta\dot{\sigma} + \dot{g}) d\theta
\end{aligned}$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{D} \right) = -\frac{K_0}{J(\sigma)D^2} (J^2(\sigma) + (1 + \sigma K_0)^2)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\sigma}} \left(\frac{1}{D} \right) = -\frac{(1 + \sigma K_0)}{J(\sigma)D^2} \dot{\sigma}$$

On obtient donc

$$\left\| \frac{1}{D(\sigma + g, \dot{\sigma} + \dot{g})} - \frac{1}{D(g, \dot{g})} \right\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c\|\sigma\|_{\Sigma_T}^{(2+\lambda)}. \tag{6.10}$$

On déduit alors de (6.8), (6.9) et (6.10)

$$\|(\vec{N}(\sigma + g) - \vec{N}(g))_i\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c\|\sigma\|_{\Sigma_T}^{(2+\lambda)}, \quad \text{pour } i = 1, 2. \tag{6.11}$$

b) Estimation de $\vec{\mathcal{N}}(\sigma_1 + g) - \vec{\mathcal{N}}(\sigma_2 + g)$.

De la même façon que précédemment, on écrit

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{N}}(\sigma_1 + g) - \vec{\mathcal{N}}(\sigma_2 + g) &= \frac{1}{D(\sigma_2 + g, \dot{\sigma}_2 + \dot{g})} [\vec{\mathcal{N}}(\sigma_1 + g) - \vec{\mathcal{N}}(\sigma_2 + g)] \\ &+ \vec{\mathcal{N}}(\sigma_1 + g) \left[\frac{1}{D(\sigma_1 + g, \dot{\sigma}_1 + \dot{g})} - \frac{1}{D(\sigma_2 + g, \dot{\sigma}_2 + \dot{g})} \right]. \end{aligned} \quad (6.12)$$

De plus,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{N}}(\sigma_1 + g) - \vec{\mathcal{N}}(\sigma_2 + g) &= [2(1 + gK_0)K_0(\sigma_1 - \sigma_2) + 2\dot{g}(\dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2) \\ &+ (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)K_0^2 + (\dot{\sigma}_1^2 - \dot{\sigma}_2^2)] \vec{n}_0 - (\dot{\sigma}_1^2 - \dot{\sigma}_2^2) \vec{\tau}_0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|(\vec{\mathcal{N}}(\sigma_1 + g) - \vec{\mathcal{N}}(\sigma_2 + g))_i\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\Sigma_T}^{(2+\lambda)}, \quad \text{pour } i = 1, 2. \quad (6.13)$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \frac{1}{D(\sigma_1 + g, \dot{\sigma}_1 + \dot{g})} - \frac{1}{D(\sigma_2 + g, \dot{\sigma}_2 + \dot{g})} &= (\sigma_1 - \sigma_2) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{D} \right) (\sigma_2 + g + \theta(\sigma_1 - \sigma_2), \dot{\sigma}_1 + \dot{g}) d\theta \\ &+ (\dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \dot{\sigma}} \left(\frac{1}{D} \right) (\sigma_2 + g, \dot{\sigma}_2 + \dot{g} + \theta(\dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2)) d\theta \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\left\| \frac{1}{D(\sigma_1 + g, \dot{\sigma}_1 + \dot{g})} - \frac{1}{D(\sigma_2 + g, \dot{\sigma}_2 + \dot{g})} \right\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\Sigma_T}^{(2+\lambda)}. \quad (6.14)$$

On déduit alors de (6.12), (6.13) et (6.14),

$$\|(\vec{\mathcal{N}}(\sigma_1 + g) - \vec{\mathcal{N}}(\sigma_2 + g))_i\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\Sigma_T}^{(2+\lambda)}, \quad \text{pour } i = 1, 2. \quad (6.15)$$

c) Estimation de $\chi(K(\sigma_1 + g) - K(g)) - \chi(K(\sigma_2 + g) - K(g))$.

On pose $G_i = K(\sigma_i + g) - K(g)$.

On va montrer ci-dessous que

$$\|G_i\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c_1 \|\sigma_i\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \quad (6.16)$$

$$\|G_1 - G_2\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c_2 \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \quad (6.17)$$

On pose tout d'abord

$$N_1(\sigma) = (1 + \sigma K_0)\ddot{\sigma} - (2\dot{\sigma}K_0 + \sigma\dot{K}_0)\dot{\sigma} - (1 + \sigma K_0)^2 K_0,$$

de sorte que $K(\sigma) = -\frac{N_1(\sigma)}{J^3(\sigma)}$.

On décompose alors

$$K(\sigma + g) - K(g) = -\frac{1}{J^3(g)} [N_1(\sigma + g) - N_1(g)] + N_1(\sigma + g) \left[\frac{1}{J^3(g)} - \frac{1}{J^3(\sigma + g)} \right].$$

Puisque

$$\begin{aligned} N_1(\sigma + g) - N_1(g) &= [K_0 \ddot{g} - \dot{K}_0 \dot{g} - 2(1 + gK_0)K_0^2] \sigma \\ &\quad - [4\dot{g}K_0 + g\dot{K}_0] \dot{\sigma} + (1 + gK_0)\ddot{\sigma} \\ &\quad - K_0^3 \sigma^2 - 2K_0 \dot{\sigma}^2 - \dot{K}_0 \sigma \dot{\sigma} + K_0 \sigma \ddot{\sigma}, \end{aligned}$$

on obtient

$$\|N_1(\sigma + g) - N_1(g)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c \|\sigma\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \quad (6.18)$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \frac{1}{J^3(\sigma + g)} - \frac{1}{J^3(g)} &= \sigma \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{J^3} \right) (\theta \sigma + g, \dot{\sigma} + \dot{g}) d\theta \\ &\quad + \dot{\sigma} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \dot{\sigma}} \left(\frac{1}{J^3} \right) (g, \theta \dot{\sigma} + \dot{g}) d\theta \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{J^3} \right) &= -\frac{3}{J^5} (1 + \sigma K_0) K_0 \\ \frac{\partial}{\partial \dot{\sigma}} \left(\frac{1}{J^3} \right) &= -\frac{3}{J^5} \dot{\sigma} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\left\| \frac{1}{J^3(\sigma + g)} - \frac{1}{J^3(g)} \right\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c \|\sigma\|_{\Sigma_T}^{(2+\lambda)},$$

et par conséquent

$$\|K(\sigma + g) - K(g)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c \|\sigma\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \quad (6.19)$$

De même, on écrit

$$\begin{aligned} K(\sigma_1 + g) - K(\sigma_2 + g) &= -\frac{1}{J^3(\sigma_2 + g)} [N_1(\sigma_1 + g) - N_1(\sigma_2 + g)] \\ &\quad + N_1(\sigma_1 + g) \left[\frac{1}{J^3(\sigma_1 + g)} - \frac{1}{J^3(\sigma_2 + g)} \right]. \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned}
N_1(\sigma_1 + g) - N_1(\sigma_2 + g) &= [K_0 \ddot{g} - \dot{K}_0 \dot{g} - 2(1 + gK_0)K_0^2] (\sigma_1 - \sigma_2) \\
&- [4\dot{g}K_0 + g\dot{K}_0] (\dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2) + (1 + gK_0)(\ddot{\sigma}_1 - \ddot{\sigma}_2) \\
&- K_0^3(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) - 2K_0(\dot{\sigma}_1^2 - \dot{\sigma}_2^2) \\
&- \dot{K}_0 [\sigma_1(\dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2) + \dot{\sigma}_2(\sigma_1 - \sigma_2)] \\
&+ K_0 [\sigma_1(\ddot{\sigma}_1 - \ddot{\sigma}_2) + \ddot{\sigma}_2(\sigma_1 - \sigma_2)],
\end{aligned}$$

on obtient

$$\|N_1(\sigma_1 + g) - N_1(\sigma_2 + g)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \quad (6.20)$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{J^3(\sigma_1 + g)} - \frac{1}{J^3(\sigma_2 + g)} &= (\sigma_1 - \sigma_2) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{J^3} \right) (\sigma_2 + g + \theta(\sigma_1 - \sigma_2), \dot{\sigma}_1 + \dot{g}) d\theta \\
&+ (\dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \dot{\sigma}} \left(\frac{1}{J^3} \right) (\sigma_2 + g, \dot{\sigma}_2 + \dot{g} + \theta(\dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2)) d\theta
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\left\| \frac{1}{J^3(\sigma_1 + g)} - \frac{1}{J^3(\sigma_2 + g)} \right\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\Sigma_T}^{(2+\lambda)},$$

et par conséquent

$$\|K(\sigma_1 + g) - K(\sigma_2 + g)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \quad (6.21)$$

Alors d'après le Lemme 2.4 du Chapitre 2, on a

$$\|\chi(G_1) - \chi(G_2)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c(T)r\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \quad (6.22)$$

où $c(T)$ reste bornée lorsque T tend vers 0.

d) Estimation de $A(\sigma_1 + g) - A(\sigma_2 + g)$.

On a $A(\sigma + g) = K(\sigma + g) - K(g) + \frac{(1 + gK_0)}{[(1 + gK_0)^2 + \dot{g}^2]^{3/2}} \ddot{\sigma}$, et on écrit

$$\begin{aligned}
A(\sigma_1 + g) - A(\sigma_2 + g) &= -N_1(\sigma + g) \left[\frac{1}{J^3(\sigma_1 + g)} - \frac{1}{J^3(\sigma_2 + g)} \right] \\
&- \frac{1}{J^3(\sigma_1 + g)} [N_1(\sigma_1 + g) - N_1(\sigma_2 + g) - (1 + gK_0)(\ddot{\sigma}_1 - \ddot{\sigma}_2)] \\
&+ (1 + gK_0)(\ddot{\sigma}_1 - \ddot{\sigma}_2) \left[\frac{1}{J^3(g)} - \frac{1}{J^3(\sigma_1 + g)} \right].
\end{aligned}$$

On montre que

$$\|A(\sigma_1 + g) - A(\sigma_2 + g)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c(T)(r + T^{1/2})\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \quad (6.23)$$

où $c(T)$ reste bornée lorsque T tend vers 0.

Ainsi

$$\|F_2(\sigma_1, v_1) - F_2(\sigma_2, v_2)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c(T)(r + T^{1/2}) \|(\sigma_1 - \sigma_2, v_1 - v_2)\|_A \quad (6.24)$$

où $c(T)$ reste bornée lorsque T tend vers 0.

3) *Estimation du terme $F_4(\sigma_1, v_1) - F_4(\sigma_2, v_2)$*

On pose $H(\sigma) = \left[1 + \left(\frac{\dot{\sigma}}{1 + \sigma K_0}\right)^2\right]^{1/2}$. On a alors

$$F_4(\sigma_1, v_1) - F_4(\sigma_2, v_2) = H(\sigma_1 + g)(v_1 - v_2) + (v_2 + w - \alpha \exp(\gamma K(\sigma_1 + g))(H(\sigma_1 + g) - H(\sigma_2 + g)) \quad (f_1)$$

$$+ \alpha H(\sigma_2 + g) [\chi(G_1) - \chi(G_2)] \quad (f_2)$$

$$+ \alpha \gamma \left[H(\sigma_2 + g)(G_1 - G_2) - \frac{1}{(1 + gK_0)^2 + \dot{g}^2} (\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_2) \right] \quad (f_3)$$

Les termes (f_1) et (f_2) ont déjà été estimés. De plus le terme (f_3) peut s'écrire sous la forme

$$f_3 = H(\sigma_2 + g)N_1(\sigma_1 + g) \left[\frac{1}{J^3(\sigma_1 + g)} - \frac{1}{J^3(\sigma_2 + g)} \right] \quad (f_{31})$$

$$- \frac{[N_1(\sigma_1 + g) - N_1(\sigma_2 + g) - (1 + gK_0)(\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_2)]}{(1 + (\sigma_2 + g))J^2(\sigma_2 + g)} \quad (f_{32})$$

$$- (\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_2) \left[\frac{1}{J^2(g)} - \frac{1 + gK_0}{(1 + (\sigma_2 + g))J^2(\sigma_2 + g)} \right] \quad (f_{33})$$

On montre alors que

$$\|f_3\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c \left(\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{\Sigma_T}^{(2+\lambda)} + \|\sigma_1\|_{\Sigma_T}^{(3+\lambda)} \|\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_2\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \right).$$

On obtient ainsi

$$\|F_4(\sigma_1, v_1) - F_4(\sigma_2, v_2)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c(T)(r + T^{1/2}) \|(\sigma_1 - \sigma_2, v_1 - v_2)\|_A,$$

où $c(T)$ reste bornée quand T tend vers 0.

Démonstration du point ii) de la Proposition 6.2 :

On estime successivement les termes $F_i(0, 0)$, pour $i = 1, \dots, 4$.

On a

$$F_1(0, 0) = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(g) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^2 b_i(g) \frac{\partial w}{\partial x_i} - w_t.$$

Par conséquent, pour $w \in C^{3+\lambda, (3+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$, $F_1(0, 0) \in C^{1+\lambda, (1+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$ et $\|F_1(0, 0)\|_{Q_T}^{(1+\lambda)} \leq c\|w\|_{Q_T}^{(3+\lambda)}$. En fait, $F_1(0, 0) \in C_0^{1+\lambda, (1+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$ par construction de w .

Donc par le Lemme 2.5 du Chapitre 2,

$$\begin{aligned}\|F_1(0,0)\|_{Q_T}^{(\lambda)} &\leq c(T)T^{1/2}\|F_1(0,0)\|_{Q_T}^{(1+\lambda)} \\ &\leq c(T)T^{1/2}\|w\|_{Q_T}^{(3+\lambda)} \\ &\leq c'(T)T^{1/2}.\end{aligned}$$

Remarque 6.3. Une régularité $C^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}$ pour w , n'aurait pas suffi. Il faut imposer une régularité $C^{3+\lambda,(3+\lambda)/2}$ pour pouvoir appliquer le Lemme d'injection 2.5 du Chapitre 2. Par conséquent, on doit choisir la donnée initiale $C_0 \in C^{3+\lambda}(\overline{\Omega}_0)$.

De plus, on a

$$F_2(0,0) = -w + \nabla w \cdot \vec{\mathcal{N}}(g) + \alpha \exp(\gamma K(g)).$$

Par conséquent, pour $w \in C^{3+\lambda,(3+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$ et $g \in C^{4+\lambda,(4+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$, on voit que $F_2(0,0) \in C^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$. En fait $F_2(0,0) \in C_0^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$ grâce à la condition de compatibilité (3.15) vérifiée par u_0 et Γ_0 . Alors comme précédemment, on obtient

$$\|F_2(0,0)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \leq c'(T)T^{1/2}.$$

Remarque 6.4. Ici encore, on doit exiger $w \in C^{3+\lambda,(3+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$ et $g \in C^{4+\lambda,(4+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T)$, ce qui nécessite $C_0 \in C^{3+\lambda}(\overline{\Omega}_0)$ et $\Gamma_0 \in C^{4+\lambda}$.

Les deux autres termes se traitent de la même façon, en écrivant

$$F_3(0,0) = -\nabla w \cdot \vec{n}_S,$$

$$F_4(0,0) = \left[1 + \left(\frac{\dot{g}}{1+gK_0}\right)^2\right]^{1/2} w - g_t - \alpha \left[1 + \left(\frac{\dot{g}}{1+gK_0}\right)^2\right]^{1/2} \exp(\gamma K(g))$$

La Proposition 6.2 est ainsi démontrée.

On établit alors le résultat d'existence pour le problème complet (P_0) de la Section 4.

Théorème 6.5

Il existe $T^ > 0$ tel que le problème (P_0) admet une solution*

$$(\sigma, v) \in A \equiv C_0^{3+\lambda,(3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_{T^*}) \times C_0^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{Q}_{T^*}).$$

Démonstration :

On considère l'application

$$\mathcal{T} : (\sigma, v) \mapsto \mathcal{T}(\sigma, v) = (\sigma', v')$$

où (σ', v') est la solution du problème linéaire avec les seconds membres $F_i(\sigma, v)$, $i = 1, \dots, 4$. Par la Proposition 6.1 et le Théorème 5.1 relatif au problème linéaire,

$\mathcal{T}$ est bien définie sur $A \equiv C_0^{3+\lambda, (3+\lambda)/2}(\overline{\Sigma}_T) \times C_0^{2+\lambda, (2+\lambda)/2}(\overline{Q}_T)$. On va montrer que sur un intervalle de temps $[0, T]$ suffisamment petit, l'application $\mathcal{T}$ est une contraction stricte et applique une certaine boule dans elle-même.

Soit $(\sigma_1, v_1), (\sigma_2, v_2) \in A$. D'après le cas linéaire

$$\|\mathcal{T}(\sigma_1, v_1)\|_A = \|(\sigma'_1, v'_1)\|_A \leq c(T) \left(\|F_1(\sigma_1, v_1)\|_{Q_T}^{(\lambda)} + \sum_{i=2}^4 \|F_i(\sigma_1, v_1)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \right)$$

et donc

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(\sigma_1, v_1) - \mathcal{T}(\sigma_2, v_2)\|_A &\leq c(T) \left(\|F_1(\sigma_1, v_1) - F_1(\sigma_2, v_2)\|_{Q_T}^{(\lambda)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=2}^4 \|F_i(\sigma_1, v_1) - F_i(\sigma_2, v_2)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \right). \end{aligned}$$

Compte tenu de la proposition 6.2 (i), pour $\|(\sigma_1, v_1)\|_A \leq r$ et $\|(\sigma_2, v_2)\|_A \leq r$, on a

$$\|\mathcal{T}(\sigma_1, v_1) - \mathcal{T}(\sigma_2, v_2)\|_A \leq c(T) (T^{1/2} + r) \|(\sigma_1 - \sigma_2, v_1 - v_2)\|_A.$$

Pour un certain T et r , on peut rendre

$$c(T) (T^{1/2} + r) \leq \frac{1}{2}.$$

$\mathcal{T}$ est alors une contraction stricte de $B(0, r) \cap A$ dans A .

On cherche maintenant à montrer que $\mathcal{T}$ laisse invariant dans A une certaine boule. Pour cela, on écrit

$$\|\mathcal{T}(\sigma, v)\|_A \leq \|\mathcal{T}(\sigma, v) - \mathcal{T}(0, 0)\|_A + \|\mathcal{T}(0, 0)\|_A. \quad (6.25)$$

D'autre part, on déduit de l'étude du cas linéaire, et de la proposition 6.2 (ii) que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(0, 0)\|_A &\leq c(T) \left(\|F_1(0, 0)\|_{Q_T}^{(\lambda)} + \sum_{i=2}^4 \|F_i(0, 0)\|_{\Sigma_T}^{(1+\lambda)} \right) \\ &\leq \tilde{c}(T) T^{1/2}. \end{aligned}$$

Dans ces conditions, l'inégalité (6.25) devient

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(\sigma, v)\|_A &\leq c(T) (T^{1/2} + r) \|(\sigma, v)\|_A + \tilde{c}(T) T^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2} \|(\sigma, v)\|_A + \tilde{c}(T) T^{1/2}, \end{aligned}$$

grâce au choix précédent de T et r . Finalement, on choisit T suffisamment petit afin d'avoir

$$\tilde{c}(T) T^{1/2} \leq \frac{1}{2} r, \quad \text{pour un } r \text{ fixé}$$

et donc

$$\|T(g, u)\|_A \leq r.$$

On a ainsi montré que $\mathcal{T}(B(0, r)) \subset B(0, r)$.

Par conséquent, $\mathcal{T} : B(0, r) \cap A \longrightarrow B(0, r) \cap A$ est une *contraction stricte*. $\mathcal{T}$ admet donc un unique point fixe dans $B(0, r) \cap A$.

Références

- [1] F. ABERGEL, D. HILHORST, F. ISSARD-ROCH, *On a dissolution-growth problem with surface tension in the neighborhood of a stationary solution*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 24, No. 2 (1993), p. 299-316.
- [2] B.V. BAZALIĬ , S.P. DEGTYAREV, *On classical solvability of the multidimensional Stefan problem for convective motion of a viscous incompressible fluid*, Math. USSR Sbornik, Vol. 60 (1988), No. 1.
- [3] W.K. BURTON, N. CABRERA, F. FRANK, Philo. Trans. R. Soc. London, Ser. A, 243 (1951) 299.
- [4] X. CHEN, F. REITICH, *Local existence and uniqueness of solutions of the Stefan problem with surface tension and kinetic undercooling*, J. Math. Anal. Appl. 164 (1992), p. 350-362.
- [5] B. DOUBROVINE, S. NOVIKOV, A. FOMENKO, *Géométrie contemporaine, Méthodes et applications*, Tome I, Edition Mir, Moscou, 1982.
- [6] F. KALEYDJIAN, M. COUNIL, *Stability of steady states in some solid-liquid systems*, React. Solids, 2 (1986), p. 1-21..
- [7] O.A. LADYŽENSKAJA, V.A. SOLONNIKOV, N.N. URAL'CEVA, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Translations of Mathematical Monographs Volume 23, Providence R.I, American Mathematical Society 1968.
- [8] I. PRIGOGINE, R. DEFAY, *Tension superficielle et adsorption*, Edition Desoer, Liège, 1951.

Chapitre 4

ETUDE NUMERIQUE

ON A DISSOLUTION-GROWTH PROBLEM WITH SURFACE TENSION : A NUMERICAL STUDY

C. Dupaix⁽¹⁾, D. Hilhorst⁽¹⁾, J.F. Scheid⁽¹⁾(⁽²⁾)

(⁽¹⁾) Laboratoire d'Analyse Numérique, CNRS et Université Paris-Sud,
91405 Orsay, France

(⁽²⁾) Commissariat à l'Energie Atomique, B.P 6,
92265 Fontenay-aux-Roses, France

Abstract. We consider a one-phase Stefan with surface tension in space dimension two. We show how this problem arises from corrosion phenomena and present a numerical solution, based on a finite element method for the discretization in space and on two alternative methods for tracking the moving free boundary.

4.1 Introduction

Many physical processes involve a solid phase in contact with a liquid phase. These phenomena are accompanied by a change of the geometry of the interface between the two phases. We are interested in the evolution in time of these interfaces. This paper is devoted to the study of a dissolution-growth process appearing in corrosion phenomena where typically a metal is in contact with a liquid and where the two phases evolve while exchanging mass. The physical model described in Section 2 leads us to study a one-phase Stefan problem in space dimension two for the concentration $C(x, y, t)$ of the chemical species passed into the liquid phase Ω_t and the interface Γ_t between solid and liquid. In Section 2 we first derive the following three basic equations for C and Γ_t :

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_t = D\Delta C & \text{in the liquid phase } \Omega_t \\ D\frac{\partial C}{\partial \nu} = \kappa V \left(\frac{1}{V} - C \right) V_\nu & \text{on the interface } \Gamma_t \\ V_\nu = C - \alpha \exp(\gamma K) & \text{on } \Gamma_t \end{array} \right.$$

where ν is the unit normal vector to the interface Γ_t , V_ν is the normal velocity of Γ_t , K is its mean curvature, D is the diffusion coefficient, V is the molar volume of the solid compound, κ is a kinetic constant, α is the saturation concentration of the solution and γ is proportional to the surface tension of the interface Γ_t . To these three basic equations, we associate two boundary value problems. The first one is a Neumann problem where the liquid phase is delimited by an upper fixed boundary $\Sigma = \{y = M\}$, on which the concentration C satisfies a homogeneous Neumann boundary condition. The second boundary value problem is a Dirichlet problem where the upper boundary of the domain is a moving plane $\Sigma_t = \{y = d(t) + M\}$, on which C satisfies a Dirichlet boundary condition. The

aim of this paper is to describe a numerical solution of the following (rescaled) problems :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} (P_1) \left\{ \begin{array}{l} C_t = \Delta C \text{ in } Q = \{(x, y, t), (x, y) \in \Omega_t, t > 0\} \\ \frac{\partial C}{\partial \nu} = (1 - C)(C - \alpha e^{\gamma K}) \text{ on } \Gamma = \{(x, y, t), (x, y) \in \Gamma_t, t > 0\} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \Sigma = \{y = M\}, t > 0 \\ \text{or} \\ C = g \text{ on } \Sigma_t = \{y = d(t) + M\}, t > 0 \end{array} \right. \\ C \text{ satisfies a periodicity condition} \\ C(x, y, 0) = C_0(x, y), (x, y) \in \Omega_0 \end{array} \right. \\ (P_2) \left\{ \begin{array}{l} V_\nu = C - \alpha e^{\gamma K} \text{ on } \Gamma \\ \Gamma_t \text{ satisfies a periodicity condition} \\ \Gamma_{t=0} = \Gamma_0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

In Sections 3 and 4, we describe a numerical algorithm for solving Problem (P) . An essential difficulty is related to the variation in time of the domain. The idea is to successively solve at each time step Problem (P_1) for the concentration and Problem (P_2) for the interface motion. We suppose that $\Gamma^n := \Gamma_{n\Delta t}$, $\Omega^n := \Omega_{n\Delta t}$ and $C^n := C(\cdot, \cdot, n\Delta t)$ are known and we want to compute Γ^{n+1} and C^{n+1} . We proceed in two steps

- (i) We use an explicit scheme for discretizing Problem (P_2) in order to compute Γ^{n+1} ;
- (ii) We discretize Problem (P_1) by means of a semi-implicit scheme in order to compute C^{n+1} on Ω^{n+1} .

The Section 3 deals with step (i). We adapt two different methods for tracking the interface. The first one, which is due to Ikeda and Kobayashi [2], consists in moving each point of a discrete interface by computing an approximate normal direction and an approximate value of the mean curvature at each point of the discrete interface. In the second method, which is due to Roosen [4] and Taylor [7] [8], one displaces the edges of the discrete interface by associating an approximate normal direction and a weighted mean curvature to those edges.

In Section 4 we discretize the equation for the concentration. We use a semi-implicit scheme for the discretization in time and a finite element method with piecewise linear basis functions for the discretization in space. Part of the computations are obtained with a fixed triangularization of the space domain whereas a number of calculations are carried out with a triangularization which varies in time so that the discrete interface coincides with edges of triangles at each time step.

We give numerical results in Section 5 and show how they are compatible with the qualitative properties of the solution. In particular in the case that a homogeneous Neumann boundary condition is given on the upper boundary of the space domain,

which corresponds to the case of a closed physical system, one numerically verifies that the concentration converges to the saturation concentration α as $t \rightarrow +\infty$ and that the integral $\int_{\Omega_t} (1 - C(x, y, t)) dx dy$, namely the total mass of the solid, is conserved in time. One also observes that in all the cases that we consider the moving interface stabilizes for large time and does not develop dendrites.

4.2 The physical model

4.2.1 The basic equations

We consider a system composed of a solid phase of a single compound and an incompressible liquid phase which is a dilute solution of that compound. The time evolution of this system induces mass transfer processes : a homogeneous one which consists in a diffusion process in the fluid and a heterogeneous one, namely a dissolution-growth process, located at the interface between solid and liquid.

Let Ω_t denote the liquid phase and Γ_t the interface between solid and liquid.

Let $C(x, y, t)$ represent the concentration of the chemical specie passed into solution, depending on the space variables (x, y) and on the time t .

The equations governing the evolution of the concentration and of the interface are deduced from the following physical laws.

i) Mass transfer

We suppose that the liquid is at rest and that at every point of the interface the volume decrease of the solid is exactly equal to the volume increase of the liquid, so that the convective velocity can be neglected. Moreover we also disregard all other flux (e.g flux induced gravity, thermal flux etc...) with respect to the diffusion one. If we denote by J the diffusion flux, the first Fick's law gives.

$$J = -D \text{ grad } C, \quad (2.1)$$

where D is the diffusion coefficient.

Let ω_t be an arbitrary subdomain which can be decomposed into ω_t^l , the liquid part and ω_t^s the solid part, i.e $\omega_t = \omega_t^l \cup \omega_t^s$.

The conservation of mass in ω_t consists of the same particules for each time in ω_t :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left(\int_{\omega_t} C dx dy \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\int_{\omega_t^l} C dx dy \right) + \frac{d}{dt} \left(\int_{\omega_t^s} \frac{1}{V} dx dy \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$



where V is the molar volume of the solid compound, so that $\frac{1}{V}$ represents the concentration in the solid phase. Let ν^l (respectively ν^s) denote the inward unit normal to

$\partial\omega_t^l$ (resp. $\partial\omega_t^s$) and $\mathcal{V}_{\nu^l}$ (resp. $\mathcal{V}_{\nu^s}$) denote the normal velocity of $\partial\omega_t^l$ (resp. $\partial\omega_t^s$). We deduce from (2.2) that

$$0 = \int_{\omega_t^l} C_t dx dy - \int_{\partial\omega_t^l} C \mathcal{V}_{\nu^l} d\sigma - \int_{\partial\omega_t^s} \frac{1}{V} \mathcal{V}_{\nu^s} d\sigma. \quad (2.3)$$

Furthermore, we write

$$\int \partial\omega_t^l C \mathcal{V}_{\nu^l} d\sigma = \int_{\tilde{\Gamma}} C V_{\nu} d\sigma + \int_{\partial\omega_t^l \setminus \tilde{\Gamma}} C \mathcal{V}_{\nu^l} d\sigma \quad (2.4)$$

$$\text{and } \int_{\partial\omega_t^s} \frac{1}{V} \mathcal{V}_{\nu^s} d\sigma = - \int_{\tilde{\Gamma}} \frac{1}{V} V_{\nu} d\sigma, \quad (2.5)$$

where V_{ν} is the normal velocity of the interface and $\tilde{\Gamma}$ is the part of the interface contained into ω_t , i.e. $\tilde{\Gamma} = \Gamma_t \cap \omega_t$.

Substituting (2.4) and (2.5) into (2.3) and using that $J \cdot \nu^l = C \mathcal{V}_{\nu^l}$, we obtain

$$0 = \int_{\omega_t^l} C_t dx dy + \int_{\tilde{\Gamma}} \left(\frac{1}{V} - C \right) V_{\nu} d\sigma - \int_{\partial\omega_t^l \setminus \tilde{\Gamma}} J \cdot \nu^l d\sigma, \quad (2.6)$$

Equation (2.6) holds for any subdomain ω_t . In particular, if we take $\omega_t = \omega_t^l$, that is $\omega_t^s = \emptyset$ or $\tilde{\Gamma} = \emptyset$, equation (2.6) reduce to :

$$\int_{\omega_t^l} C_t dx dy = \int_{\partial\omega_t^l} J \cdot \nu^l d\sigma. \quad (2.7)$$

Moreover it follows from (2.1) that

$$\begin{aligned} \int_{\partial\omega_t^l} J \cdot \nu^l d\sigma &= -D \int_{\partial\omega_t^l} \frac{\partial C}{\partial \nu^l} d\sigma \\ &= D \int_{\omega_t^l} \Delta C dx dy, \end{aligned}$$

and consequently

$$\int_{\omega_t^l} C_t dx dy = D \int_{\omega_t^l} \Delta C dx dy. \quad (2.8)$$

Hence, we obtain the diffusion equation

$$C_t = D \Delta C, \quad (2.9)$$

in the liquid domain. Then, substituting (2.9) into (2.6) yields

$$\int_{\tilde{\Gamma}} \left(\frac{1}{V} - C \right) V_{\nu} d\sigma + \int_{\tilde{\Gamma}} J \cdot \nu d\sigma = 0,$$

where $\vec{\nu}$ is the outward unit normal to Γ_t . Hence, we obtain the equation at the interface Γ_t

$$-J \cdot \nu = D \frac{\partial C}{\partial \nu} = \left(\frac{1}{V} - C \right) V_{\nu}. \quad (2.10)$$

ii) *Dissolution-growth of the solid*

We suppose that the rate of dissolution or growth of the interface, follows the law

$$V_\nu = h(C, K),$$

where h is a kinetic function, depending on the reaction pattern modified by the mean curvature K of the interface.

We consider an interface reaction of first-order and a Gibbs-Thomson law [3] to introduce dependency on the mean curvature. Then, we have the following kinetic function

$$h(C, K) = \kappa V (C - S_0 e^{\gamma K}) ,$$

where κ is a kinetic constant, S_0 is the saturation concentration of the solution and γ is proportional to the surface tension of the interface.

With the particular choice of the kinetic function h , we get

$$V_\nu = \kappa V (C - S_0 e^{\gamma K}) , \quad (2.11)$$

which we substitute in (2.10) to obtain

$$D \frac{\partial C}{\partial \nu} = \kappa V \left(\frac{1}{V} - C \right) (C - S_0 e^{\gamma K}) . \quad (2.12)$$

Remark 2.1. The kinetic law (2.11) is valid when the argument of the exponential is not too large. In practice and numerically, we impose that γK does not exceed 2.

Remark 2.2. The choice of the kinetic function h is not unique. Another type of interface reaction could have been used, for example a reaction of second order where the kinetic function h is a quadratic function of the concentration C [1].

4.2.2 Boundary and initial conditions

We consider two kinds of problems : on one hand a problem with a fixed upper boundary Σ of the domain Ω_t , on which the concentration satisfies a homogeneous Neumann condition and, on the other hand, a problem with a moving upper boundary Σ_t of Ω_t on which the concentration satisfies a Dirichlet condition.

i) *The Neumann problem*

The upper boundary Σ of the domain Ω_t is a fixed plane $\{y = M\}$. The concentration C satisfies the Neumann condition

$$\frac{\partial C}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \Sigma.$$

ii) *The Dirichlet problem*

The liquid domain Ω_t is a diffusion layer. The upper boundary $\Sigma_t = \{y = d(t) + M\}$ of Ω_t moves in such a manner that the area of the liquid domain Ω_t is conserved in time. The concentration C satisfies the Dirichlet condition $C = g$ on Σ_t , where g is a given function.

Moreover we suppose that for both problems (Neumann and Dirichlet) C and Γ_t are L -periodic in the x -direction. This assumption enables us to transform the problem into an equivalent one where the new domain, which we still denote by Ω_t , is bounded in the x -direction, with x varying in $(0, L)$. Then C and Γ_t satisfy periodicity conditions which are expressed as follows. We make the assumption that Γ_t does not have more than one point on $\{x = 0\}$, namely Γ_t can be parametrized by the x -coordinate in a neighborhood of $\{x = 0\}$. Then the periodicity conditions are given by :

$$(C_1) \begin{cases} C(0, y, t) = C(L, y, t) \\ \frac{\partial C}{\partial x}(0, y, t) = \frac{\partial C}{\partial x}(L, y, t), \end{cases} \quad (2.13)$$

and if we parametrize the interface Γ_t by its arc length, i.e.

$$\begin{aligned} \Gamma_t : [0, l] &\longmapsto \mathbf{R}^2 \\ s &\longmapsto (x(s, t), y(s, t)), \end{aligned}$$

then

$$(C_2) \begin{cases} x(0, t) = x(l, t) + L, \quad y(0, t) = y(l, t) \\ \frac{\partial x}{\partial s}(0, t) = \frac{\partial x}{\partial s}(l, t), \quad \frac{\partial y}{\partial s}(0, t) = \frac{\partial y}{\partial s}(l, t) \end{cases} \quad (2.14)$$

Finally, periodic initial conditions are given for C and Γ_t :

$$\begin{cases} \Gamma_{t=0} = \Gamma_0 \\ C(x, y, 0) = C_0(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in \Omega_0,$$

where Ω_0 is the initial liquid domain.

Remark 2.3. Without the previous assumption, the periodicity condition (C_2) would involve all the points of Γ_t with x -coordinate zero. However the numerical study shows that if the initial interface is parametrized in the form $y = f_0(x)$, then the interface keeps being parametrized by x for all positive times, which justifies this assumption for the dissolution-growth problem.

In this way, we obtain the following moving boundary problem

$$\left\{ \begin{array}{l} C_t = D\Delta C \text{ in } Q = \{(x, y, t), (x, y) \in \Omega_t, t > 0\} \\ D\frac{\partial C}{\partial \nu} = \kappa V \left(\frac{1}{V} - C \right) (C - S_0 e^{\gamma K}) \text{ on } \Gamma = \{(x, y, t), (x, y) \in \Gamma_t, t > 0\} \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \Sigma = \{y = M\}, t > 0 \\ \text{or} \\ C = g \text{ on } \Sigma_t = \{y = d(t) + M\}, t > 0 \end{array} \right. \\ C \text{ satisfies the periodicity condition } (C_1) \\ C(x, y, 0) = C_0(x, y), (x, y) \in \Omega_0 \\ \\ V_\nu = \kappa V (C - S_0 e^{\gamma K}) \text{ on } \Gamma \\ \Gamma_t \text{ satisfies the periodicity condition } (C_2) \\ \Gamma_{t=0} = \Gamma_0 \end{array} \right.$$

4.2.3 Dimensionless equations

In order to obtain dimensionless equations, we set

$$\left\{ \begin{array}{l} (\tilde{x}, \tilde{y}) := \frac{\kappa}{D}(x, y) \\ \tilde{s} := \frac{\kappa}{D}s ; \tilde{l} := \frac{\kappa}{D}l \\ \tilde{t} := \frac{\kappa^2}{D}t \\ \tilde{\gamma} := \frac{\kappa}{D}\gamma \\ \alpha := VS_0 \\ \tilde{C}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) := VC(x, y, t) \\ \tilde{\Gamma}_{\tilde{t}}(\tilde{s}) := \frac{\kappa}{D}\Gamma_t(s), \end{array} \right.$$

and $\tilde{\Omega}_{\tilde{t}}$, the transformed domain of Ω_t is described by

$$\tilde{\Omega}_{\tilde{t}} = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{y}), (x, y) \in \Omega_t \text{ with } (\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\kappa}{D}(x, y) \text{ and } \tilde{t} = \frac{\kappa^2}{D}t \right\}.$$

Some easy computations show that $\tilde{C}$ and $\tilde{\Gamma}_{\tilde{t}}$ satisfy the following rescaled equations, where the tildas have been omitted

$$\begin{aligned}
(P) \left\{ \begin{array}{l}
(P_1) \left\{ \begin{array}{l}
C_t = \Delta C \text{ in } Q \quad (2.15) \\
\frac{\partial C}{\partial \nu} = (1 - C)(C - \alpha e^{\gamma K}) \text{ on } \Gamma \quad (2.16) \\
\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\partial C}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \Sigma = \{y = M\}, t > 0 \quad (2.17) \\
\text{or} \\
C = g \text{ on } \Sigma_t = \{y = d(t) + M\}, t > 0 \quad (2.18)
\end{array} \right. \\
C \text{ satisfies the periodicity condition } (C_1) \quad (2.19) \\
C(x, y, 0) = C_0(x, y), (x, y) \in \Omega_0 \quad (2.20)
\end{array} \right. \\
(P_2) \left\{ \begin{array}{l}
V_\nu = C - \alpha e^{\gamma K} \text{ on } \Gamma \quad (2.21) \\
\Gamma_t \text{ satisfies the periodicity condition } (C_2) \quad (2.22) \\
\Gamma_{t=0} = \Gamma_0 \quad (2.23)
\end{array} \right.
\end{array} \right.
\end{aligned}$$

4.2.4 Some bounds on the concentration

With the scaling of Subsection 2.3, we have that

$$0 \leq C_0(x, y) \leq 1 \quad \text{for all } (x, y) \in \Omega_0 \quad (2.24)$$

and

$$0 \leq g \leq 1. \quad (2.25)$$

One can formally show, by means of the maximum principle that (2.24) and (2.25) imply a similar property for the concentration C , namely that

$$0 \leq C \leq 1 \quad \text{in } Q \quad (2.26)$$

From now on we suppose that the conditions (2.24) and (2.25) are satisfied so that (2.26) is satisfied as well.

4.3 Discretization of the interface equation

This section is devoted to the numerical solution of the equation for the displacement of the interface

$$V_\nu = C - \alpha e^{\gamma K} \quad \text{on } \Gamma_t.$$

We do so by means of an explicit scheme, namely

$$V_\nu = C^n - \alpha e^{\gamma K(n\Delta t)} \quad \text{on } \Gamma^n,$$

where $\Gamma^n := \Gamma_{n\Delta t}$, $\Omega^n := \Omega_{n\Delta t}$ and $C^n := C(.,., n\Delta t)$. Since

$$V_\nu = \frac{\partial \Gamma_t}{\partial t}(n\Delta t) \cdot \vec{\nu}(n\Delta t),$$

we compute the interface at time $t^{n+1} = (n+1)\Delta t$ by means of the formula

$$\Gamma^{n+1} \cdot \vec{\nu}(n\Delta t) = \Gamma^n \cdot \vec{\nu}(n\Delta t) + \Delta t V_\nu.$$

Hence, the knowledge of Γ^n and the computation of the normal velocity V_ν permit to determine Γ^{n+1} . We now present two methods for moving the interface and computing its curvature.

Let P_i^n be a point of the discretized interface at time $t^n = n\Delta t$ and let $C_i^n = C_h(P_i^n, n\Delta t)$, where C_h is obtained by a discretization in space of the function C (see Section 4 below). The interface Γ^n is approximated by

$$\Gamma^n = \left\{ [P_i^n, P_{i+1}^n]; i = 1, \dots, I; y(P_{I+1}^n) = y(P_1^n) \right\},$$

where the notation $y(P)$ stands for the y -coordinate of the point P , and with the convention that the liquid part lies on the left side of the interface when one follows Γ^n from $s = 0$ to $s = l$.

Let p be a positive integer and set $\Delta t_1 = \frac{\Delta t}{p}$. We also set $\Gamma_h^{n,0} = \Gamma_h^n$, $C_h^{n,0} = C_h^n$ and for $q = 1, \dots, p$ we define

$$\Gamma_h^{n,q} = \left\{ [P_i^{n,q}, P_{i+1}^{n,q}]; i = 1, \dots, I; y(P_{I+1}^{n,q}) = y(P_1^{n,q}) \right\}$$

and

$$C_h^{n,q} = C_h(P_i^{n,q}, n\Delta t).$$

We adapt two methods. In the first one, due to Ikeda and Kobayashi [2], one moves the points $P_i^{n,q}$ so that one has to compute at those points an approximate normal direction and an approximate value of the mean curvature. In the second method, due to Roosen [4] and Taylor [7] [8], one displaces the edges $[P_i^{n,q}, P_{i+1}^{n,q}]$ of the discrete interface so that one associates an approximate normal direction and a weighted mean curvature to those edges.

4.3.1 Adaptation of the method of Ikeda and Kobayashi.

Motion of the discretized interface

For $q = 0, \dots, p-1$, we obtain $\Gamma_h^{n,q+1}$ from $\Gamma_h^{n,q}$ by computing the displacement

$$\overrightarrow{P_i^{n,q} P_{i+1}^{n,q+1}} = \Delta t_1 [C_i^{n,q} - \alpha \exp(\gamma K(P_i^{n,q}))] \vec{\nu}_i^{n,q} \quad (3.1)$$

for $i = 1, \dots, I + 1$ and $q = 0, \dots, p - 1$, where $K(P_i^{n,q})$ is the curvature of the circle circumscribed about the triangle $(P_{i-1}^{n,q}, P_i^{n,q}, P_{i+1}^{n,q})$, and $\vec{\nu}_i^{n,q}$ is the unit vector at $P_i^{n,q}$ pointing into the liquid phase, and perpendicular to the segment $[P_{i-1}^{n,q}, P_{i+1}^{n,q}]$.

More precisely, $K(P_i)$ and $\vec{\nu}_i$ are given by the formulas

$$\vec{\nu}_i = \frac{1}{\left| \overrightarrow{P_{i-1}P_{i+1}} \right|} \begin{pmatrix} -(y_{i+1} - y_{i-1}) \\ x_{i+1} - x_{i-1} \end{pmatrix},$$

and

$$K(P_i) = \frac{2 \left(\overrightarrow{P_iP_{i-1}} \wedge \overrightarrow{P_iP_{i+1}} \right)}{\left| \overrightarrow{P_iP_{i-1}} \right| \left| \overrightarrow{P_iP_{i+1}} \right| \left| \overrightarrow{P_{i-1}P_{i+1}} \right|}.$$

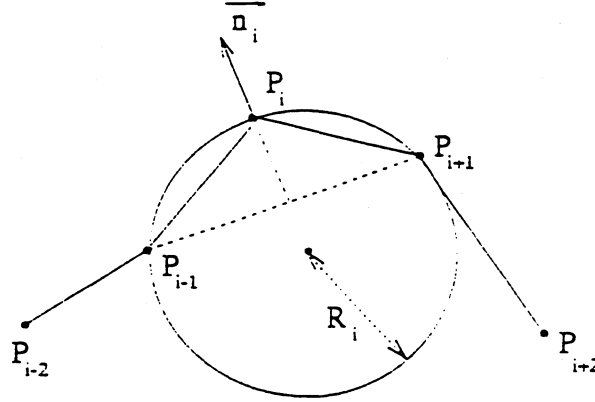


Figure 3.1

Discrete unit normal and discrete mean curvature at vertex P_i .

Remark 3.1. Thanks to the orientation that we choose for the interface, the mean curvature $K(P_i)$ is positive when the solid part enters the liquid one at point P_i .

Remark 3.2. The methods used are of order 2 for the computation of the normal and of order 1 for the curvature.

Furthermore, we deduce $C_h^{n,q+1}$ from $C_h^{n,q}$ by the formula

$$\begin{aligned} C_i^{n,q+1} &= C_h(P_i^{n,q+1}, n\Delta t) \\ &\simeq C_h(P_i^{n,q}, n\Delta t) + \overrightarrow{P_i^{n,q}P_i^{n,q+1}} \cdot \overrightarrow{\nabla} C_h(P_i^n, n\Delta t), \end{aligned}$$

in which we substitute (3.1) to obtain

$$C_i^{n,q+1} = C_i^{n,q} + \Delta t_1 [C_i^{n,q} - \alpha \exp(\gamma K(P_i^{n,q}))] \frac{\partial C_h}{\partial \nu_i^{n,q}}(P_i^{n,q}, n\Delta t).$$

In view of the interface condition (2.16), this yields

$$C_i^{n,q+1} = C_i^{n,q} + \Delta t_1 [C_i^{n,q} - \alpha \exp(\gamma K(P_i^{n,q}))]^2 (1 - C_i^{n,q}). \quad (3.2)$$

Hence, $\Gamma_h^{n+1} = \Gamma_h^{n,p}$ follows from solving

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_i^{n,q} P_i^{n,q+1}} = \Delta t_1 [C_i^{n,q} - \alpha \exp(\gamma K(P_i^{n,q}))] \vec{\nu}_i^{n,q} \\ C_i^{n,q+1} = C_i^{n,q} + \Delta t_1 [C_i^{n,q} - \alpha \exp(\gamma K(P_i^{n,q}))]^2 (1 - C_i^{n,q}), \end{cases}$$

for $i = 1, \dots, I+1$ and $q = 0, \dots, p-1$.

The time step Δt_1 is chosen in order to avoid numerical instabilities. Moreover we have to control the length of line segments of $\Gamma_h^{n,q}$ in order to prevent some possible self-intersections of the interface. We do so as follows :

Control of the edges

Let $l_{max} > l_{min} > 0$ be two given real numbers.

1. If $\left| \overrightarrow{P_i^{n,q} P_{i+1}^{n,q}} \right| < l_{min}$, we consider the midpoint of $[P_i^{n,q}, P_{i+1}^{n,q}]$ as a new vertex and remove $P_i^{n,q}$ and $P_{i+1}^{n,q}$.

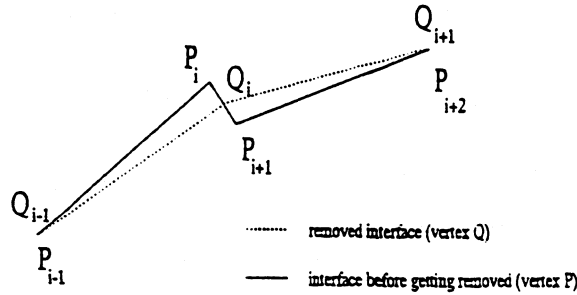


Figure 3.2

The case of a degenerate edge.

2. If $\left| \overrightarrow{P_i^{n,q} P_{i+1}^{n,q}} \right| > l_{max}$, we introduce a new vertex $P_{i+\frac{1}{2}}^{n,q}$. If $P_{i+\frac{1}{2}}^{n,q}$ would be taken as the midpoint of the edge, $P_{i+\frac{1}{2}}^{n,q}$ would be a point with zero curvature. Thus, in order to avoid this problem we use an idea due to T.I. Seidman [6].

We suppose for simplicity that $K(P_i^{n,q}) \neq 0$ and $K(P_{i+1}^{n,q}) \neq 0$. Let $\mathcal{C}_i$ and $\mathcal{C}_{i+1}$ be the circles of radii R_i and R_{i+1} circumscribed respectively about the triangles $(P_{i-1}^{n,q}, P_i^{n,q}, P_{i+1}^{n,q})$ and $(P_i^{n,q}, P_{i+1}^{n,q}, P_{i+2}^{n,q})$. Let $(D_{i+\frac{1}{2}})$ be the mediatrice line of $[P_i^{n,q}, P_{i+1}^{n,q}]$. We then define

$N_i = \{(D_{i+\frac{1}{2}}) \cap \mathcal{C}_i\}$ with

$$\left(\overrightarrow{P_i^{n,q} P_{i-1}^{n,q}} \wedge \overrightarrow{P_i^{n,q} P_{i+1}^{n,q}} \right) \cdot \left(\overrightarrow{N_i P_i^{n,q}} \wedge \overrightarrow{N_i P_{i+1}^{n,q}} \right) > 0 \quad (3.3)$$

and

$N_{i+1} = \{(D_{i+\frac{1}{2}}) \cap \mathcal{C}_{i+1}\}$ with

$$\left(\overrightarrow{P_{i+1}^{n,q} P_i^{n,q}} \wedge \overrightarrow{P_{i+1}^{n,q} P_{i+2}^{n,q}} \right) \cdot \left(\overrightarrow{N_{i+1} P_i^{n,q}} \wedge \overrightarrow{N_{i+1} P_{i+1}^{n,q}} \right) > 0 \quad (3.4)$$

The condition (3.3) means that N_i is the intersection point of the mediatrice line $D_{i+\frac{1}{2}}$ with the circle $\mathcal{C}_i$ and that the angles between the vectors $\overrightarrow{P_i P_{i-1}}$ and $\overrightarrow{P_i P_{i+1}}$ and between the vectors $\overrightarrow{N_i P_i}$ and $\overrightarrow{N_i P_{i+1}}$ have the same orientation. Condition (3.4) expresses a similar property for the node N_{i+1} .

Finally, we set the new vertex $P_{i+\frac{1}{2}}$ as the midpoint of $[N_i, N_{i+1}]$, i.e. $P_{i+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}(N_i + N_{i+1})$.

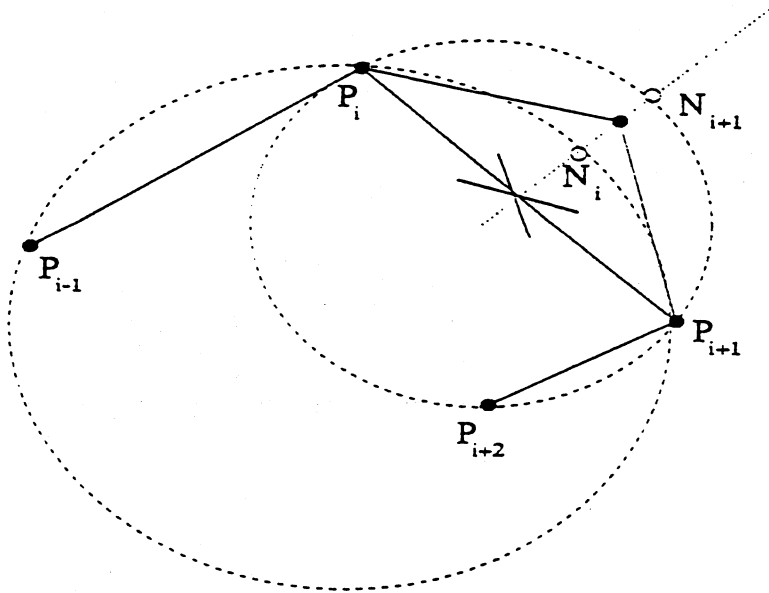


Figure 3.3

Introduction of a new point as the midpoint of $[N_i, N_{i+1}]$, using an idea due to T. I. Seidman.

4.3.2 Adaptation of the method of Roosen and Taylor.

The mean curvature can be defined as the decrease of area with volume. Similarly, the weighted mean curvature can be defined as the decrease of surface energy with volume. See for example J.Taylor [7]. The methods using weighted mean curvature are often used in the case of anisotropic materials. They are related to the wulff shape notion. A wulff shape W_ϕ is defined as

$$W_\phi = \left\{ \vec{u} \in \mathbb{R}^N, \vec{u} \cdot \vec{v} \leq \phi(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N \text{ with } |\vec{v}| = 1 \right\},$$

where ϕ is a surface energy density which is supposed to be convex and 1-homogen. In the special case that we consider here, i.e. the isotropic case, the surface energy is constant, equal to one, on the unit vector of $\mathbb{R}^2$, or equivalently, the wulff shape is a circle of radius one [7]. This implies that mean curvature and weighted mean curvature coincide.

Motion of the discretized interface

To each edge $[P_i, P_{i+1}]$, we associate $\vec{v}_{i+\frac{1}{2}}$, the unit normal to the edge pointing into the fluid, and the curvature $K_{i+\frac{1}{2}}$.

This is done according to the formulas :

$$\vec{v}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\left| \overrightarrow{P_i P_{i+1}} \right|} \begin{pmatrix} -(y_{i+1} - y_i) \\ x_{i+1} - x_i \end{pmatrix},$$

and for the mean curvature

$$K_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\left| \overrightarrow{P_i P_{i+1}} \right|} (\delta_{i,i-1} f_{i,i-1} + \delta_{i,i+1} f_{i,i+1}),$$

where

$$f_{i,j} = \frac{1 - \vec{v}_i \vec{v}_j}{\sqrt{1 - (\vec{v}_i \vec{v}_j)^2}},$$

and

$$\begin{aligned} \delta_{i,j} &= 0 \quad \text{if the segments } i \text{ and } j \text{ are not adjacents,} \\ &= +1 \quad \text{if they are adjacents and the solid enters into the fluid (concave case),} \\ &= -1 \quad \text{else.} \end{aligned}$$

An example is shown on Figure 3.4 below.

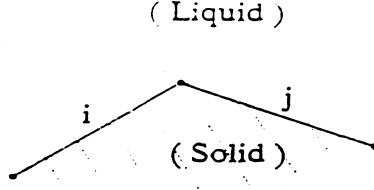


Figure 3.4

An example where $\delta_{ij} = +1$.

Remark 3.3. The methods used here are of order 1 for the computation of the normal and of the curvature .

As mentioned above, the motion by weighted mean curvature of the interface is implemented by moving each of its edges. Thus, we need another description of the discrete interface. We associate to Γ_h^n , the set $\Gamma_{\frac{1}{2}}^n$ defined as

$$\Gamma_{\frac{1}{2}}^n = \left\{ \left(P_{i+\frac{1}{2}}^n, l_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \mid i = 1, \dots, I \right\},$$

where

$$P_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(P_i^n + P_{i+1}^n) \quad \text{and} \quad l_{i+\frac{1}{2}}^n = \left| \overrightarrow{P_i^n P_{i+1}^n} \right|,$$

and we define the vector $C_{\frac{1}{2}}^n$ as the vector of components

$$(C_{\frac{1}{2}}^n)_i := C_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(C_i^n + C_{i+1}^n), \quad i = 1, \dots, I.$$

In the same way, we define the set $\Gamma_{\frac{1}{2}}^{n,q}$ and the vector $C_{\frac{1}{2}}^{n,q}$ for $q = 1, \dots, p$, and we set $\Gamma_{\frac{1}{2}}^{n,0} = \Gamma_{\frac{1}{2}}^n$, $C_{\frac{1}{2}}^{n,0} = C_{\frac{1}{2}}^n$. Moreover, to each edge $\left(P_{i+\frac{1}{2}}^n, l_{i+\frac{1}{2}}^n \right)$ we associate $\vec{\nu}_{i+\frac{1}{2}}^{n,q}$ and $K_{i+\frac{1}{2}}^{n,q}$ as defined above and we denote by $\left(B_{i+\frac{1}{2}}^{n,q} \right)$ the whole straight line containing this edge. Then $\Gamma_h^{n+1} = \Gamma_h^{n,p}$ is obtained by solving for $q = 0, \dots, p-1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_{i+\frac{1}{2}}^{n,q} P_{i+\frac{1}{2}}^{n,q+1}} = \Delta t_1 \left[C_{i+\frac{1}{2}}^{n,q} - \alpha \exp \left(\gamma K_{i+\frac{1}{2}}^{n,q} \right) \right] \vec{\nu}_{i+\frac{1}{2}}^{n,q} \quad \text{for } i = 0, \dots, I-1, \\ P_i^{n,q+1} = B_{i-\frac{1}{2}}^{n,q+1} \cap B_{i+\frac{1}{2}}^{n,q+1} \text{ for } i = 1, \dots, I-1, \\ \text{and } P_{I+1}^{n,q+1} \text{ is calculated from the periodicity condition for the interface} \\ C_i^{n,q+1} = C_i^{n,q} + \Delta t_1 \left[C_i^{n,q} - \alpha \exp \left(\gamma K(P_i^{n,q}) \right) \right]^2 (1 - C_i^{n,q}) \\ \text{for } i = 1, \dots, I+1. \end{array} \right.$$

Remark 3.4. It may be impossible to find $P_i^{n,q+1}$ as defined above. In this case, we choose it as the midpoint of the segment $\left[Q_{i-\frac{1}{2}}^{n,q+1}, Q_{i+\frac{1}{2}}^{n,q+1} \right]$, where $Q_{i-\frac{1}{2}}^{n,q+1}$ is the right endpoint of $\left(P_{i-\frac{1}{2}}^n, l_{i-\frac{1}{2}}^n \right)$ and $Q_{i+\frac{1}{2}}^{n,q+1}$ is the left endpoint of $\left(P_{i+\frac{1}{2}}^n, l_{i+\frac{1}{2}}^n \right)$.

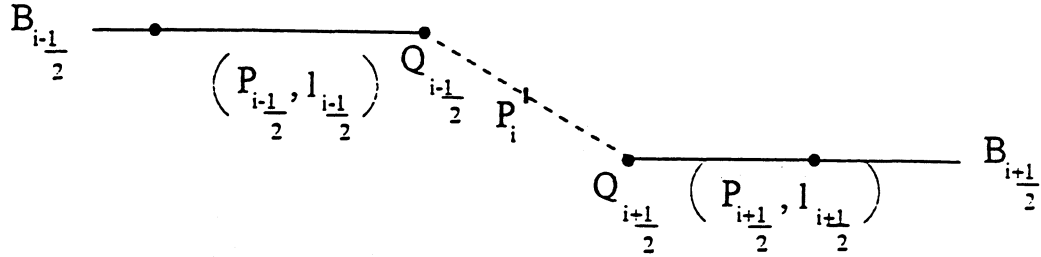


Figure 3.5

The limit case for the determination of the point P_i , as the intersection of the two lines.

Control of the edges

As in the case of the previous method we have to control the lengths of the segments. Let $l_{max} > l_{min} > 0$ be two given real numbers.

1. If $\left| \overrightarrow{P_i^{n,q} P_{i+1}^{n,q}} \right| < l_{min}$, we consider the midpoint of the edge as a new vertex and remove $P_i^{n,q}$ and $P_{i+1}^{n,q}$.
2. If $\left| \overrightarrow{P_i^{n,q} P_{i+1}^{n,q}} \right| > l_{max}$, we take the midpoint of the edge as a new vertex.

Moreover, the method requires an other kind of test. Indeed, the calculus of $P_i^{n,q}$ as the intersection of the two lines $B_{i-1/2}^{n,q}$ and $B_{i+1/2}^{n,q}$ can generate what A. Roosen [4] calls flipped-segment. This corresponds to the case $\vec{\nu}_{i+1/2}^{n,q-1} \cdot \vec{\nu}_{i+1/2}^{n,q} < 0$. If it happens, the vertex $P_i^{n,q}$ is removed.

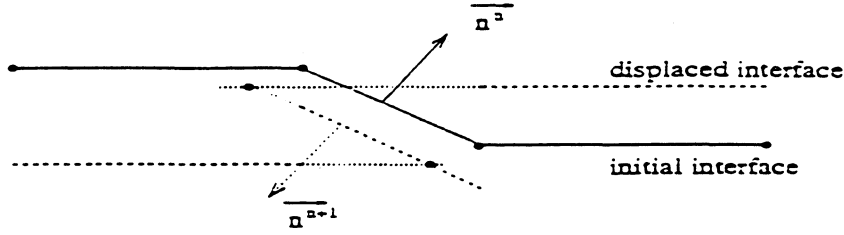


Figure 3.6

The case of a flipped segment.

4.4 Discretization of the equations for the concentration

To begin with we give a weak formulation for the diffusion problem (P_1) . Since the space domain Ω_t depends on time, we are led to introduce function spaces which depend on time as well. For $t \geq 0$, we set

$$\mathcal{S}_t = \{v \in H^1(\Omega_t) ; v|_{x=0} = v|_{x=L}\}.$$

We also introduce the spaces $\mathcal{H}_t$ and $\mathcal{V}_t$ defined as follows :

(i) in the case of a Neumann boundary condition,

$$\mathcal{H}_t = \mathcal{V}_t = \mathcal{S}_t,$$

(ii) in the case of a Dirichlet boundary condition,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_t &= \{v \in \mathcal{S}_t ; v = 0 \text{ on } \Sigma_t\} \\ \text{and } \mathcal{V}_t &= \{v \in \mathcal{S}_t ; v = g \text{ on } \Sigma_t\}. \end{aligned}$$

(For a domain Ω , we denote by $H^1(\Omega)$ the space of square integrable functions with square integrable first derivatives).

We suppose that the interface Γ_t is sufficiently smooth, we multiply equation (2.15) by $\varphi \in \mathcal{H}_t$ and integrate on Ω_t . This gives

$$\int_{\Omega_t} C_t \varphi \, dx dy = \int_{\Omega_t} \Delta C \varphi \, dx dy \quad \text{for all } \varphi \in \mathcal{H}_t. \quad (4.1)$$

Next we define

$$Q_T := \{(x, y, t), 0 < t < T \text{ and } (x, t) \in \Omega_t\}.$$

Integrating (4.1) by parts and taking into account the boundary conditions, we obtain the problem

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Find } C \in H^1(Q_T) \text{ with } 0 \leq C \leq 1 \text{ such that} \\ \text{(i) } C(x, y, 0) = C_0(x, y) \quad (x, y) \in \Omega_0; \\ \text{(ii) } C(t) \in \mathcal{V}_t \text{ for a.e. } t \in (0, T); \\ \text{(iii) } \int_{\Omega_t} C_t \varphi \, dx dy + \int_{\Omega_t} \nabla C \nabla \varphi \, dx dy + \int_{\Gamma_t} C \varphi \, d\sigma - \int_{\Gamma_t} C^2 \varphi \, d\sigma \\ \quad + \alpha \int_{\Gamma_t} C e^{\gamma K} \varphi \, d\sigma = \alpha \int_{\Gamma_t} e^{\gamma K} \varphi \, d\sigma \\ \text{for a.e. } t \in (0, T) \text{ and for all } \varphi \in \mathcal{H}_t. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

4.4.1 Discretization in time.

Next we show how we discretize in time Problem (4.2). For all $\varphi \in \mathcal{H}_{(n+1)\Delta t}$ and for all integers $n \in [0, (T - \Delta t)/(\Delta t)]$, the integral equation (iii) in Problem (4.2) becomes

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{n+1}} \frac{C^{n+1} - \tilde{C}^n}{\Delta t} \varphi \, dx dy + \int_{\Omega^{n+1}} \nabla C^{n+1} \nabla \varphi \, dx dy + \int_{\Gamma^{n+1}} C^{n+1} \varphi \, d\sigma \\ - \int_{\Gamma^{n+1}} \tilde{C}^n C^{n+1} \varphi \, d\sigma + \alpha \int_{\Gamma^{n+1}} C^{n+1} e^{\gamma K^{n+1}} \varphi \, d\sigma = \alpha \int_{\Gamma^{n+1}} e^{\gamma K^{n+1}} \varphi \, d\sigma, \end{aligned}$$

where $\tilde{C}^n$ is an extension of C^n to the domain $\overline{\Omega^{n+1}}$. We will explicitly show such an extension after having presented the discretization in space.

Thus the problem amounts to searching $C^{n+1} \in \mathcal{V}_{(n+1)\Delta t}$ such that

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega^{n+1}} C^{n+1} \varphi \, dx dy + \int_{\Omega^{n+1}} \nabla C^{n+1} \nabla \varphi \, dx dy \\ \quad + \int_{\Gamma^{n+1}} C^{n+1} (1 - \tilde{C}^n + \alpha e^{\gamma K^{n+1}}) \varphi \, d\sigma = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega^{n+1}} \tilde{C}^n \varphi \, dx dy + \alpha \int_{\Gamma^{n+1}} e^{\gamma K^{n+1}} \varphi \, d\sigma \\ \text{for all } \varphi \in \mathcal{H}_{(n+1)\Delta t} \text{ and for all integers } n \in [0, (T - \Delta t)/(\Delta t)] \text{ and} \\ \text{(ii) } C^0(x, y) = C_0(x, y) \quad (x, y) \in \Omega_0. \end{array} \right. \quad (4.3)$$

4.4.2 Discretization in space.

Before discretizing in space Problem (4.3) we introduce some notations. We denote by Ω_h^{n+1} the discrete approximation of the domain $\Omega_{(n+1)\Delta t}$ and by $\mathcal{T}_h^{n+1}$ a triangularization of Ω_h^{n+1} such that to each point of the boundary $\{x = L\}$ there corresponds one point

having the same y -coordinate on the boundary $\{x = 0\}$. Thus to each point $\{P_i^{n+1}\}$ of $\mathcal{T}_h^{n+1}$, we associate the unique point $\{P_{i*}^{n+1}\}$ of $\mathcal{T}_h^{n+1}$ defined by

$$P_{i*}^{n+1} = \begin{cases} P_i^{n+1} & \text{if } x(P_i^{n+1}) \neq L \\ P_k^{n+1} & \text{if } x(P_i^{n+1}) = L, \end{cases}$$

where P_k^{n+1} is the point of coordinate $(0, y(P_i^{n+1}))$ and where $x(P_i^{n+1})$ and $y(P_i^{n+1})$ denote the x and y -coordinate of the point P_i^{n+1} . Furthermore we denote by N^{n+1} the number of nodes of $\mathcal{T}_h^{n+1}$ of x -coordinate strictly less than L .

Next we introduce some discrete approximations of the function spaces, namely

$$\mathcal{S}_h^{n+1} = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega_h^{n+1}}) \text{ for all } K \in \mathcal{T}_h^{n+1}, v_h \text{ is linear on } K \text{ and } v_h(0, \cdot) = v_h(L, \cdot)\}$$

In the case of Neumann boundary condition, we set

$$\mathcal{H}_h^{n+1} = \mathcal{V}_h^{n+1} = \mathcal{S}_h^{n+1},$$

and in the case of Dirichlet boundary condition we set

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_h^{n+1} &= \{v_h \in \mathcal{S}_h^{n+1}, v_h = 0 \text{ on } \Sigma_h^{n+1}\} \\ \text{and } \mathcal{V}_h^{n+1} &= \{v_h \in \mathcal{S}_h^{n+1}, v_h = g \text{ on } \Sigma_h^{n+1}\}, \end{aligned}$$

where Σ_h^{n+1} is the upper boundary of Ω_h^{n+1} .

Let $\{\varphi_i^{n+1}\}_{i=1}^{N^{n+1}}$ be the piecewise linear basis functions of $\mathcal{V}_h^{n+1}$ (they take value one on one node and vanish at all other nodes). We decompose the approximate solution C_h^{n+1} on this basis,

$$C_h^{n+1}(x, y) = \sum_{i=1}^{N^{n+1}} C_i^{n+1} \varphi_i^{n+1}(x, y), \quad (x, y) \in \overline{\Omega_h^{n+1}},$$

where $C_i^{n+1} = C_h^{n+1}(P_i^{n+1})$. In the same way

$$\tilde{C}_h^n(x, y) = \sum_{i=1}^{N^{n+1}} \tilde{C}_i^n \varphi_i^{n+1}(x, y)$$

$$e^{\gamma K^{n+1}}(x, y) = \sum_{i=1}^{N^{n+1}} e_i^{n+1} \varphi_i^{n+1}(x, y),$$

with

$$e_i^{n+1} = \begin{cases} e^{\gamma K_i^{n+1}} & \text{if the node } P_i^{n+1} \text{ of } \mathcal{T}_h^{n+1} \text{ belongs to the moving interface} \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

Furthermore we decompose $(\tilde{C}_h^n C_h^{n+1})$ and $(C_h^{n+1} e^{\gamma K^{n+1}})$ according to

$$\tilde{C}_h^n C_h^{n+1}(x, y) = \sum_{i=1}^{N^{n+1}} \tilde{C}_i^n C_i^{n+1} \varphi_i^{n+1}(x, y),$$

$$C_h^{n+1} e^{\gamma K^{n+1}}(x, y) = \sum_{i=1}^{N^{n+1}} C_i^{n+1} e_i^{n+1} \varphi_i^{n+1}(x, y).$$

So this yields to decompose the term $C_h^{n+1} (1 - \tilde{C}_h^n + \alpha e^{\gamma K^{n+1}})$ as

$$C_h^{n+1} (1 - \tilde{C}_h^n + \alpha e^{\gamma K^{n+1}})(x, y) = \sum_{i=1}^{N^{n+1}} C_i^{n+1} (1 - \tilde{C}_i^n + \alpha e_i^{n+1}) \varphi_i^{n+1}(x, y).$$

The case of a Neumann boundary condition.

We obtain the linear system :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{N^{n+1}} C_i^{n+1} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_h^{n+1}} \varphi_i^{n+1} \varphi_j^{n+1} dx dy + \int_{\Omega_h^{n+1}} \nabla \varphi_i^{n+1} \nabla \varphi_j^{n+1} dx dy + \right. \\ \quad \left. + (1 - \tilde{C}_i^n + \alpha e_i^{n+1}) \int_{\Gamma_h^{n+1}} \varphi_i^{n+1} \varphi_j^{n+1} d\sigma \right] \\ = \sum_{i=1}^{N^{n+1}} \left[\frac{1}{\Delta t} \tilde{C}_i^n \int_{\Omega_h^{n+1}} \varphi_i^{n+1} \varphi_j^{n+1} dx dy + \alpha e_i^{n+1} \int_{\Gamma_h^{n+1}} \varphi_i^{n+1} \varphi_j^{n+1} d\sigma \right], \\ \text{for } j = 1, \dots, N^{n+1}. \end{array} \right. \quad (4.4)$$

The case of a Dirichlet boundary condition.

We denote $(P_i^{n+1})_{i=1}^{M^{n+1}}$ the nodes of $\mathcal{T}_h^{n+1}$ which are not located on the upper boundary Σ_h^{n+1} and $(P_i^{n+1})_{i=M^{n+1}+1}^{N^{n+1}}$ the nodes of $\mathcal{T}_h^{n+1}$ which are located on Σ_h^{n+1} . Since $(\varphi_i^{n+1})_{i=1}^{N^{n+1}}$ is the basis of $\mathcal{S}_h^{n+1}$ with $\varphi_i^{n+1}(P_j^{n+1}) = \delta_{i \cdot j}$, the set of functions $(\varphi_i^{n+1})_{i=1}^{M^{n+1}}$ is a basis of $\mathcal{H}_h^{n+1}$.

We decompose $C_h^{n+1}(x, y)$ on the basis $(\varphi_i^{n+1})_{i=1}^{N^{n+1}}$ of $\mathcal{S}_h^{n+1}$:

$$C_h^{n+1}(x, y) = \sum_{i=1}^{N^{n+1}} C_i^{n+1} \varphi_i^{n+1}(x, y)$$

$$= \sum_{i=1}^{M^{n+1}} C_i^{n+1} \varphi_i^{n+1}(x, y) + \sum_{i=M^{n+1}+1}^{N^{n+1}} g_i \varphi_i^{n+1}(x, y).$$

Similary we set

$$(\tilde{C}_h^n)(x, y) = \sum_{i=1}^{M^{n+1}} \tilde{C}_i^n \varphi_i^{n+1}(x, y) + \sum_{i=M^{n+1}+1}^{N^{n+1}} \tilde{C}_i^n \varphi_i^{n+1}(x, y)$$

and

$$\begin{aligned} C_h^{n+1} (1 - \tilde{C}_h^n + \alpha e^{\gamma K^{n+1}})(x, y) &= \sum_{i=1}^{M^{n+1}} C_i^{n+1} (1 - \tilde{C}_i^n + \alpha e_i^{n+1}) \varphi_i^{n+1}(x, y) \\ &+ \sum_{i=1}^{N^{n+1}} g_i (1 - \tilde{C}_i^n + \alpha e_i^{n+1}) \varphi_i^{n+1}(x, y). \end{aligned}$$

Since in the Dirichlet problem the interface Γ_h^{n+1} never hit the upper moving boundary Σ_h^{n+1} , we have

$$\int_{\Gamma_h^{n+1}} \varphi_i^{n+1} \varphi_j^{n+1} d\sigma = 0,$$

for $i = M^{n+1} + 1, \dots, N^{n+1}$ and $j = 1, \dots, M^{n+1}$. Then we obtain the linear system :

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{M^{n+1}} C_i^{n+1} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_h^{n+1}} \varphi_i^{n+1} \varphi_j^{n+1} dx dy + \int_{\Omega_h^{n+1}} \nabla \varphi_i^{n+1} \nabla \varphi_j^{n+1} dx dy \right. \\ &\quad \left. + (1 - \tilde{C}_i^n + \alpha e_i^{n+1}) \int_{\Gamma_h^{n+1}} \varphi_i^{n+1} \varphi_j^{n+1} d\sigma \right] \\ &= \sum_{i=1}^{M^{n+1}} \left[\frac{1}{\Delta t} \tilde{C}_i^n \int_{\Omega_h^{n+1}} \varphi_i^{n+1} \varphi_j^{n+1} dx dy + \alpha e_i^{n+1} \int_{\Gamma_h^{n+1}} \varphi_i^{n+1} \varphi_j^{n+1} d\sigma \right] \\ &\quad + \sum_{i=M^{n+1}+1}^{N^{n+1}} \left[\frac{1}{\Delta t} (\tilde{C}_i^n - g_i) \int_{\Omega_h^{n+1}} \varphi_i^{n+1} \varphi_j^{n+1} dx dy - g_i \int_{\Omega_h^{n+1}} \nabla \varphi_i^{n+1} \nabla \varphi_j^{n+1} dx dy \right] \\ &\text{for } j = 1, \dots, M^{n+1}. \end{aligned} \right. \quad (4.5)$$

Construction of the extension $\tilde{C}_h^n$ of C_h^n to the domain $\overline{\Omega_h^{n+1}}$.

We now describe the construction of the extension $\tilde{C}_h^n$ of C_h^n to the domain $\overline{\Omega_h^{n+1}}$. Let P_i^{n+1} be a node of Ω_h^{n+1} . Either

(i) $P_i^{n+1} \in \Omega_h^n$ and $C_h(P_i^{n+1})$ is computed by linear interpolation in the triangle of $\mathcal{T}_h^{n+1}$ containing P_i^{n+1} ,

or

(ii) $P_i^{n+1} \notin \Omega_h^n$ and P_i^{n+1} is located in a neighborhood of the interface Γ_h^n .

First of all we suppose that P_i^n is a node of Γ_h^n and P_i^{n+1} the corresponding node Γ_h^{n+1} obtained by moving the free boundary i.e. by computing the displacement

$$\overrightarrow{P_i^n P_i^{n+1}} = \Delta t [C_i^n - \alpha \exp(\gamma K(P_i^n))] \vec{\nu}_i^n. \quad (4.6)$$

We use the approximation formula

$$C_h^n(P_i^{n+1}) \simeq C_h^n(P_i^n) + \overrightarrow{P_i^n P_i^{n+1}} \cdot \overrightarrow{\nabla C_h^n}(P_i^n),$$

so that in view of the equation (4.4) we get

$$C_h^n(P_i^{n+1}) \simeq C_h^n(P_i^n) + \Delta t [C_i^n - \alpha \exp(\gamma K(P_i^n))] \frac{\partial C_h^n}{\partial \nu_i^n}(P_i^n),$$

and by means of the interface condition (2.16), we obtain

$$C_h^n(P_i^{n+1}) \simeq C_i^n + \Delta t [C_i^n - \alpha \exp(\gamma K(P_i^n))]^2 (1 - C_i^n).$$

Then we choose

$$\tilde{C}_i^n = C_i^n + \Delta t [C_i^n - \alpha \exp(\gamma K(P_i^n))]^2 (1 - C_i^n),$$

on the discrete interface Γ_h^{n+1} .

Otherwise, if the node P_i^{n+1} is strictly located between the two interface Γ_h^n and Γ_h^{n+1} , we determine the quadrangle $(P_j^n, P_k^n, P_j^{n+1}, P_k^{n+1})$, where $P_j^n, P_k^n \in \Gamma_h^n$ and $P_j^{n+1}, P_k^{n+1} \in \Gamma_h^{n+1}$, which contains P_i^{n+1} and interpolate in this quadrangle the value of C_h^n at P_i^{n+1} .

(iii) $P_i^{n+1} \notin \Omega_h^n$ and P_i^{n+1} is located above Σ_h^n .

In the case of a Dirichlet boundary condition on the moving upper boundary Σ_h^{n+1} , when Σ_h^{n+1} is above Σ_h^n , we have to extend C_h^n beyond to Σ_h^n up to Σ_h^{n+1} . In this case we set

$$\tilde{C}_h^n = g,$$

in the whole part delimited by Σ_h^{n+1} and Σ_h^n .

Solving linear systems.

Two methods have been used for solving the linear systems (4.5) and (4.6) : BI-CGSTAB which was introduced by Van Der Vorst [9] and GMRES introduced by Y. Saad & M. Schultz [5]. No significant differences in the results were observed.

Fixed mesh and moving mesh

In this subsection, we discuss the two variants of the implementation, namely the fixed mesh method and the moving mesh method. The fixed mesh method was introduced because of the simplicity of its implementation, whereas the moving mesh method permits more precise computations on the moving interface.

Fixed mesh. The main idea is to define a fixed grid and at each time step, to approximate the discrete interface Γ_h^{n+1} and the discrete domain Ω_h^{n+1} by an interface $\hat{\Gamma}_h^{n+1}$ and a domain $\hat{\Omega}_h^{n+1}$ such that the boundary of $\hat{\Omega}_h^{n+1}$ exactly coincides with edges of the fixed grid (see figure 4.1 below). Then we solve systems (4.5) or (4.6) to get the concentration in $\hat{\Omega}_h^{n+1}$ with using the standard Friedrich-Keller triangularization shown on figure 4.2.a. With this method we do not need to redefine the mesh at each time step and thus we do not have to interpolate the value $C_h^n(P_i^{n+1})$ when $P_i^{n+1} \in \Omega_h^n$. Moreover, the number of points on the interface Γ_h^{n+1} is independent of the number of nodes of the mesh. Therefore we are very free to choose the number of points of Γ_h^{n+1} .

However this method does not permit precise enough computations on $\hat{\Gamma}_h^{n+1}$. Indeed solving Problem (4.5) and (4.6) requires the knowledge of the concentration $\hat{C}_h^{n+1}$ and of the discrete curvature $\hat{K}_h^{n+1}$ on $\hat{\Gamma}_h^{n+1}$. $\hat{C}_h^{n+1}$ and $\hat{K}_h^{n+1}$ are determined as follows. If $\hat{P}_i^{n+1}$ denotes a node of $\hat{\Gamma}_h^{n+1}$, we put

$$\begin{aligned}\hat{C}_h(\hat{P}_i^{n+1}) &= C_h^{n+1}(P_j^{n+1}) \\ \hat{K}_h(\hat{P}_i^{n+1}) &= K_h^{n+1}(P_j^{n+1}),\end{aligned}$$

where P_j^{n+1} is the closest node of $\hat{P}_i^{n+1}$ belonging to Γ_h^{n+1} , as shown in figure 4.1. Similarly we compute $\hat{C}_h^{n+1}$ in $\hat{\Omega}_h^{n+1}$ and in order to obtain C_h^{n+1} in Ω_h^{n+1} , we set

$$C_h^{n+1}(P_j^{n+1}) = \hat{C}_h(\hat{P}_i^{n+1}),$$

where $\hat{P}_i^{n+1}$ is the node of $\hat{\Gamma}_h^{n+1}$ which is the closest to the given node P_j^{n+1} .

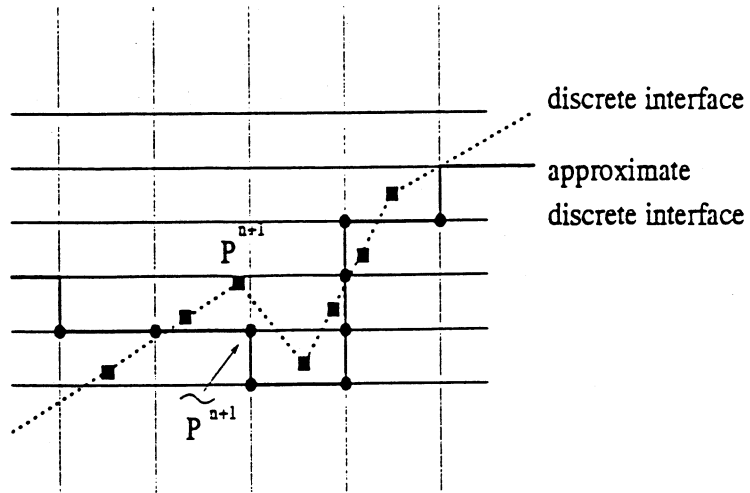


Figure 4.1
Discrete approximation $\hat{\Gamma}_h^n$ of the discrete interface Γ_h^n .

Moving mesh. This method, slightly more complicated to implement than the first one, was introduced to perform more precise computations on the interface. The moving mesh method uses a mesh generator based on a Delaunay-Voronoi method, so that the nodes used to move the interface are degrees of freedom of the problem (see Figure 4.2.b). Another advantage of this method is the possibility to refine the mesh in a neighbourhood of the interface without increasing too much the cost of the numerical computations. Furthermore, taking into account the evolution of the interface, a part of the triangularization of the domain may be fixed, at least for a number of time steps.

The largest draw back of this method is that, at least on part of the domain, the triangularization changes at each time step so that we have to interpolate the value of the concentration there at each time step.

We need a description of the boundary of the domain in order to make use of the mesh generator. In particular, we have to choose before hand at each iteration in time the nodes on the lateral and upper boundaries of the domain. This choice is very important since it influences the global repartition of the nodes of the triangularization. A cubic repartition of the nodes on the lateral boundaries is used with a space step depending on the space step of the interface.

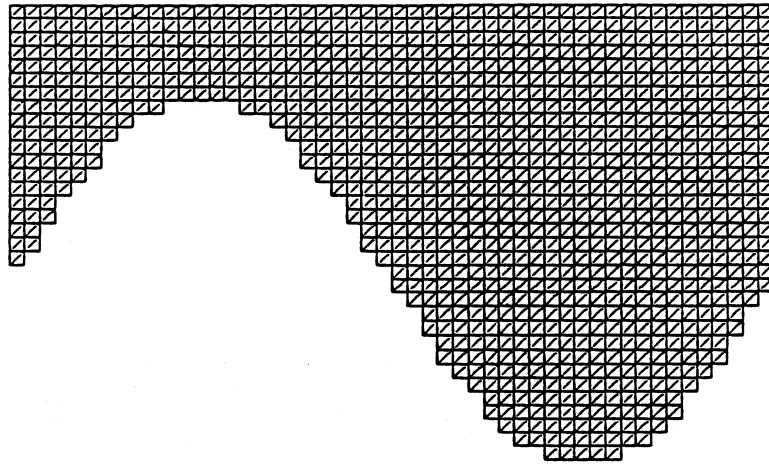


Figure 4.2.a
Example of fixed mesh using a Friedrich-Keller triangularization.

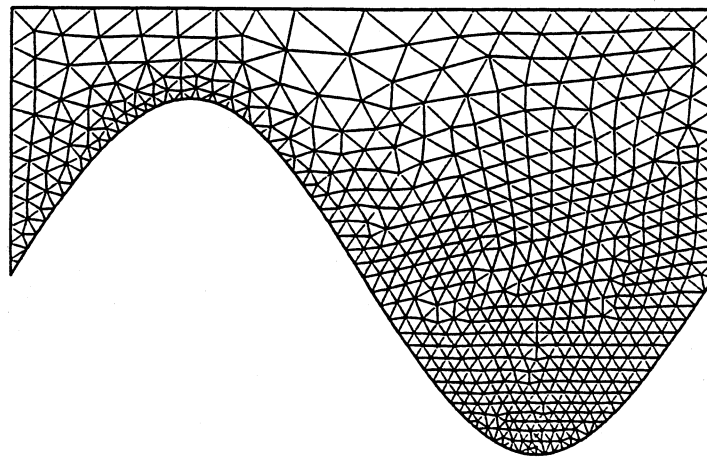


Figure 4.2.b
Example of a triangularization for the moving mesh method.

4.5 Numerical results

In this section we present and discuss a number of numerical results; some have been obtained with a homogeneous Neumann boundary condition on the fixed upper boundary of the space domain while others have been obtained with a Dirichlet boundary condition on the moving upper boundary (cf. Section 2.2 (i) and (ii)).

4.5.1 Domain of variation of the different parameters.

The main parameters to be chosen are the initial concentration C_0 , the initial interface Γ_0 , the value of the saturation concentration α and the value of the surface tension σ .

(i) Typically initial concentrations are given by $C_0 = 0$ and $C_0 = 2\alpha$.

(ii) We take as initial interface the function

$$y = f_0(x) = b \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \quad x \in (0, L) \quad (5.1)$$

with $b = 4 \cdot 10^{-7}$ m and $L = 15 \cdot 10^{-6}$ m.

(iii) α is chosen as multiples of the value $S_0 = 1.42 \cdot 10^3$ mol/m³ which corresponds to the saturation concentration of copper, namely $\alpha = S_0$ and $\alpha = 30S_0$.

(iv) Three values of the surface tension σ have been chosen, $\sigma = 0$, $\sigma = 30$ and $\sigma = 300$. The value of the constant γ is then given by $\gamma = 6 \cdot 10^{-9} \sigma$.

The others parameters i.e. the diffusion coefficient D , the molar volume V of the solid and the kinetic constant κ are fixed and have the following values,

$$D = 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}, \quad V = 7.09 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{mol} \quad \text{and} \quad \kappa = 7.09 \cdot 10^{-9} \text{ m/s}.$$

4.5.2 The case of a homogeneous Neumann boundary condition.

The height M of the fixed upper boundary is given by $M = 6 \cdot 10^{-6}$ m.

Before describing the numerical results, let us make some remarks about the solution.

(i) The concentration satisfies a conservation law, namely the total mass of the solid is preserved. Indeed integrating (2.11) by parts over Ω_t and using the boundary conditions (2.12), (2.15), (2.18), we find that

$$\int_{\Omega_t} (1 - C)_t \, dx dy = \int_{\Gamma_t} (1 - C) V_\nu \, d\sigma,$$

but since

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} (1 - C) \, dx dy = \int_{\Omega_t} (1 - C)_t \, dx dy - \int_{\Gamma_t} (1 - C) V_\nu \, d\sigma,$$

we deduce that

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} (1 - C) \, dx dy = 0.$$

In particular, we obtain

$$\int_{\Omega_t} (1 - C) \, dx dy = \int_{\Omega_0} (1 - C_0) \, dx dy \quad \text{for all } t \geq 0. \quad (5.2)$$

When performing numerical computations, we systematically compute the quantity $\int_{\Omega_t} (1 - C) \, dx dy$. A numerical observation is that this integral varies slightly in the first steps of the computation and becomes constant afterwards; in order to remedy the variation for small times, we take smaller time steps initially and let them increase with time. Table 5.1 below shows how we increase the time steps with the number of iterations in time.

Time step Δt (s)	Number of iterations
1	200
5	200
10	500
50	500
100	500
500	500
1000	500

Table 5.1

The different time steps used.

(ii) Suppose that $\gamma > 0$. A numerical observation in the case that Γ_0 is parametrized in the form $y = f_0(x)$ is that the pair (C, Γ_t) converges to $(\alpha, \text{constant})$ as $t \rightarrow +\infty$. Next we show how one can compute this constant. Suppose that

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \alpha.$$

Thus letting t goes to $+\infty$ in (2.12), we formally deduce that

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V_\nu(t) = 0,$$

but letting t goes to $+\infty$ in (2.17), we then deduce that

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(\gamma K(t)) = 1,$$

and thus for $\gamma \neq 0$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} K(t) = 0,$$

which means that the free boundary converges to a plane ($y = y_\infty$) as t tends to $+\infty$. On the other hand, letting t tend to $+\infty$ in (5.1) gives

$$(1 - \alpha) |\Omega_\infty| = \int_{\Omega_0} (1 - C_0) \, dx dy$$

and thus since $|\Omega_\infty| = (M - y_\infty)L$,

$$y_\infty = M - \frac{1}{(1 - \alpha)L} \int_{\Omega_0} (1 - C_0) \, dx dy \quad (5.3)$$

This also provides a criterium for checking the validity of the numerical programs.

Next we present the results of some numerical computations.

1. The case that $C_0 = 0$, $\alpha = 30S_0$, $\sigma = 0$.

Applying formally arguments based on the maximum principle one can check that

$$0 \leq C \leq \alpha$$

so that $V_\nu = C - \alpha \leq 0$. Therefore this case only involves the dissolution process.

The curves presented in Figure 5.1 show the interface at several times starting from time $t = 0$. Clearly the interface decreases in time and converges to some nontrivial stationary state. In fact we remark that every solution (C, f) with $C = \alpha$ and f arbitrary is a stationary solution.

Figures 5.2-a and 5.2-b represent the concentration C at times $t = 10s$, $t = 1700s$ and $t = 4200s$ computed by the fixed mesh and the moving mesh methods.

2. The case that $C_0 = 0$, $\alpha = 30S_0$, $\sigma = 30$.

Both dissolution and growth occur here and as it has been discussed above the solution converges to a constant as $t \rightarrow +\infty$. Figure 5.3 shows the time evolution of the interface computed with the fixed mesh and the moving mesh methods. Figures 5.4-a and 5.4-b represent the concentration at times $t = 10s$, $t = 1700s$ and $t = 4200s$ computed by the two methods.

The process seems to exhibit two distinct stages : in the first one, only dissolution occurs and the concentration C seems to stabilize to the saturation value α by the end of this stage (see also Figure 5.5 for the time evolution of the mean concentration on the interface); in the second stage both dissolution and growth occur and the interface converges to the constant y_∞ as t increases.

We show on Figure 5.6 the variation in time of the quantity $\int_{\Omega_t} (1 - C) \, dx dy$ for three different sets of time steps : the time steps Δt of Table 5.1, the time steps $\Delta t/2$ and the time steps $2\Delta t$. We remark that the variation of $\int_{\Omega_t} (1 - C) \, dx dy$ decreases as the time steps become smaller. In the case of the moving mesh the relative error is of order 0.1% whereas it is of order 9% for the fixed mesh, with the time steps given in Table 5.1. The relative error for the computation of the asymptotic value y_∞ of the interface

as $t \rightarrow +\infty$ is of order 1% in the case of the moving mesh and 28% in the case of the fixed mesh.

This large difference is due to the accumulation in time of the interpolation errors on the interface when one computes with the fixed mesh.

In Figure 5.7 we present error estimates in the case of the moving mesh method and in that of the fixed mesh method, when dividing and multiplying the time steps by 2, namely the quantities

$$e_{2\Delta t}^f = \frac{\|f_{\Delta t} - f_{2\Delta t}\|_{L^2(0,L)}}{\|f_{\Delta t}\|_{L^2(0,L)}} \quad \text{and} \quad e_{\Delta t/2}^f = \frac{\|f_{\Delta t} - f_{\Delta t/2}\|_{L^2(0,L)}}{\|f_{\Delta t}\|_{L^2(0,L)}},$$

where we suppose that the interface Γ_t is given in the form $y = f(x, t)$. Note that $e_{2\Delta t}^f$ and $e_{\Delta t/2}^f$ are respectively of order 1% and 0.5% in the case of the moving mesh and respectively of the order of 1.4% and 0.7 % in the case of the fixed mesh. Similarly Figure 5.8 shows the errors

$$e_{2\Delta t}^C(t) = \left(\frac{\int_0^L [C_{\Delta t}(x, f_{\Delta t}(x, t), t) - C_{2\Delta t}(x, f_{2\Delta t}(x, t), t)]^2 dx}{\int_0^L [C_{\Delta t}(x, f_{\Delta t}(x, t), t)]^2 dx} \right)^{1/2}$$

and

$$e_{\Delta t/2}^C(t) = \left(\frac{\int_0^L [C_{\Delta t}(x, f_{\Delta t}(x, t), t) - C_{\Delta t/2}(x, f_{\Delta t/2}(x, t), t)]^2 dx}{\int_0^L [C_{\Delta t}(x, f_{\Delta t}(x, t), t)]^2 dx} \right)^{1/2}.$$

Again here the errors are small since $e_{2\Delta t}^C$ and $e_{\Delta t/2}^C$ respectively have a maximum value of order 0.25% and 0.125% in the case of the moving mesh and respectively of order 0.3% and 0.15% in the case of the fixed mesh.

Figures 5.9 and 5.10 respectively show the relative error of the computation of the interface and of the concentration on the interface between the moving mesh method and the fixed mesh method. The error is at most 30% for the computation of the interface and at most 40% for the computation of the concentration on the interface.

Finally in Figure 5.11 we present the relative error of the computation of the interface and of the concentration on the interface between the methods of Ikeda and Kobayashi and those of Roosen and Taylor, obtained in the case of the moving mesh method. The error is at most 0.1% for the computation of the interface and at most 1.75% for the computation of the concentration on the interface.

3. The case that $C_0 = 0$, $\alpha = S_0$, $\sigma = 30$.

Again both dissolution and growth occur here and the solution converges to a constant as $t \rightarrow +\infty$. Here the normal velocity V_n is much smaller than in case 2 so that the time evolution of the phenomenon is much slower. As in case 2 two successive stages exist but since the concentration at saturation is smaller the interface hardly moves during the first stage where only dissolution occurs.

Figure 5.12 shows the time evolution of the interface whereas Figures 5.13-a and 5.13-b represent the concentration at the times $t = 700s$, $t = 1050s$, $t = 1200s$, $t = 1700s$ and $t = 1.0307 \cdot 10^6s$.

4.5.3 The case of a Dirichlet boundary condition.

This case is characterized by the existence of a planar travelling wave solution where the interface Γ_t is given by $f(x, t) = f_0 + vt$, where $f_0 = \text{constant}$ is the initial interface and the concentration is given by $C(x, y, t) = U(y - vt - f_0)$. In fact we can compute the expressions for v and U , namely if we set

$$z = y - vt - f_0,$$

then

$$U(z) = 1 + (v + \alpha - 1)e^{-vz}, \quad (5.4)$$

and v is the unique solution of the algebraic equation

$$(v + \alpha - 1)e^{-vM} = g - 1, \quad (5.5)$$

where g is the value of the concentration on the upper boundary and M is the height of initial upper boundary. It turns out that there is growth, i.e. that $v > 0$, when $\alpha < g \leq 1$ whereas there is dissolution, i.e. $v < 0$, in the case that $0 \leq g < \alpha$. If $g = \alpha$ the travelling solution reduces to a stationary solution of the form $(C_\infty, \Gamma_\infty) = (\alpha, y = \text{constant})$.

From a chemical point of view, one would expect the travelling wave solution U to be linear in z instead of having the exponential form (5.4); however for practical purposes it does not matter too much since the profile of U is very close to linear (see Figure 5.14 below).

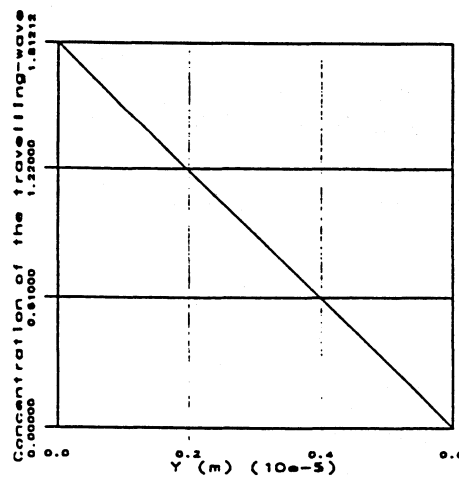


Figure 5.14

Travelling wave (5.4) with $g = 0$ and $\alpha = 30S_0$.

The height M of the initial upper boundary is given by $M = 6 \cdot 10^{-6}$ m. The saturation value α is fixed and equal to $30S_0$. On the upper boundary three values of the Dirichlet data g have been chosen, i.e. $g = 0$ which corresponds to a global dissolution process, $g = 2\alpha$ which corresponds to a global growth process and $g = \alpha$ which in view of (5.5) implies that $v = 0$. We also choose two values of the surface tension, i.e. $\sigma = 0$ and $\sigma = 30$. We observe that as t increases, the solution converges to the travelling wave solution (U, f, v) computed above. When there is no surface tension, i.e. $\sigma = 0$, one observes the apparition in finite time of a singular point on the interface.

Next we present the results of some numerical computations.

1. The case that $C_0 = g = 0$, $\alpha = 30S_0$, $\sigma = 0$.

We take as initial interface the constant $y = 0$. As t becomes large we observe the convergence of the solution (C, f) to the travelling solution computed above.

Figure (5.15-a) shows the time evolution of the relative error of the computed velocity $v_c = v_c(t)$ of the plane interface with respect to the velocity v of the travelling wave, namely the quantity $\frac{|v - v_c(t)|}{|v|}$. Note that v_c stabilizes for $t \geq 10^4$. Then $\frac{|v - v_c(t)|}{|v|} \simeq 0.1\%$ in the case that the moving mesh method is being use. In figure (5.15-b) we present the time evolution of the relative error of the computed concentration U_c with respect to the travelling wave U given by (5.4), namely the quantity $\frac{\|U - U_c\|}{\|U\|}$ where $\|\cdot\|$ denotes discrete L^2 -norm on $\Omega_t \cap \{z > 0\}$. This error is very small since it is of order $10^{-6}\%$, for $t \geq 10^4$.

2. The case that $C_0 = g = 0$, $\alpha = 30S_0$, $\sigma = 30$.

We take as initial interface the function f_0 given by (5.1). Global dissolution occurs and the solution converges to the travelling wave solution as t increases. Figure 5.16 shows the time evolution of the interface and the convergence to a plane, for the fixed mesh method and the moving mesh method. We show on Figure 5.17 the time evolution of the relative error of the travelling velocity v_c of the mean plane of the interface with respect to the velocity v of the travelling wave, namely the quantity $\frac{|v - v_c(t)|}{|v|}$. Figures 5.18-a and 5.18-b represent the level sets of the concentration at times $t = 50s$, $t = 3250s$ and $t = 41000s$, computed by the fixed mesh method and the moving mesh method. Clearly the concentration becomes independent of the x -coordinate. In Figure 5.19 we show the time evolution of the mean concentration on the interface and in Figure 5.20 we represent the time evolution of the derivative of the concentration on the interface with respect to the x direction, in L^2 -norm, namely the quantity $\|\frac{\partial C}{\partial x}\|_{\Omega_t}(t)$. Clearly it converges to 0 as t increases. In fact C converges to the travelling wave U given by (5.4) as it is shown on Figure 5.21 which represents the time evolution of $\frac{\|U - U_c\|}{\|U\|}$, where U_c is the computed concentration in the domain and $\|\cdot\|$ denotes discrete L^2 -norm on $\Omega_t \cap \{z > 0\}$.

3. The case that $C_0 = g = \alpha$, $\alpha = 30S_0$, $\sigma = 30$.

The initial interface is given by (5.1). Since $g = \alpha$ we deduce from (5.5) that the asymptotic value of the velocity should be equal to zero. Figure 5.22 shows the time evolution of the interface. We observe here that the mean planes of the interfaces do not move, even for small times.

4. The case that $C_0 = g = 2\alpha$, $\alpha = 30S_0$, $\sigma = 30$.

The initial interface is also given by (5.1). Global growth occurs here and the solution converges to the travelling wave solution as t increases. Figure 5.23 shows the time evolution of the interface and the convergence to a plane. In Figure 5.24 we present the time evolution of the mean concentration on the interface.

5. The case that $C_0 = g = 0$, $\alpha = 30S_0$, $\sigma = 0$.

We take the initial interface given by (5.1). Figure 5.25 shows the time evolution of the interface and the apparition in finite time of a singularity of the interface. This singularity which takes the form of a discontinuity of the space derivative of the interface, occurs exactly at the local maximum of the initial interface. The appearance of singularities can be explained by the fact that the equation $V_\nu = C - \alpha$ can be written as a Hamilton-Jacobi equation with a suitable parametrization of the interface.

4.5.4 Conclusion

Opposite to what we expected when starting this study, the dissolution-growth problem (P) in space dimension two does not seem to exhibit morphological instabilities. Possibly instabilities may occur in the limiting case when the equation $\varepsilon V_\nu = C - \alpha e^{\gamma K}$ takes the stationary form $C = \alpha e^{\gamma K}$ which has not been studied here. In both cases that the homogeneous Neumann condition and a constant Dirichlet condition are imposed on the upper boundary of the domain, the numerical interface converges to a constant profile as t increases whenever the surface tension σ is positive. In the case of the Neumann boundary condition the concentration C converges to α and the interface converges to a constant as $t \rightarrow +\infty$ whereas in the case of a constant Dirichlet boundary condition the concentration converges to the travelling profile U and the interface converges to a constant which displaces itself at the constant velocity v ; if the boundary value is larger than the saturation value α then $v > 0$ and only growth occurs for t large enough while if the boundary value is smaller than the saturation value α then $v < 0$ so that only dissolution occurs for large times. A final remark is that in the case that $\sigma = 0$ singular points may appear on the interface and propagate as t increases.

Figures

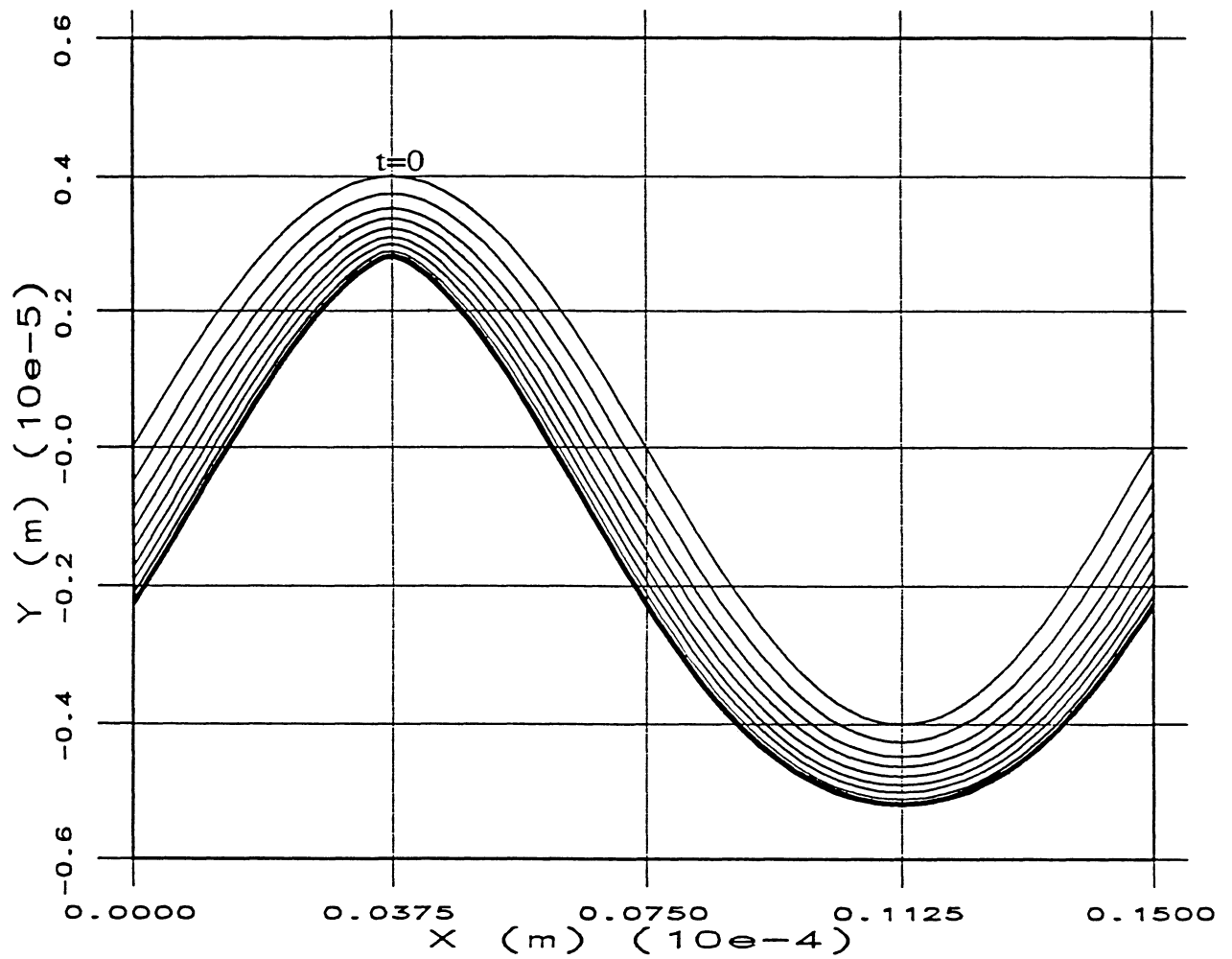
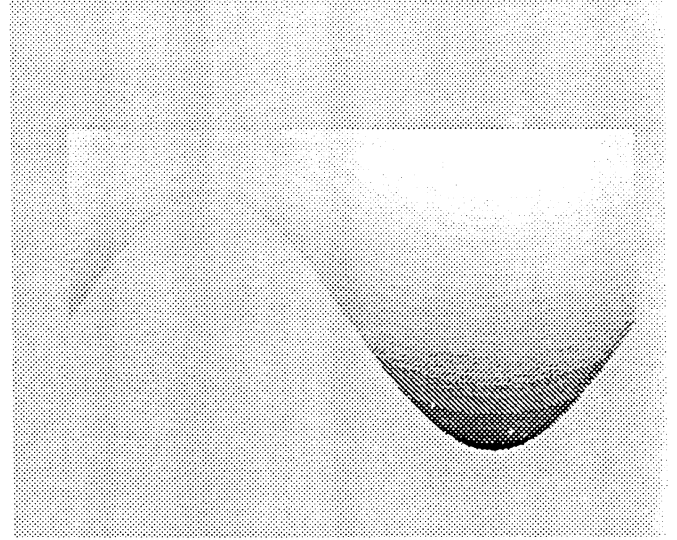
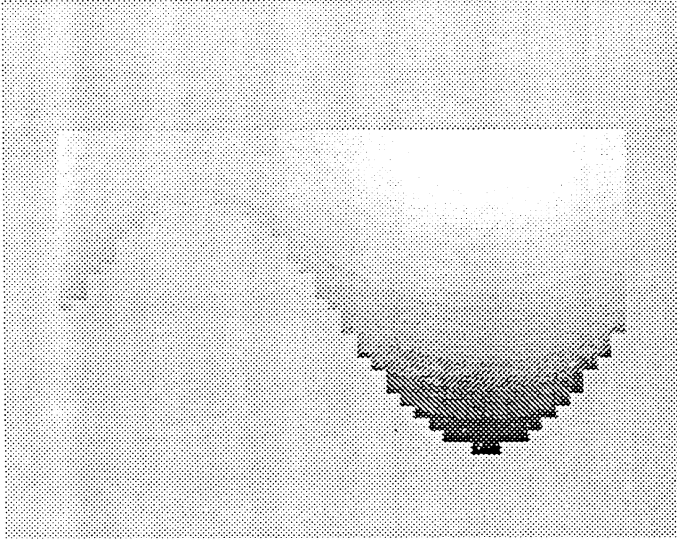


Figure 5.1
 Convergence to a stationary solution with a homogeneous Neumann boundary
 condition on the upper boundary, with $C_0 = 0$, $\alpha = 30S_0$, $\sigma = 0$.

Fixed mesh method

Moving mesh method

$t = 10s$



$t = 1700s$

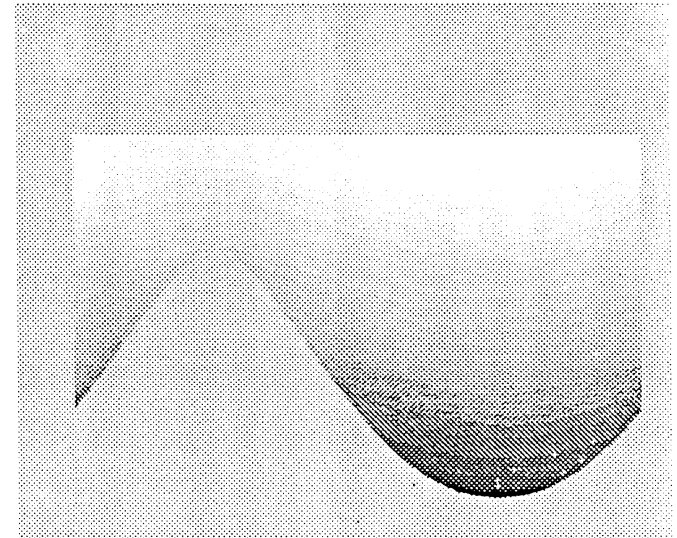
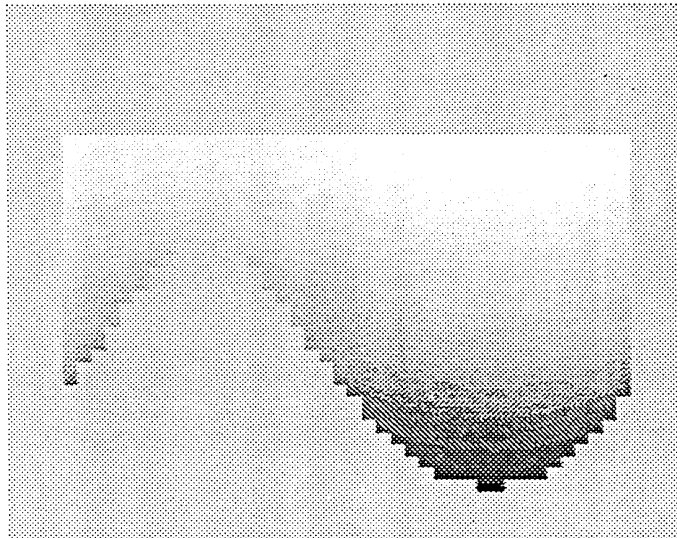


Figure 5.2-a

The concentration in the whole domain at different times for a homogeneous Neumann boundary condition, with $C_0 = 0$, $\alpha = 30S_0$, $\sigma = 0$.

The dark shaded regions are regions with maximum concentration.

Fixed mesh method

Moving mesh method

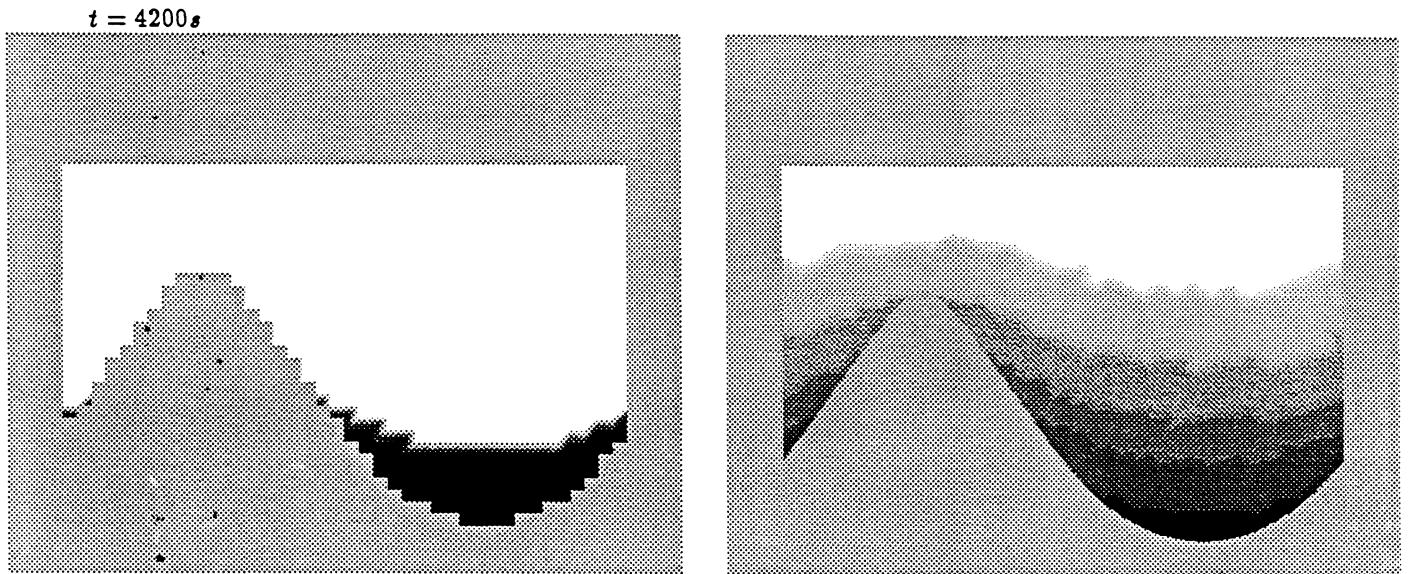


Figure 5.2-b

The concentration in the whole domain at different times for a homogeneous Neumann boundary condition, with $C_0 = 0$, $\alpha = 30S_0$, $\sigma = 0$.

The dark shaded regions are regions with maximum concentration.

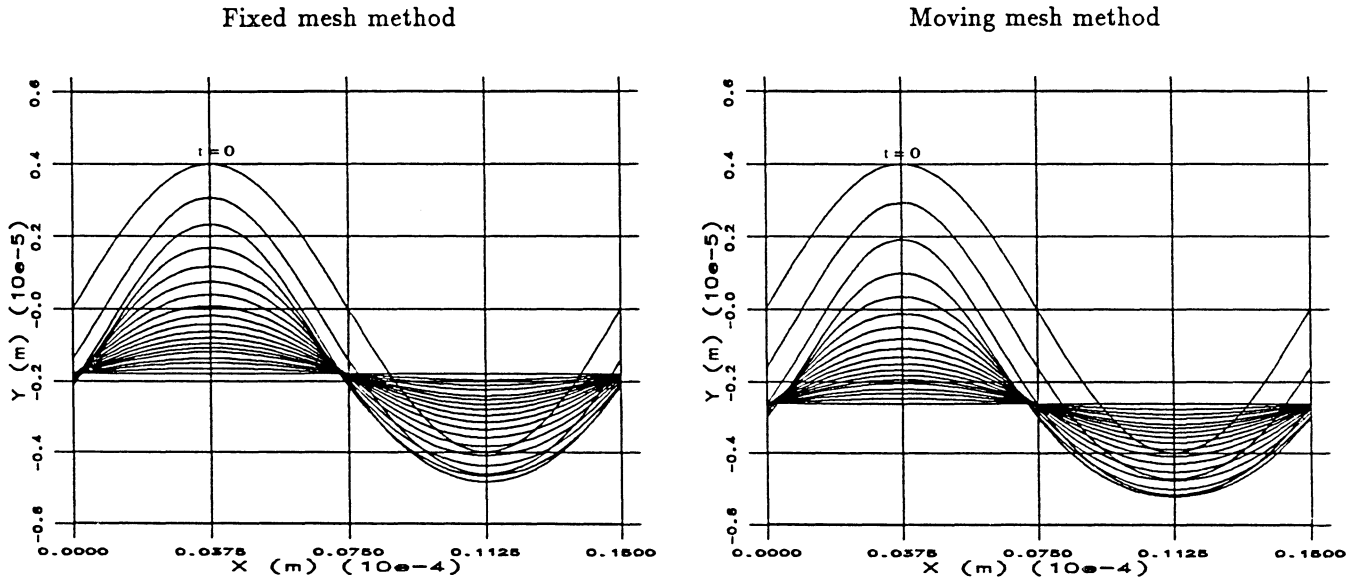
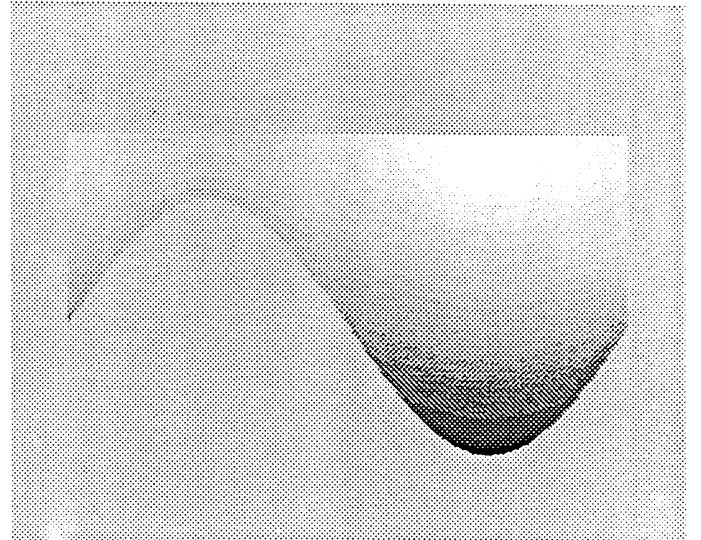
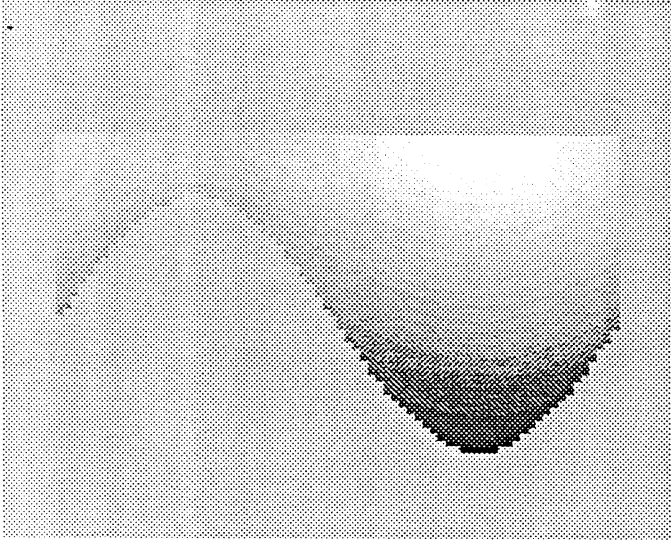


Figure 5.3
Time evolution of the interface for a homogeneous Neumann boundary condition on the upper boundary, with $\sigma = 30$, $\alpha = 30S_0$. The figure on the left-hand-side is obtained with the fixed mesh method and the one on the right-hand-side with the moving mesh method.

Fixed mesh method

Moving mesh method

$t = 10s$



$t = 1700s$

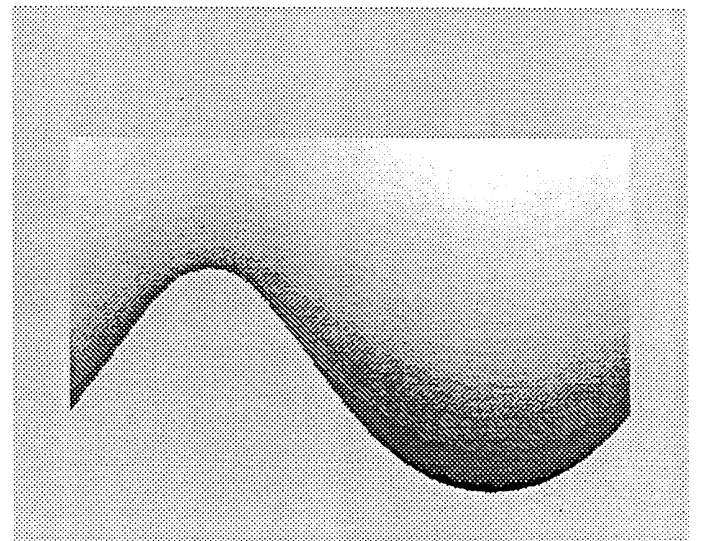
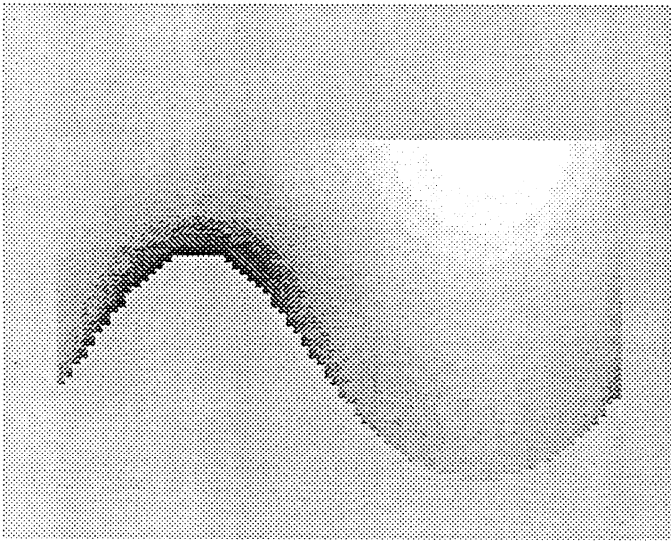


Figure 5.4-a

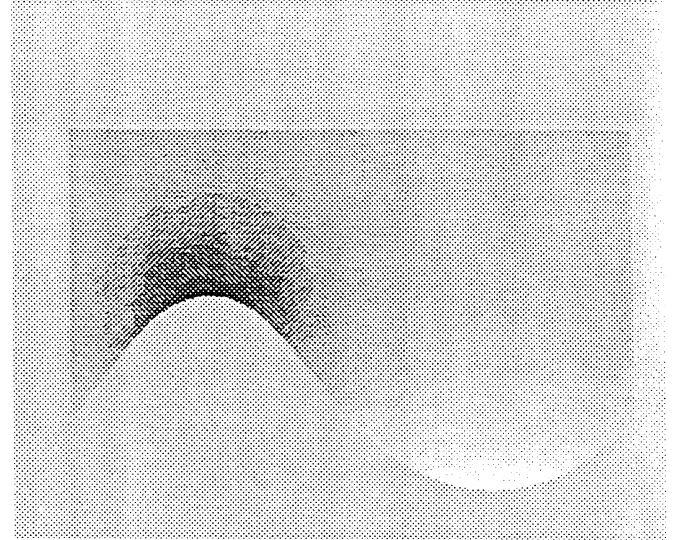
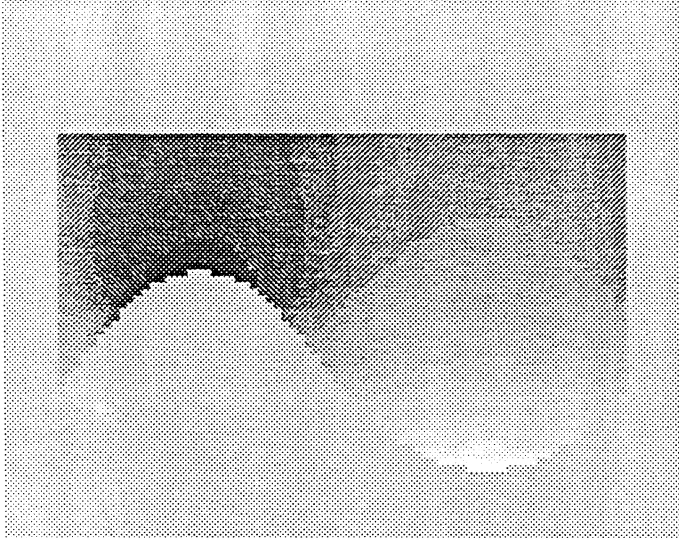
The concentration in the whole domain at different times for the homogeneous Neumann boundary condition, with $C_0 = 0$, $\alpha = 30S_0$, $\sigma = 30$.

The dark shaded regions are regions with maximum concentration.

Fixed mesh method

Moving mesh method

$t = 4200s$



$t = 8700s$

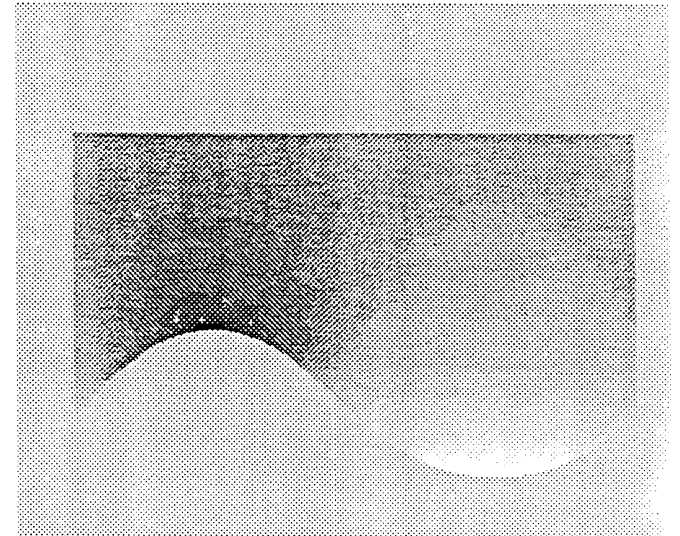
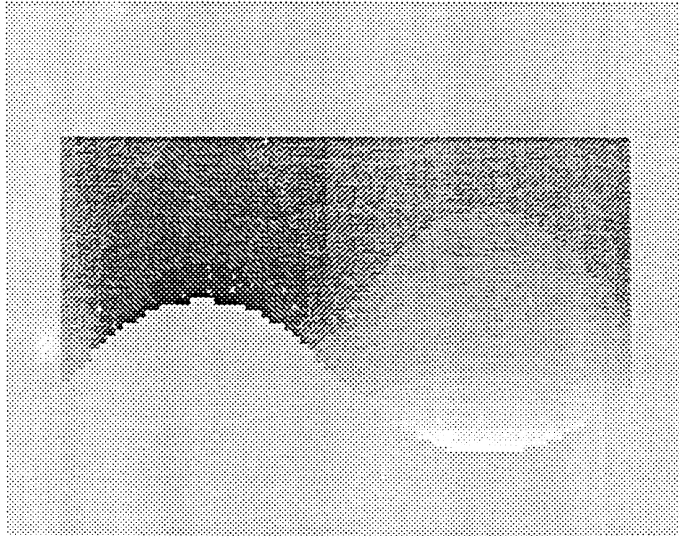


Figure 5.4-b

The concentration in the whole domain at different times for the homogeneous Neumann boundary condition, with $C_0 = 0$, $\alpha = 30S_0$, $\sigma = 30$.

The dark shaded regions are regions with maximum concentration.

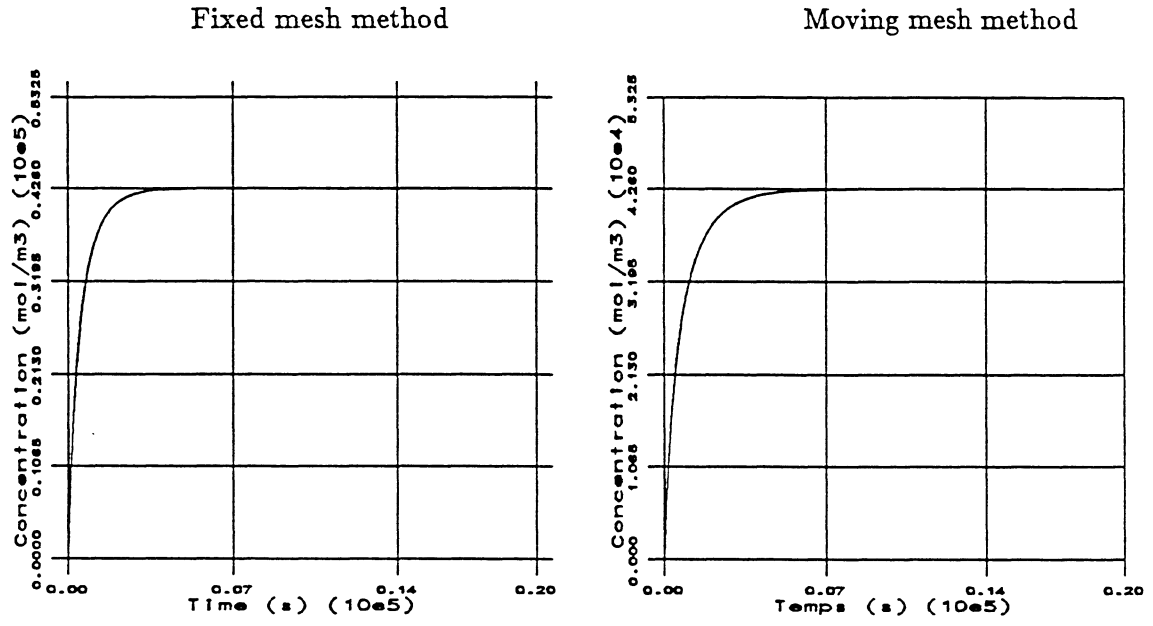


Figure 5.5

Time evolution of the mean concentration on the interface with a homogeneous Neumann boundary condition on the upper boundary, with $\sigma = 30$ and $\alpha = 30S_0$.

The figure on the left-hand-side is obtained with the fixed mesh and the one on the right-hand-side with the moving mesh method.

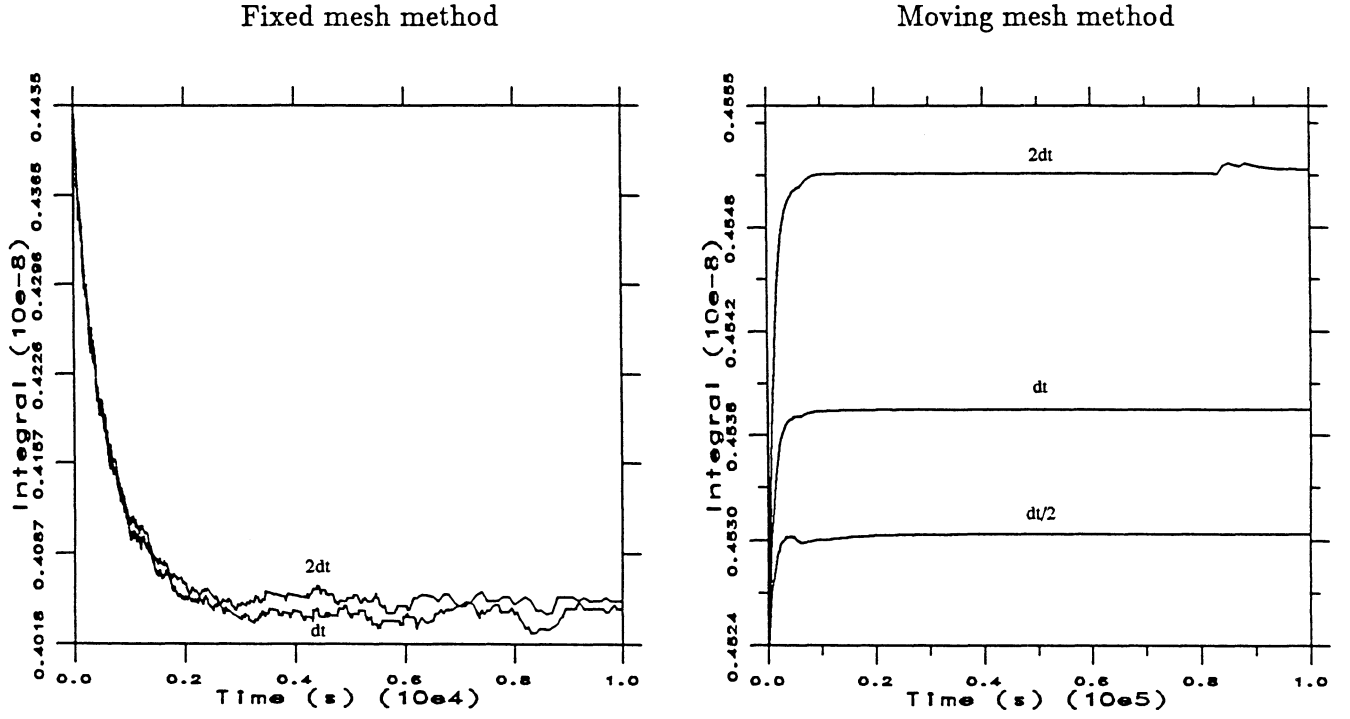


Figure 5.6

Influence of the time step on the conservation of $\int_{\Omega_i} (1 - C) \, dx dy$ in the case of a homogeneous Neumann boundary condition, with $\alpha = 30S_0$ and $\sigma = 30$. The figure on the left-hand-side is obtained with the fixed mesh method and the one on the right-hand-side with the moving mesh method.

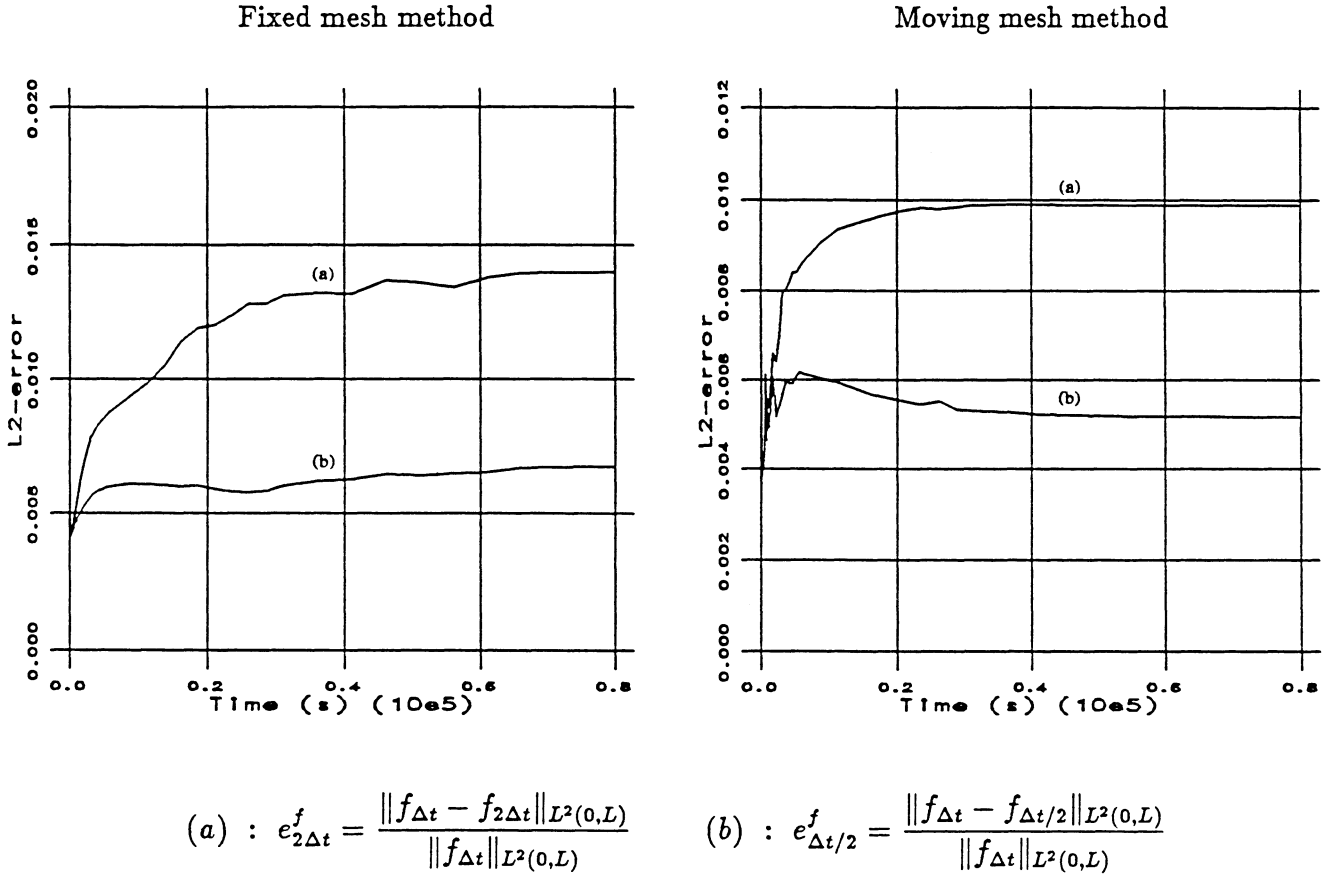


Figure 5.7
 Error in L^2 -norm for the computation of the interfaces with a homogeneous Neumann boundary condition with $\alpha = 30S_0$ and $\sigma = 30$, when dividing and multiplying the time steps by 2.
 The figure on the left-hand-side is obtained with the fixed mesh and the one on the right-hand-side with the moving mesh method.

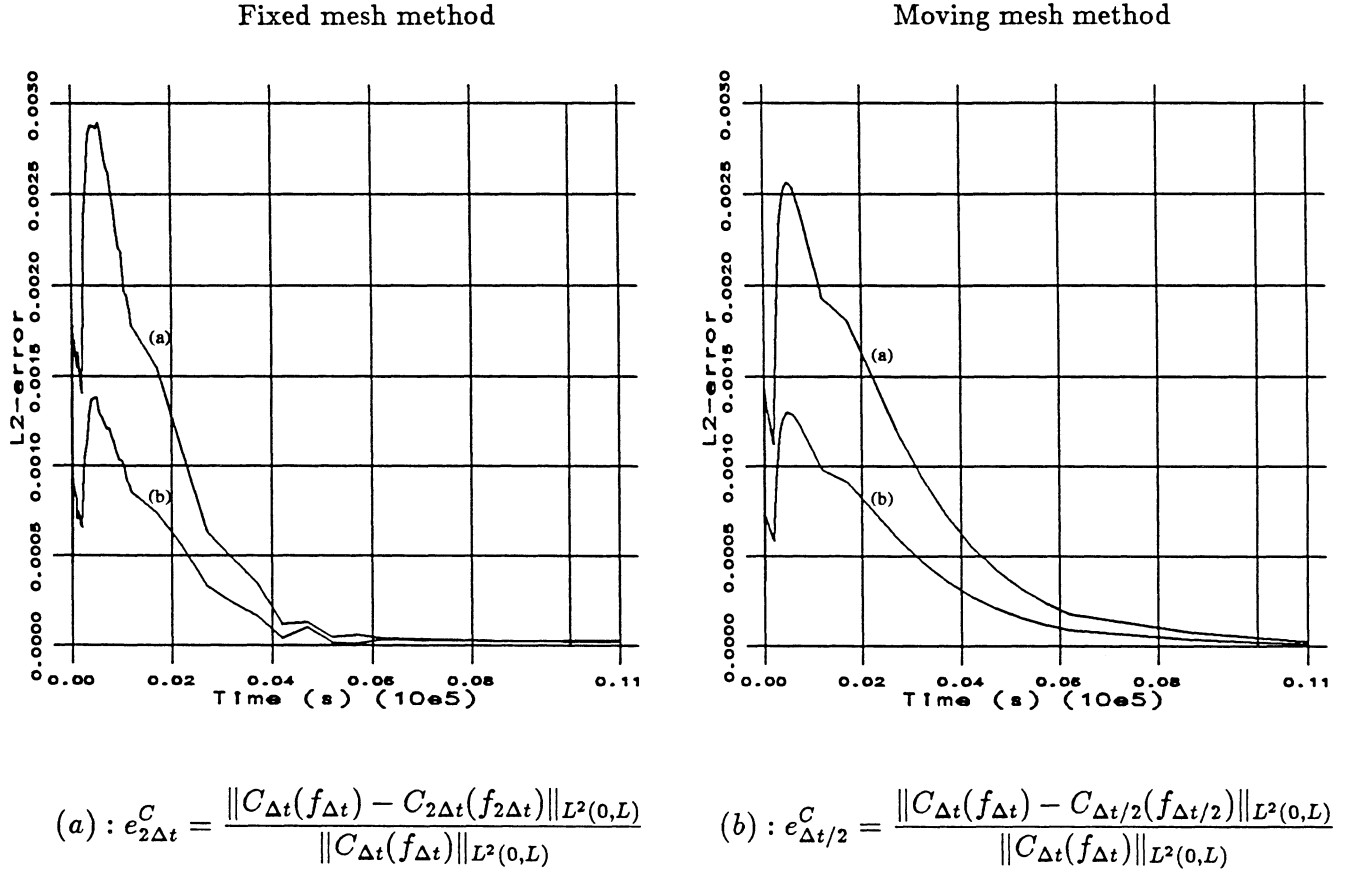


Figure 5.8
 Error in L^2 -norm for the computation of the concentration on the interface with a homogeneous Neumann boundary condition with $\alpha = 30S_0$ and $\sigma = 30$, when dividing and multiplying the time steps by 2. The figure on the left-hand-side is obtained with the fixed mesh and the one on the right-hand-side with the moving mesh method.

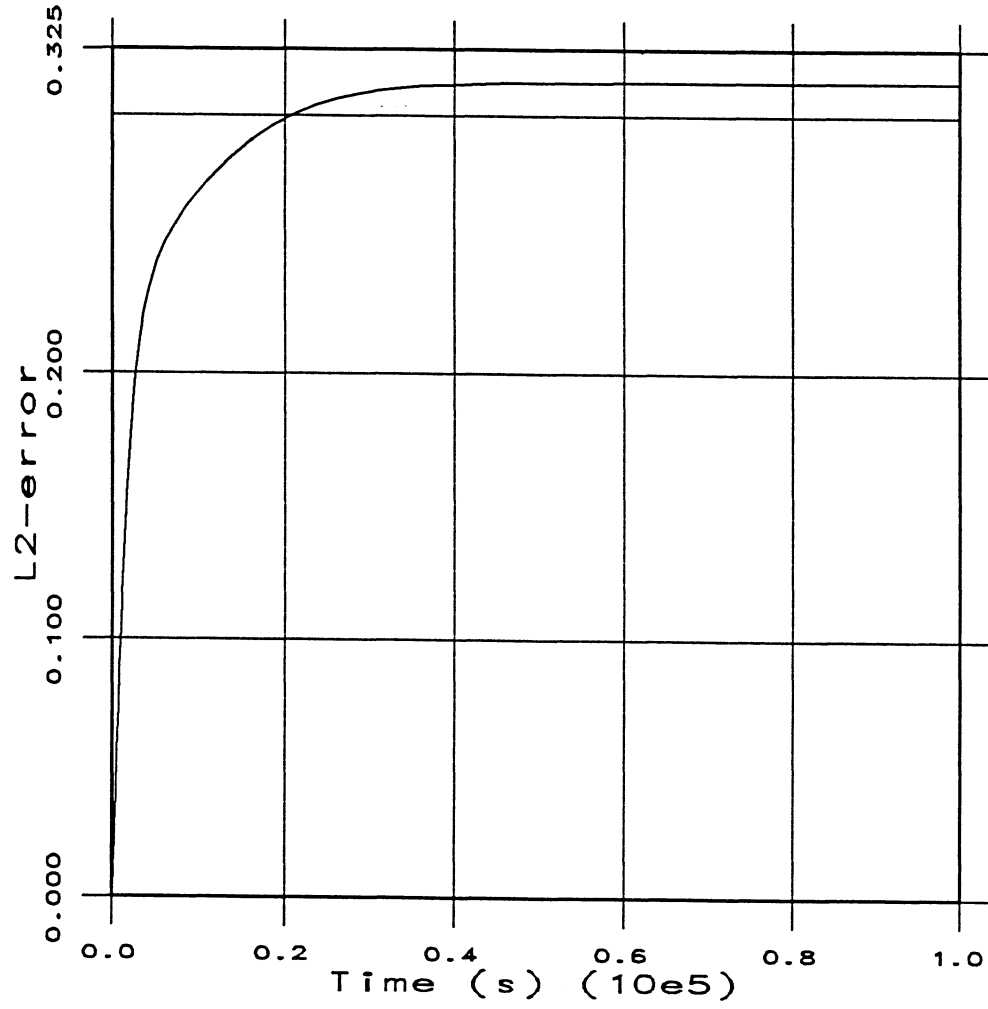


Figure 5.9

Time evolution of $\frac{\|f - \tilde{f}\|_{L^2(0,L)}}{\|f\|_{L^2(0,L)}}$ where f is computed by the moving mesh method and $\tilde{f}$ by the fixed mesh method, with a homogeneous Neumann boundary condition with $\alpha = 30S_0$ and $\sigma = 30$.

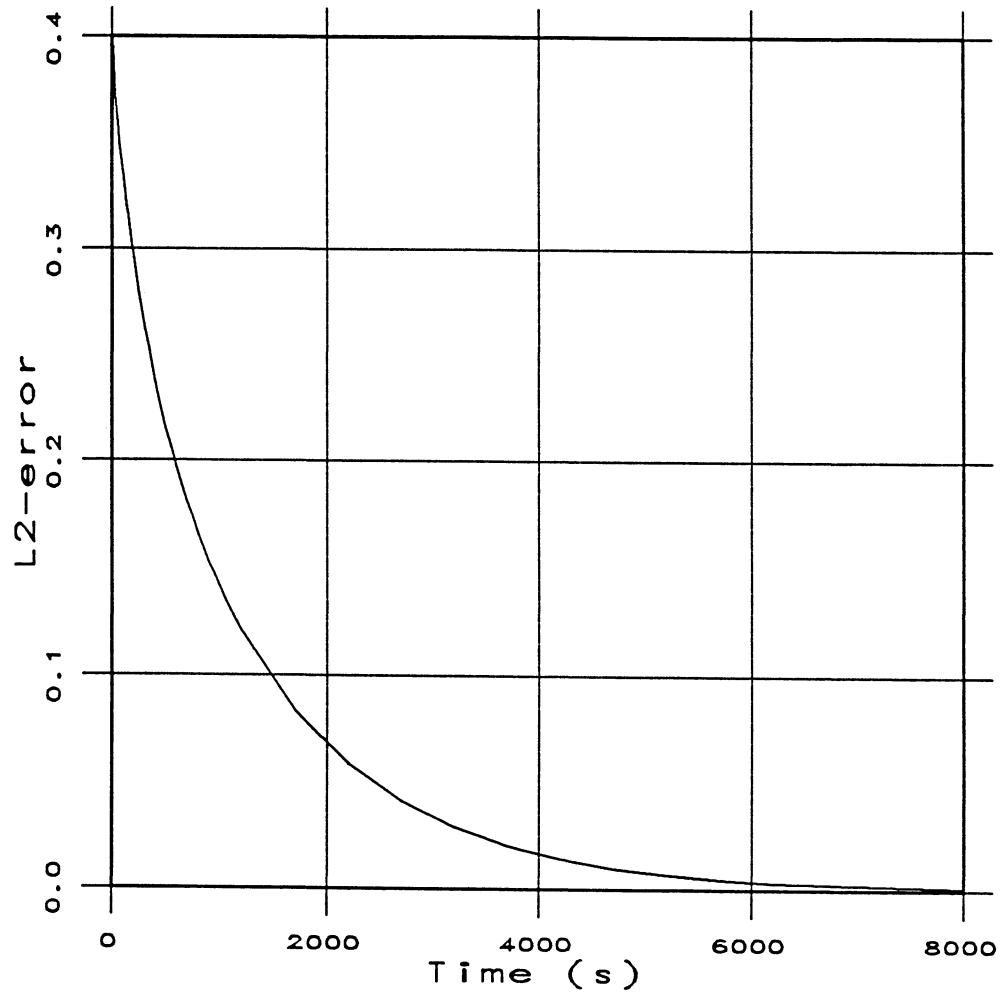
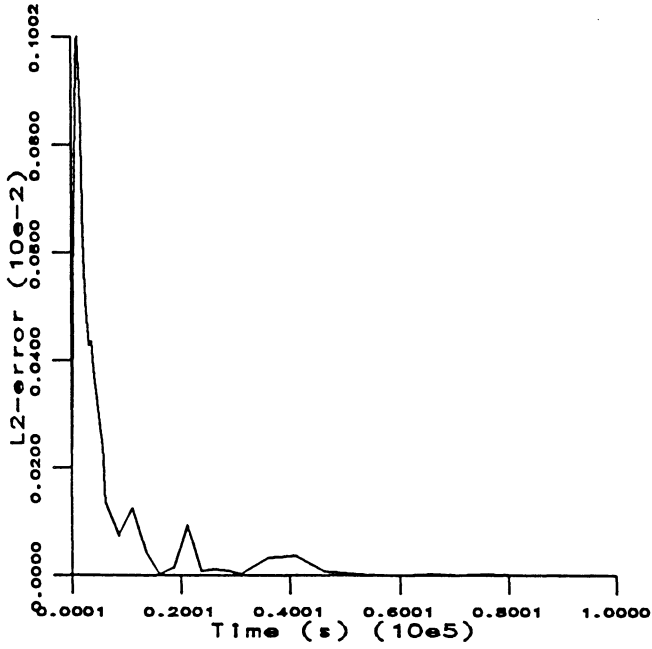


Figure 5.10

Time evolution of $\frac{\|C(f) - \tilde{C}(\tilde{f})\|_{L^2(0,L)}}{\|\tilde{C}(\tilde{f})\|_{L^2(0,L)}}$ where $C(f)$ is computed by the moving mesh method and $\tilde{C}(\tilde{f})$ by the fixed mesh method, with a homogeneous Neumann boundary condition with $\alpha = 30S_0$ and $\sigma = 30$.

Error in L^2 -norm between the method of Ikeda and Kobayashi
and the method of Roosen and Taylor

Error in L^2 -norm for the concentration on the interface



Error in L^2 -norm for the interfaces

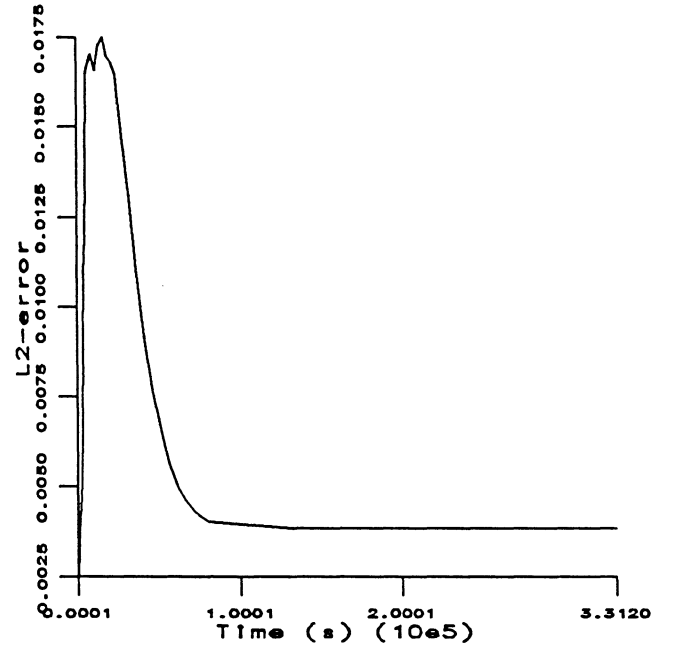


Figure 5.11

The case of a homogeneous Neumann boundary condition with $\sigma = 30$, $\alpha = 30S_0$. Error estimates in L^2 -norm between the computations performed with the method of Ikeda and Kobayashi and those of Roosen and Taylor, for the concentration on the interface (figure on the left-hand-side) and for the interfaces (figure on the right-hand-side) respectively.

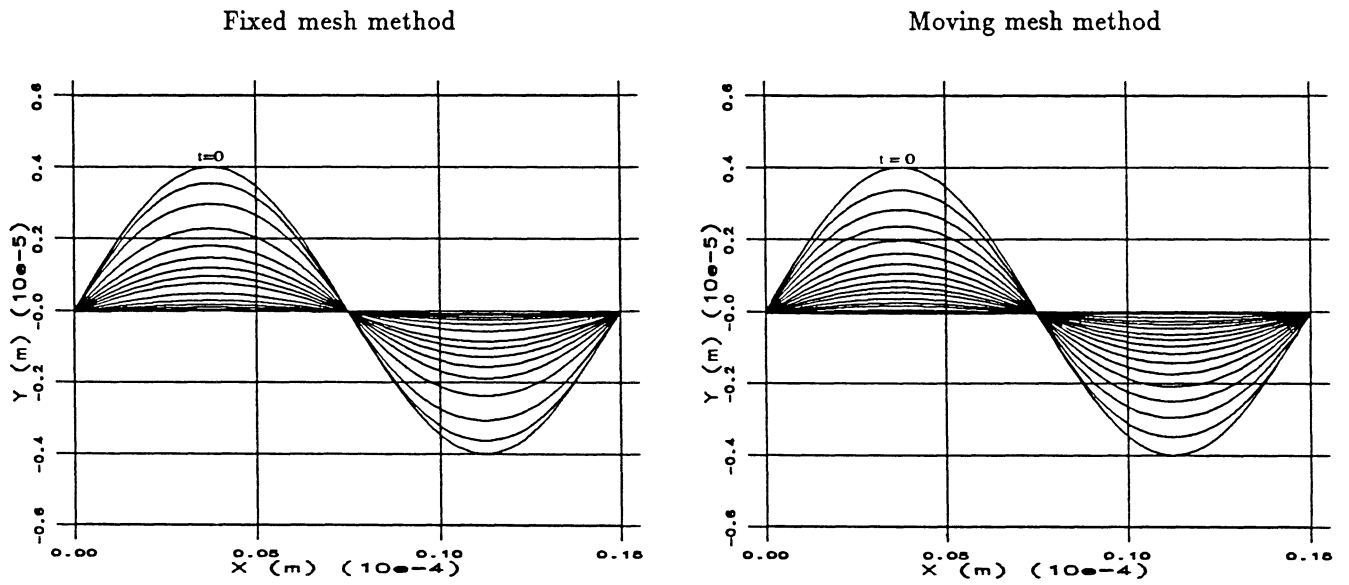


Figure 5.12

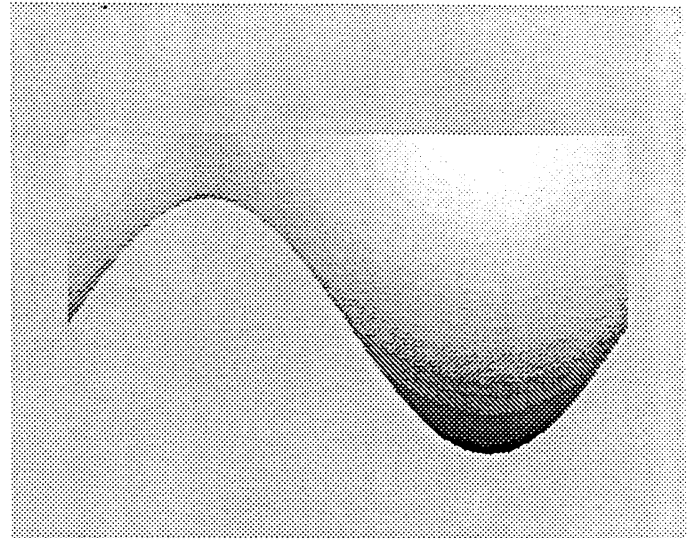
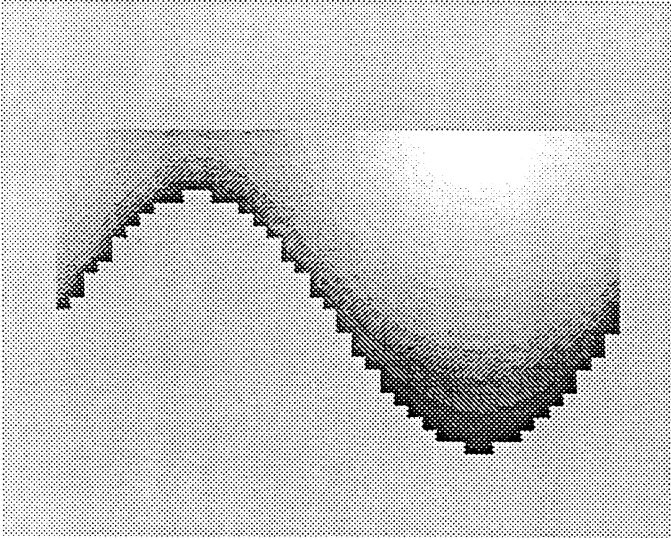
Time evolution of the interface for a homogeneous Neumann boundary condition on the upper boundary, with $\sigma = 30$, $\alpha = S_0$.

The figure on the left-hand-side is obtained with the fixed mesh method and the one on the right-hand-side with the moving mesh method.

Fixed mesh method

Moving mesh method

$t = 700s$



$t = 1050s$

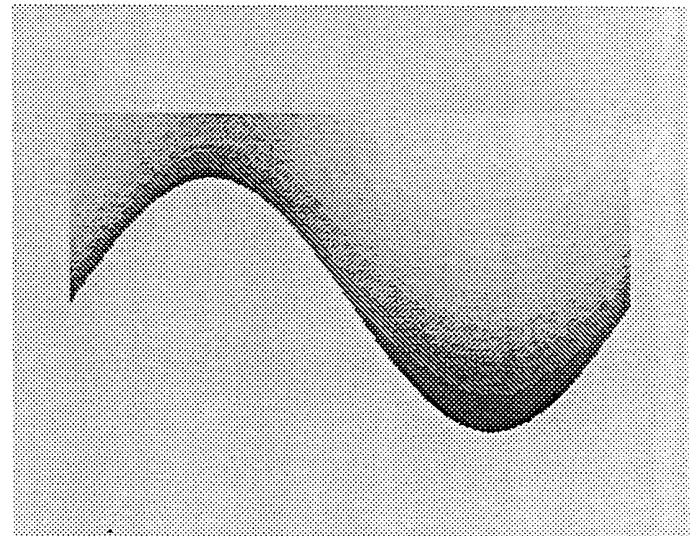
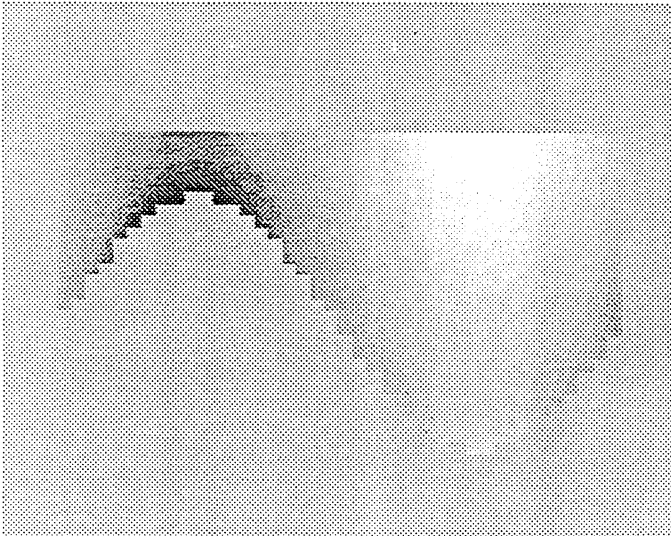


Figure 5.13-a

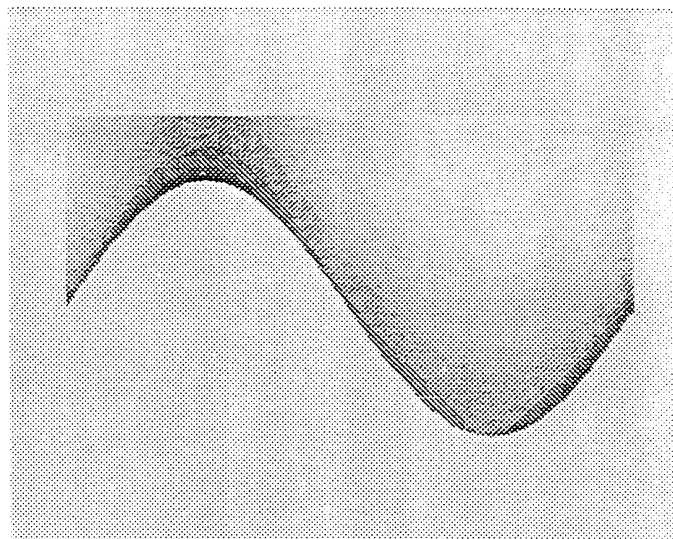
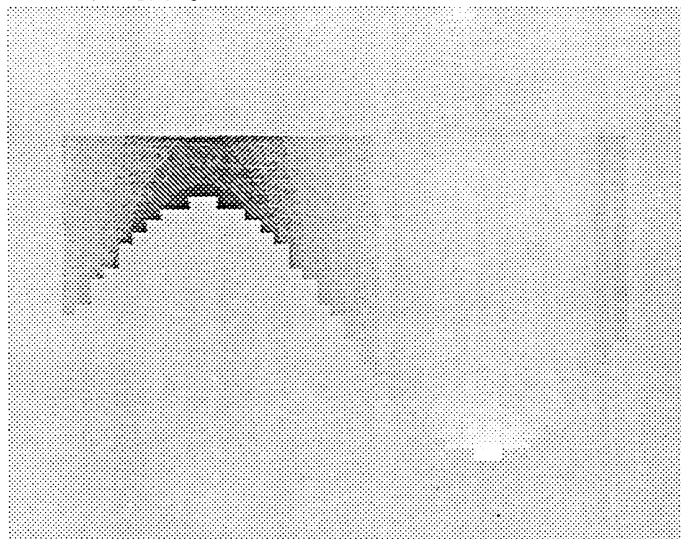
The concentration in the whole domain at different times for the homogeneous Neumann boundary condition, with $C_0 = 0$, $\alpha = S_0$, $\sigma = 30$.

The dark shaded regions are regions with maximum concentration.

Fixed mesh method

Moving mesh method

$t = 1200s$



$t = 1700s$

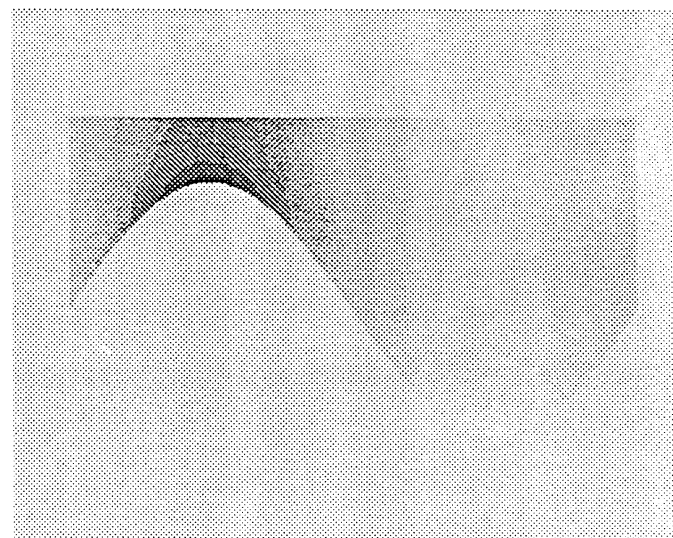
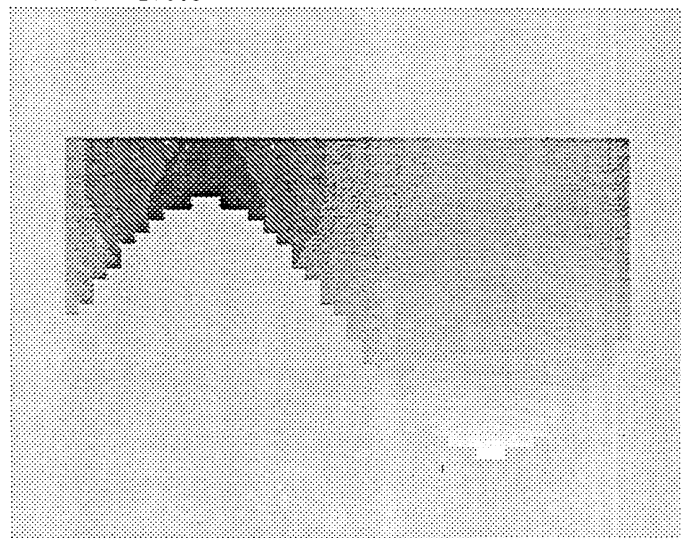


Figure 5.13-b

The concentration in the whole domain at different times for the homogeneous Neumann boundary condition, with $C_0 = 0$, $\alpha = S_0$, $\sigma = 30$.

The dark shaded regions are regions with maximum concentration.

Fixed mesh method

Moving mesh method

$t = 1.0307 \cdot 10^6 s$

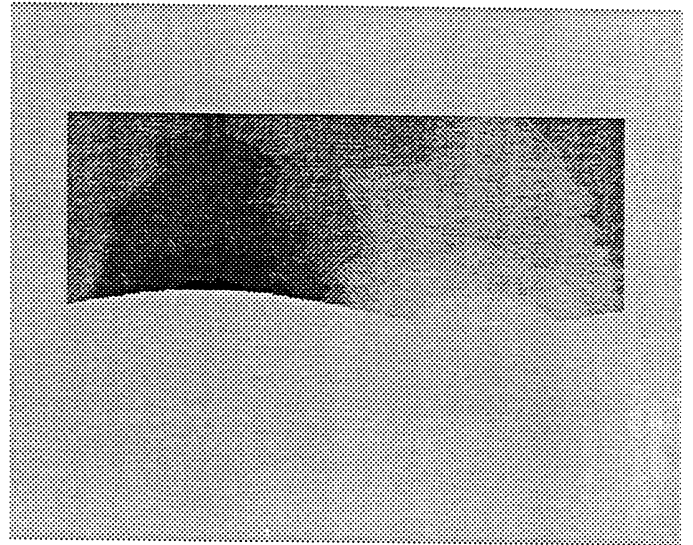
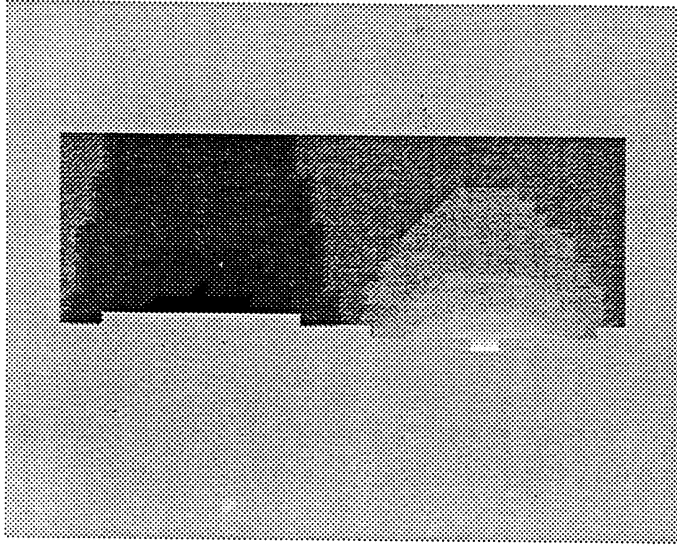


Figure 5.13-c

The concentration in the whole domain at different times for the homogeneous Neumann boundary condition, with $C_0 = 0$, $\alpha = S_0$, $\sigma = 30$.

The dark shaded regions are regions with maximum concentration.

The case where the initial interface is the constant $y = 0$ for a Dirichlet boundary condition $g = 0$ on the upper boundary, with $\alpha = 30S_0$.

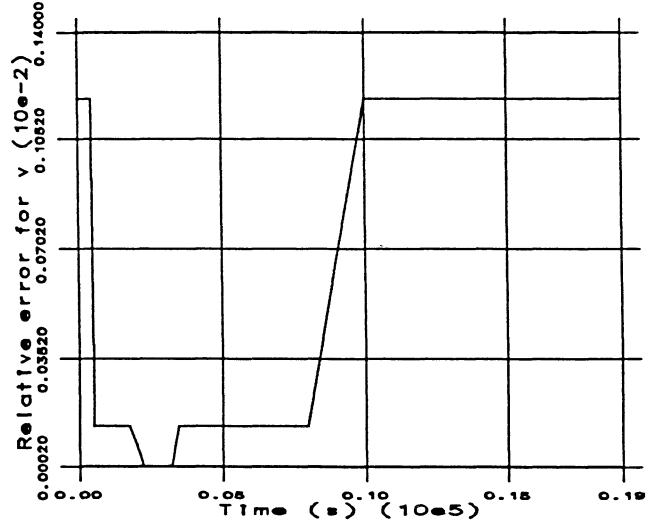


Figure 5.15-a

Time evolution of $\frac{|v - v_c(t)|}{|v|}$ where v is the exact travelling velocity and v_c is the computed one.
The figure is obtained with the moving mesh method.

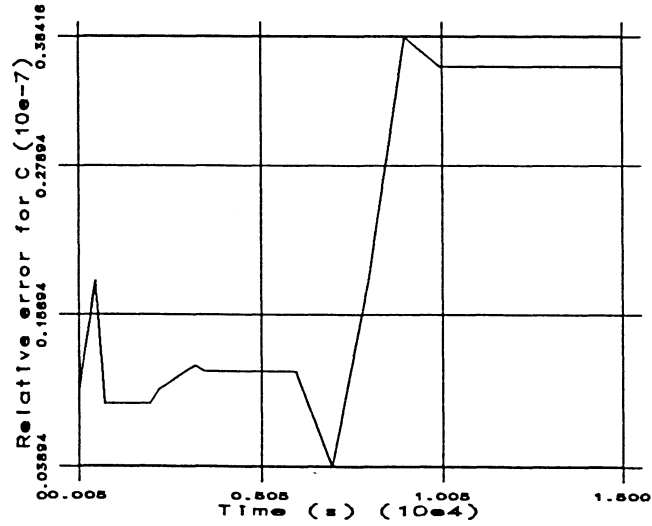


Figure 5.15-b

Time evolution of $\frac{\|U - U_c(t)\|}{\|U\|}$ where U is the exact travelling wave and U_c is the computed one.
The figure is obtained with the moving mesh method.

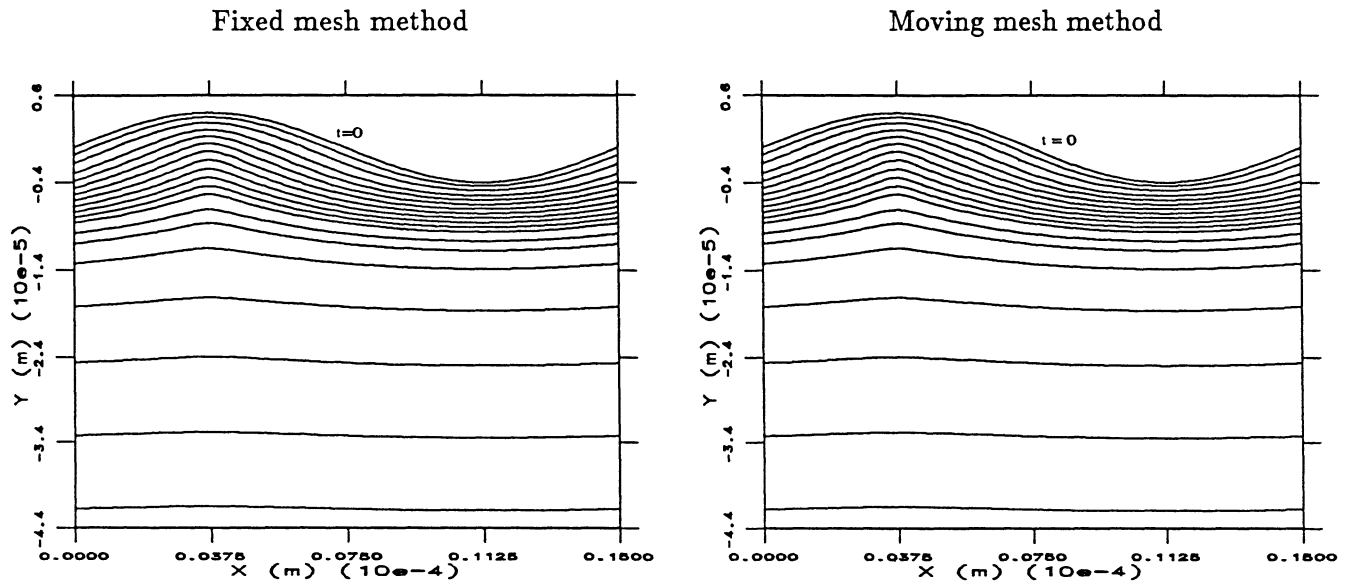


Figure 5.16
Time evolution of the interface for a Dirichlet boundary condition
 $g = 0$ on the upper boundary and with $\sigma = 30$, $\alpha = 30S_0$.
The figure on the left-hand-side is obtained with the fixed mesh method
and the one on the right-hand-side with the moving mesh method.

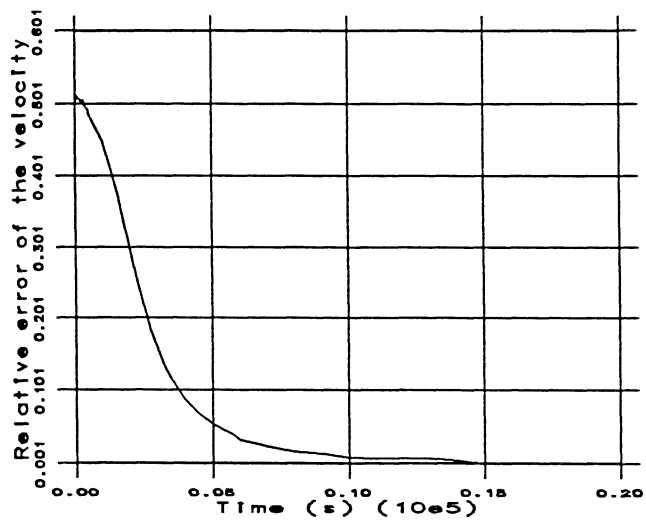


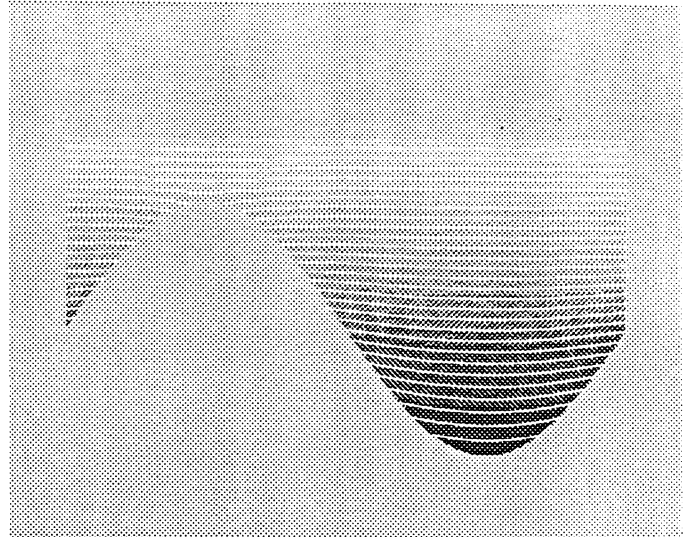
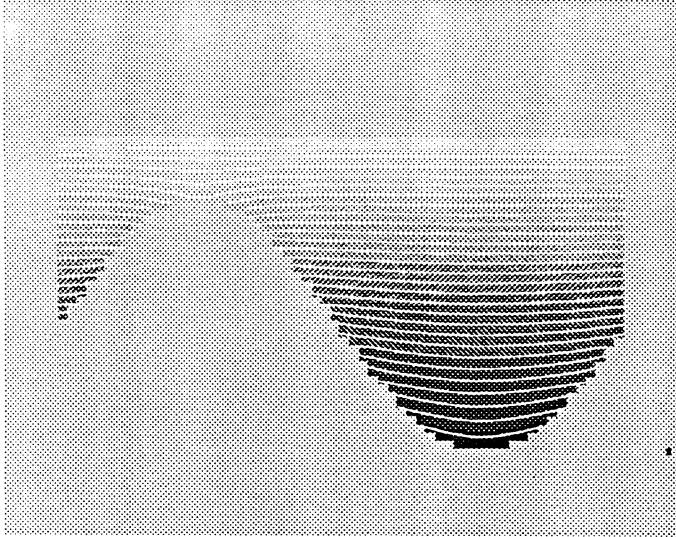
Figure 5.17

Time evolution of $\frac{|v - v_c(t)|}{|v|}$ for a Dirichlet boundary condition $g = 0$ on the upper boundary and with $\sigma = 30$, $\alpha = 30S_0$. The figure is obtained with the moving mesh method.

Fixed mesh method

Moving mesh method

$t = 50s$



$t = 3250s$

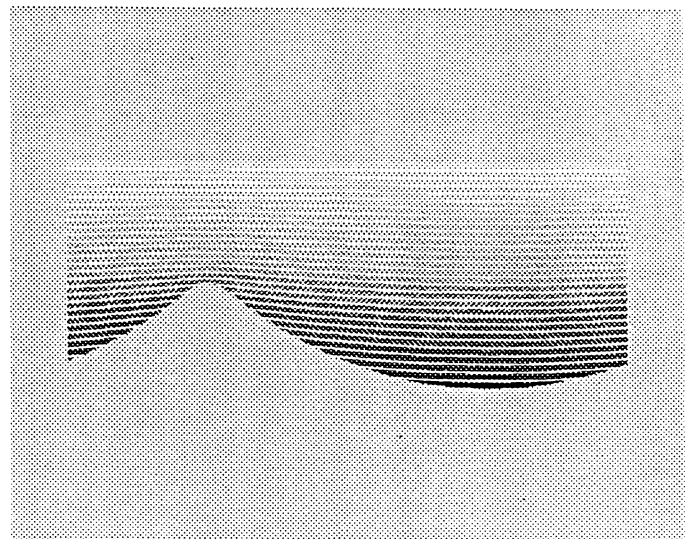
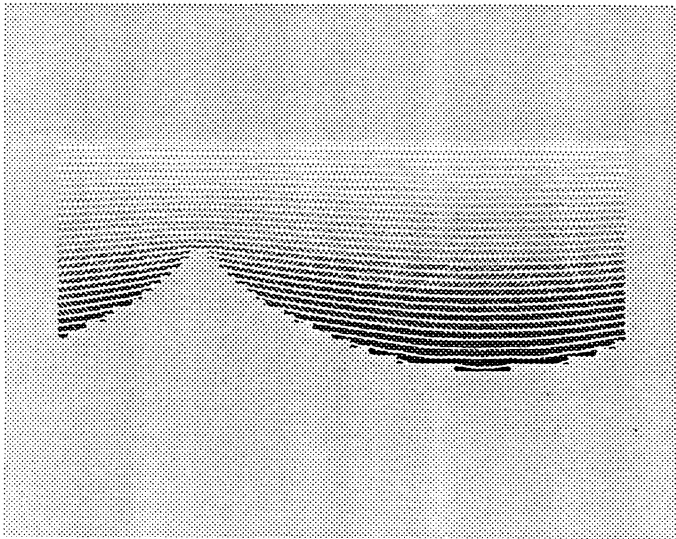


Figure 5.18-a

The concentration in the whole domain at different times for the Dirichlet boundary condition $g = 0$, with $\alpha = 30S_0$, $\sigma = 30$. The dark shaded regions are regions with maximum concentration.

The lines represent the level sets of the concentration.

Fixed mesh method

Moving mesh method

$t = 4.110^4 s$

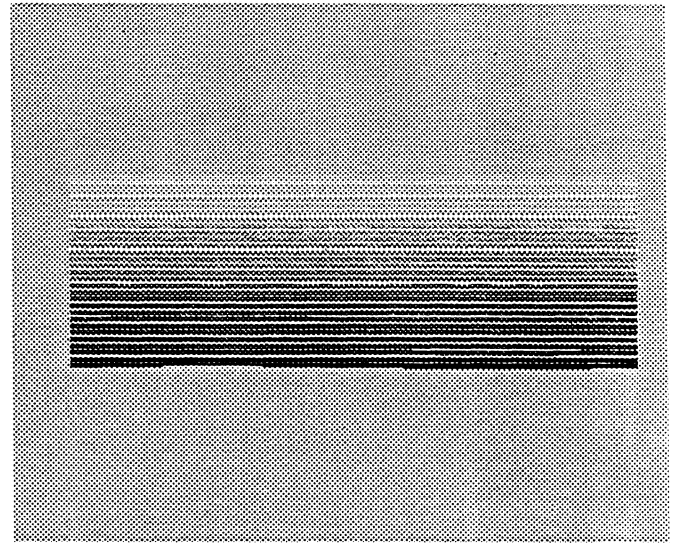
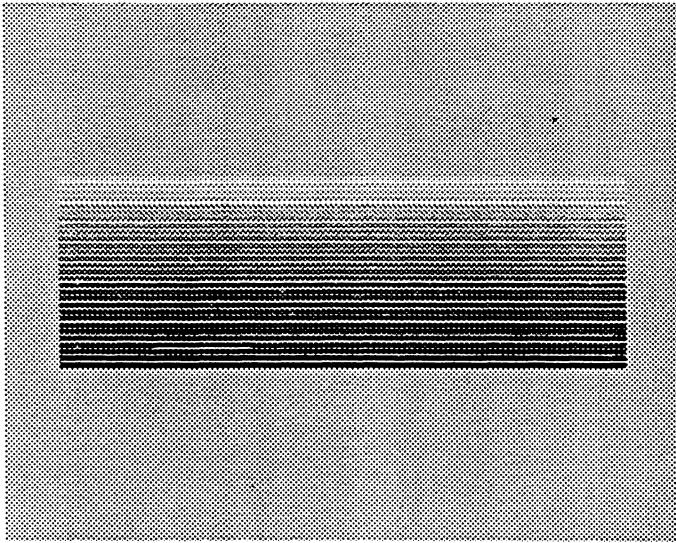


Figure 5.18-b

The concentration in the whole domain at different times for the Dirichlet boundary condition $g = 0$, with $\alpha = 30S_0$, $\sigma = 30$. The dark shaded regions are regions with maximum concentration. The lines represent the level sets of the concentration.

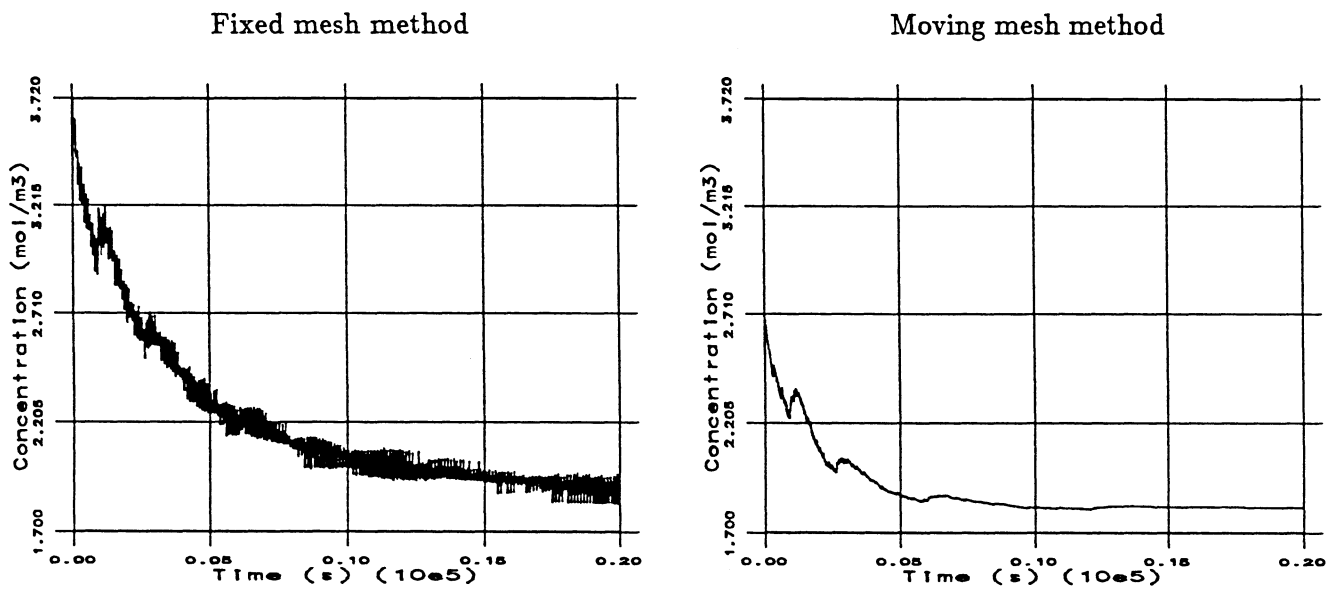


Figure 5.19

Time evolution of the mean concentration on the interface for a Dirichlet boundary condition $g = 0$ on the upper boundary and with $\sigma = 30$, $\alpha = 30S_0$.

The figure on the left-hand-side is obtained with the fixed mesh method and the one on the right-hand-side with the moving mesh method.

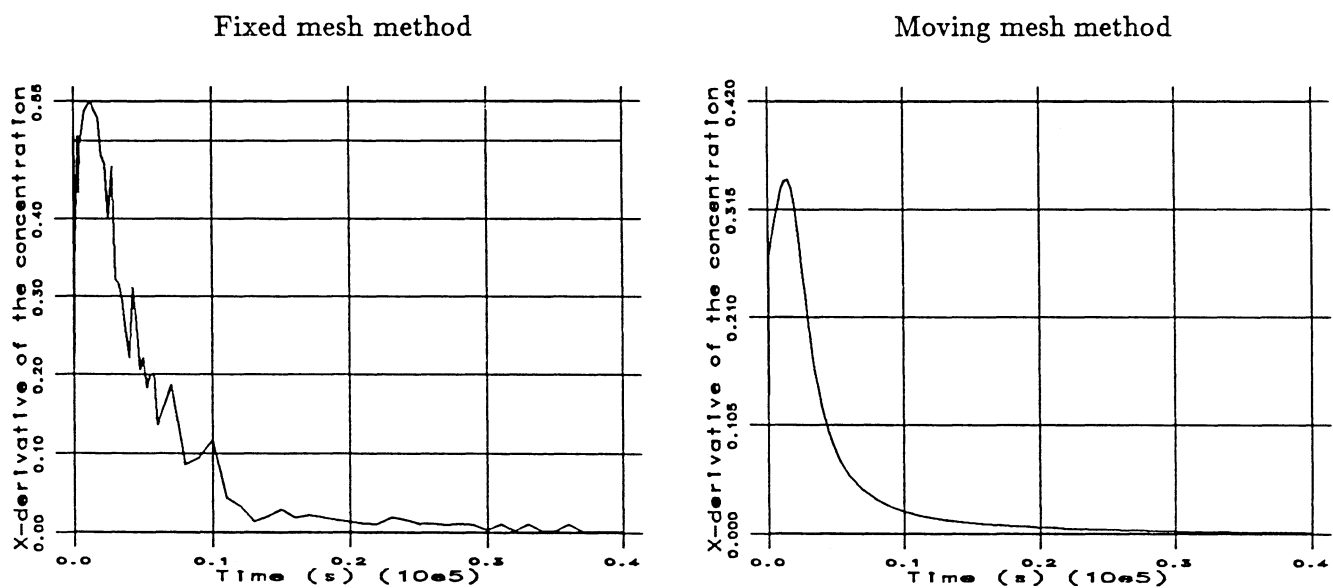


Figure 5.20

Time evolution of $\left\| \frac{\partial C}{\partial x} \right\|_{\Omega_t}(t)$ for a Dirichlet boundary condition

$g = 0$ on the upper boundary, with $\sigma = 30$, $\alpha = 30S_0$.

The figure on the left-hand-side is obtained with the fixed mesh method
and the one on the right-hand-side with the moving mesh method.

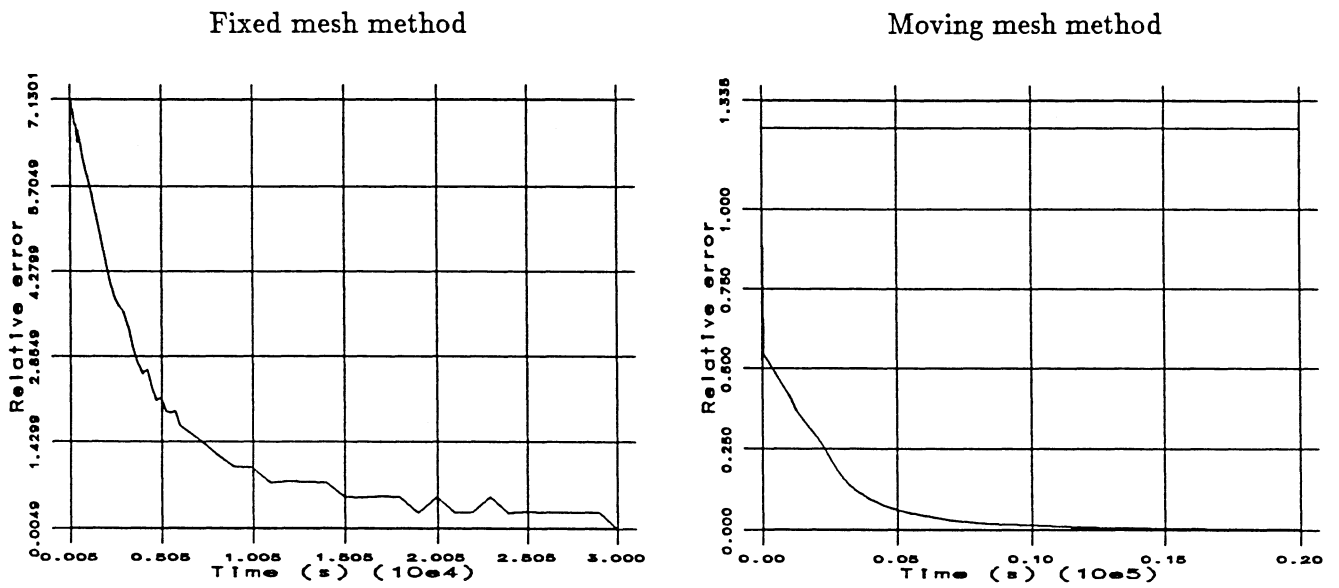


Figure 5.21

Time evolution of $\frac{\|U - U_c(t)\|}{\|U\|}$ for a Dirichlet boundary condition $g = 0$ on the upper boundary and with $\sigma = 30$, $\alpha = 30S_0$, where U is the exact travelling velocity and U_c is the computed one. The figure on the left-hand-side is obtained with the moving mesh method and the one on the right-hand-side with the moving mesh method.

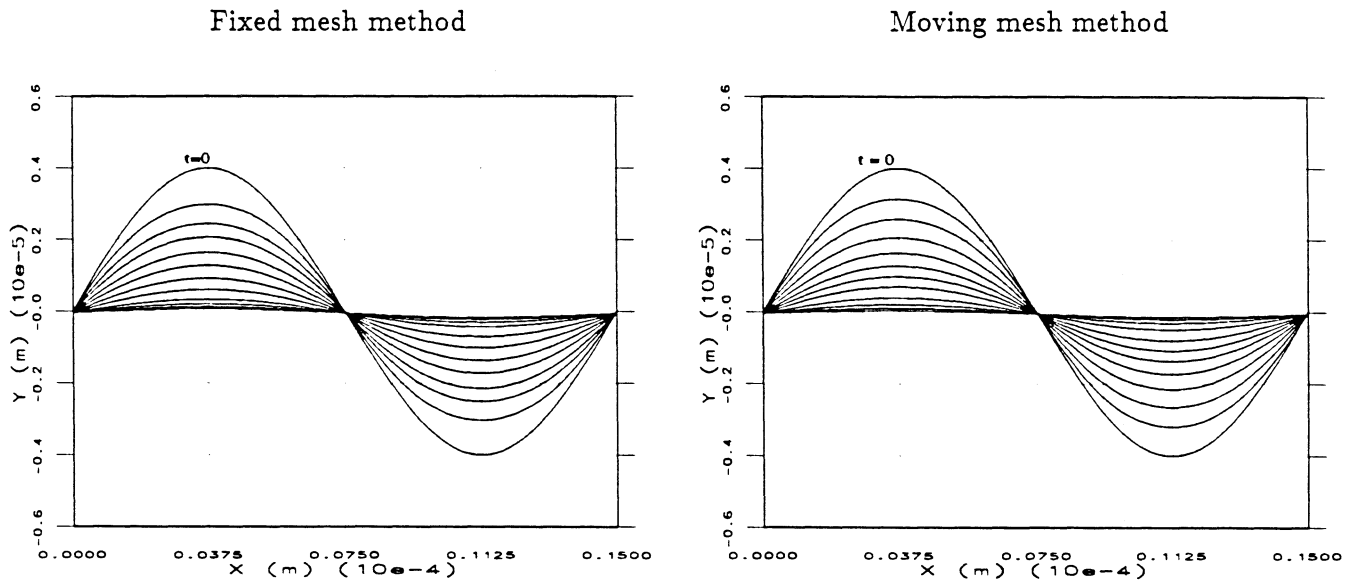


Figure 5.22
Time evolution of the interface for a Dirichlet boundary condition
 $g = \alpha$ on the upper boundary and with $\sigma = 30$, $\alpha = 30S_0$.
The figure on the left-hand-side is obtained with the fixed mesh method
and the one on the right-hand-side with the moving mesh method.

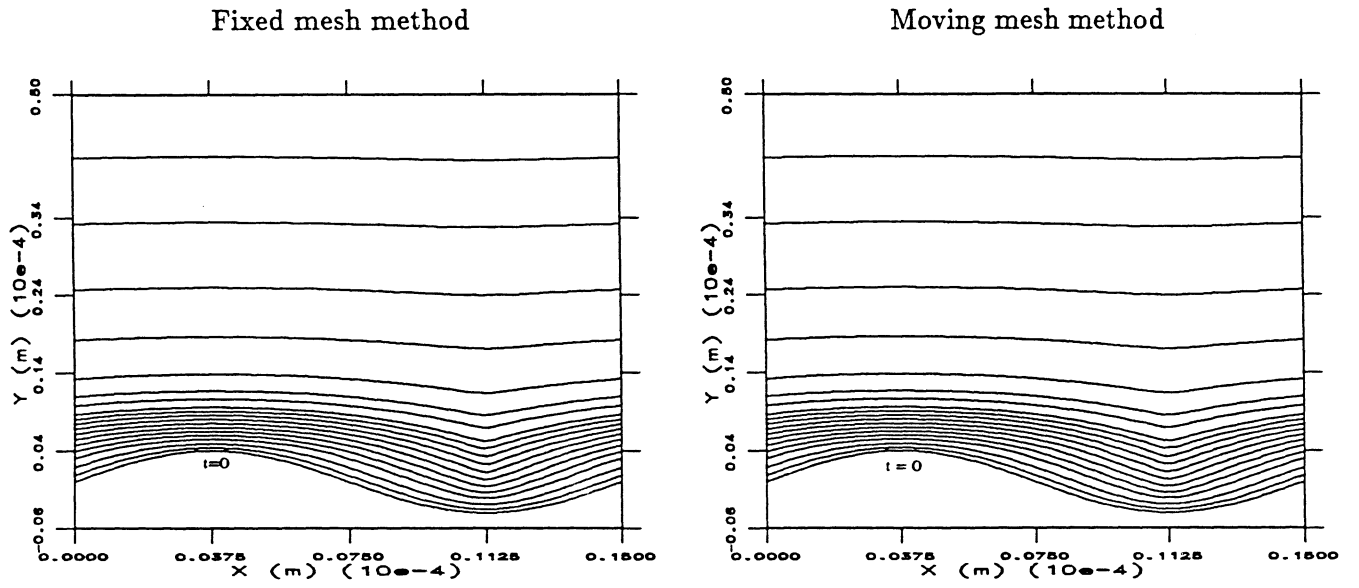


Figure 5.23
Time evolution of the interface for a Dirichlet boundary condition
 $g = 2\alpha$ on the upper boundary and with $\sigma = 30$, $\alpha = 30S_0$.
The figure on the left-hand-side is obtained with the fixed mesh method
and the one on the right-hand-side with the moving mesh method.

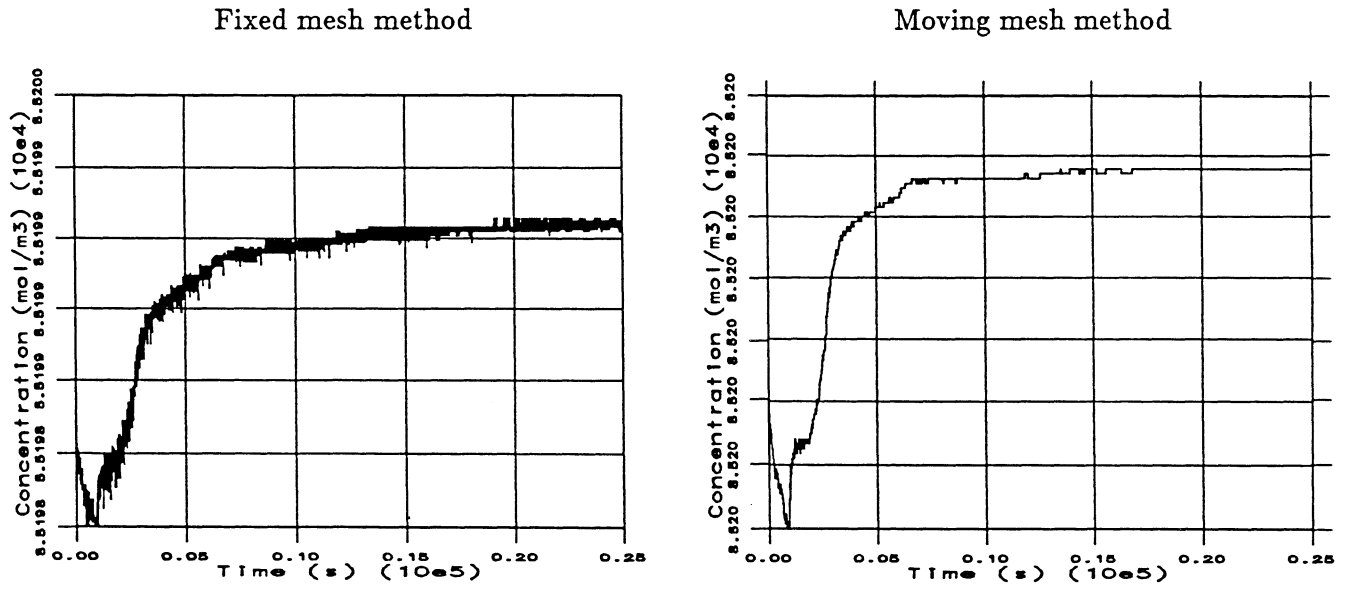


Figure 5.24

Time evolution of the mean concentration on the interface for a Dirichlet boundary condition $g = 2\alpha$ on the upper boundary, with $\sigma = 30$, $\alpha = 30S_0$. The figure on the left-hand-side is obtained with the fixed mesh method and the one on the right-hand-side with the moving mesh method.

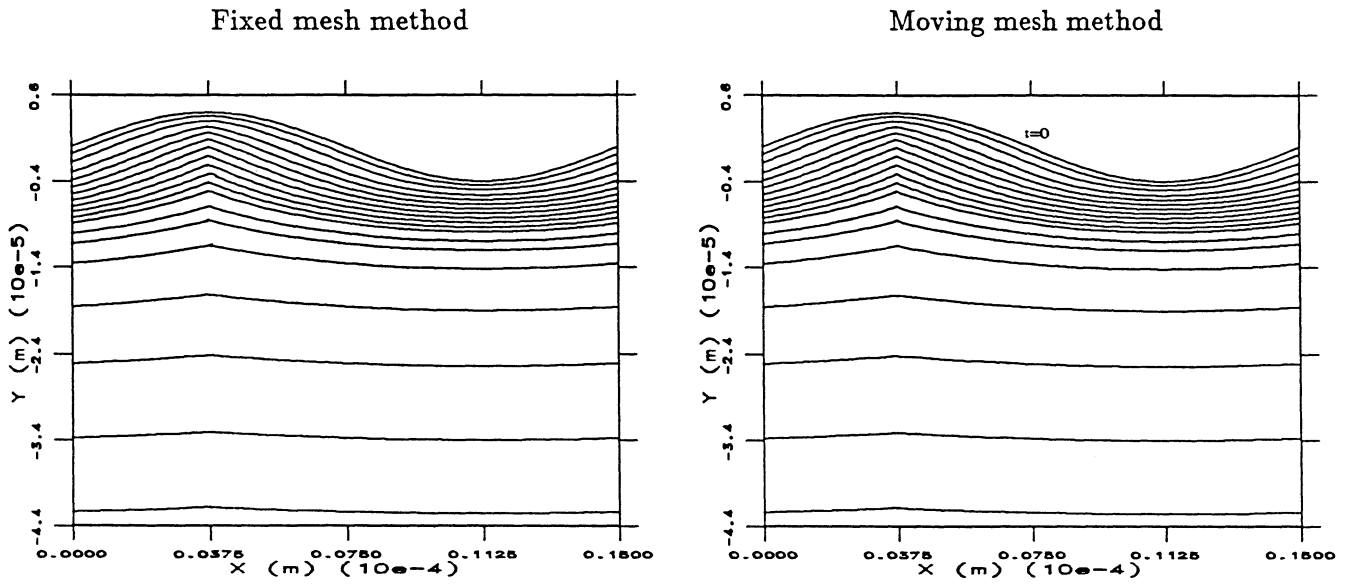


Figure 5.25

The case of zero surface tension :

Time evolution of the interface for the Dirichlet boundary condition

$g = 0$ on the upper boundary, with $\sigma = 0$, $\alpha = 30S_0$.

The figure on the left-hand-side is obtained with the fixed mesh method
and the one on the right-hand-side with the moving mesh method.

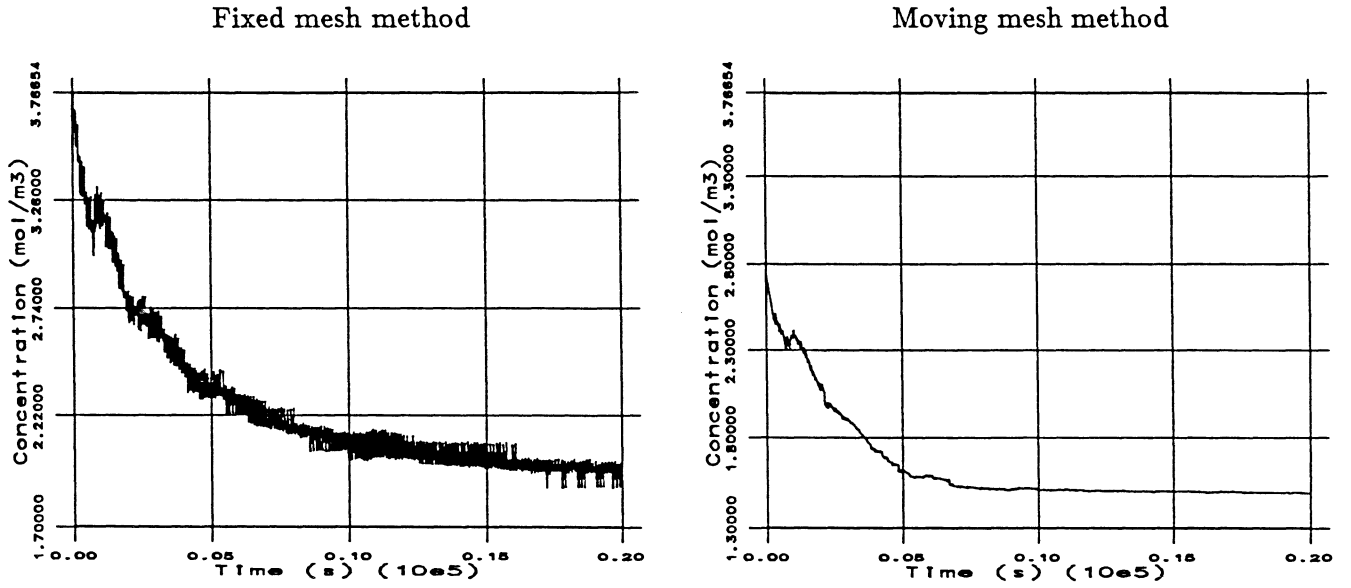


Figure 5.26

Time evolution of the mean concentration on the interface for a Dirichlet boundary condition $g = \alpha$ on the upper boundary, with $\sigma = 30$, $\alpha = 30S_0$. The figure on the left-hand-side is obtained with the fixed mesh method and the one on the right-hand-side with the moving mesh method.

Bibliography

- [1] W.K. BURTON, N. CABRERA AND F. FRANK, Philo. Trans. R. Soc. London, Ser. A, 243 (1951) 299.
- [2] T. IKEDA AND R. KOBAYASHI, *Numerical approach to interfacial dynamics*, Proc. of Workshop on nonlinear PDE and appli. (1989)
- [3] I. PRIGOGINE, R. DEFAY, *Tension superficielle et adsorption*, Edition Desoer, Liège, 1951.
- [4] A. ROOSEN, *Modeling crystal growth in a diffusion field with fully-faceted crystals*, Ph. D. thesis, 1993.
- [5] Y. SAAD AND M. SCHULTZ, *GMRES : a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems*, SIAM Jurnal Sci. Stat. Comput. Vol.10, pp36-52 (1989)
- [6] T. I. SEIDMAN, Private communication.
- [7] J. TAYLOR, J. CAHN AND A. HANDWERKER, *I- Geometric models of crystal growth*, Acta metall. mater. Vol. 40, No 7, pp 1443-1474, 1992
- [8] J. TAYLOR, J. CAHN AND A. HANDWERKER, *II- Mean curvature and weighted mean curvature*, Acta metall. mater. Vol. 40, No 7, pp 1475-1485, 1992
- [9] J. VAN DER VORST AND P. SONNEVELD, *CGSTAB : a more smoothly converging variant of CG-S*, Delft University of Technology, Delft . Netherlands, May 21, 1990