PHILIPPE RAMBOUR

Propriétés galoisiennes des anneaux d'entiers en caractéristique *p*

Thèses d'Orsay, 1992

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1992__0325__P0_0>

ORSAY
n° d'ordre : 1367

UNIVERSITÉ de PARIS–SUD
Centre d'ORSAY

THÈSE

présentée

pour obtenir

le grade de Docteur en Sciences
de l'Université Paris XI Orsay
Spécialité : Mathématiques

par

Philippe RAMBOUR

Sujet : **Propriétés Galoisiennes des anneaux d'entiers en caractéristique** p

soutenue le : 26 octobre 1992 devant la Commission d'examen

M. J.–M. FONTAINE Président
G. CHRISTOL
B. PERRIN–RIOU
J.–P. WINTENBERGER

Remerciements

Voici venu un moment agréable, celui de remercier tous ceux qui m'ont aidé.

Tout d'abord Jean–Pierre Wintenberger qui a dirigé mon travail et sans qui rien de tout cela n'aurait vu le jour ; j'ai toujours trouvé en lui une écoute attentive, une disponibilité parfaite et une aide toujours efficace. Puis Gilles Christol et Bernadette Perrin–Riou qui ont accepté d'être les rapporteurs et qui m'ont aidé de leurs précieuses suggestions. Enfin Jean–Marc Fontaine qui avait auparavant dirigé mon mémoire de D.E.A. et qui a toujours soutenu mon travail et qui a bien voulu présider le jury de ma thèse.

Je dois aussi de nombreux remerciements à mesdames Bonnardel et Le Bronnec, secrétaires de l'équipe de Géométrie Algébrique d'Orsay, qui ont assuré la frappe de cette thèse avec la compétence et la gentillesse qu'on leur connaît.

Il me faut également remercier Jean–Marc Rinkel, pour les discussions nombreuses et toujours stimulantes que nous avons eues durant ces trois années.

Introduction

Cette thèse traite de trois problèmes galoisiens : il s'agit de rechercher, dans le cas où la caractéristique est non nulle, deux groupes de cohomologie galoisienne et un module de différentielles. Dans cette introduction, pour chacune des trois parties, on rappellera d'abord les résultats (dus essentiellement à Ax, Faltings, Fontaine, Hyodo, Sen, Tate et Wintenberger) qui ont permis ce travail; on indiquera ensuite l'hypothèse de travail retenue et les conclusions auxquelles on est arrivé.

Précisons tout d'abord les notations suivantes, utilisées dans les trois parties :

Si H est un corps on notera H_a(resp. H_s) une clôture algébrique (resp. séparable) de H, et $\sqrt{H}$ une clôture radicielle de H. Si de plus H est un corps local, $\mathcal{O}_H$ désignera l'anneau des entiers de H, et $\mathcal{O}_{H_a}$ (resp. $\mathcal{O}_{H_s}$) celui de H_a (resp. H_s).

La première partie s'inspire des travaux sur un corps local de Tate ([12], Sen ([9]) et Ax ([1]) pour le premier point, et des travaux de Wintenberger ([13]) sur un anneau pour le deuxième point.

1°) Si K est un corps local hensélien de caractéristique nulle, on appelle $\widehat{K}_a$ le complété séparé de K_a et on obtient l'isomorphisme suivant : $\widehat{K}_a^{\mathrm{Gal}(K_a/K)} \simeq K$. Si K est encore un corps local hensélien, cette fois de caractéristique non nulle, on appelle $\widehat{K}_s$ le complété séparé de K_s et Ax démontre l'isomorphisme suivant : $\widehat{K}_s^{\mathrm{Gal}(K_s/K)} \simeq \widehat{\sqrt{K}}$ où $\widehat{\sqrt{K}}$ est le complété séparé de $\sqrt{K}$.

2°) On peut se demander, comme Wintenberger, ce que devient ce résultat si on ne s'intéressse plus à un corps local mais à un anneau qui n'est plus forcément un anneau de valuation discrète. Si R désigne maintenant un anneau intègre commutatif de corps des fractions K et I est un idéal de R. On note $\widehat{R}_a$ (resp. $\widehat{R}_s$) le complété séparé pour la topologie I-adique de l'anneau R_a (resp. R_s) des éléments de K_a (resp. K_s) entiers sur R. Si I est un anneau principal, et si R est un anneau de caractéristique nulle intègre et normal tel que Spec(R) peut être désingularisé, alors Wintenberger obtient l'isomorphisme suivant : $\widehat{R}_a^{\mathrm{Gal}(K_a/K)} \simeq \widehat{R}$.

Dans la première partie de cette thèse on considère un anneau nœthérien, intègre, normal, de caractéristique p, $p \neq 0$, et on ne fait pas d'hypothèses particulières sur I. Je montre alors que le théorème $\widehat{R}_a^{\mathrm{Gal}(K_a/K)}$ est isomorphe à $\widehat{\sqrt{R}}$ où $\sqrt{R}$ est une clôture radicielle de R.

Cette démonstration, exposée aux Journées Arithmétiques de Luminy (1989), a fait l'objet d'un article ([8]).

Pour les deuxième et troisième parties, K désigne un corps local pour une valuation discrète à corps résiduel parfait k. On appelle π une uniformisante de K.

La deuxième partie s'inscrit dans le prolongement des travaux de Fontaine ([3]) sur le module de différentielles $\Omega_{\mathcal{O}_{K_s}/\mathcal{O}_K}$.

Fontaine introduit un sous-corps de K tel que l'extension K/K_0 soit finie et totalement ramifiée et E un sous-corps de K_0 contenant une uniformisante de K_0 et tel que le corps résiduel de E soit fini. Il définit alors l'idéal $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A} = \left\{a \in K_s / v(a) \geq -v(\mathcal{D}_{K/K_s}) - \frac{1}{q-1}\right\}$ où q est l'ordre du corps résiduel de E.

Fontaine établit alors que le module $\Omega_{\mathcal{O}_{K_s}/\mathcal{O}_K}$ est isomorphe à $K_s/\mathcal{A} \underset{\mathcal{O}_K}{\otimes} T_\pi(\Gamma) \otimes \underline{\omega_\Gamma}$ où $T_\pi(\Gamma)$ est le module de Tate d'un groupe formel de Lubin–Tate Γ, et où $\underline{\omega_\Gamma}$ est un module de différentielles formelles. Puisque $\underline{\omega_\Gamma}$ est un module de rang 1 on peut dire, en choisissant un générateur de $\underline{\omega_\Gamma}$, que $\Omega_{\mathcal{O}_{K_s}/\mathcal{O}_K}$ est isomorphe à $K_s/\mathcal{A} \otimes T_\pi(\Gamma)$.

En caractéristique 0, K_s est alors une clôture algébrique de K et on prend pour Γ le complété formel à l'origine du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$. Fontaine démontre alors les isomorphismes suivants :

$$\Omega_{\mathcal{O}_{K_s}/\mathcal{O}_K} \simeq (K_a/\mathcal{A})(1)$$

$$V_p(\Omega) \underset{df}{=} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p, \Omega_{\mathcal{O}_{K_s}/\mathcal{O}_K}) \simeq \widehat{K}_a(1)$$

$$T_p(\Omega) \underset{df}{=} \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \Omega) \simeq \widehat{\mathcal{A}}(1)\ .$$

$\widehat{K}_a$ (resp. $\widehat{\mathcal{A}}$) étant le complété séparé de K_a (resp. de $\mathcal{A}$).

Je montre ici que si la caractéristique est non nulle le module de Tate se simplifie. J'ai le théorème : "$\Omega_{\mathcal{O}_{K_s}/\mathcal{O}_K}$ est isomorphe à $K_s/\mathcal{O}_{K_s} \underset{\mathcal{O}_K}{\otimes} \widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_K/k}$ où $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_K/k}$ est le complété séparé de $\Omega_{\mathcal{O}_K/k}$". Puisque $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_K/k}$ est un $\mathcal{O}_K$–module de rang 1 on peut montrer en choisissant un générateur de $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_K/k}$ que $\Omega_{\mathcal{O}_{K_s}/\mathcal{O}_K}$ est isomorphe à $K_s/\mathcal{O}_{K_s}$.

On a également les isomorphismes naturels :

$$T_\pi(\Omega) \underset{df}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(K/\mathcal{O}_K, \Omega_{\mathcal{O}_{K_s}/\mathcal{O}_K}) \simeq \widehat{\mathcal{O}}_{K_s}$$

$$V_\pi(\Omega) \underset{df}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(K, \Omega_{\mathcal{O}_{K_s}/\mathcal{O}_K}) \simeq \widehat{K}_s$$

où $\widehat{K}_s$ (resp. $\widehat{\mathcal{O}}_{K_s}$) est le complété séparé de K_s (resp. $\mathcal{O}_{K_s}$).

Ce dernier résultat a fait l'objet d'une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.

La troisième partie apporte une contribution aux calculs d'une famille de groupes de cohomologie galoisienne.

Sen ([9]) montre qu'en caractéristique nulle $H^1(\mathrm{Gal}(K_a/K), \mathcal{O}_{K_a})$ est tué par p si p est la caractéristique du corps résiduel; il montre également que ce résultat est faux en caractéristique différente de 0, c'est-à-dire que dans ce cas $\pi H^1(\mathrm{Gal}(K_s/K), \mathcal{O}_{K_s}) \neq 0$.

De son côté Hyodo ([5]) a obtenu les résultats suivants en caractéristique mixte :

$$\forall q \geq 0\ H^q(\mathrm{Gal}(K_a/K), \overline{K}_a(r)) = \begin{cases} \widehat{\Omega}^q_K & \text{si } q = r \\ \widehat{\Omega}^{q-1}_K & \text{si } r = q-1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

où $\widehat{\Omega}^q_K = \widehat{\Omega}^q(\mathcal{O}_K) \underset{\mathcal{O}_K}{\otimes} K$ avec $\widehat{\Omega}^q(\mathcal{O}_K)$ étant le complété séparé de $\Omega^q_Z(\mathcal{O}_K)$. Ces résultats sont valables le corps résiduel étant parfait ou non.

Par ailleurs, si K est de caractéristique $p \neq 0$, on sait ([10]) que le groupe $G_K = \mathrm{Gal}(K_0/K)$ est de dimension cohomologique 1, c'est-à-dire que pour tout G_K–module discret A : $H^1(G_K, A) = 0$ pour $i > 1$, ce qui implique naturellement que $H^i(G_K, \mathcal{O}_{K_s}) = 0$ pour $i > 1$. Par définition $H^0(G_K, \mathcal{O}_{K_s}) = \mathcal{O}_K$. Reste à connaître $H^1(G_K, \mathcal{O}_{K_s})$.

C'est ce que je fais dans la troisième partie de cette thèse. J'appelle $\sqrt{K}$ (resp. $\sqrt{\mathcal{O}_K}$) une clôture radicielle de K (resp. $\mathcal{O}_K$), $\overline{k}$ la clôture algébrique de k, I le groupe d'inertie de l'extension K_s/K. Je démontre alors le théorème :

i) $H^1(G_K, \mathcal{O}_{K_s}) \simeq (\sqrt{K}/(\sqrt{\mathcal{O}_K} + K)) \oplus H^1(G_K, \overline{k})$

ii) $H^1(G_K, \mathcal{O}_{K_s}) \simeq (\sqrt{K}/(\sqrt{\mathcal{O}_K} + K) + \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(I/[I,I], \overline{k})^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}$ (isomorphisme de $\mathcal{O}_K$–module).

On remarque immédiatement qu'on a établi l'isomorphisme :

$$H^1(G_K, \overline{k}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(I/[I,I], \overline{k})^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)} .$$

Chapitre 1

Éléments fixes du complété d'une clôture algébrique sous l'action de son groupe de Galois

Soit R un anneau, nœthérien, normal, intègre de corps des fractions K, et soit I un idéal de R qui ne soit pas confondu avec R tout entier.

On désigne par :

- R_a l'anneau des entiers sur R d'une clôture algébrique K_a de K
- R_s l'anneau des entiers sur R d'une clôture séparable K_s de K ;
- G le groupe $\mathrm{Gal}(K_s/K)$ qui est aussi $\mathrm{Gal}(K_a/K)$;
- $\overline{R}_s$ l'adhérence de R_s dans $\widehat{R}_a$.

Le problème est de déterminer $\widehat{R}_a^G$ qui est l'ensemble des éléments fixes du complété de R_a sous l'action de G.

J. Ax a répondu à la question dans le cas où le corps K est un corps local de caractéristique 0 ou p, c'est-à-dire un corps muni d'une valuation à valeur dans un groupe abélien et par laquelle K est hensélien [1]. Dans ce travail nous allons établir le théorème suivant :

THÉORÈME. — *L'anneau R_a est séparé pour la topologie I-adique et s'injecte donc dans $\hat{R}_a$ et $\hat{R}_a^G$ l'ensemble des points fixes de $\hat{R}_a$ sous l'action de G n'est autre que l'adhérence de $\sqrt{R}$ dans $\hat{R}_a$. De plus $\overline{R}_s = \hat{R}_a$.*

Pour obtenir la dernière assertion nous utiliserons des approximations d'un élément de R_a qui dépendront du diamètre des conjugués, méthode mise au point par J. Ax [1].

I. — Séparation de R_a pour la topologie I-adique

PROPOSITION 1. — *Si $I \neq R$ alors $\bigcap_n I^n R_a$ est réduite à 0 et R_a est donc séparé pour la topologie définie par IR_a, et s'injecte dans $\hat{R}_a$.*

Démonstration : supposons d'abord que I est un idéal principal. Il existe alors un élément x de R qui est un générateur de I. Puisque R est normal et nœthérien et $I \neq R$ il existe une valuation v vérifiant $v(x) > 0$ et cette valuation se prolonge à R_a. D'où si a appartient à $\bigcap_n I^n R_a$, alors $v(a) = +\infty$ et donc $a = 0$.

Démontrons maintenant la propriété dans le cas où I n'est pas forcément un idéal principal.

Notons S le schéma affine $\mathrm{Spec}\, R$ et soit $\tilde{S}$ le normalisé de l'éclaté $\hat{S}$ par rapport au sous-schéma fermé $Y = \mathrm{Spec}(R/I)$. Montrons tout d'abord que l'application canonique $\pi : \tilde{S} \to S$ est une application surjective. Pour cela remarquons que l'on peut écrire π comme la composée $\pi_2 \circ \pi_1$ où π_1 est l'application canonique de $\tilde{S}$ dans $\hat{S}$, π_2 l'application canonique de $\hat{S}$ dans S. π_1 et π_2 étant deux applications surjectives, il en est de même pour π.

π_1 est surjective : c'est le *going down* théorème (voir MATSUMURA : Commutative Algebra [7] p. 31).

π_2 est surjective : si $V = S - Y$, alors π_2 est un isomorphisme de $\pi_2^{-1}(V)$ sur V. Comme π_2 est propre, π_2 est fermé donc $\pi_2(\hat{S})$ est un fermé de S contenant V. Comme S est intègre S est aussi irréductible donc on a forcément $\pi_2(\hat{S}) = S$.

Soit maintenant $U = \operatorname{Spec} A$ un ouvert affine de $\tilde{S}$. On sait que A est un anneau nœthérien normal et si U est choisi assez petit parmi les ouverts affines vérifiant : $\pi^{-1}(Y) \cap U \neq \emptyset$ alors IA est un idéal principal de A, distinct de A. D'après ce qui a été démontré dans le cas principal on sait que $\bigcap_n I^n A_a = \{0\}$ avec A_a clôture intégrale de A contenue dans K_a. Puisque R est contenu dans A, alors R_a est contenu dans A_a et $\bigcap\limits_n I^n R_a$ est réduite à 0.

II. — R_s est dense dans $\hat{R}_a$

LEMME 1. — *Si A est un anneau de caractéristique p pour lequel $x \longmapsto x^p$ est bijectif, si J un idéal de A engendré par r éléments de A, alors si n et N sont deux entiers naturels $x^{p^n} \in J^N$ implique $x \in J^{[N/p^n]-r+1}$ (avec la convention $J^M = A$ si $M \leq 0$).*

Démonstration : démontrons ce lemme grâce à une récurrence sur r, où r désigne le nombre des générateurs.

Si $r = 1$. Alors J est un idéal principal et la propriété $x \longmapsto x^p$ bijectif donne le résultat.

Montrons maintenant la propriété pour r quelconque. Posons $J = (y_1, \cdots, y_r)$ et $H = (y_2, \cdots, y_r)$. Si x est tel que $x^{p^n} \in J^N$ on peut écrire :

$$x^{p^n} = X_0 y_1^N + X_1 y_1^{N-1} + \cdots + X_i y_1^{N-i} + \cdots + X_N$$

avec X_i élément de H^i pour i vérifiant $0 \leq i \leq N$. On obtient ainsi que :

$$x = X_0^{1/p^n} y_1^{N/p^n} + X_1^{1/p^n} y_1^{N-1/p^n} + \cdots + X_i^{1/p^n} y_1^{(N-i)/p^n} + \cdots + X_N^{1/p^n} (1).$$

Comme

$$\left[\frac{N-i}{p^n}\right] \geq \left[\frac{N}{p^n}\right] - \left[\frac{i}{p^n}\right] - 1.$$

$y_1^{(N-i)/p^n}$ est donc un élément de $J^{[N/p^n]-[i/p^n]-1}$ et d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à H on sait que X_i^{1/p^n} est un élément de $H^{[i/p^n]-r+2}$. Donc chaque terme de la sommation (1) appartient à : $J^{[N/p^n]-[i/p^n]-1+[i/p^n]-r+2}$ c'est-à-dire à : $J^{[N/p^n]-r+1}$ ce qui démontre le lemme.

PROPRIÉTÉ. — *$\hat{R}_a$ est réduit.*

Démonstration : Il suffit de démontrer que si x est un élément de $\hat{R}_a$ qui vérifie $x^{p^k} = 0$ pour un k donné dans $\mathbf{N}^*$ alors x est nul.

Soit donc (x_n) une suite d'éléments de R_a vérifiant $x_{n+1} - x_n \in I^n R_a$ et $x_n^{p^k} \in I^n R_a$ pour tout $n \geq 1$.

D'après le lemme 1 : puisque $x_{(n+r-1)p^k} - x_n \in I^n R_a$, $x_n \in I^n R_a$ pour tout $n \geq 1$ ce qui donne le résultat :

PROPOSITION 3. — *Si R est de caractéristique p, l'anneau $\overline{R}_s$ est égal à l'anneau $\hat{R}_a$.*

Démonstration : Il suffit de montrer que R_a est contenu dans $\overline{R}_s$. Utilisons pour cela que $\sqrt{R_s} \simeq R_a$. Soit β un élément de R_s et N un entier naturel. On va montrer que $\overline{R}_s$ contient X tel que $X^{p^N} = \beta$. Alors puisque $\hat{R}_a$ est réduit $X = \beta^{r/p^N}$.

Pour cela fixons un élément non nul de IR_s appelé a.

Pour tout entier naturel m supérieur à N on définit X_m comme étant une racine de l'équation :

$$X^{p^N} - a^{p^m} X = \beta \ (1).$$

Puisque cette équation est séparable X_m est bien un élément de R_s. Nous allons montrer que la suite $(X_m)_{m>N}$ ainsi définie est une suite de Cauchy dans R_s. Elle sera alors convergente dans $\hat{R}_s$, avec une limite X_0 qui vérifiera, en faisant tendre m vers l'infini dans (1), $X_0^{p^N} = \beta$. Donc X_0 sera donc une racine p^N-ième de β, ce qui démontrera le théorème cherché.

Si m et m' vérifient :$m' > m > N$, on a :

$$X_m^{p^N} - X_{m'}^{p^N} = a^{p^m} X_m - a^{p^{m'}} X_{m'}$$

$$\left(\frac{X_m - X_{m'}}{a^{p^{m-N}}}\right)^{p^N} = X_m - a^{p^{m'} - p^m} X_{m'}.$$

Cette dernière égalité prouve que $(X_m - X_{m'})/a^{p^{m-N}}$ est un élément entier sur R_s, et puisque R_s est un anneau normal $(X_m - X_{m'})/a^{p^{m-N}}$ est un élément de R_s. Si α cet élément, l'égalité $X_m - X_{m'} = a^{p^{m-N}} \alpha$ permet de savoir que $X_m - X_{m'}$ est un élément de $I^{p^{m-N}}$ ce qui prouve que la suite $(X_m)_{m>N}$ est bien une suite de Cauchy, ce qui achève la démonstration.

III. — Diamètre des conjugués

Dans tout le paragraphe on supposera la caractéristique de K égale à p.

DÉFINITION 1. — *Pour α élément de R_a, avec $\alpha \neq 0$, on pose :*

$$\delta(\alpha) = \max\{n / \alpha \in I^n R_a\}.$$

$$\delta(0) = +\infty .$$

DÉFINITION 2. — *Si K' est une extension finie de K on pose, si α est un élément de R_a :*

$$\Delta_{K'}(\alpha) = \min\{\delta(\sigma(\alpha) - \alpha),\ \sigma \in \mathrm{Gal}(K_s/K')\}.$$

Remarque : si α est un élément de K', on pose :

$$\Delta_{K'}(\alpha) = +\infty.$$

On remarque : $\Delta_{K'}(\alpha) \geq \delta(\alpha)$ pour toute extension finie K' de K.

Notation : Si x est un réel $[x]$ désigne la partie entière de x.

PROPOSITION 4. — *i) Soit r le nombre de générateurs de I. Alors pour tout α de R_s il existe β de $\sqrt{R}$ vérifiant : $\alpha - \beta \in I^{[\Delta_K(\alpha)/2]-r}R_a$ avec la convention $I^m R_a = R_a$ si $m \leq 0$.*

ii) Si $[K(\alpha) : K]$ est premier à p, on a en fait :

$$\alpha - \beta \in I^{\Delta_K(\alpha)} R_s$$

Démonstration :

(a) Démontrons tout d'abord la proposition dans le cas où $[K(\alpha) : K]$ premier à p. On remarque alors que $\mathrm{Tr}_{\mathrm{K}(\alpha)/\mathrm{K}}(\alpha)$ appartient à R puisque R est normal et donc $\mathrm{Tr}_{\mathrm{K}(\alpha)/\mathrm{K}}(\alpha)\big/[\mathrm{K}(\alpha) : \mathrm{K}]$ est également un élément de R et de plus :

$$\Big((\mathrm{Tr}_{\mathrm{K}(\alpha)/\mathrm{K}})(\alpha)\big/[\mathrm{K}(\alpha) : \mathrm{K}]\Big) - \alpha = \sum \frac{\alpha' - \alpha}{[\mathrm{K}(\alpha) : \mathrm{K}]}$$

α' parcourant les K conjugués de α. Ce dernier terme est un élément de $I^{\Delta_K(\alpha)}R_s$.

(b) Pour montrer la proposition dans ce cas nous allons avoir besoin des lemmes suivants :

LEMME 2. — *On se donne K' et $K"$ deux extensions finies séparables de K avec K' contenu dans $K"$ et vérifiant $[K" : K'] = p$. Alors si α est un élément de R_s appartenant à $K"$ on a :*

(i) on peut trouver β un élément de R', où R' est l'anneau des entiers de K', qui soit tel que :

$$\alpha^p - \beta \in I^{\Delta_{K'}(\alpha)+\delta(\alpha)(p-1)}R_s.$$

(ii) pour tout entier naturel n non nul on peut trouver un élément β_n de R' avec :

$$\alpha^{p^n} - \beta_n \in I^{\Delta_{K'}(\alpha)p^n(1-a^n)}R_s \qquad \text{où} \qquad a = (p-1)/p.$$

Démonstration du Lemme 1 :

Si α est un élément de K' il n'y a rien à démontrer. Sinon $[K'(\alpha):K']$ vaut p et on peut faire la démonstration ci-dessous.

(i) Si $\alpha_1 \cdots \alpha_p$ désigne les racines du polynôme minimal de α sur K', on pose $\eta_i = \alpha_i - \alpha$. Alors

$$\begin{aligned} N_{K'(\alpha)/K'}(\alpha) &= \prod_{i=1}^{p} \alpha_i = \prod_{i=1}^{p}(\alpha + \eta_i) \\ &= \alpha^p + b_1\alpha^{p-1} + \cdots + b_p. \end{aligned}$$

En remarquant que le b_j sont, au signe près, les j-ième fonctions symétriques élémentaires de η_j pour $1 \leq j \leq p$, et que les η_j sont des éléments de $I^{\Delta_{K'}(\alpha)}R_s$ on obtient facilement que : $N_{K'(\alpha)/K'}(\alpha) - \alpha^p$ est un élément d'un $I^N R_s$ avec :

$$N \geq \min_{1\leq j\leq p}((p-j)\delta(\alpha) + j\Delta_{K'}(\alpha)) = \Delta_{K'}(\alpha) + \delta(\alpha)(p-1)$$

en utilisant que $\Delta_{K'}(\alpha) \geq \delta(\alpha)$.

Comme R' est normal, on a $N_{K'(\alpha)/K'}(\alpha)$ élément de R' d'où le résultat.

(ii) Démontrons d'abord par récurrence sur n que l'on peut trouver un élément β_n de R' vérifiant :

$$\alpha^{p^n} - \beta_n \in I^{\Delta_{K'}(\alpha)p^n(1-a^n)+(p-1)^n\delta(\alpha)}R_s$$

La formule annoncée sera alors une conséquence immédiate de ce résultat.

Si $n = 1$ c'est ce que l'on a obtenu au (i).

Montrons maintenant la formule pour n quelconque. D'après l'hypothèse de récurrence il existe un élément β_{n-1} de R' vérifiant :

$$\alpha^{p^{n-1}} - \beta_{n-1} \in I^{\Delta_{K'}(\alpha)p^{n-1}(1-a^{n-1})+(p-1)^{n-1}\delta(\alpha)}R_s$$

posons $x_{n-1} = \alpha^{p^{n-1}} - \beta_{n-1}$.

$$\delta(x_{n-1}) \geq \Delta_{K'}(\alpha)p^{n-1}(1-a^{n-1}) + (p-1)^{n-1}\delta(\alpha).$$

et

$$\Delta_{K'}(x_{n-1}) = \Delta_{K'}(\alpha)p^{n-1}$$

grâce au (i) on sait qu'il existe β un élément de R' vérifiant

$$x_{n-1}^p - \beta \in I^{\Delta_{K'}(x_{n-1})+\delta(x_{n-1})(p-1)}R_s$$

ce qui implique, d'après les remarques ci-dessus :

$$\begin{aligned} \delta(\alpha^{p^n} - \beta_{n-1}^p - \beta) \geq \Delta_{K'}(\alpha)p^{n-1} & \\ +(p-1)(\Delta_{K'}(\alpha)(1-a^{n-1})p^{n-1} + (p-1)^{n-1}\delta(\alpha)). & \end{aligned}$$

C'est-à-dire que si l'on pose $\beta_{n-1}^p + \beta = \beta_n$ et que si l'on fait un petit calcul pour transformer $p^{n-1} + p^{n-1}(1-((p-1)/p)^{n-1})(p-1)$ en $p^n(1-((p-1)/p)^n)$ on obtient

$$\delta(\alpha^{p^n} - \beta_n) \geq \Delta_{K'}(\alpha)p^n(1-a^n) + (p-1)^n\delta(\alpha)$$

qui est le résultat annoncé.

Lemme 3. — *Soit $H_m \supset H_{m-1} \supset \cdots \supset H_1 \supset H_0$ une tour d'extensions finies séparables de K avec $[H_i : H_{i-1}] = p$ pour $1 \leq i \leq m$. On appelle R_0 l'anneau des entiers de H_0 par rapport à R, et R_i l'anneau des entiers de H_i sur R_0. Si α est un élément de H_m et si n est un entier naturel donné on peut trouver un élément β_{m-i} de R_{m-i} vérifiant :*

$$\alpha^{p^{ni}} - \beta_{m-i} \in I^{\Delta_{H_0}(\alpha)p^{ni}(1-a^n)^i} R_s \qquad 1 \leq i \leq m.$$

Démonstration : Démontrons ce lemme par récurrence.

Pour $i = 1$ c'est une application immédiate du point (ii) du lemme 1 avec $K' = H_{m-1}$ en remarquant que puisque H_0 est contenu dans H_{m-1}, $\Delta_{H_0}(\alpha) \leq \Delta_{H_{m-1}}(\alpha)$.

Démontrons maintenant le lemme pour un i quelconque $1 \leq i \leq m$.

D'après l'hypothèse de récurrence il existe β_{i-1} élément de R'_{m-i+1} avec

$$\alpha^{p^{n(i-1)}} - \beta_{m-i+1} \in I^{\Delta_{H_0}(\alpha)p^{n(i-1)}(1-a^n)^{(i-1)}}. \tag{I}$$

on a

$$\Delta_{H_0}(\beta_{m-i+1}) \geq \Delta_{H_0}(\alpha)p^{n(i-1)}(1-a^n)^{(i-1)} \quad (1)$$

en effet si σ est un élément de $Gal(K_s/H_0)$, et si $\alpha' = \sigma(\alpha)$, et si $\beta'_{m-i+1} = \sigma(\beta_{m-i+1})$, alors :

$$\begin{aligned}\beta'_{m-i+1} - \beta_{m-i+1} = \beta'_{m-i+1} &- \alpha'^{p^{n(i-1)}} + \alpha'^{p^{n(i-1)}} \\ &+ \alpha^{p^{n(i-1)}} - \alpha^{p^{n(i-1)}} - \beta_{m-i+1}\end{aligned}$$

en remarquant que :$\beta'_{m-i+1} - \alpha'^{p^{n(i-1)}}$ et $\beta_{m-i+1} - \alpha^{p^{n(i-1)}}$ sont des éléments de $I^{\Delta_{H_0}(\alpha)p^{n(i-1)}(1-a^n)^{(i-1)}}$ et comme $\alpha^{p^{n(i-1)}} - \alpha'^{p^{n(i-1)}}$ dans $I^{\Delta_{H_0}(\alpha)p^n(i-1)}$ on obtient l'inégalité (1).

Si l'on applique maintenant le résultat (ii) du lemme 1 avec $K' = H_{m-i}$ on peut trouver un élément de R_{m-i} avec :

$$\beta^{p^n}_{m-i+1} - \beta_{m-i} \in I^{\Delta_{H_{m-i}}(\beta_{m-i+1}).p^n(1-a^n)} \tag{II}$$

et remarquant que $\Delta_{H_{m-i}}(\beta_{m-i+1}) \geq \Delta_{H_0}(\beta_{m-i+1})$

$$\beta^{p^n}_{m-i+1} - \beta_{m-i} \in I^{\Delta_{H_0}(\beta_{m-i+1})p^n(1-a^n)} R_s.$$

Soit d'aprés l'inégalité (1) :

$$\beta^{p^n}_{m-i+1} - \beta_{m-i} \in I^{\Delta_{H_0}(\alpha)p^{ni}(1-a^n)^i} R_s \tag{II'}$$

D'autre part en élevant $\alpha^{p^{n(i-1)}} - \beta_{m-i+1}$ à la puissance p^n la relation (I) donne :

$$\delta(\alpha^{p^{ni}} - \beta_{m-i+1}^{p^n}) \geq \Delta_{H_0}(\alpha)p^{ni}(1-a^n)^i \qquad \text{(I')}.$$

d'où en combinant (II') et (I') :

$$\delta(\alpha^{p^{ni}} - \beta_{m-i}) \geq \Delta_{H_0}(\alpha)p^{ni}(1-a^n)^i.$$

ce qui est le résultat annoncé.

(c) Démonstration de la proposition 3 dans le cas $[\tilde{K} : K] = p^m$.

Où $\tilde{K}$ désigne une extension galoisienne de degré minimale de K contenant α. En utilisant que Gal($\tilde{\mathrm{K}}(\alpha)$: K) est résoluble on peut obtenir une tour d'extensions séparables :

$$\tilde{K} = K_m \supset K_{m-1} \supset \cdots \supset K_1 \supset K_0 = K.$$

On appelle R_i l'anneau des entiers de K_i sur R. Soit n un entier naturel. Si on applique le lemme 2 avec $i = m$ et $H_m = \tilde{K}$, $H_0 = K$, on obtient l'existence d'un élément β_0 de R vérifiant :

$$\alpha^{p^{nm}} - \beta_0 \in I^{\Delta_K(\alpha)p^{nm}(1-a^n)^m} R_s.$$

Si l'on choisit maintenant n tel que :

$$1 - ((p-1)/p)^n \geq 1/2,$$

on obtient :

$$\alpha^{p^{nm}} - \beta_0 \in I^{\Delta_K(\alpha)[p^{nm}/2]}.$$

Si β vaut $\beta_0^{1/p^{nm}}$ alors d'après le lemme 1 :

$$\alpha - \beta \in I^{[\Delta_K(\alpha)[p^{nm}/2]/p^{nm}]-r+1} R_a .$$

En remarquant que l'on peut choisir encore n pour que :

$$[\Delta_K(\alpha)[p^{nm}/2]/p^{nm}] \geq \left[\frac{\Delta_K(\alpha)}{2}\right] - 1.$$

On obtient : $\alpha - \beta \in I^{[\Delta(\alpha)/2]-r} R_a$ ce qui est le résultat voulu.

(d) Démonstration de la proposition 3 dans le cas général.

Soit donc α un élément de R_s tel que $[K(\alpha) : K]$ n'est pas un entier premier à p. Si $\tilde{K}$ désigne encore une extension galoisienne de K de degré minimal contenant α, on a : $[\tilde{K} : K] = qp^m$ avec q premier à p.

Si G' est un p-groupe de Sylow de Gal(K(α)/K). Soit H l'ensemble des points fixes de G' dans $\tilde{K}$. On sait qu'alors H est une extension finie de K contenue dans $\tilde{K}$ et telle que :

- $\tilde{K}$ est une extension galoisienne de H.

• $[\tilde{K}(\alpha) : H] = p^m$.

On appelle R' l'anneau des entiers de H. Si n désigne un entier naturel on peut appliquer à $\tilde{K}(\alpha)$ et H ce qui a été fait au (b) avec H dans le rôle de K. On peut donc obtenir γ avec γ élément de R' et :

$$\alpha^{p^{nm}} - \gamma \in I^{[\Delta_H(\alpha)[p^{nm}/2]}R_s,$$

où n est un entier naturel vérifiant $1 - (p - 1/p)^n \geq 1/2$ (voir c).

D'après a) on sait qu'il existe un élément β_0 de R vérifiant $\gamma - \beta_0 \in I^{\Delta_K(\gamma)}$.

Puisque K est contenu dans H, $\Delta_K(\alpha) \leq \Delta_H(\alpha)$ d'où

$$\alpha^{p^{nm}} - \gamma \in I^{[\Delta_K(\alpha)[p^{nm}/2]}R_s \tag{1}$$

et comme en (b) on peut montrer que :

$$\Delta_K(\gamma) \geq \Delta_K(\alpha)[p^{nm}/2].$$

d'où

$$\gamma - \beta_0 \in I^{\Delta_K(\alpha)[p^{nm}/2]}R_s. \tag{2}$$

Les relations (1) et (2) donnent, si n bien choisi (voir c) :

$$\alpha - \widetilde{\beta}_0 \in I^{[\Delta_K[\alpha)/2]-r}\widehat{R}_s$$

avec $\widetilde{\beta}_0 = \beta_0^{1/p^{nm}}$.

PROPOSITION 5. — *Avec les notations et les conventions de la proposition 4 on a : Si α est un élément de R_a il existe β de $\sqrt{R}$ vérifiant $\alpha - \beta \in I^{(\Delta_K(\alpha)/r)-2r}$.*

Démonstration : Si $\alpha \in R_a$ il existe un entier naturel N tel que $\alpha^{p^N} \in R_s$. D'après la proposition précédente il existe donc β dans $\sqrt{R}$ tel que :

$$\alpha^{p^N} - \beta \in I^{[\Delta_K(\alpha)\ p^N/2]-r}R_a\ .$$

Soit en appliquant le lemme 1 :

$$\alpha - \beta^{1/p^N} \in I^{[[\Delta_K(\alpha)p^N/2]-r/p^N]-r+1}\ .$$

Les inégalités :

$$\left[\frac{\left[\frac{\Delta_K(\alpha)\ p^N}{2}\right] - r}{p^N}\right] \geq \left[\frac{\left[\frac{\Delta_K(\alpha)}{2}p^N\right]}{p^N}\right] - \left[\frac{r}{p^N}\right] - 1$$

$$\left[\frac{\left[\frac{\Delta_K(\alpha)\ p^N}{2}\right]}{p^N}\right] - \left[\frac{r}{p^N}\right] - 1 \geq \left[\frac{\Delta_K(\alpha)}{2}\right] - r - 1$$

donnent alors le résultat.

IV. — Éléments fixes sous l'action du groupe $G = \mathrm{Gal}(K_s/K)$

PROPRIÉTÉ 6. — *Si K un corps de caractéristique p, on a, avec les notations introduites au début de l'article :*

$$\hat{R}_a^G = \overline{\sqrt{R}}, \quad et \quad \overline{R}_s = \overline{\sqrt{R}}$$

où $\overline{\sqrt{R}}$ désigne l'adhérence de $\sqrt{R}$ pour la topologie I-adique.

Démonstration : si x est un élément de $\hat{R}_a^G$ pour tout entier N il existe un α qui est un élément de R_s avec $x - \alpha$ élément de $I^N\hat{R}_s$. Si σ est un élément de G on a toujours $x - \sigma(\alpha)$ élément de $I^N\hat{R}_a$, et donc $\alpha - \sigma(\alpha)$ élément de $I^N\hat{R}_a$ d'où $\Delta_K(\alpha) \geq N$.

Donc on peut trouver, d'après la proposition 3, un élément β dans $\sqrt{R}$ où $\alpha - \beta$ est un élément de $I^{[N/2]-2r}\hat{R}_a$. Donc $x - \beta$ est un élément de $I^{[N/2]-2r}\hat{R}_a$. Il en résulte que x est un élément de l'adhérence de $\sqrt{R}$. La réciprocité étant immédiate on obtient la propriété annoncée.

Remarque : Dans le cas de R_s le complété $\hat{R}_s$ pour la topologie I–adique n'est pas forcément réduit. On ne peut donc pas utiliser directement le lemme 1 pour démontrer la proposition 3 dans $\hat{R}_s$, comme j'avais cru pouvoir le faire dans mon exposé aux journées arithmétiques de Luminy. Le vrai résultat est :

"L'anneau R_s est séparé pour la topologie, I–adique et s'injecte dans $\hat{R}_s$. En caractéristique p si $\hat{R}_s$ est réduit, il contient une clôture radicielle de R, notée $\sqrt{R}$ et $\hat{R}_s^G$ n'est autre que l'adhérence de $\sqrt{R}$ dans $\hat{R}_s$".

On vérifie facilement que si I est principal, $\hat{R}_s$ est réduit, et le résultat est donc vrai sous cette hypothèse.

Chapitre 2

Formes différentielles sur l'anneau des entiers de la clôture séparable d'un corps local. Cas d'égale caractéristique

Soient K, K_s, k, $\mathcal{O}_K$, $\mathcal{O}_{K_s}$ comme dans ~~le résumé~~ l'introduction. On note π une uniformisante de K et v la valuation de K_s normalisée par $v(\pi) = 1$. Si A est un anneau topologique et B une A–algèbre topologique, on note $\widehat{\Omega}_{B/A}$ le complété séparé du B–module $\Omega_{B/A}$ (voir [4], chap. 0, § 20, p. 150–151). Si a et b sont tous deux dans B et si $\omega = a d_{B/A}\, b$ est un élément de $\Omega_{B/A}$, on notera encore $a\, d_{B/A}\, b$ l'élément correspondant de $\widehat{\Omega}_{B/A}$. Si K' est une extension séparable de K on note $\mathcal{O}_{K'}$ l'anneau des entiers de K'. Enfin on désigne par C le complété de K_s et $\mathcal{O}_c$ l'anneau des entiers de C.

THÉORÈME. — *On a les isomorphismes naturels suivants :*

$\Omega_{\mathcal{O}_{K_s}/\mathcal{O}_K} \simeq K_s/\mathcal{O}_{K_s} \bigotimes_{\mathcal{O}_K} \widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_K/k}$ *comme* $\mathcal{O}_{K_s}$*–module.*

$T_\pi(\Omega_{\mathcal{O}_{K_s}/\mathcal{O}_K}) \underset{df}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(K/\mathcal{O}_K, \Omega_{\mathcal{O}_{K_s}/\mathcal{O}_K}) \simeq \mathcal{O}_c$ *en tant que* $\mathcal{O}_c$*–module.*

$V_\pi(\Omega_{\mathcal{O}_{K_s}/\mathcal{O}_K}) \underset{df}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(K, \Omega_{\mathcal{O}_{K_s}/\mathcal{O}_K}) \simeq C$ *en tant que* C*–espace vectoriel.*

REMARQUE : Dans [3] § 1 et 2 et avec *car* $K = 0$, Fontaine se donne un sous–corps K_0 de K, tel que K/K_0 soit finie, totalement ramifiée, et il considère E un sous–corps de K_0 à corps résiduel fini et contenant une uniformisante π de K_0. Alors si q est l'ordre du corps résiduel de E, si $\mathcal{A} = \{a \in K_s / v(a) \geq -v(\mathcal{D}_{K/K_0}) - 1/(q-1)\}$, et si enfin Γ est un groupe formel de Lubin–Tate pour E (voir [2] chap. VI, § 3) Fontaine montre que $\Omega_{\mathcal{O}_{K_S}/\mathcal{O}_K}$ est isomorphe à $K_s/\mathcal{A} \otimes T_\pi(\Gamma) \otimes \underline{\omega}_\Gamma$ où $T_\pi(\Gamma)$ est le module de Tate de Γ et où $\underline{\omega}_\Gamma$ est le module des différentielles invariantes de Γ.

PROPOSITION 1. — *Soient K' et K'' deux extensions finies séparables de K, $K \subset K' \subset K''$. On a alors la suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{K'}/k} \bigotimes_{\mathcal{O}_{K'}} \mathcal{O}_{K''} \longrightarrow \widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{K''}/k} \longrightarrow \Omega_{\mathcal{O}_{K''}/\mathcal{O}_{K'}} \longrightarrow 0$$

Démonstration : On note π' (resp. π'') une uniformisante de K' (resp. K''), et on appelle E la plus grande extension non ramifiée de K' contenue dans K''. Soit $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ le polynôme minimal de π'' sur E ($n = [K'' : E]$).

On a la suite exacte :

$$\Omega_{\mathcal{O}_E/\mathcal{O}_{K'}} \bigotimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_{K''} \xrightarrow{\mu} \Omega_{\mathcal{O}_{K''}/\mathcal{O}_{K'}} \xrightarrow{\nu} \Omega_{\mathcal{O}_{K''}/\mathcal{O}_E} \longrightarrow 0$$

où μ et ν sont les morphismes canoniques.

Puisque $\Omega_{\mathcal{O}_E/\mathcal{O}_{K'}}$ est nul, ν est un $\mathcal{O}_{K''}$–isomorphisme qui transforme $d_{\mathcal{O}_{K''}/\mathcal{O}_{K'}}\pi''$ en $d_{\mathcal{O}_{K''}/\mathcal{O}_E}\pi''$. On sait (voir [11] Chap. III, proposition 11, Corollaire 2 et proposition 12) que $\Omega_{\mathcal{O}_{K''}/\mathcal{O}_E} \simeq \mathcal{O}_{K''} d_{\mathcal{O}_{K''}/\mathcal{O}_E}\pi''/f'(\pi'')d_{\mathcal{O}_{K''}/\mathcal{O}_E}\pi''$ avec f' le polynôme dérivé de f, on a $\Omega_{\mathcal{O}_{K''}/\mathcal{O}_{K'}} \simeq \mathcal{O}_{K''} d_{\mathcal{O}_{K''}/\mathcal{O}_{K'}}\pi''/f'(\pi'')d_{\mathcal{O}_{K''}/\mathcal{O}_{K'}}\pi''$. On sait d'autre part que :

$$\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{K''}/k} \simeq \mathcal{O}_{K''} d_{\mathcal{O}_{K''}/k}\pi''$$

$$\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{K'}/k} \bigotimes_{\mathcal{O}_{K'}} \mathcal{O}_{K''} \simeq \mathcal{O}_{K''} d_{\mathcal{O}_{K'}/k}\pi'$$

(voir [4], chap. 0, § 21, p. 177).

Pour se convaincre de l'exactitude de la proposition, il reste à montrer que $d_{\mathcal{O}_{K''}/k}\pi'$ et $f'(\pi'')d_{\mathcal{O}_{K''}/k}\pi''$ engendrent le même sous–module de $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{K''}/k}$. Pour cela, calculons l'image par $d_{\mathcal{O}_{K''}/k}$ de l'égalité $f(\pi'') = 0$. On obtient

$$f'(\pi'')d_{\mathcal{O}_{K''}/k}\pi'' + (a'_{n-1}\pi''^{n-1} + \cdots + a'_1\pi'' + a'_0)d_{\mathcal{O}_{K''}/k}\pi' = 0$$

où a'_i est l'unique élément de $\mathcal{O}_E$ vérifiant $d_{\mathcal{O}_{K''}/k}a_i = a'_i d_{\mathcal{O}_{K''}/k}\pi'$. Puisque f est un polynôme d'Eisenstein $a_0 = \pi' u$, u étant une unité de $\mathcal{O}_E$. Si u' vérifie $d_{\mathcal{O}_{K''}/k}u = u'\ d_{\mathcal{O}_{K''}/k}\pi'$ on peut écrire : $a'_0 = u + \pi' u'$ et on voit que le coefficient de $d_{\mathcal{O}_{K''}/k}\pi'$ dans l'égalité ci–dessus est inversible, ce qui termine la démonstration.

PROPOSITION 2. — *Soit Ω la limite inductive des $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{K'}/k}$ où K' parcourt les extensions séparables finies de K contenues dans K_s. Alors Ω est uniquement divisible par π.*

Démonstration : Ω est la limite inductive de $\mathcal{O}_K$–modules sans torsion, et d'après la proposition 1 les flèches de cette limite inductive sont injectives. Ω est donc sans torsion. A partir de maintenant si K' désigne une extension finie séparable de K et si x est un élément de $\mathcal{O}_{K'}$, on note dx l'élément de Ω qui vaut $d_{\mathcal{O}_{K'}/k}x$ et $d\pi$ désigne donc $d_{\mathcal{O}_K/k}\pi$.

Si n est un entier naturel on note x_n l'élément de $\mathcal{O}_{K_s}$ défini par $x_n^p + \pi^n x_n = \pi$. En prenant l'image de cette égalité par l'application $d_{\mathcal{O}_{K''}/k}$, où $K'' = K(x)$ on obtient $(1 - n\pi^{n-1}x_n)d\pi = \pi^n dx_n$, et puisque $(1 - n\pi^{n-1}x_n)$ est une unité de $\mathcal{O}_{K_s}$, $d\pi$ est divisible par π^n.

Soit maintenant x un élément de $\mathcal{O}_{K_s}$, et soit f son polynôme minimal sur K avec $f(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n$, $a_i \in \mathcal{O}_K$ $1 \leq i \leq n$. Si a est un élément de $\mathcal{O}_K$, on note de nouveau a' l'unique élément de $\mathcal{O}_K$ vérifiant $da = a'd\pi$. Si f' désigne le polynôme dérivé de f, $f(x) = 0$ implique alors : $f'(x)dx + (a'_1x^{n-1} + \cdots + a'_n)d\pi = 0$. Puisque $f'(x) \neq 0$ il existe A dans $\mathcal{O}_{K_s}$ et N un entier naturel vérifiant $\pi^N dx = A\ d\pi$. Donc puisque Ω est sans torsion, et que $d\pi$ est divisible par toute puissance de π, dx est uniquement divisible par toute puissance de π.

PROPOSITION 3. — *$\Omega \simeq K_s$ comme $\mathcal{O}_{K_s}$ module.*

Démonstration : en prenant la limite inductive des suites exactes de la proposition 1 on obtient :

$$(I) \qquad 0 \longrightarrow \widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_K/k} \bigotimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K_s} \longrightarrow \Omega \longrightarrow \Omega_{\mathcal{O}_{K_s}/\mathcal{O}_K} \longrightarrow 0$$

Puisque K_s est plat sur $\mathcal{O}_{K_s}$. On peut écrire :

$$0 \to \left(\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_K/k} \bigotimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K_s}\right) \bigotimes_{\mathcal{O}_{K_s}} K_s \to \Omega \bigotimes_{\mathcal{O}_{K_s}} K_s \to \Omega_{\mathcal{O}_{K_s}/\mathcal{O}_K} \bigotimes_{\mathcal{O}_{K_s}} K_s \to 0 .$$

$\Omega_{\mathcal{O}_{K_s}/\mathcal{O}_K}$ étant de torsion $\Omega_{\mathcal{O}_{K_s}/\mathcal{O}_K} \otimes_{\mathcal{O}_{K_s}} K_s$ est nul. Comme Ω est uniquement divisible c'est naturellement un K_s–espace vectoriel, d'où $\Omega \otimes_{\mathcal{O}_{K_s}} K_s \simeq \Omega$. Puisque $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_K/k} \simeq \mathcal{O}_K \, d_{\mathcal{O}_K/k}\pi$ la suite exacte ci–dessus fournit l'isomorphisme annoncé.

Démonstration du théorème : le premier isomorphisme provient de la suite exacte (I) et de la proposition 3.

Les deux autres s'obtiennent facilement par passage à la limite. Enfin ces isomorphismes sont naturellement galoisiens.

Chapitre 3
Cohomologie de l'anneau des entiers d'une clôture séparable d'un corps local

1) Introduction

Dans cette partie K est toujours un corps local de caractéristique p, $p > 0$, sur un corps résiduel parfait k. Si $\mathcal{O}_K$, K_s, $\mathcal{O}_{K_s}$ désignent les mêmes objets que dans la partie précédente. On appelle $\mathcal{M}_{K_s}$ l'idéal de $\mathcal{O}_{K_s}$ constitué des éléments non inversibles de $\mathcal{O}_{K_s}$, et $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. On appelle π une uniformisante de K, et on désigne par v une valuation de K_s normalisée par $v(\pi) = 1$. G_K est le groupe $\mathrm{Gal}(K_s/K)$. On sait que G_K est de p–dimension cohomologique 1, c'est-à-dire que pour tout G_K–module discret A : $H^i(G_K, A) = 0$, $i > 1$ (voir [10], p. II 4, II 5). On a donc $H^i(G_K, \mathcal{O}_{K_s}) = 0$, $i > 1$.

Nous allons établir ici le théorème :

$$H^1(G_K, \mathcal{O}_{K_s}) \simeq \sqrt{K}/(\sqrt{\mathcal{O}_K} + K) \oplus H^1(G_K, \overline{k})$$

$$H^1(G_K, \mathcal{O}_{K_s}) \simeq \sqrt{K}/(\sqrt{\mathcal{O}_K} + K) \oplus \mathrm{Hom}_{cont}(I/[I, I], \overline{k})^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)} \ .$$

(isomorphisme de $\mathcal{O}_K$ modules).
Où I est le groupe d'inertie de l'extension K_s/K, et où $\overline{k}$ est la clôture algébrique de k. Précisons d'abord quelques définitions.

Diamètre des conjugués :

DÉFINITION. — *Si x est un élément de K_s et G' un sous-groupe de G_K on appelle diamètre des conjugués de x par rapport à G', et on note $\Delta_{G'}(x)$ la quantité :*

$$\min\{\sigma \in G'/v(x - \sigma(x))\} \ .$$

Si $G' = G_K$, on parle simplement du diamètre des conjugués de x et on le note $\Delta(x)$.

PROPOSITION 1. —

$$H^1(G_K, \mathcal{O}_{K_s}) \simeq H^1(G_K, \overline{k}) \oplus H^1(G_K, \mathcal{M}_{K_s}) \ .$$

Démonstration : c'est évident si l'on remarque que :

$$\mathcal{O}_{K_s} = \overline{k} \oplus \mathcal{M}_{K_s} \ .$$

2) Démonstration du théorème avec l'hypothèse k algébriquement clos

PROPOSITION 2. — *$H^1(G_K, \mathcal{M}_{K_s}) \simeq \{x \in K_s/\Delta(x) > 0\}/(K + \mathcal{O}_{K_s})$ (isomorphisme de $\mathcal{O}_K$-modules).*

Démonstration : puisque $\mathcal{M}_{K_s}$ est contenu dans K_s un élément de $H^1(G_K, \mathcal{M}_{K_s})$ est aussi un cobord de G_K dans K_s. Le morphisme de $\mathcal{O}_K$-module qui à un élément x de K_s vérifiant $\Delta(x) > 0$ associe le cocycle s_x tel que pour tout σ de G_K : $s_x(\sigma) = \sigma(x) - x$ est donc surjectif. Son noyau est clairement engendré par K et $\mathcal{M}_{K_s}$. Puisque k est algébriquement clos ce noyau est donc $K + \mathcal{O}_{K_s}$.

PROPOSITION 3. — *Si $\sqrt{K}$ (resp. $\sqrt{\mathcal{O}_K}$) désigne une clôture radicielle de K (resp. $\mathcal{O}_K$) on a les isomorphismes de $\mathcal{O}_K$-modules suivants :*

(i) $\{x \in K_s/\Delta(x) > 0\}/\mathcal{O}_{K_s} \simeq \sqrt{K}/\sqrt{\mathcal{O}_K}$

(ii) $H^1(G, \mathcal{O}_{K_s}) \simeq \sqrt{K}/(\sqrt{\mathcal{O}_K} + K) \oplus \mathrm{Hom}_{cont}(G_K, k)$.

Démonstration : Démontrons (*i*). Pour celà nous allons utiliser la propriété “pour tout ζ élément de K_s, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver β dans $\sqrt{K}$ vérifiant $v(\zeta - \beta) \geq \Delta(\zeta) - \varepsilon$”. Ax a obtenu ce résultat pour ζ dans $\mathcal{O}_{K_s}$ (voir [1], p. 424, corollaire 1). Si $v(\zeta) < 0$ on sait qu'il existe $\tilde{\zeta}$ de $\mathcal{O}_{K_s}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $\zeta = \tilde{\zeta}/T^n$. Il existe alors $\tilde{\beta} \in \sqrt{K}$ tel que $v(\tilde{\zeta} - \tilde{\beta}) \geq \Delta(\tilde{\zeta}) - \varepsilon$. En posant $\beta = \tilde{\beta}/T^n$ et puisque $\Delta(\zeta) = \Delta(\tilde{\zeta}) - n$ on a $v(\zeta - \beta) \geq \Delta(\zeta) - \varepsilon$. Si x et x' sont deux éléments de K_s vérifiant $\Delta(x) > 0$ et $\Delta(x') > 0$ on peut donc trouver β et β' dans $\sqrt{K}$ vérifiant $v(x - \beta) \geq 0$ et $v(x' - \beta') \geq 0$. Si $v(x - x') \geq 0$ alors $v(\beta - \beta') \geq 0$. A la classe de x dans $\{x \in K_s/\Delta(x) > 0\}/\mathcal{O}_{K_s}$ on peut donc associer celle de β dans $\sqrt{K}/\sqrt{\mathcal{O}_K}$. On définit ainsi une application de $\{x \in K_s/\Delta(x) > 0\}/\mathcal{O}_{K_s}$ dans $\sqrt{K}/\sqrt{\mathcal{O}_K}$. Cette application est un morphisme injectif de $\mathcal{O}_K$-modules. Montrons que cette application est aussi surjective. Donnons-nous β un élément de $\sqrt{K}$. En utilisant le fait que $\sqrt{K}$ est contenu dans le complété de K_s (voir [1], § 3, p. 425–426) on peut trouver un élément x de K_s vérifiant $v(x - \beta) > 0$. Puisque $\sqrt{K}$ est fixe sous l'action de G_K on a $\Delta(x) > 0$. D'après ce qu'on a vu plus haut l'image de la classe de x dans $\{x \in K_s/\Delta(x) > 0\}/\mathcal{O}_{K_s}$ par le morphisme qu'on a défini est la classe de β dans $\sqrt{K}/\sqrt{\mathcal{O}_K}$.

(*ii*) est une conséquence immédiate de (*i*) et des propositions 1 et 2 (ici $k = \overline{k}$).

3) Démonstration du théorème

On note I le groupe d'inertie de l'extension K_s/K.
C'est le sous-groupe de G_K qui est le noyau de l'homomorphisme : $G_K \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$.

LEMME 1. — *En tant que $\mathcal{O}_K$-modules :*

$$H^1(G_K, \mathcal{O}_{K_s}) \simeq H^1(I, \mathcal{O}_{K_s})^{G_K/I} \ .$$

Démonstration : la suite de Hochshild–Serre appliquée aux groupes G, I et au module $\mathcal{O}_{K_s}$ s'écrit :

$$0 \longrightarrow H^1(G_K/I, \mathcal{O}_{K_s}^I) \longrightarrow H^1(G_K, \mathcal{O}_{K_s}) \longrightarrow H^1(I, \mathcal{O}_{K_s})^{G_K/I}$$
$$\longrightarrow H^2(G_K/I, \mathcal{O}_{K_s}^I) \longrightarrow H^2(G_K, \mathcal{O}_{K_s}) .$$

On sait que $G_K/I \simeq \mathrm{Gal}(K_{nr}|K)$ où K_{nr} désigne l'extension maximale non ramifiée de K. Si $\mathcal{O}_{K_{nr}}$ désigne l'anneau des entiers de K_{nr} on sait aussi que $\mathcal{O}_{K_s}^I \simeq \mathcal{O}_{K_{nr}}$. Pour toute extension finie non ramifiée K' de K, d'anneau des entiers $\mathcal{O}_{K'}$, de corps résiduel k', $H^i(\mathrm{Gal}(K'/K), \mathcal{O}_{K'})$ est nul pour $i > 0$, en effet $\mathcal{O}_K \simeq \mathcal{O}_K \underset{k}{\otimes} k'$ et puisque $\mathrm{Gal}(k'/k)$ agit trivialement sur $\mathcal{O}_K$ $H^i(\mathrm{Gal}(k'/k), \mathcal{O}_{K'})$ est isomorphe à $H^i(\mathrm{Gal}(k'/k), k') \underset{k}{\otimes} \mathcal{O}_K$ qui est nul ($\mathrm{Gal}(K'/K) \simeq \mathrm{Gal}(k'/k)$).
D'où $H^1(G_K/I, \mathcal{O}_{K_s}^I) = 0$ et $H^2(G_K/I, \mathcal{O}_{K_s}^I) = 0$ ce qui induit le résultat.

Remarque : En tant que $\mathcal{O}_K$–modules :

$$H^1(I, \mathcal{O}_{K_s}) \simeq \sqrt{K_{nr}}/(\sqrt{\mathcal{O}_{K_{nr}}} + K_{nr}) \oplus \mathrm{Hom}_{cont}(I, \overline{k}) .$$

avec les notations du lemme 1.

Démonstration : on utilise la proposition 3 en remplaçant K par K_{nr}, G_K par I, et k par $\overline{k}$.

Théorème. — *En tant que $\mathcal{O}_K$-module :*
(*i*) $H^1(G_K, \mathcal{O}_{K_s}) \simeq \sqrt{K}/(\sqrt{\mathcal{O}_K} + K) \oplus H^1(G_K, \overline{k})$.
(*ii*) $H^1(G_K, \mathcal{O}_{K_s}) \simeq \sqrt{K}/(\sqrt{\mathcal{O}_K} + K) \oplus \mathrm{Hom}_{cont}(I/[I,I], \overline{k})^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}$.

Démonstration : puisque les deux facteurs de la somme directe établie dans la remarque ci–dessus sont stables par G_K/I il faut calculer : $(\sqrt{K_{nr}}/\sqrt{\mathcal{O}_{K_{nr}}} + K_{nr})^{G_K/I}$. Mais $\sqrt{K_{n_r}}/(\sqrt{\mathcal{O}_{K_{n_r}}} + K_{n_r})$ peut s'écrire $\underset{n\in\mathbb{N}^*}{\oplus}\underset{J}{\oplus}\overline{k}\pi^{-j/p^n}$ où J est l'ensemble des entiers positifs premiers à p. Puisque $G_K/I \simeq \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ $(\underset{J}{\oplus}\overline{k}\pi^{-j/p^n})^{GK/I} \simeq \underset{J}{\oplus} k\pi^{-j/p^n}$ c'est–à–dire $(\sqrt{K_{nr}}/\sqrt{\mathcal{O}_{K_{nr}}} + K_{nr})^{G_K/I} \simeq \sqrt{K}/(\sqrt{\mathcal{O}_K} + K)$.
Achevons maintenant de démontrer l'isomorphisme :

$$H^1(G_K/\mathcal{O}_{K_s}) \simeq \sqrt{K}/(\sqrt{\mathcal{O}_K} + K) \oplus H^1(G_K, \overline{k}) .$$

La suite de Hochshild–Serre appliquée à $\overline{k}$ et aux groupes G_K et I donne :

$$0 \longrightarrow H^1(G_K/I, \overline{k}^I) \longrightarrow H^1(G_K, \overline{k})$$
$$\longrightarrow H^1(I, \overline{k})^{G_K/I} \longrightarrow H^2(G_K/I, \overline{k}^I) \longrightarrow H^2(G_K, \overline{k})$$

puisque $\overline{k}^I = \overline{k}$ et $G_K/I \simeq \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$

$$H^1(G_K, \overline{k}) \simeq H^1(I, \overline{k})^{G_K/I} \text{ puisque } H^i(\mathrm{Gal}(\overline{k}/k), \overline{k}) = 0 \text{ pour } i = 1,2 \ .$$

Pour ce qui est du deuxième isomorphisme on peut préciser l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ sur $\mathrm{Hom}_{cont}(I/[I,I], \overline{k})$. Si A est un I–module discret qui soit aussi un $\mathcal{O}$–module et si σ est un élément de $\mathrm{Gal}(\overline{k}, k)$ à un cocycle φ de $H^1(I, A)$ on associe le cocyle φ^σ de $H^1(I, A)$ défini par :

$$\varphi^\sigma(i) = \sigma(\varphi(\sigma^{-1}\, i\sigma))$$

pour tout i dans I (voir, par exemple [6], p. 53).

Puisque $\overline{k}$ est commutatif on a en fait

$$\mathrm{Hom}_{cont}(I, \overline{k}) \simeq \mathrm{Hom}_{cont}(I/[I,I], \overline{k}) \ .$$

Si on appelle ψ cet isomorphisme et si φ est un homomorphisme de $I/[I,I]$ dans $\overline{k}$ on peut poser pour tout j dans $I/[I,I]$ $\varphi^\sigma(j) = (\psi(\varphi))^\sigma(\widehat{j})$ où $\widehat{j}$ est un relèvement de j. On vérifie immédiatement que cette définition est indépendante du choix du relèvement.

Remarque 1 : On a montré l'isomorphisme de $\mathcal{O}_K$–module :

$$H^1(G_K, \overline{k}) \simeq \mathrm{Hom}_{cont}(I/[I,I], k)^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)} \ .$$

Remarque 2 : On sait que pour tout x dans K_s et tout $\varepsilon > 0$ il existe β dans $\sqrt{K}$ vérifiant : $v(x - \beta) \geq \Delta(x) - \varepsilon$. On peut se demander si l'on ne peut pas avoir mieux, c'est–à–dire se demander si l'on peut trouver pour tout x dans K_s un β dans $\sqrt{K}$ vérifiant $v(x - \beta) \geq \Delta(x)$. Ax annonce ce résultat dans [2], p. 424, 425. Mais en fait, ceci ne peut pas être une propriété générale. En effet, si une telle propriété était vraie, on pourrait montrer en utilisant les mêmes arguments que dans la démonstration de la proposition 3 que $H^1(G_K, \mathcal{O}_{K_s}) \simeq \sqrt{K}/\sqrt{\mathcal{O}_K} + K$. Ce qui impliquerait, d'après la version ci–dessus du théorème que $H^1(G_K, \overline{k})$ serait nul, ce qu'il n'est manifestement pas (en utilisant des extensions d'Artin Schreier on peut facilement exhiber des éléments de $H^1(G_K, \overline{k})$ qui sont non nuls).

Références Bibliographiques

[1] J. Ax. — *Zéros of polynomials over local fields*, the Galois : Action, Journal of Algebra, 15 (1970), 417–428.

[2] J.W.S. Cassels, A. Frohlich. — *Algebraic Number Theory*, London–New York, Academic Press 1967.

[3] J.M. Fontaine. — *Formes différentielles et modules de Tate des variétés abéliennes des corps locaux*, Invent. Math. 1982, 379–408.

[4] A. GROTHENDIECK. — *Eléments de Géométrie algébrique IV. Etude locale des schémas et des morphismes de schéma*, (première partie), Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications Mathématiques, n° 20.

[5] O. HYODO. — *On the Hodge-Tate decomposition in the imperfect residue field case*, Journal for Matematik, 1985, t. 365, p. 97 à 113.

[6] S. LANG. — *Rapport sur la cohomologie des groupes*, W. A. Benjamin Inc.

[7] H. MATSUMARA. — *Commutative Algebra*, Second Edition, Mathematics Lecture Note Series, The Benjamin Inc.

[8] P. RAMBOUR. — *Éléments fixes du complété d'une clôture séparable sous l'action de son groupe de Galois*, Journées Arithmétiques de Luminy, Astérisque n° 198-199-200, p. 285-294.

[9] S. SEN. — *On automorphisms of local fields*, Ann. of Maths 90, 1969, p. 33 à 46.

[10] J.-P. SERRE. — *Cohomologie Galoisienne*, Lecture Notes in Math., Springer Verlag.

[11] J.-P. SERRE. — *Corps locaux*, Hermann 1968.

[12] J.T. TATE. — *p divisible groups*, proc. of a conference on local fields, Springer Verlag, 1967, 158–183.

[13] J.P. WINTENBERGER. — *Une généralisation d'un théorème de Tate-Sen-Ax*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 307, 1988, Série I, p. 63 à 65.