VINCENT COSSART

Polyèdre caractéristique d'une singularité – Tome II

Thèses d'Orsay, 1987, 433 p

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1987__0203__P02_0>

63476

N° d'ordre

TOME II

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

T H E S E

présentée

Pour obtenir

Le grade de DOCTEUR D'ETAT

par

Vincent COSSART

Sujet : POLYEDRE CARACTERISTIQUE D'UNE SINGULARITE

Soutenue le 11 Juin 1987, devant la Commission d'examen

Président :	M. RAYNAUD
Examinateurs :	J. GIRAUD
	P. KREE
	M. LEJEUNE-JALABERT
	B. TEISSIER

V. $\kappa > 2$ et le contact maximal.

Nous verrons dans les chapitres suivants qu'on peut parfois trouver une surface régulière $Y(n) \subset X(n)$ "ayant le contact maximal pour (ν,κ)". C'est-à-dire, que si l'on a une suite d'éclatements $\pi(n+i) : X(n+i+1) \longrightarrow X(n+i)$, $i \in \mathbb{N}$, $\pi(n+i)$ centré en $x(n+i)$ point fermé de $X(n+i)$ et (ν,κ)-proche de $x = x(n) \in X(n)$, tout point $x'(i) \in X(n+i)$ (ν,κ)-proche de x est sur $Y(n+i)$ le transformé strict d'une surface régulière $Y(n) \subset X(n)$.

PROPOSITION 1.

Avec les notations habituelles (I.A, I.C.), on suppose que l'on a une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x(n)}$ adaptée à $x(n)$ et telle que, en posant $Y(n) = \mathrm{div}(u_1)$, $\nu = \nu(x(n)) \geq 1$, on a

(1) $O_{Y(n),x(n)} \subset O_{X(n),x(n)}$,

(2) (u_2,u_3) est un s.r.p. de $O_{Y(n),x(n)}$,

(3) $f = h(x(n))\left(\sum_{0\leq j\leq \nu} u_1^{\nu-j} g_j + u_1^{\nu+1} a\right) + R(f,u,\lambda)$, $g_j \in O_{Y(n),x(n)}$, $0 \leq j \leq \nu$, $a \in O_{X(n),x(n)}$.

Soit $\pi(n+i) : X(n+i+1) \longrightarrow X(n+i)$, $i \in \mathbb{N}$ une suite d'éclatements, $\pi(n+i)$ étant centré en $x(n+i)$, $x(n+i) \in Y(n+i) \subset X(n+i)$ où $Y(n+i)$ est le transformé strict de $Y(n)$ et $x(n+i)$ étant au dessus de $x(n+i-1)$ pour $i \geq 1$.

Soit $E(j,n+i)$, $0 \leq j \leq \nu$, $i \in \mathbb{N}$ le fermé de $Y(n+i)$ ainsi défini :

si $g_j = 0$, on a $E(j,n+i) = \emptyset$,

si $g_j \neq 0$ et $A(1)+\nu-j \neq 0(p)$, on a $E(j,n+i) = (\mathrm{div}(u_2^{A(2)} g_j))_{red}$,

si $g_j \neq 0$ et $A(1)+\nu-j = 0\ (p)$, on a : $E(j,n+i) = E(u_2^{A(2)} u_3^{A(3)} g_j)$,

où, pour $\varphi \in O_{Y(n+i)}(Y(n+i))$ on a posé

$$E(\varphi) = \{x \in Y(n+i) |\ d\varphi \in \mathfrak{m}_x \Omega_{Y(n+i)}\}$$

où $\mathfrak{m}_x$ est l'idéal de $\overline{\{x\}}$, cf. [8] (1.2).

On pose

$E'(n+i) = \overline{E(n+i)-Y(n+i)} \cap Y(n+i)$ et $F(n+i) = E'(n+i) \bigsqcup_{0\leq j\leq\nu} E(j,n+i)$.

Alors, il existe $\ell \geq 1$ tel que pour $i \geq \ell$ et tout $x \in Y(n+i)$ se projettant sur $x(n+i-1)$, on a

(4) $O_{Y(n+i),x} \subset O_{X(n+i),x}$

(5) $\exists (v,\mu)$ p-base de $O_{X(n+i),x}$ adaptée à x et telle que

$$\mathrm{div}(v_1) = Y(n+i) \subset X(n+i),\ \mathrm{div}(v_2) \subset E(n+i)\ ,$$

$F(n+i)$ est un d.c.n. de $Y(n+i)$ avec

$$\mathrm{div}(v_2) \subset F(n+i) \subset \mathrm{div}(v_2 v_3) \quad \text{et}$$

$$f = h(x)\ \Big(\sum_{0 \leq j \leq \nu} \varepsilon_j'\ v_2^{a(j)}\ v_3^{b(j)}\ v_1^{\nu - j} + v_1^{\nu+1}\ b\Big) + R(f,v,\mu)$$

avec $h(x) = v_1^{A(1)}\ v_2^{c(2)}\ v_3^{c(3)}$, $(v_2, v_3, \varepsilon_j') \in O^3_{Y(n+i),x}$, $\varepsilon_j' = 0$ si $g_j = 0$ et de plus

si $A(1) + \nu - j \neq 0(p)$ et $g_j \neq 0$ alors ε_j' est inversible,

si $A(1) + \nu - j = 0(p)$ et $g_j \neq 0$, alors la fonction $M_j = \varepsilon_j'\ v_2^{c(2)+a(j)}\ v_3^{c(3)+b(j)} \in O_{Y(n+i),x}$ satisfait à [8] (**) et $R(M_j, v, \mu) = 0$.

On explicitera [8] (**) à la fin de la preuve.

Preuve.

1.1. Puisque $x(n) \in Y(n) \subset X(n)$, la rétraction $r(n) : X(n) \longrightarrow Y(n)$ définie par l'inclusion $O_{Y(n),x(n)} \subset O_{X(n),x(n)}$ se prolonge canoniquement en $r(n+1) : X(n+1)' \longrightarrow Y(n+1)$ où $X(n+1)'$ est le complémentaire dans $X(n+1)$ de l'intersection des transformés stricts de $\mathrm{div}(u_2)$ et $\mathrm{div}(u_3)$, ou encore, de façon intrinsèque, l'intersection des transformés stricts des $\mathrm{div}(u)$, $u \in \mathfrak{m}_{Y(n),x(n)} \subset O_{X(n),x(n)}$. Par exemple, dans l'ouvert où $\mathrm{div}(u_2) = \pi(n)^{-1}(x(n))$ la rétraction $r(n+1)$ correspond à l'inclusion naturelle

$$O_{Y(n),x(n)}[u_3/u_2] \subset O_{X(n),x(n)}\ [u_1/u_2, u_3/u_2]\ .$$

Ce qui nous permet par récurrence d'écrire

$$O_{Y(n+i),x} \subset O_{X(n+i),x}\ ,$$

pour tout $x \in Y(n+i)$ avec $\pi(n+i-1)(x) = x(n+i-1)$. Ceci prouve (4) et donne un sens aux formules qui figurent dans (5).

1.2. Remarquons que

$$\alpha'(x(n)) = \mathrm{ord}_{x(n)}[h(x(n))] + \alpha(x(n)) \geqslant 2.$$

En effet, on a $\alpha(x(n)) \geqslant \nu(x(n)) \geqslant 1$ et, si $\alpha'(x(n)) = 1$ alors $\mathrm{ord}[h(x(n))] = 0$ ce qui implique $E(n) = \emptyset$ et $\alpha(x(n)) = 1$. Alors $\exists i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$ et $\mathrm{ord}_{x(n)}[D^{u,\lambda}_{[i]} f] = 0$ et donc $\nu(x(n)) = 0$, ce qui est une contradiction.

Si on effectue l'éclatement $\pi(n)$ centré en $x(n)$, alors en $x(n+1)$ on a, par exemple, $\mathrm{div}(u_2) = \pi(n)^{-1}(x(n))$ et $\mathrm{ord}_{u_2}[h(x(n+1))] = \alpha'(x(n)) \geqslant 2$. Donc, nous supposons désormais $A(2) \geqslant 2$ ou $A(3) \geqslant 2$, ce qui implique $\mathrm{ord}_{x(n)}[u_2^{A(2)}\ u_3^{A(3)}\ g_j] \geqslant 2$ et donc

(6) si $g_j \neq 0$, on a $E(j,n) \neq \emptyset$.

1.3. D'après le théorème de désingularisation pour les courbes, appliqué à la courbe plongée dans $Y(n)$ et d'équation :

$$\prod_{j \in J} g_j\ u_2^{A(2)}\ u_3^{A(3)} \ , \ J = \{j \ ; \ 0 \leqslant j < \nu \ , \ g_j \neq 0, \ A(1)+\nu-j \neq 0(p)\} \ ,$$

il existe un entier k tel que

(7) $\forall i \geqslant k$, $\exists (v_2,v_3)$ s.r.p. de $O_{Y(n+i),x}$ tel que

$\mathrm{div}(v_2) = \pi(n)^{-1}(x(n+i-1))$ et si $(g_j \neq 0$ et $A(1)+\nu-j \neq 0(p))$, alors $u_2^{A(2)}\ u_3^{A(3)}\ g_j = \varepsilon_j\ v_2^{a'(j)}\ v_3^{b'(j)}$ avec $\varepsilon_j \in O^{*}_{Y(n+i),x}$.

De plus, par [8] appliqué à $Y(n)$ et à chacun des $u_2^{A(2)}\ u_3^{A(3)}\ g_j$ où $g_j \neq 0$ et $A(1)+\nu-j = 0(p)$, quitte à prendre k plus grand, on peut supposer que

(8) si $A(1)+\nu-j = 0(p)$ et $g_j \neq 0$, on a [8] (**) pour la fonction $u_2^{A(2)}\ u_3^{A(3)}\ g_j$ sur la surface $Y(n+i)$ au voisinage de $x(n+i)$.

Explicitons (8). Tout d'abord, on a [8] (*), autrement dit, $E(j,n+i)$ est un d.c.n. non vide (cf. (6)) de $Y(n+i)$ pour $i \geqslant k$. Quitte à augmenter k, on peut même supposer que $F(n+i)$ est un d.c.n. de $Y(n+i)$ et qu'il existe un s.r.p. $v = (v_2,v_3)$ de $O_{Y(n+i)}$ avec dans $Y(n+i)$:

(9) $\operatorname{div}(v_2) \subset E'(n+i) \subset F(n+i) \subset \operatorname{div}(v_2v_3) \subset Y(n+i)$,

et $\operatorname{div}(v_2) \subset E(j,n+i)$ dès que $g_j \neq 0$, $0 \leq j \leq \nu$, et bien sûr, on a (**) pour $g'_j = u_2^{A(2)}\, u_3^{A(3)}\, g_j$, c'est-à-dire $\mathcal{J}(Y(n+i),\, g'_j,\, E(j,n+i))$ est principal. Puisque x appartient à $Y(n+i)$ qui est le transformé strict de $Y(n) = \operatorname{div}(u_1)$, il existe $v_1 \in O_{X(n+i),x}$ tel que :

(10) $$u_1 = v_1 v_2^{B(2)}\, v_3^{B(3)} \quad , \; B(2),\, B(3) \in \mathbb{N} ,$$

et (v_1,v_2,v_3) est un s.r.p. de $O_{X(n+i),x}$ que l'on complète en une p-base (v,μ). On avait

$$f = h(x(n))u_1^{\nu+1}\, a + R(f,u,\lambda) + \sum_{0\leq j\leq \nu} u_1^{A(1)+\nu-j}\, g'_j$$

on a donc

(11) $$f = h(x)v_1^{\nu+1}\, b + R(f,u,\lambda) + \sum_{0\leq j\leq \nu} v_1^{A(1)+\nu-j}\, g'_j (v_2^{B(2)}\, v_3^{B(3)})^{A(1)+\nu-j} .$$

Pour toute $\varphi \in O_{X(n+i),x}$, on pose $S(\varphi) = \varphi - R(\varphi,v,\mu)$ et on pose

(12) $$S(h(x)v_1^{\nu+1}\, b) = h(x)\, v_1^{\nu+1}\, c ,$$

(13) $$S(v_1^{A(1)+\nu-j}\, g'_j(v_2^{B(2)}\, v_3^{B(3)})^{A(1)+\nu-j}) = v_1^{A(1)+\nu-j}\, M_j .$$

Alors, comme $S(u+v) = S(u)+S(v)$, on a

(14) $$f = h(x)\, v_1^{\nu+1}\, c + \sum_{0\leq j\leq \nu} v_1^{A(1)+\nu-j}\, M_j + R(f,v,\mu) .$$

On définit $c(2)$ et $c(3)$ par

(15) $$h(x) = v_1^{A(1)}\, v_2^{c(2)}\, v_3^{c(3)}$$

Je dis que $h(x)$ divise chacun des $v_1^{A(1)+\nu-j}\, M_j$. En effet il divise leur somme, les $A(1)+\nu-j$ sont tous distincts et les M_j appartiennent à $O_{Y(n+i),x}$

Si $A(1)+\nu-j \neq 0 \; (p)$ et $g_j \neq 0$, on a

(16) $$M_j = \varepsilon_j' \, v_2^{a(j)+c(2)} \, v_3^{b(j)+c(3)} \,, \quad (a(j),b(j)) \in \mathbb{N}^2 \,,$$

où ε_j' est une unité. En effet, par (7), on a $g_j' = \varepsilon_j \, v_2^{a'(j)} \, v_3^{b'(j)}$. Or $S(\varepsilon v_1^a v_2^b v_3^c) = \varepsilon' v_1^a v_2^b v_3^c$ avec $\varepsilon = \varepsilon'$ mod. $\mathcal{M}$ dès que $(a,b,c) \neq (0,0,0)(p)$. On déduit donc (16) de (13) et du fait que $h(x)$ divise $v_1^{A(1)+\nu-j} M_j$.

Si $A(1)+\nu-j = 0(p)$, on a (**) pour M_j. En effet, on a (**) pour g_j' avec $\mathrm{div}(v_2) \subset E(g_j') \subset \mathrm{div}(v_2 v_3)$. Montrons que l'on a (**) pour

$$g_j'' = g_j' \, (v_2^{B(2)} \, v_3^{B(3)})^{A(1)+\nu-j} \,.$$

Pour cela observons que si $B(2) > 0$, alors $\mathrm{div}(v_2)$ est le transformé strict du diviseur exceptionnel d'un éclatement $\pi(n+j)$, $0 \leq j \leq i-1$; en effet $B(2) > 0$ signifie que v_2 divise u_1. De ceci il résulte que $\mathrm{div}(v_2) \subset E(g_j')$. Même chose en remplaçant v_2 par v_3. On a donc $E(g_j') = E(g_j'')$ et comme $A(1)+\nu-j$ est divisible par p, on a

$$\mathcal{J}(Y(n+i), g_j'', E(g_j'')) = (v_2^{B(2)} \, v_2^{B(3)})^{A(1)+\nu-j} \, \mathcal{J}(Y(n+i), g_j', E(g_j'))$$

ce qui prouve (**) pour g_j''. Or on a $M_j = S(g_j'') = g_j'' + R_j^p$, d'où (**) pour M_j, que l'on peut comme plus haut écrire

(17) $$M_j = \varepsilon_j' \, v_2^{a(j)+c(2)} \, v_3^{b(j)+c(3)} \,.$$

Ceci prouve la Proposition 1. Explicitons maintenant la condition (**) pour M_j en n'oubliant pas que nous venons de prouver

(18) $$E(M_j) = E(g_j') = E(j,n+i)$$

et que l'on a

(19) $$\mathrm{div}(v_2) \subset E(M_j) \subset \mathrm{div}(v_2 v_3) \,.$$

(20) Si $A(1)+\nu-j = 0(p)$ et $g_j \neq 0$

alors on a l'une des conditions que voici

(20-1) $b(j)+c(3) = 0$, $a(j)+c(2) \geq 2$, $a(j)+c(2) \neq 0(p)$ et ε_j' inversible

(20-2) $\begin{cases} b(j) + c(3) = 0 \text{ , } a(j) + c(2) \geqslant 2 \text{ et } (\varepsilon'_j, v_2) \text{ sont} \\ \text{p-indépendants.} \end{cases}$

(20-3) $\begin{cases} b(j) + c(3) \geqslant 2 \text{ , } a(j) + c(2) \geqslant 2 \text{ ,} \\ \varepsilon'_j \text{ inversible et } (b(j) + c(3), a(j) + c(2)) \neq (0,0) \ (p) \text{ .} \end{cases}$

(20-4) $\begin{cases} b(j) + c(3) \geqslant 2 \text{ , } a(j) + c(2) \geqslant 2 \text{ ,} \\ \varepsilon'_j \text{ inversible et } (v_2, v_3, \varepsilon'_j) \text{ p-indépendants} \end{cases}$

NOTATION 1.3.

Avec les notations et hypothèses de 1, pour tout $i \geqslant \ell$ et tout point fermé $x \in Y(n+i) \subset X(n+i)$ au-dessus de $x(n+i-1)$ et ν-proche de x, on note $a(v,\mu) = \inf\{a(j).j^{-1} \mid 1 \leqslant j \leqslant \nu \text{ , } \varepsilon'_j \neq 0\}$.

PROPOSITION 2.

Reprenons les hypothèses et notations de 1. Soit x un point fermé maigre de $Y(n+i) \subset X(n+i)$, x point ν-proche de $x(n)$ et vérifiant

(1) $F(n+i) = \mathrm{div}(v_2) \cap Y(n+i)$,

(2) $\mathrm{div}(v_1) = Y(n+i) \subset E(n+i)$,

(3) $c\ell^{\nu}(J(X(n+i), f, E(n+i))) \neq 0 \mod (v_2)$ où $\nu = \nu(x) \geqslant 1$.

Alors

(i) $E(n+i) = \mathrm{div}(v_1 v_2)$, $F(n+i) = V(v_1, v_2)$,

(ii) $J(X(n+i), f, E(n+i)) = J(X(n+i), f, E(n+i), F(n+i))$,

(iii) $1 \leqslant a(v,\mu) < \infty$,

(iv) $\alpha(F(n+i)) = \nu(F(n+i)) = \nu$,

(v) $F(n+i)$ est permise en x et c'est la seule courbe de $\mathrm{Sing}_{\nu}(X(n+i))$ où $m(.) = 2$,

(vi) si $\kappa(x) \neq 1$, alors $a(v,\mu) \in \mathbb{N}$ et pour un γ inversible, on a $J(X(n+i), f, E(n+i)) = (v_1 + \gamma v_2^{a(v,\mu)})^{\nu} \mod. I^{+}_{a(v,\mu)}$ où $I^{+}_{a(v,\mu)} = (v_1^a v_2^b v_3^c \text{ ; } (a+ba(v,\mu)^{-1}, c) > (\nu, 0))$ l'ordre étant l'ordre lexicographique .

2.1. La relation (i) est un corollaire de 1(5) et de la définition de $F(n+i)$. Alors, par (i) et I.A.1. (16), on a

$$h(x)^{-1}(DM^{v,\mu}_{[i]}\ f,\ D^{v,\mu}_{[3]}\ f,\ 1\leq i\leq s) = J(X(n+i),f,E(n+i))$$
$$= J(X(n+i),f,E(n+i),F(n+i))\ ,$$

ce qui prouve (ii).

En rappelant 1(5), on a

$$(4)\qquad f = h(x)\ (\sum_{0\leq j\leq \nu} \varepsilon'_j\ v_2^{a(j)}\ v_1^{\nu-j} + v_1^{\nu+1}\ b) + R(f,v,\mu)$$

et par [8] (**) et 1.2 (20), si $\varepsilon'_j \neq 0$, on a

$$(5)\qquad h(x)^{-1}(DM^{v,\mu}_{[i]}\ ,\ D^{v,\mu}_{[3]},\ 1\leq i\leq s)(\varepsilon'_j\ h(x)\ v_2^{a(j)}\ v_1^{\nu-j}) = (v_2^{a(j)}\ v_1^{\nu-j}).$$

Or, pour un j, $1\leq j\leq \nu$, on a $\varepsilon'_j \neq 0$ et $a(j) = ja(v,\mu)$, donc par (5), on a $\nu(x) \leq ja(v,\mu)+\nu-j$. D'où $a(v,\mu)\geqslant 1$.
De plus, $a(v,\mu) < \infty$, sinon on a $J(X(n+i),f,E(n+i)) =(v_1^{\nu})$, d'où $Y(n+i)\subset \mathrm{Sing}_{\nu}(X(n+i))$, x ne serait pas maigre. On a (iii). Par (ii) et par semi-continuité de $\nu(.)$, on a $\nu(F(n+i)) = \alpha(F(n+i))\leq \nu(x) = \nu$.
Mais, puisque $a(v,\mu)\geqslant 1$, par (5), on a $\alpha(F(n+i))\geqslant\nu$. D'où (iv).
Par (ii), on a $\alpha(F((n+i),x) = \alpha(F(n+i))$, d'où par (iv) :

$$\alpha(F(n+i),x) = \alpha(F(n+i)) = \nu(F(n+i)) = \nu \geqslant 1,$$

par I.D.1., $F(n+i)$ est permise en x. Par (i), il est clair que $F(n+i)$ est la seule composante de dimension 1 de $\mathrm{Sing}_{\nu}(X(n+i))$ passant par x et où m(.) vaut 2. Ce qui prouve (v).

2.2. Par (v), l'algorithme de $\kappa = 1$ ou celui du point bon appliqué en x nous impose d'effectuer l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n+i)$ centré en en $F(n+i)$. Avant d'effectuer π , établissons le lemme suivant.

<u>LEMME 2.2.1.</u>

Avec les hypothèses et notations de 2, si $a(v,\mu)> 1$ ou si $a(v,\mu) = 1$ et si pour tout γ inversible, on a

$J(X(n+i),f,E(n+i)) \neq (v_1+\gamma v_2^{a(v,\mu)})^{\nu}$ mod. $I^{+}_{a(v,\mu)}$ alors $V_1 \in \mathrm{VDir}\ J(X(n+i),f,E(n+i))$.

Preuve.

Voyons le cas où $a(v,\mu)>1$. Dans (5), on a : $a(j)\geqslant ja(v,\mu)>j$, pour $1\leq j\leq \nu$ et par (3) ($a(0)=0$ et $\varepsilon'_1\neq 0$). Donc par (ii),

$$J(X(n+i),f,E(n+i),F(n+i)) = (v_1^{\nu}) \text{mod. } (v_1,v_2)^{1+\nu}$$

et donc $\mathrm{VDir}(x) = \langle V_1\rangle$.

Si $a(v,\mu)=1$, alors pour un j, $1\leq j\leq \nu$, on a $\varepsilon_j\neq 0$, et ε_j inversible ou $D^{v,\mu}_{[3]}\ \varepsilon_j$ inversible. Alors, par (3), on a $e(x)=2$, $\mathrm{VDir}(x)\subset\langle V_1,V_2\rangle$, l'hypothèse de 2.2.1. entraîne alors $\mathrm{VDir}(x)=\langle V_1,V_2\rangle$, ce qui finit la preuve de 2.2.1.

2.2.2. Nous allons nier les hypothèses de (vi) et montrer qu'alors $\kappa(x)=1$. Par (v), x n'est pas isolé dans sa ν-strate, donc $\kappa(x)\neq 0$. D'autre part, par (v), l'algorithme de $\kappa=1$ nous impose d'effectuer l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n+i)$ centré en $F(n+i)$. Alors, par 2.2.1., il y a au plus un point ν-proche de x, c'est le point x' de paramètres $w=(v_1v_2^{-1},v_2,v_3)$ et on a

$$(6)\qquad f = h(x')\Big(\sum_{0\leq j\leq\nu}\varepsilon'_j\, w_2^{a(j)-j}\, w_1^{\nu-j} + w_1^{\nu+1}\, bw_2^{-\nu+1}\Big) + R(f,w,\mu)\ .$$

Notons $Y'=\mathrm{div}(w_1)$, alors $\pi|_{Y'} : Y' \longrightarrow Y(n+i)$ est un isomorphisme et donc f, x', Y', (w,μ) satisfont à 1.(4)(5). De plus, par (6), on a : $a(w,\mu)=a(v,\mu)-1$ et $\nu(x')=\nu$,

d'où $a(v,\mu)\geqslant 2$. De plus, si $a(w,\mu)\in\mathbb{N}$, alors $a(v,\mu)\in\mathbb{N}$ et comme $J(X',f,E') = J(X(n+i),f,E(n+i))v_2^{-\nu}$, et comme pour tout $\gamma'\in O_{X',x'}$, on peut trouver $\gamma\in O^{*}_{X(n+i),x(n+i)}$ avec $\gamma'=\gamma$ mod. (v_2), on a $J(X',f,E')\neq(w_1+\gamma' w_2^{a(w,\mu)})^{\nu}$ mod. $I^{+}_{a(w,\mu)}$, une récurrence décroissante sur $a(v,\mu)$ prouve que $\kappa(x)=1$. Cette contradiction prouver (vi).

PROPOSITION 3.

Avec les hypothèses et notations de 2., supposons de plus que $\kappa(x) > 1$ et effectuons l'éclatement $\pi(n+i) : X(n+i+1) \longrightarrow X(n+i)$ centré en x. Soit $y \in Y(n+i+1) \subset X(n+i+1)$ un point ν-proche de x.

(i) Si $\mathrm{ord}_y(F((n+i+1)) = 2$, alors y est le point de paramètres $w = (v_1v_3^{-1}, v_2v_3^{-1}, v_3)$, on a $E(n+i+1) = \mathrm{div}(w_1w_2w_3)$, $\alpha(y) = \nu$ et $\Delta(J(X(n+i+1), f, E(n+i+1))\ ;\ w_3, w_2\ ;\ w_1) = (a(v,\mu)-1,\ a(v,\mu)) + \mathbb{R}_+^2$. Si de plus $\alpha(x) = \nu(x)$, alors pour un γ inversible on a

$J(X(n+i+1), f, E(n+i+1)) = (w_1+\gamma w_2^{a(v,\mu)}\ w_3^{a(v,\mu)-1})^{\nu} \bmod.\ w_3\ I_{\delta(w,\mu)}$,

où $I_{\delta(w,\mu)} = (w_1^a\ w_2^b\ w_3^c\ ;\ a+ba(v,\mu)^{-1} \geq \nu\ ,\ a+ca(w,\mu)^{-1} \geq \nu)$, $a(w,\mu) = a(v,\mu)-1$.

(ii) Si $\mathrm{ord}_y(F(n+i+1)) = 1$, alors on a 1. (4) (5), 2.(3) pour $(x, f, (t,\mu'))$ où (t,μ') est une p-base de $O_{X(n+i+1),y}$ avec $t_1 = v_1v_2^{-1}$ et $t_2 = v_2$; de plus $a(t,\mu') = a(v,\mu) - 1$. Si en plus on a $\alpha(x) = \nu(x)$, alors on a

$I(X(n+i+1), f, (t,\mu')) = (t_1+\gamma t_2^{a(t,\mu')}) \bmod.\ t_2\ I_{a(t,\mu')}$,

où $I_{a(t,\mu')} = (t_1^a\ t_2^b\ ,\ a+ba(t,\mu')^{-1} \geq \nu)$ et $\gamma \in O^*_{X(n+i+1),y}$.

3.1. Prouvons (i). Comme $\mathrm{ord}_x(F(n+i)) = 1$, si $\mathrm{ord}_y(F(n+i+1)) = 2$, il est clair que y est le point de paramètres w , que $E(n+i+1) = \mathrm{div}(w_1w_2w_3)$, c'est-à-dire que y est combinatoire et donc

(1) $J(X(n+i+1), f, E(n+i+1)) = J(X(n+i+1), f, E(n+i+1), \{y\})$

et que $\alpha(y) = \nu(y) = \nu$.

Remarquons que

$$v_3^{-\nu}\ I^+_{a(v,\mu)} = v_3^{-\nu}(v_1^a\ v_2^b\ v_3^c\ ;\ (a+ba(v,\mu)^{-1}, c) > (\nu,0))$$
$$\subset (w_1^a\ w_2^b\ w_3^{a+b+c-\nu}\ ;(a+ba(v,\mu)^{-1}, c) > (\nu,0)) \quad .$$

Par 2.,on a $a(v,\mu) \in \mathbb{N}$ donc si $a+ba(v,\mu)^{-1} > \nu$, on a $b \geq 1+(\nu-a)a(v,\mu)$, d'où si $(a+ba(v,\mu)^{-1}, c) > (\nu,0)$, on a :

$$a+(a+b+c-\nu-1)(a(v,\mu)-1)^{-1} \geq \nu\ .$$

Cette inégalité et l'inclusion ci-dessous donnent

(2) $\qquad v_3^{-\nu}\ I^+_{a(v,\mu)} \subset w_3\ I_{\delta(w,\mu)}$.

Par 2.(vi), on a pour un $\gamma \in O_{X(n+i),x(n+i)}$:

$$J(X(n+i),f,E(n+i)) = (v_1+\gamma v_2^{a(v,\mu)})^{\nu} \bmod . I^+_{a(v,\mu)} .$$

Si $\alpha(x) = \nu(x)$, il existe un élément g de $J(X(n+i),f,E(n+i),\{x\})$ avec $\mathrm{ord}_x(g) = \nu$. Comme

$$J(X(n+i),f,E(n+i),\{x\}) \subset J(X(n+i),f,E(n+i))$$

et que $a(v,\mu) \geqslant 1$, on a

$$g = \rho(v_1+\gamma v_2^{a(v,\mu)})^{\nu} \bmod .\ I^+_{a(v,\mu)}\ ,\quad \rho \ \text{ inversible.}$$

D'où

(3) $\qquad J(X(n+i),f,E(n+i),\{x\}) = (v_1+\gamma v_2^{a(v,\mu)})^{\nu} \bmod . I^+_{a(v,\mu)}$.

Alors on a

$$J(X(n+i+1),f,E(n+i+1)) = v_3^{-\nu} J(X(n+i),f,E(n+i),\{x\})\ ,$$

(4) $\qquad \left\{ \begin{array}{l} J(X(n+i+1),f,E(n+i+1)) \\ = (w_1+\gamma w_2^{a(v,\mu)}\ w_3^{a(v,\mu)-1})^{\nu} \bmod . w_3\ I_{\delta(w,\mu)} \end{array} \right.$

Si $\alpha(x) = 1+\nu(x)$ alors par 2 (vi), on a pour un γ et un ρ inversibles :

(5) $\qquad h(x)^{-1}\ D^{v,\mu}_{[3]}\ f = \rho(x_1+\gamma v_2^{a(v,\mu)})^{\nu} \bmod . I^+_{a(v,\mu)}$,

et

(6) $\qquad J(X(n+i),f,E(n+i),\{x\}) \subset I^+_{a(v,\mu)}$.

On a $J(X(n+i+1),f,E(n+i+1)) = v_3^{-1-\nu}\ J(X(n+i),f,E(n+i),\{x\})$ et par (2) et (5), on a :

(7) $\qquad \left\{ \begin{array}{l} J(X(n+i+1),f,E(n+i+1)) \subset I_{\delta(w,\mu)} \\ \text{et} \\ (w_1+\gamma w_2^{a(v,\mu)}\ w_3^{a(v,\mu)-1})^{\nu} \in J(X(n+i+1),f,E(n+i+1)) \bmod . w_3 I_{\delta(w,\mu)} \end{array} \right.$.

ce qui finit de prouver (i).

3.2. Prouvons (ii). D'après 1, on a $F(n+i+1) = \mathrm{div}(v_2)$ et pour toute p-base (t,μ') avec $t_1 = v_1 v_2^{-1}$, $t_2 = v_2$, $t_3 \in O_{Y(n+i+1),y}$, $\mu'_j \in O_{Y(n+i+1),y}$, $4 \leq j \leq s$, on a 1 (4) (5) et 2 (3). On vérifie que

$$(8) \qquad v_2^{-\nu}\, I^+_{a(v,\mu)} \subset I^+_{a(t,\mu')} \quad \text{où} \quad a(t,\mu') = a(v,\mu)-1 .$$

Si $\alpha(x) = \nu(x)$, par (3), on a

$$(9) \qquad \begin{cases} J(X(n+i+1),f,E(n+i+1)) = v_2^{-\nu} J(X(n+i),f,E(n+i)) \\ = (t_1+\gamma t_2^{-a(v,u)-1})^{\nu} \ \mathrm{mod}.t_2\ I_{a(t,\mu')} . \end{cases}$$

Si $\alpha(x) = 1+\nu(x)$, par (5) et (6), on a :

$$(10) \qquad \begin{cases} (t_1+\gamma t_2^{a(v,\mu)-1})^{\nu} \in J(X(n+i+1),f,E(n+i+1))\mathrm{mod.}\ I^+_{a(t,\mu')} \\ J(X(n+i+1),f,E(n+i+1)) \subset I_a(t,\mu') , \end{cases}$$

Par 1 (4) (5), on a:

$$f = h(y)\ \Big(\sum_{0 \leq j \leq \nu} \varepsilon''_j\ t_1^{\nu-j}\ t_2^{a(j)} + t_1^{1+\nu}\ c\Big) + R(f,t,\mu')$$

et (9) et (10) prouvent que

$$(11) \qquad a(t,\mu') = a(v,\mu)-1 = \inf\{a(j)j^{-1}\ ,\ \varepsilon''_j \neq 0\}$$

et que

$$(12) \qquad J(X(n+i+1),f,E(n+i+1)) = (t_1^{\nu})\mathrm{mod}.(t_2) .$$

Ces relations (11) et (12) finissent de prouver (ii).

VI. $\kappa = 3$

INTRODUCTION.

Etablissons la proposition suivante.

PROPOSITION.

Soit x un point fermé de $\mathrm{Sing}(X(n))$ avec $v(x) = 1$, $e(x) = 2$ et $\alpha(x) = \nu(x)$.

(i) Alors on peut choisir une p-base (u,λ) de $O_{X(n,x)}$ adaptée en x et telle que

(1) $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1+U_2\rangle$,

(2) $E(n) \supset \mathrm{div}(u_1u_2)$.

(ii) Effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x, soit $x' \in X'$ un point ν-proche de x qui n'est pas sur le transformé strict de $V(u_1,u_2)$. Alors on a

(3) $\kappa(x') \leq 2$

ou

(4) $$\begin{cases} f = h(x')(\gamma v_1^{1+\nu} + v_2 g) + R(f,v,\mu) \ , \quad 1+\nu \neq O(p), h(x') = (v_2^a v_3^b)^p \ , \\ (v,\mu) \text{ étant une p-base de } O_{X',x'} \text{ adaptée en } x' \text{ avec} \\ \mathrm{div}(v_2) = \pi^{-1}(x),\ v_1v_2 = u_1+u_2 \ , \quad \nu = \nu(x') = \nu(x) \ , \quad \gamma \in O^*_{X',x'}, (a,b) \in \mathbb{N}^2 \end{cases}$$

Preuve.

Il est clair qu'on peut trouver (u,λ) qui vérifie (1). Alors on a (2). En effet, si $\mathrm{div}(u_1) \not\subset E(n)$, quitte à remplacer u_1 par u_1+u_2, on obtiendrait $e(x) = v(x) = 1$, ce qui serait une contradiction. Donc $\mathrm{div}(u_1) \subset E(n)$ et de même, $\mathrm{div}(u_2) \subset E(n)$.

Prouvons (ii). Si $\alpha'(x) \neq O(p)$, par I.E.5., on a (3) en x'. Si $\alpha'(x) = O(p)$

alors $\quad c\ell^{\nu}[h(x)^{-1}(DM^{u,\lambda}_{[1]} + DM^{u,\lambda}_{[2]} + DM^{u,\lambda}_{[3]})f] = 0$,

et si $\quad c\ell^{\nu}[h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[i]}\, f] = 0 \ , \quad 3 \leq i \leq s$, alors

par I.E.6, on a (4) en x'.

Sinon, par IV. B.2.3., on a $\kappa(x')\leq 2$.

LE CAS JOYEUX.

La fin de cet article est essentiellement consacrée à l'étude du cas (4) que l'on appelle "cas joyeux". Si $\alpha(x') = \nu(x') = \nu$ alors dans (4) on a $\mathrm{ord}_{x'}(g) = \nu-1$, ce cas sera étudié §.A, E, G de ce chapitre, selon la nature de $c\ell^{\nu}(J(X',f,E',\{x'\}))$.

Si $\alpha(x') = 1+\nu(x') = 1+\nu$, l'étude est plus difficile et nécessite le chapitre VII en entier.

PLAN DU CHAPITRE.

Le cas $\kappa = 3$ est partagé en plusieurs sous-cas $\kappa = 3(A)\ldots(G)$ indexés par des lettres. On montrera les théorèmes II.C.4.2. et II.C.4.4. par récurrence sur l'indice alphabétique. On peut remarquer que ces sous-cas ne sont pas disjoints. On peut avoir ($\kappa(x) = 3(A)$ et $3(G)$) ou ($\kappa(x) = 3(E)$ et $3(G)$). Les cas $\kappa = 3(B)$, (C), (D) sont des cas simples où $v(x) = 2$. Le cas $\kappa = 3(F)$ est proche de $\kappa = 2$.

A. PREMIER CAS DE $\kappa = 3$.

REMARQUE A.1.

Notons $\mathcal{H} = \mathcal{H}(X(n),f,E(n))$ (I.A.2.), il se peut qu'il existe $D\in\mathcal{D}(X(n))$ telle que $D\mathcal{H}\subset\mathcal{H}$ et (I.A.1.) $D\notin\mathcal{D}(X(n),E(n))$. Nous allons préciser ce phénomène dans la proposition suivante.

PROPOSITION A.2.

Soit $(u,\lambda) = (\lambda_i)_{1\leq i\leq s}$ (I.A.1.), une p-base de $O_{X(n),x(n)}$ adaptée en $x(n)$ soit $D\in\mathcal{D}(X(n))$, on note

$$D = \sum_{1\leq i\leq s} a(i)\, D^{u,\lambda}_{[i]}\ , a(i)\in O_{X(n),x(n)}\ ,\ 1\leq i\leq s\ .$$

Avec les notations de A.1., on a l'équivalence

$$D\mathcal{H}\subset\mathcal{H} \Longrightarrow (\lambda_i|a(i) \text{ si } A(i) \neq O(p))\ .$$

REMARQUE A.2.1.

On rappelle (I.A.1. (16)) que l'on a

$D\in \mathcal{D}(X(n),E(n)) \Longleftrightarrow (\lambda_i | a(i)$ si $div(u_i) \subset E(n)) \Longleftrightarrow (\lambda_i | a(i)$ si $A(i) \neq 0)$, et que $\lambda_i = u_i$ pour $1 \leq i \leq 3$.

A.2.2. Preuve de A.2.

On note $\mathcal{H} = (u_1^{A(1)}\ u_2^{A(2)}\ u_3^{A(3)})$, on a

(1) $$D(h(x(n))) = \sum_{1\leq i\leq s} A(i)a(i)h(x(n))u_i^{-1}$$

On a

$D\mathcal{H}\subset\mathcal{H} \Leftrightarrow \forall i \in I\ \ ord_{u_i}(A(i)a(i)h(x(n))u_i^{-1}) \geq A(i) \Longleftrightarrow (u_i | a(i)$ ou $A(i) = O(p))$.

Q.E.D.

DEFINITION et PROPOSITION A.3.

Avec les notations de A.1., on a équivalence entre les deux conditions :

(1) $\exists(u,\lambda)$ p-base $O_{X(n),x(n)}$ adaptée en $x(n)$ et telle que

$ord_{x(n)}[h^{-1}(x(n))\ D_{[1]}^{u,\lambda}\ f] = \nu(x(n))-1$,

$div(u_1) \subset E(n)$ et $A(1) = O(p)$,

(2) $ord_{x(n)}(\mathcal{J}(X(n),f,div(\mathcal{H}))) = \nu(x(n))-1+ord_{x(n)}(\mathcal{H})$.

Si on a (1) ou (2) en $x(n)\in Sing(X(n))$, on dit que $x(n)$ est à composante tangente, on écrira $x(n)$ est à C.T., si de plus $\nu(x(n)) \geq 1$ et $x(n)$ est maigre et $\kappa(x(n)) > 2$, on dira que $\kappa(x(n)) = 3(A)$.

Preuve de l'équivalence.

On rappelle (I.A.1.(6)) que

$\mathcal{J}(X(n),f,div(\mathcal{H})) = (Df\ ;\ D\mathcal{H}\subset\mathcal{H})$.

Par A.2., si on a (1) alors $D_{[1]}^{u,\lambda}\mathcal{H}\subset\mathcal{H}$, et donc $(1) \Longrightarrow (2)$.

Réciproquement, si on a (2), alors $\exists D$, $D\mathcal{H}\subset\mathcal{H}$ et

$ord_{x(n)}(Df) = \nu(x(n))-1 + ord_{x(n)}(\mathcal{H})$ donc $\exists i$, $1\leq i\leq s$,

$ord_{x(n)}[a(i)h(x(n))^{-1}\ D_{[i]}^{u,\lambda}\ f] \leq \nu(x(n))-1$, $\lambda_i | a(i)$, ou $A(i) = O(p)$

donc $a(i)D^{u,\lambda}_{[i]} \notin \mathcal{D}(X(n),E(n))$ et $a(i)\ D^{u,\lambda}_{[i]}\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$, donc $\lambda_i \nmid a(i)$

donc $i=1,2$ ou 3, en permutant les i, on prend $i=1$, alors $D^{u,\lambda}_{[1]}\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$

et $\mathrm{ord}_{x(n)}[h(x(n))^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[1]}\ f] \leq \nu - 1$ avec $\nu = \nu(x(n))$, donc

$$\mathrm{ord}_{x(n)}[h(x(n))^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[1]}\ f] = \nu - 1.$$

On a (1). Q.E.D.

COROLLAIRE A.3.1.

Avec les notations de A.3. (1), si on a $\kappa(x(n)) = 3$ (A), alors

(1) $h(x(n))^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[1]}\ f = u_1 g_1$ avec $\mathrm{ord}_{x(n)}(g_1) = \nu(x(n)) - 1 = \nu - 1$,

(2) $\mathrm{Sing}_\nu(X(n)) \subset \mathrm{div}(u_1) = Y(n)$.

La preuve de (1) est claire, de plus comme $\mathrm{ord}_{x(n)}(g_1) = \nu - 1$, localement u_1 est nul sur $\mathrm{Sing}_\nu(X(n))$.

COROLLAIRE A.3.2.

Si on a $\kappa(x(n)) = 3$ (A) alors si (v,μ) est une p-base de $O_{X(n),x(n)}$ adaptée en $x(n)$ et $\mathrm{div}(v_1) = \mathrm{div}(u_1)$ avec (u,λ) satisfaisant à A.3. (1), alors (v,μ) satisfait aussi à A.3. (1).

Preuve.

Posons $F(n) = \overline{E(n)-Y(n)} = \overline{E(n) - \mathrm{div}(u_1)}$

on vérifie que

A.3. (1) $\Longleftrightarrow$ $A(1) = O(p)$, $Y(n) \subset E(n)$ et

$\mathrm{ord}_{x(n)}(J(X(n),f,F(n))) = \nu(x(n)) - 1 + A(1)$.

Par I.A.2. (2), cette dernière condition dépend uniquement de $Y(n)$.

PROPOSITION A.4.

Soit $x(n)$ un point fermé à C.T.. Alors avec les notations de A.3. (1) :

(i) $\alpha(x(n)) = \nu(x(n)) = \nu$,

(ii) $U_1 \in \mathrm{VDir}(x(n))$,

(iii) si on effectue un éclatement permis en $x(n)$, alors tout point $x(n+1)$ ν-proche de $x(n)$ est sur $Y(n+1)$ le transformé strict de $\mathrm{div}(u_1)$ et on a $\alpha(x(n+1)) = \nu$, $x(n+1)$ est à C.T. et on a A.3. (1) pour $Y(n+1)$.

(iv) le théorème II.C.4.4. est vérifié pour $\kappa(x(n)) = 3(A)$.

Preuve.

On a (i) par A.3.1. (1). De plus, par A.3.1. (1), $F_1 = c\ell^{\nu}[h(x(n))^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[1]}\ f] = U_1G_1 \neq 0$, par I.E.2.1., $U_1 \in \mathrm{VDir}(x(n))$, ce qui donne (ii).

Soit c une courbe permise en $x(n)$, c est donc à c.n. avec $E(n)$, par A.3.2., on peut choisir (u,λ) de façon à avoir A.3.1. (1) et $I(c) = (u_i,u_j)$. Par I.D.4., on a $\alpha(c) = \nu$, donc $c\ell^{\nu}(I(X(n),f,(u,\lambda))) \subset (U_i,U_j)^{\nu}$, par (ii) on a $U_1 = U_i$ ou U_j donc, quitte à parmuter u_2 et u_3, on a $c = V(u_1,u_2)$. Effectuons l'éclatement $\pi(n)$ centré en c, par I.E.2.2. (6) et (2), il y a au plus un point $x(n+1)$, c'est le point de paramètres $v = (u_1/u_2,u_2,u_3)$ et on a

$$h(x(n+1))^{-1}\ DM^{v,\lambda}_{[1]}\ f = u_2^{-\nu}.h(x(n))^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[1]}\ f = v_1 g_1'$$

où $g_1' = u_2^{-\nu+1}\ g_1$ (A.3.1. (1)). On a donc bien A.3.1. (1) pour le transformé faible de $Y(n)$.

Effectuons l'éclatement $\pi(n)$ centré en $x(n)$ et soit $x(n+1)$ un point ν-proche de $x(n)$ qui appartient à $Y(n+1)$ par (ii), quitte à échanger u_2 et u_3, on a $\mathrm{div}(u_2) = \pi(n)^{-1}(x(n))$ en $x(n+1)$. On pose $u_1' = u_1/u_2$, $u_2' = u_2$, $u_3' = u_3/u_2$ et soit (v,μ) une p-base de $O_{X(n+1),x(n+1)}$ adaptée en $x(n+1)$ avec $v_1 = u_1'$, $v_2 = u_2'$. Alors d'après I.F.4.2. (8) et I.F.4.3.1. (3), I.F.4.3.2. (3), on a

$$h(x(n+1))^{-1}\ DM^{v,\mu}_{[1]}\ f = u_1'\ g_1.u_2^{1-\nu} \quad \mathrm{mod}.(u_2) ,$$

donc on a A.3. (1) pour (v,μ).

On a prouvé (iii).

Prouvons (iv). Plaçons-nous dans le complété $\hat{O}_{X(n),x(n)} = k(x(n))[[u_1,u_2,u_3]]$ de $O_{X(n),x(n)}$. On a donc une inclusion

(1) $$\hat{O}_{Y(n),x(n)} = k(x(n))[[u_1,u_2]] \hookrightarrow \hat{O}_{X(n),x(n)}$$

où $Y(n) = \mathrm{div}(u_1)$.

Pour prouver II.C.4.4. en ce cas, nous effectuons une suite d'éclatement $\pi(n+i) : X(n+i+1) \longrightarrow X(n+i)$, $i\in\mathbb{N}$, centrés en $x(n+i)\in X(n+i)$ points fermés (ν,κ)-proches de $x(n)$. Par (3), $\forall i$, $i\in\mathbb{N}$, $x(n+i)\in Y(n+i)\subset X(n+i)$, $Y(n+i)$ étant le transformé strict de $Y(n) = \mathrm{div}(u_1)\subset X(n)$. On va montrer que la suite $\pi(n+i)$ est finie, cela prouvera II.C.4.4 pour $\kappa = 3(A)$.

Par V il existe $\ell\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $i\geqslant \ell$, $x(n+i)$ est muni d'une p-base $(v(i),\mu(i))$ que l'on note plus simplement (v,μ) satisfaisant aux conditions de V.1. (5). Alors je dis que

(2) $$F(n+i) = \mathrm{div}(v_2v_3),\ i\geqslant \ell .$$

Sinon, par V.1. (5), on a $\mathrm{div}(v_2) = F(n+i)$ et par V.2, puisque $\kappa(x(n+i))\geqslant 3$, on a

(3) $$J(X(n+i),f,E(n+i)) = (v_1+\gamma v_2^{a(v,\mu)})^{\nu} \bmod . I^{+}_{a(v,\mu)}$$

or comme $h(x(n+i))^{-1}\ DM^{v,\mu}_{[1]}\ f = v_1\varphi$, avec φ d'ordre $\nu-1$, (3) est impossible, cette contradiction prouve (2).

Maintenant, je dis que

(4) $$\mathrm{VDir}(x(n+i)) = \langle V_1\rangle$$

Sinon par (ii), on a $v(x(n+i))\geqslant 2$ et comme $\kappa(x(n+i)) \neq 0$, on a $v(x(n+i)) \neq 3$ et donc $v(x(n+i)) = 2$. De plus, par V.1, pour tout $g\in I(X(n+i),f,(v,\mu))$, on a

$$c\ell^{\nu}(g) = \sum_{0\leqslant j\leqslant \nu} V_1^{\nu-j}\ \ell_j\ V_2^{a(j)}\ V_3^{b(j)}\ ,\ \ell_j\in k(x(n+i)).$$

Puisque $V_1\in \mathrm{VDir}(x(n+i))$, on peut appliquer I.E.5.1.6 qui donne

(5) $\quad \mathrm{VDir}(x(n+i)) = \langle V_1, V_j \rangle$, $j=2$ ou 3.

Alors, $\mathrm{div}(v_j) \subset E(n+i)$, sinon comme $\alpha(x(n+i)) = \nu$, par IV.A.1. (1) $x(n+i)$ serait à D.Q. et $\kappa(x(n+i)) \leq 2$. Posons $C_j = V(v_1, v_j)$, C_j est combinatoire (I.A.6.1) et si $\alpha(C_j) = \nu$ alors $\nu(C_j) = \nu$ et par I.D.4, C_j est permise. Par I.E.2.2. (6), si on effectue l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n+i)$ centré en C_j, dans X' il n'y a pas de point ν-proche de $x(n+i)$ donc $C_j = \mathrm{Sing}_\nu\,(X(n+i))$ et par III.4.2, on a $\kappa(x(n+i)) = 1$, ce qui est une contradiction. Donc $\alpha(C_j) < \nu$. Effectuons l'éclatement $\pi(n+i)$ centré en $x(n+i)$, par I.E.2.2. (7), il y a au plus un point ν-proche de $x(n+i)$, c'est le point $x(n+i+1)$ sur le transformé strict de C_j. Supposons par exemple que $j=2$, $x(n+i+1)$ est alors le point de paramètres $w = (v_1 v_3^{-1},\ v_2 v_3^{-1}, v_3)$ et $I(X(n+i+1), f, (x,\mu)) = v_3^{-\nu}\ I(X(n+i), f, (v,\mu))$ et donc $\mathrm{VDir}(x(n+i+1)) = \langle W_1, W_2 \rangle\ \mathrm{mod}.\langle W_3 \rangle$, et par (5), $\mathrm{VDir}(x(n+i+1)) = \langle W_1, W_2 \rangle$. Donc pour $i' \geq i+1$, $x(n+i)$ est sur le transformé strict de C_j , une récurrence décroissante sur $t(C_j)$ donne que $\kappa(x(n+i)) = 0$, c'est une contradiction qui prouve (4).

Comme $F(n+i) = \mathrm{div}(v_2\ v_3)$, $x(n+i+1)$ est un point de croisement pour $x(n+i)$, $\forall i \geq \ell$ et donc par I.F.4.,

$I(X(n+i+1), f, (v(i+1), \mu(i+1))) = \mathcal{m}^{-\nu}_{X(n+i), x(n+i)}\ I(X(n+i), f, (v(i), \mu(i))$.

Alors puisque $\mathrm{VDir}(x(n+i)) = \langle V_1 \rangle$, on a $c\ell^{\nu}(I(X(n+i), f, (v,\mu))) = (V_1^{\nu})$, $i \geq \ell$, si la suite $\pi(n+i)$ est infinie, on peut appliquer IV.C.7 et pour un $m \in \mathbb{N}$, $m \geq \ell$, $\Delta\,(I(X(n+i), f, (v,\mu))\ ;\ v_3, v_2\ ;\ v_1)$ n'a qu'un sommet (a,b) avec $[a] + [b] < 1$. D'autre part, puisque $h(x(n+i))^{-1}\ DM^{v,\mu}_{[1]}\ f = v_1 \varphi$ avec φ d'ordre $\nu - 1$, $\mathrm{in}_{(a,b)}(I(X(n+i), f, (v,\mu))) \neq (U_1 + \lambda U_3^a\ U_2^b)^\nu$. Donc ce polygone est préparé et par IV.C.5. (vi) on a $\kappa(x(n+i)) \leq 1$, ce qui est une contradiction. Donc la suite $\pi(n+i)$ est finie et II.C.4.4. est vérifié pour $\kappa = 3(A)$.

B. DEUXIEME CAS DE $\kappa = 3$.

DEFINITION B.1.

Soit x un point fermé maigre de $\mathrm{Sing}(X(n))$ avec $\kappa(x) > 2$. On dit que $\kappa(x) = 3(B)$ si on a

(1) $\alpha(x) = \nu(x)$, entier que l'on note ν,

et si, pour une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ adaptée en x on a une des deux conditions

(2-1) $E(n) = \mathrm{div}(u_1)$, $\mathrm{VDir}[c\ell^{\nu}(J(X(n),f,E(n)) \bmod .(u_1))] = \langle U_2,U_3\rangle$,

(2-2) $E(n) = \mathrm{div}(u_1u_2)$, $\mathrm{div}(u_1) > \mathrm{div}(u_2)$,
$f = h(x)(\rho u_1^{\nu}+u_2A) + E(f,u,\lambda)$,
$\rho \in O^{*}_{X(n),x}$, $A \in \mathfrak{m}^{\nu-1}_{X(n),x}$, $\nu \geq 2$,

et pour un $D \in \mathcal{D}(X(n),E(n))$, on a

$$h(x)^{-1}Df = u_2u_3^{\nu-1} \bmod .u_2(u_1,u_2) .$$

B.1.1. Nous allons montrer que si on a $\kappa(x) = 3(B)$ et (2-2) et si on éclate x, en tout point x' ν-proche de x avec $\kappa(x') > 2$, on a $[\kappa(x') = 3(B)$ et $(2-2)]$. et que si on a

$\kappa(x) = 3(B)$ et (2-1) ,

si on éclate x, en tout point x' qui est ν-proche de x avec $\kappa(x') > 2$, on a $\kappa(x') = 3(B)$ et (2-2).

PROPOSITION B.2.

Soit $x \in \mathrm{Sing}(x(n))$ avec $\kappa(x) = 3(B)$ et tel qu'on a la condition B.1. (2-1) pour une p-base adpatée de $O_{X(n),x}$. Alors

(i) $\langle U_1\rangle = \mathrm{VDir}(x)$,

(ii) si $\nu \geq 2$, alors $\nu \neq 0(p)$ et on peut choisir (u,λ) telle qu'en plus de B.1. (2-1), on a

$$h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[3]}\ f = \gamma u_2\ u_3^{\nu-1} \bmod.(u_1 + \mathfrak{m}^{\nu+1}).$$

Effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x.

(iii) Si $\nu = 1$, pour tout $x' \in X'$, x' ν-proche de x, on a $\kappa(x') = 1$,

(iv) Si $\nu \geq 2$, il y a un seul point $x' \in X'$ qui est ν-proche de x , c'est, avec la p-base de (ii), le point de paramètre $u' = (u_1u_2^{-1}, u_2, u_3u_2^{-1})$ et si $\kappa(x') > 2$, on a pour $(x',(u',\lambda))$

$$\kappa(x') = 3(B) \quad \text{et } (2\text{-}2).$$

Preuve de (i).

Puisque $\alpha(x) = \nu(x)$ et que x n'est pas à D.Q. et que $E(n) = \mathrm{div}(u_1)$, (i) est clair.

Preuve de (iii).

Par (i) et B.1. (2-1), on a

$$\mathrm{VDir}[J(X(n),f,E(n))] = \langle U_1, U_2, U_3\rangle .$$

ce qui donne, puisque $\nu = 1$

$$J(X(n),f,E(n)) = \mathfrak{m} .$$

De plus, par (i), on a

$$J(X(n),f,E(n),\{x\}) = (u_1) \bmod. \mathfrak{m}^2.$$

Effectuons π , par symétrie nous supposons que $\mathfrak{m}O_{X',x'} = u_2\ O_{X',x'}$.

Par I.E.1., on a

$$(1)\quad \begin{cases} J(X',f,E') = u_2^{-1}J(X(n),f,E(n),\{x\}) = (u_1u_2^{-1})\bmod.(u_2) , \\ J(X',f,E') \supset J(X(n),f,E(n))\ O_{X',x'} = (u_2) . \end{cases}$$

On en déduit que

$$\mathrm{Sing}(X') = V(u_1u_2^{-1}, u_2) = \pi^{-1}(x) .$$

D'autre part, on a

$$J(X',f,E') = J(X',f,E', V(u_1u_2^{-1}, u_2)) .$$

On en déduit que $\pi^{-1}(x) = V(u_1u_2^{-1}, u_2)$ est permise en x' et par (1), son éclatement n'engendre pas de point ν-proche de x'. D'où $\pi(x') = 1$.

Prouvons (ii) et (iv).

Effectuons π. Puisque $\pi(x) \neq 0$, il existe un point fermé $x' \in X'$ avec $\nu(x') = \nu$. Par (i), x' est sur le transformé de $\mathrm{div}(u_1)$. Par symétrie, nous supposons que x' a pour paramètres $v = (u_1u_2^{-1}, u_2, v_3)$ avec $v_3 = \phi(1, u_3\, u_2^{-1}) \bmod.(u_2)$ où ϕ est un polynôme homogène irréductible de $k(x)[U_2, U_3]$.

Posons

$$f = u_1^{A(1)}(\rho u_1^{\nu}+g) + R(f,u,\lambda),$$

$$\rho \in O^{*}_{X(n),x}, \quad \mathrm{ord}_x(g) \geq 1+\nu .$$

Nous posons

$$c\ell^{1+\nu} g = \sum_{0 \leq j \leq \nu} U_1^j\, G_j(U_2, U_3).$$

Puisque $\mathrm{VDir}[c\ell^{\nu}[J(X(n),f,E(n)) \bmod.(u_1)]] \neq 0$,on a $G_o \neq 0$. Puisque $\nu(x') = \nu$ et que $v_1(x') = 0$ et que pour tout i, $2 \leq i \leq s$, on a

$$u_2^{-\nu+1}\, h(x)^{-1}\, D^{u,\lambda}_{[i]}\, f \in J(X', f, E'),$$

on en déduit que pour tout i, $2 \leq i \leq s$, on a

$$\phi^{\nu-1} \,|\, D^{u,\lambda}_{[i]}\, G_o .$$

D'où, par le critère Jacobien:

(2) $\qquad G_o = (aU_2+bU_3)\phi^{\nu} + P(U_2,U_3)^P, \quad (a,b) \neq (0,0).$

Comme $\nu \geq 2$ et $\deg G_o = \nu+1$, on en déduit que $\deg \phi = 1$ et que x' est rationnel sur x. D'autre part, puisque

(3) $\qquad \mathrm{VDir}[c\ell^{\nu}[J(X(n),f,E(n)) \bmod.(u_1)]] = \langle U_2, U_3 \rangle ,$

dans (2), aU_2+bU_3 et ϕ ne sont pas colinéaires. D'où, par un choix judicieux de U_2 et U_3, nous obtenons

(4) $$G_o = U_2\ U_3^{\nu} + Q(U_2,U_3)^p \ .$$

Ce qui donne (ii) et avec (3) donne $\nu \neq 0(p)$. Terminons de prouver (iv). On a clairement

$$f = u_1'^{A(1)}\ u_2'^{A(1)+\nu}(\rho u_1'^{\nu} + u_2A) + R(f,u',\lambda)\ ,$$

$$\rho \in O^*_{X(n),x}\ ,\ u_2A = u_2^{-\nu}\ g\ .$$

D'autre part, on a

$$h(x')^{-1}\ D^{u',\lambda}_{[3]}\ f = u_2^{-\nu+1}\ h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[3]}\ f$$

$$= u_2'(\nu\ u_3'^{\nu-1}+u_2'B+u_1'C) \qquad \text{(cf. (4))}$$

ce qui finit de prouver (iv).

PROPOSITION B.3.

Soit $x \in \mathrm{Sing}(X(n))$ avec $\kappa(x) = 3(B)$ et tel que pour une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$, on a B.1. (2-2). Effectuons l'éclatement $\pi: X' \longrightarrow X(n)$ centré en x. Alors

(i) en tout point $x' \in X'$ avec $\nu(x') = \nu$ qui est sur le transformé strict de $\mathrm{div}(u_2)$, on a $\kappa(x') = 0$,

(ii) si $\mathrm{VDir}(x) \neq \langle U_1\rangle$, en tout point x' ν-proche de x, on a $\kappa(x') \leq 2$,

(iii) Si $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1\rangle$, quitte à modifier u_3 dans (u,λ) tout en conservant B.1. (2-2) en x, x' est le point de paramètres $u' = (u_1u_2^{-1},u_2,u_3u_2^{-1})$.

Prouvons (i).

Par B.1. (2-2), il est clair qu'on a

(1) $$U_1 \in \mathrm{VDir}(x) \text{ mod. } \langle U_2\rangle \ .$$

Donc le point x' de (i) est le point sur le transformé strict de $\mathrm{div}(u_1)$, c'est le point de paramètres $v = (u_1u_3^{-1},u_2\ u_3^{-1},u_3)$. On a donc $m(x') = 3$. De plus, par I.E.1. et B.1. (2-2),

$$u_3^{-\nu+1}\ h(x)^{-1}\ Df \in J(X',f,E') = J(X',f,E',\{x'\})$$

or, $u_3^{-\nu+1}\ h(x)^{-1}\ Df = v_2\ v_3 \bmod.\ v_3\ v_2\ (v_1,v_2)$ donc $\nu = 2$ et $\langle V_2,V_3\rangle \subset \mathrm{VDir}(x')$, par (1), on a $\langle V_1,V_2,V_3\rangle = \mathrm{VDir}(x')$, d'où $\tau(x') = 0$.

Preuve de (ii) et (iii).

Par (i), nous avons $u_2\ O_{X',x'} = \mathfrak{m}_x\ O_{X',x'}$. Par B.1. (2-1), nous avons que pour un $\varepsilon \in k(x)$, $\langle U_1+\varepsilon U_2\rangle \subset \mathrm{VDir}(x)$.

Donc x' a pour paramètres

$$v = (u_1'+\varepsilon\ ,\ u_2,\ \phi(1,u_3'))$$

où ϕ est un polynôme irréductible de $k(x)[U_2,U_3]$. Par I.E.1., on a

$$(2)\quad u_2^{-\nu+1}\ h(x)^{-1}\ Df = u_2'(u_3')^{\nu-1} + B + (u_1'+\varepsilon)C) \in J(X',f,E')\ .$$

Donc $\phi^{\nu-1}$ divise $c\varepsilon^{\nu-1}(u_2^{-1}h(x)^{-1}Df) \bmod (U_1+\varepsilon U_2)$. On en déduit que $\deg \phi = 1$ et donc $\phi = U_3 + bU_2$. Il est clair que dans B.1. (2-1), on a $D = \gamma D^{u,\lambda}_{[3]} \bmod.\mathcal{D}(X(n),E(n),\{x\})$, $\gamma \in O^{*}_{X(n),x}$ et que si on remplace U_3 par ϕ , on ne modifie pas B.1. (2-1). On a prouvé (iii) puisqu'en ce cas on a l'hypothèse $\varepsilon = 0$ et $v_1 = u_1'$.

Finissons de prouver (ii). Alors on peut prendre $\varepsilon = 1$. Supposons $\tau(x') \geq 2$. Alors d'après la proposition de l'introduction, on a

$$f = h(x')(\gamma\, v_1^{1+\nu} + v_2 g) + R(f,v,\lambda)\,,$$

$$\gamma \in O^{*}_{X',x'}\ ,\ 1+\nu = O(p).$$

Par (2), et par définition de $v_3 = \phi(1,u_3')$, on a

$$(3)\begin{cases} A\,h(x)^{-1}\ u_2^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[3]}\ f = v_2\ v_3^{\nu} \in I(X',f,(v,\lambda)) \bmod.(v_2^2),\ A \in O^{*}_{X(n),x}\ , \\ A\,h(x)^{-1}\ D^{v,\lambda}_{[3]}\ f = v_2\ v_3^{\nu-1} \bmod.(v_2^2). \end{cases}$$

Donc $\mathrm{VDir}(J(X',f,E')) = \langle V_1,V_2,V_3\rangle$, donc $\alpha(x') \neq 1 + \nu(x')$, sinon $\mathrm{VDir}(x') = \mathrm{VDir}(J(X',f,E'))$ et $\tau(x') = 0$.

Puisque $E' = \mathrm{div}(v_2)$, que $\alpha(x') = \nu(x')$ et que $\kappa(x') > 2$, on a

(4) $\mathrm{VDir}(x') = \langle V_2 \rangle$.

D'autre part, on a

(5) $h(x')^{-1} D^{v,\lambda}_{[1]} f = \gamma' v_1^{\nu} \bmod.(v_2)$, $\gamma' \in O^{*}_{X',x'}$.

Effectuons $\pi' : X'' \longrightarrow X'$ centré en x', par (4) et (5), et puisque $\kappa(x') \neq 0$, il y a dans X'' un seul point ν-proche de x, c'est le point de paramètres $w = (v_1 v_3^{-1}, v_2 v_3^{-1}, v_3)$. Par I.E.1. et (3), on a .

(6) $W_2 W_3 = v_3^{-\nu+1} (v_2 v_3^{\nu-1}) \in J(X'',f,E'') \bmod.(w_2^2)$,

d'où $\nu(x'') \leq 2$ et donc $\nu = 2$.

Par (4) et (6), et puisque $E'' = \mathrm{div}(w_1 w_2 w_3)$, on a

(7) $\langle W_2, W_3 \rangle \subset \mathrm{VDir}(x'')$.

On a

(8) $f = h(x'')(w_2 A + \gamma w_1^3 w_3) + R(f,w,\lambda)$,

$w_1^3 w_3 \in J(X'',f,E'',\{x''\}) \bmod.(w_2)$, $\nu = 2$.

Si on effectue l'éclatement $\pi'' : X''' \longrightarrow X''$, par (6) et (7), le seul point ν-proche de x'' est le point x''' de paramètres $z = (w_1, w_2 w_1^{-1}, w_3 w_1^{-1})$. On a $m(x''') = 3$, par (8), on a

$z_1 z_3 \in J(X''',f,E''') \bmod.(z_2)$

Avec (7) et sachant que

$J(X''',f,E''') = J(X''',f,E''',\{x'''\})$,

on a $\kappa(x''') = 0$ et donc $\kappa(x') = 0$, cette contradiction prouve (ii).

PROPOSITION B.4.

Les théorèmes II.C.4.1. et II.C.4.4. sont vérifiés pour $\kappa = 3(B)$.

Preuve.

Bien sûr, II.C.4.1. est conséquence de B.2. et B.3. Supposons qu'on a une suite infinie d'éclatements $\pi(n+j) : X(n+j+1) \longrightarrow X(n+j)$, $j \geq 0$ centrés en $x(n+j) \in X(n+j)$ point (ν,κ)-proche de $x(n+j-1)$ pour $j \geq 1$ et avec $\kappa(x(n)) = 3(B)$. Par B.2. et B.3., on peut choisir (u,λ) p-base de $O_{X(n+1),x(n+1)}$ telle qu'on a B.1. (2-2) et telle que les $x(n+i)$, $i \geq 1$ sont sur le transformé strict de $V(u_1,u_3)$. Donc $\alpha[V(u_1,u_3)] = \nu \geq 2$. Par B.1. (2-2), il existe i, $1 \leq i \leq s$ tel que

$$(1) \quad h(x(n+1))^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[i]}\, f = \rho'\, u_1^{\nu} + u_2\, A' \quad , \quad \rho' \in O^{*}_{X(n+1),x(n+1)}$$

et pour une dérivation $D \in \mathcal{D}(X(n+1), E(n+1))$, on a

$$(2) \quad u_3 h(x(n+1))^{-1}\, Df = u_2 u_3^{\nu} \text{ mod.}(u_2^2, u_1u_2) \in J(X(n+1), f, E(n+1), V(u_2,u_3)) \ .$$

Bien sûr, puisque $\alpha \geq 2$ et $\alpha[V(u_1,u_3)] = \nu$, $V(u_1,u_3)$ est permise en $x(n+1)$. Effectuons $\pi : X' \longrightarrow X(n+1)$ l'éclatement centré en $V(u_1,u_3)$. Par (1) et (2), il y a au plus un point singulier $x' \in X'$ au-dessus de x', c'est le point de paramètres

$$u' = (u_1u_3^{-1}, u_2, u_3) \quad \text{et} \quad u_3' \in J(X', f, E')\text{mod.}(u_2).$$

On en déduit que $\mathrm{Sing}_{\nu}(X(n+1)) \subset V(u_1,u_3)$ et

$$V(u_1,u_3) \cup V(u_1,u_2) \supset \mathrm{Sing}_{\nu-1}(X(n+1)) \cap \mathrm{div}(u_1).$$

Comme $\alpha[V(u_1,u_2)] = 1 < \nu$, et $\mathrm{div}(u_1) > \mathrm{div}(u_2)$, π est imposé par l'algorithme de $\kappa = 1$ et donc $\kappa(x(n+i)) = 1$, cette contradiction prouve B.4.

C. TROISIEME CAS DE $\pi = 3$.

DEFINITION C.1.

Soit x un point fermé maigre de Sing(X(n)), on dit que $\pi(x) = 3(C)$ si pour une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ adaptée en x, on a

(1) $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_2, U_3\rangle$,

(2) $E(n) \subset \mathrm{div}(u_1)$,

(3) $\pi(x) > 2$.

PROPOSITION C.2.

Soit x un point fermé de Sing(X(n)) avec $\pi(x) = 3(C)$. Alors

(i) $\alpha(x) = \nu(x) + 1$, entier que l'on note $\nu+1$,

(ii) il n'existe pas de courbe $C \subset X(n)$ transverse à E(n) et telle que $\alpha(C) = 1 + \nu$.

On a (i), sinon par IV.A.1 et C.1. (1), x serait de D.Q. et on aurait $\pi(x) \leq 2$.

Prouvons (ii). Si il existait une courbe $C \subset X(n)$ transverse à E(n) avec $\alpha(C) = 1 + \nu$, par I.A.3. (vii), on aurait $C \subset \mathrm{Sing}_{\nu}(X)$ et par I.D.4. (2), C serait permise en x. De plus, par I.E.3.(6) et C.1.(1), l'éclatement centré en C n'engendrerait pas de point ν-proche de x, par II.C.2., on aurait $\pi(x) \leq 1$, ce qui contredirait C.1. (3).

PROPOSITION C.3.

Si on effectue l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x avec $\pi(x) = 3(C)$, il y a au plus un point $x' \in X'$ qui est ν-proche de x, x' est rationnel sur x et si $\pi(x') > 2$, on a $\pi(x') = 3(B)$ ou (C).

Preuve.

Prenons les notations de C.1. Dans X' il y a au plus un point

x' qui est ν-proche de x, c'est le point de paramètres $v = (u_1, u_2u_1^{-1}, u_3u_1^{-1})$. Par I.E.1. et comme $\alpha(x) = 1 + \nu$, on a

(1) $\quad u_1^{-\nu} J(X(n),f,E(n)) \subset J(X',f,E')$.

On en déduit que

(2) $\quad \mathrm{VDir}[J(X',f,E')\mathrm{mod}.(v_1)] = \langle V_2, V_3\rangle$.

Donc, si $\alpha(x') = \nu = \nu(x')$ et $\kappa(x') > 2$, on a $\kappa(x') = 3(B)$. Si $\alpha(x') = 1 + \nu$ et $\kappa(x') > 2$, alors par (2), on a $\kappa(x') = 3(C)$.
On a prouvé C.3. qui entraîne que II.C.4.1. est vérifié pour $\kappa = 3(C)$.

PROPOSITION C.4.

Le théorème II.C.4.4. est vérifié pour $\kappa = 3(C)$.

Preuve.

Soit $\pi(n+i) : X(n+i+1) \longrightarrow X(n+i)$ une suite d'éclatements centrés en $x(n+i) \in X(n+i)$, points (ν,κ)-proches de $x = x(n)$ avec $\kappa(x(n+i)) = 3(C)$. Nous allons montrer que cette suite est finie. Par C.3. et B.4. cela prouvera C.4. D'aprèsC.3., les $x(n+i)$ sont rationnels sur x et $x(n+i) \notin \pi(n+i)^{-1}(x(n+i-1))$ et les $x(n+i)$ sont sur le transformé strict d'une courbe formelle $C \subset X(n)$, $C = V(u_2 + \Sigma\, a_j\, u_1^j\, ,\, u_3 + \Sigma\, b_j\, u_1^j)$ (IV.B.4.1.), si la suite est infinie, par II.B.9.1., $\alpha(C) = 1 + \nu$, par C.2.(ii) c'est une contradiction.
On a prouvé C.4.

D. QUATRIEME CAS DE $\kappa = 3$.

DEFINITION ET PROPOSITION D.1.

Soit x un point fermé maigre de $\mathrm{Sing}(X(n))$, on dit que $\kappa(x) = 3(D)$

si on a

(1) $\alpha(x) = \nu(x)$ que l'on note ν, $\tau(x) > 2$,

et, pour une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ adaptée en x

(2) $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1 + U_3 , U_2 + U_3 \rangle$.

Alors on a

(i) $m(x) = e(x) = 3$,

(ii) les théorèmes II.C.4.1. et II.C.4.4. sont vérifiés pour $\tau = 3$(D).

Preuve de (i).

On a clairement $E(n) = \mathrm{div}(u_1u_2u_3)$, sinon par IV.A.1. (1), x serait à D.Q. et on aurait $\tau(x) \leq 2$. Donc $m(x) = 3$ et par (2), $e(x) = 3$.

Preuve de (ii).

Effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X$ centré en x. Par (2) et puisque $\tau(x) \neq 0$, il y a un et un seul point x' qui est ν-proche de x, c'est le point de paramètres $v = (1+u_1u_3^{-1}, 1+u_2u_3^{-1}, u_3)$ et $E' = \mathrm{div}(u_3)$. Par I.E.1., on a

(3) $J(X',f,E') = J(X(n),f,E(n),\{x(n)\})u_3^{-\nu}$.

De (2) et de (3), on a

(4) $\mathrm{VDir}[J(X',f,E')\mathrm{mod.}(u_3)] = \langle V_1, V_2 \rangle$, $E' = \mathrm{div}(u_3)$.

Si $\alpha(x') = \nu$ et $\tau(x') > 2$ alors en permutant les indices 2 et 3 des v_i, par B.1., on a $\tau(x') = 3$(B).

Si $\alpha(x') = 1 + \nu$ et $\tau(x') > 2$ alors on a $\nu(x') \neq 3$ et donc

(5) $\quad \mathrm{VDir}[J(X',f,E')] = \langle V_1+aV_3, V_2+bV_3\rangle$, $a\in k(x)$, $b\in k(x)$,

on a $\kappa(x') = 3(C)$.

Par B. et C., on a (ii).

E. CINQUIEME CAS DE $\kappa = 3$.

DEFINITION E.1.

Soit x un point fermé maigre de $\mathrm{Sing}(X(n))$, on dit qu'on a $\kappa(x) = 3(E)$ si on a

(1) $\quad \kappa(x) > 2$

et une des deux conditions suivantes

(2-1) $\quad J(X(n),f,F(n)) = (u_1^{\nu}) \bmod.(u_2)$ avec

$\nu = \nu(x) = \mathrm{ord}_x[J(X(n),f,F(n))]$,

$\mathrm{div}(u_1)\subset E(n)$, $\mathrm{div}(u_2)$ régulier à c.n. avec $E(n)$,

$F(n) = E(n)\cup \mathrm{div}(u_2)$ et de plus

$\forall D\in \mathcal{D}(X(n),F(n))$ avec $D(O_{X(n)})\subset u_1\, O_{X(n)}$, on a

$\mathcal{H}(X(n),f,F(n))^{-1}\, Df \subset (u_1^{1+\nu}) + (u_2)$ et $m(x)\geqslant 2$

ou

(2-2) $\quad J(X(n),f,E(n),\{x\}) = (u_1^{\nu}) \bmod.(\mathfrak{M}_{X(n),x}^{1+\nu})$ et $\forall D\in \mathcal{D}(X(n),E(n))$

avec $D(O_{X(n)})\subset u_1\, O_{X(n)}$, on a $h(x)^{-1}\, Df \subset \mathfrak{M}_{X(n),x}^{1+\nu}$.

Nous verrons en E.1.2., E.1.3. et E.1.4. que les conditions E.1. (2-1) ou E.1. (2-2) se lisent très simplement sur le développement de f dans une p-base (u,λ) convenable.

DEFINITION E.1.1.

Si on a $\mathcal{K}(x) = 3(E)$ et (2-1) et $\mathrm{div}(u_1u_2) \subset E(n)$, on dira qu'on a $\mathcal{K}(x) = 3(E\star)$.

Si on a $\mathcal{K}(x) = 3(E)$ et (2-1) et $\mathrm{div}(u_2) \not\subset E(n)$, on dira qu'on a $\mathcal{K}(x) = 3(E\star\star)$.

Si on a $\mathcal{K}(x) = 3(E)$ et (2-2) on dira qu'on a $\mathcal{K}(x) = 3(E\star\star\star)$.

LEMME E.1.1.1.

Soit x un point fermé de $X(n)$ et soit (u,λ) une p-base de $O_{X(n),x}$ adpatée en x, tels que

$$\begin{cases} f = h(x)(\rho\, u_1^{\nu} + g) + R(f,u,\lambda)\, \rho \in O_{X(n),x} \quad , \\ \mathrm{div}(u_1) \subset E(n) \quad \text{et} \quad A(1)+\nu = O(p),\ g \in P \in \mathrm{Spec}\ O_{X(n),x}. \end{cases}$$

Alors, pour tout $D \in \mathcal{D}(X(n),E(n))$ avec $D(O_{X(n)}) \subset u_1\, O_{X(n)}$ et $DP \subset P$, on a

$$h(x)^{-1}\ Df \in (u_1)^{1+\nu} + P \quad .$$

Preuve.

On a $h(x)^{-1}\ Df = (A(1)+\nu)\rho\ u_1^{\nu-1}\ Dv_1 + u_1^{\nu}\ D\rho \bmod. P$. Par hypothèse, on a $D\rho \in (u_1)$ et $A(1) + \nu = O(p)$, le résultat est clair.

PROPOSITION E.1.2.

Soit x un point fermé maigre de $\mathrm{Sing}(X(n))$.

On a équivalence entre

(1) $\mathcal{K}(x) = 3(E\star)$

et

(2) $\nu = \nu(x) \geqslant 1$, $\mathcal{K}(x) > 2$ et pour une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ adaptée en x, on a une des conditions

(2-1) $\quad f = h(x)\ (\rho\, u_1^{\nu} + u_2 A) + R(f,u,\lambda),\ \rho \in O^{*}_{X(n),x}$,

$A \in \mathcal{M}^{\nu-1}_{X(n),x}$, $\operatorname{div}(u_1u_2) \subset E(n)$ et $A(1) + \nu = O(p)$,

(2-2) $\quad f = h(x)\ (u_1^{\nu}\, u_3 + u_2 B) + R(f,u,\lambda)$,

$B \in \mathcal{M}^{\nu}_{X(n),x}$, $\operatorname{div}(u_1u_2) = E(n)$ et $A(1) + \nu = O(p)$.

Preuve.

A l'aide de E.1.1.1., on montre facilement que (2) implique qu'on a E.1. (2-1) pour $(x,\operatorname{div}(u_1),\operatorname{div}(u_2))$.

Montrons que (1) implique (2). Comme $\operatorname{div}(u_2) \subset E(n)$, on a $E(n) = F(n)$ et donc $J(X(n),f,E(n)) = J(X(n),f,F(n))$, d'où

(3) $\quad J(X(n),f,E(n)) = (u_1^{\nu}) \bmod. (u_2)$

(4) $\quad f = h(x)(\rho\, u_1^{\nu} + u_2\, g) + R(f,u,\lambda)$, $\operatorname{ord}_x(g) \geqslant \nu - 1$.

En prenant $D = DM^{u,\lambda}_{[1]}$, on a

$h(x)^{-1}\, Df = (A(1)+\nu)\,\rho\, u_1^{\nu} + u_1^{1+\nu}\, D\rho + u_2\, h(x)^{-1}\, D(h(x)g)$.

Comme $\mathcal{K}(X(n),F(n)) = \mathcal{K}(X(n),E(n))$, on a $(A(1)+\nu)\rho \in (u_1,u_2)$, mais $\rho \notin (u_1,u_2)$, sinon comme $\operatorname{div}(u_1u_2) \subset E(n)$, par (4), on n'aurait pas (3). Donc

(5) $\quad A(1) + \nu = O(p)$.

Si ρ est inversible, on a clairement (2-1).

Si ρ n'est pas inversible, comme $E(n) \supset \operatorname{div}(u_1u_2)$, par (3), on a

(6) $\quad E(n) = \operatorname{div}(u_1u_2)$ et $D^{u,\lambda}_{[3]}\ \rho$ inversible.

On peut alors prendre

(7) $\rho = u_3$.

Prouvons qu'alors $\mathrm{ord}_x(g) \geqslant \nu$. Sinon, par (3), on a $\mathrm{ord}_x(g) = \nu-1$ ce qui,

par III.2. 2) si $\nu \geqslant 3$,

par III.2. 1) si ($\nu = 2$ et $\alpha[V(u_1,u_2)] = \nu$),

par III.2. 3) si $\alpha[V(u_1,u_2)] < \nu = 2$ (ici $A(3)+1 = 1 \neq O(p)$),

par III.2. 4) (ii) si $\nu = 1$,

entraîne $\tau(x) \leq 1$ qui est une contradiction qui termine la preuve de E.1.2.

PROPOSITION E.1.3.

Soit x un point fermé maigre de $\mathrm{Sing}(X(n))$.
On a équivalence entre

(1) $\tau(x) = 3(E**)$,

et

(2) $\nu = \nu(x) \geqslant 1$, $\tau(x) \geqslant 2$ et pour une p-base (u,λ)

de $O_{X(n),x}$ adaptée en x, on a une des conditions

(2-1) $f = h(x)(\rho u_1^{\nu} + u_2 C) + R(f,u,\lambda)$, $C \in O_{X(n),x}$,

$\rho \in O^*_{X(n),x}$, $E(n) = \mathrm{div}(u_1u_3)$, $A(1) + \nu = O(p)$,

(2-2) $f = h(x)(u_2u_1^{\nu} + u_2^2 D) + R(f,u,\lambda)$,

$E(n) = \mathrm{div}(u_1u_3)$, $D \in O_{X(n),x}$

Preuve.

A l'aide de E.1.1.1., on montre facilement que (2) implique (1) en remarquant que si on a (2-1), alors $J(X(n),f,F(n)) = I(X(n),f,(u,\lambda))$ et si on a (2-2) alors $\mathcal{H}(X(n),F(n)) = u_2\mathcal{H}(X(n),E(n))$.

$J(X(n),f,F(n)) = u_2 \ I(X(n),f,(u,\lambda))$. Montrons que (1) implique (2). Par définition on a $E(n) = \mathrm{div}(u_1u_3)$, d'où :

$$(3) \quad \begin{cases} \mathcal{H}(X(n),F(n)) = u_2^a \ \mathcal{H}(X(n),E(n)), \quad a \in \mathbb{N} , \\ J(X(n),f,F(n)) = u_2^{-a} \ I(X(n),f,(u,\lambda)) . \end{cases}$$

Comme $\mathrm{ord}_x[I(X(n),f,(u,\lambda))] = \alpha(x) = \nu$ ou $1 + \nu$ et que $\nu = \mathrm{ord}_x[J(X(n),f,F(n))]$, on a

(4) $\quad a = 0$ ou 1.

Si $a = 0$ alors on a

$$I(X(n),f,(u,\lambda)) = (u_1^\nu)\mathrm{mod}.(u_2) ,$$

$$(5) \quad f = h(x)(\rho u_1^\nu + u_2 \ C) + R(f,u,\lambda), \quad \rho \in O^*_{X(n),x} .$$

Si $a = 1$ alors on a

$$I(X(n),f,(u,\lambda)) = (u_1^\nu \ u_2)\mathrm{mod}.(u_2^2)$$

$$(6) \quad f = h(x)(\rho \ u_1^\nu \ u_2 + u_2^2 \ D) + R(f,u,\lambda), \quad \rho \in O^*_{X(n),x} ,$$

quitte à multiplier u_2 par un inversible, on peut faire $\rho = 1$ dans (6).

Par définition, on a $E(n) = \mathrm{div}(u_1u_3)$. Si $a = 0$, le calcul de la preuve de E.1.2. avec $D = DM^{u,\lambda}_{[1]}$ montre que $A(1) + \nu = O(p)$, si $a = 1$, en multipliant $h(x)$ par u_2, le calcul donne le résultat.

E.1.3.1. On remarque que si $\kappa(x) = 3(E**)$ et $\alpha(x) = \nu(x)$, alors dans E.1.3. (2-1), on a $\mathrm{ord}_x(C) \geq \nu$, sinon x est à D.Q. et on aurait $\kappa(x) \leq 2$. Donc $c\ell^\nu[J(X(n),f,E(n),\{x\})] = (U_1^\nu)$ et donc, puisque $A(1) + \nu = O(p)$, par E.1.1.1., on a $\kappa(x) = 3(E***)$.

PROPOSITION E.1.4.

On a équivalence entre

(1) $\kappa(x) = 3(E***)$

et

(2) $\nu = \nu(x) \geqslant 1$, $\kappa(x) > 2$ et pour une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ adaptée en x, on a

$$f = h(x)(\rho u_1^{\nu} + g) + R(f,u,\lambda), \qquad g \in \mathcal{M}_{X(n),x}^{1+\nu},$$

$\mathrm{div}(u_1) \subset E(n)$ et $A(1) + \nu = O(p)$, $\rho \in O^{*}_{X(n),x}$.

La preuve est claire.

E.2. Nous allons montrer que le théorème II.C.4.1 . est vérifié pour $\kappa = 3(E)$, c'est-à-dire que la condition $(\nu,\kappa)(x) \leq (\nu,3(E))$ est stable par éclatements de points fermés. Nous montrerons de plus que $\mathrm{div}(u_1)$ a le contact maximal pour $(\nu, 3(E))$.

PROPOSITION E.2.1.

Soit $x \in \mathrm{Sing}(X(n))$ avec $\kappa(x) = 3(E***)$. Effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X$ centré en x. Soit $x' \in X'$ un point fermé ν-proche de x avec $\kappa(x') > 2$. Alors on a $\kappa(x') = 3(E*)$ et on a les conditions de E.1. (2-1) pour (x',u_1t^{-1},t), où $t\,O_{X',x'} = \mathcal{M}_{X(n),x}\,O_{X',x'}$ et u_1 est donné par E.1. (2-1). En particulier x' est sur le transformé strict de $\mathrm{div}(u_1)$.

Preuve.

Par E.1. (2-2) et E.1.1., on a

(1) $$J(X(n),f,E(n),\{x\}) = (u_1^{\nu})\mathrm{mod.}\,\mathcal{M}_{X(n),x}^{1+\nu}$$

D'où, par I.E.1.

(2) $J(X',f,E') = (u_1 t^{-1})^{\nu} \bmod.(t)$.

De plus, on a $\mathrm{ord}_{u_1 t^{-1}}(h(x')) = \mathrm{ord}_{u_1}(h(x)) = A(1)$. Par E.1.1.1. et (2), on a E.1. (2-1) pour $(u_1 t^{-1}, t)$, d'où le résultat.

PROPOSITION E.2.2.

Soit $x \in \mathrm{Sing}(X(n))$ avec $\kappa(x) = 3(E)$. Alors, avec les notations de E.1. (2-1) et, quitte à multiplier u_2 par un inversible, on a $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1 \rangle$ ou $\langle U_1 + U_2 \rangle$ ou $\langle U_1, U_2 \rangle$.

Preuve.

Si $\kappa(x) = 3(E{*}{*}{*})$, on a clairement $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1 \rangle$. Supposons désormais $\kappa(x) = 3(E{*})$ ou $(E{*}{*})$. Si $\alpha(x) = \nu$, alors par définition, on a $\mathrm{VDir}(x) = \mathrm{VDir}[c\ell^{\nu}[J(X(n),f,E(n),\{x\})]]$, par E.1. (2-1), E.1.2. et E.1.3., on a

(1) $J(X(n),f,E(n),\{x\}) = (u_1^{\nu})\bmod.(u_2)$.

Par (1) et I.E.1.5.1.6.(iii) si $e(x) = 3$, on a $v(x) = 3$ et donc $\kappa(x) = 0$ ce qui est une contradiction. On a donc $\mathrm{VDir}(x) \subset \langle U_1, U_2 \rangle$, (1) donne le résultat

Si $\alpha(x) = 1 + \nu$, par définition, on a $\mathrm{VDir}(x) = \mathrm{VDir}[c\ell^{\nu}[J(X(n),f,E(n))]]$. Par E.1. (2-1),

(2) $J(X(n),f,E(n)) = (u_1^{\nu})\bmod.(u_2)$.

Pat I.E.1.5.1.6. (iii) appliqué à $J(X(n),f,E(n))$, si $\mathrm{VDir}(x) \not\subset \langle U_1, U_2 \rangle$, alors $v(x) = 3$ et donc $\kappa(x) = 0$, ce qui est une contradiction. Donc $\mathrm{VDir}(x) \subset \langle U_1, U_2 \rangle$, (2) donne le résultat.

PROPOSITION E.2.3.

Soit x un point fermé maigre de $X(n)$ avec $\tau(x) = 3(E)$, $\alpha(x) = \nu(x)$ et $e(x) = 2$. Alors, en prenant les notations de E.1. (2-1),

(i) $\tau(x) = 3(E*)$,

(ii) si $\alpha[V(u_1,u_2)] = \nu$, x est bon,

(iii) si $\alpha[V(u_1,u_2)] < \nu$ et si on effectue l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x, il y a au plus un point (ν,τ)-proche de x, c'est le point x' de paramètres $v = (u_1u_3^{-1}, u_2u_3^{-1}, u_3)$ et on a alors $e(x') = 2$ et $\tau(x') = 3(E*)$ et E.1. (2-1) pour v_1, v_2.

Preuve.

E.2.3.1. Par E.1.3.1., si $\alpha(x) = \nu(x)$ et $\tau(x) = 3(E)$, on a $\tau(x) = 3(E*)$ ou $3(E***)$. Par définition, si $\tau(x) = 3(E***)$, on a $\mathrm{VDir}[J(X(n),f,E(n),\{x\})] = \langle U_1\rangle$ et donc $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1\rangle$ et $e(x) = 1$, ce qui est une contradiction qui prouve (i).

E.2.3.2. Prouvons (ii). Remarquons que puisque $\tau(x) = 3(E*)$, on a $\mathrm{div}(u_1u_2) \subset E(n)$ et donc $V(u_1,u_2)$ est combinatoire et $\alpha[V(u_1,u_2)] = \alpha[V(u_1,u_2)] = \nu \geq 1$. Par I.D.1., $V(u_1,u_2)$ est permise en x. De plus, on a $J(X(n),f,E(n)) \subset (u_1,u_2)^{\nu}$ et puisque $e(x) = 2$ et que $J(X(n),f,E(n)) \supset J(X(n),f,E(n),\{x\})$, $\mathrm{cl}^{\nu}[J(X(n),f,E(n))] \not\subset (U_i,U_j)^{\nu}$ si $(i,j) \neq (1,2)$ ou $(2,1)$, donc $\nu[V(u_i,u_j)] < \nu$ si $(i,j) \neq (1,2)$ ou $(2,1)$. Donc $V(u_1,u_2)$ est la seule composante combinatoire de $\mathrm{Sing}_{\nu}(X(n))$ et l'algorithme de $\tau = 1$ ou du point bon impose d'effectuer l'éclatement $\pi' : X'' \longrightarrow X(n)$ centré en $V(u_1,u_2)$. Puisque $e(x) = 2$, par E.2.2., on a $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1,U_2\rangle$ ou $\langle U_1+U_2\rangle$. Si $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1,U_2\rangle$, alors dans X'', il n'y a pas de point ν-proche de x et donc $\tau(x) = 1$, ce qui est une contradiction. Donc

(1) $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1+U_2\rangle$,

ce qui est équivalent à

(2) $$c\ell^{\nu}[I(X(n),f,(u,\lambda))] = (U_1+U_2)^{\nu} .$$

Comme $A(1)+\nu = O(p)$, par (2), on a

(3) $$c\ell^{\nu}[h(x)^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[1]}\ f] = 0.$$

Donc

(4) $$c\ell^{\nu}[h(x)^{-1}(DM^{u,\lambda}_{[1]} + DM^{u,\lambda}_{[2]}\ ,\ DM^{u,\lambda}_{[i]}\ ;\ 3\leq i\leq s)(f)] = (U_1+U_2)^{\nu} .$$

Alors le lemme suivant finit la preuve de (ii).

LEMME E.2.3.3.

Soit $x\in \mathrm{Sing}(X(n))$ et soit (u,λ) une p-base de $O_{X(n),x}$ tels que

(1) $\alpha(x) = \nu(x)$ entier que l'on note ν ,

(2) $\alpha[V(u_1,u_2)] = \nu$, $\nu[V(u_1,u_2)] \geq 1$,

(3) $$c\ell^{\nu}[h(x)^{-1}\ (DM^{u,\lambda}_{[1]} + DM^{u,\lambda}_{[2]}\ ,\ DM^{u,\lambda}_{[i]}\ ;\ 3\leq i\leq s)(f)] = (U_1+U_2)^{\nu} .$$

Alors, si on effectue l'éclatement $\pi' : X'' \longrightarrow X(n)$ centré en $V(u_1,u_2)$, en tout point $x''\in X''$ ν-proche de x, on a $\alpha(x'') = \nu$ et $\kappa(x'')\leq 2$.

Preuve.

Bien sûr, $V(u_1,u_2)$ est permise en x. Dans X'', le seul point qui peut être ν-proche de x est le point x'' de paramètres $v = (1+u_1u_2^{-1},u_2,u_3)$.

Par I.F.3.5.3. et (3), on a

$$(4)\quad \begin{cases} u_2^{-\nu} h(x)^{-1}(DM^{u,\lambda}_{[1]} + DM^{u,\lambda}_{[2]}\ ,\ DM^{u,\lambda}_{[i]}\ ;\ 3\leq i\leq s)\ (f) = \\ h(x")^{-1}(DM^{v,\lambda}_{[2]}\ ,\ DM^{v,\lambda}_{[i]}\ ;\ 3\leq i\leq s)(f) = (v_1^{\nu})\mathrm{mod}.(v_2,v_3). \end{cases}$$

Comme $\mathrm{div}(v_1)$ est transverse à E", le point x" est à D.Q. et donc $\tau(x")\leq 2$ et bien sûr, $\alpha(x") = \nu(x")$.

E.2.3.4. Prouvons E.2.3. (iii). Regardons d'abord le point x' de paramètres v. Par E.1.2. (2-1), et I.F.4., on a

$$\begin{cases} f = h(x')(\rho\, v_1^{\nu} + v_2\ A\ u_3^{-\nu-1}) + R(f,v,\lambda),\ \rho\in O^{*}_{X(n),x}\ , \\ \mathrm{ord}_{v_1}[h(x')] = \mathrm{ord}_{u_1}[h(x)] = A(1)\ ,\ A(1)+\nu = O(p)\ . \end{cases}$$

Par E.1.3., si $\nu(x') = \nu$ et $\tau(x') > 2$, on a $(\nu,\tau)(x') = (\nu,3)$ et $\tau(x') = 3(E)$.

Si $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1,U_2\rangle$, x' est le seul point de X' qui peut être ν-proche de x et (iii) est clair.

Sinon, comme $e(x) = 2$, on a $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1+U_2\rangle$ et par E.2.3.2. (2) et (3), (4), on a

$$(1)\quad c\ell^{\nu}[h(x)^{-1}(DM^{u,\lambda}_{[1]} + DM^{u,\lambda}_{[2]} + DM^{u,\lambda}_{[3]}\ ,\ DM^{u,\lambda}_{[i]}\ ;\ 3\leq i\leq s)(f)] = (U_1+U_2)^{\nu}$$

Par IV.B.2.3. dans X' , x' est le seul point qui peut être ν-proche de x avec $\tau(x') > 2$.

Ce qui finit la preuve de (iii).

E.2.4. On remarque que si $\tau(x) = 3(E)$ et $\alpha(x) = \nu$ et $e(x) \neq 2$, par E.2.2., on a $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1\rangle$ et donc

$$J(X(n),f,E(n),\{x\}) = (u_1^{\nu})\mathrm{mod}.\ \mathcal{M}^{1+\nu}_{X(n),x}\ .$$

De plus $A(1)+\nu = O(p)$. Par E.1.1.1., on a alors $\tau(x) = 3(E{*}{*}{*})$.

Cette remarque et E.2.3. et E.2.1. nous donnent le corollaire.

COROLLAIRE E.2.5.

Soit x un point fermé maigre de $X(n)$ avec $\mathcal{K}(x) = 3(E)$ et $\alpha(x) = \nu(x)$. Effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x, alors en tout point $x' \in X'$ qui est ν-proche de x avec $\mathcal{K}(x') > 2$, on a $\mathcal{K}(x') = 3(E*)$, on a E.1. (2-1) pour (v_1, v_2) où $v_1 = u_1 t^{-1}$, $tO_{X',x'} = \mathfrak{m}_{X(n),x} O_{X',x'}$, $v_2 = u_2 t^{-1}$ ou t. En particulier x' est sur le transformé strict de $\mathrm{div}(u_1)$.

PROPOSITION E.2.6.

Soit x un point fermé maigre de $X(n)$ avec $\mathcal{K}(x) = 3(E)$, $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$ et

(1) $J(X(n), f, E(n), \{x\}) = \mathfrak{m}_{X(n),x} \; u_1^{\nu} \bmod. \mathfrak{m}^{2+\nu}_{X(n),x}$.

Effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x, alors en tout point $x' \in X'$ qui est ν-proche de x avec $\mathcal{K}(x') > 2$, on a $\mathcal{K}(x') = 3(E*)$, on a E.1. (2-1) pour (v_1, t) où $tO_{X',x'} = \mathfrak{m}_{X(n),x} O_{X',x'}$ et $v_1 = u_1 t^{-1}$. En particulier, x' est sur le transformé strict de $\mathrm{div}(u_1)$.

Preuve.

Par I.E.1., on a

$$\begin{cases} J(X', f, E') = (v_1^{\nu}) \bmod. (t) , \quad E' = \mathrm{div}(v_1 t), \\ \mathrm{ord}_{v_1}(h(x')) = \mathrm{ord}_{u_1}(h(x)) = A(1). \end{cases}$$

Par E.1. (2-1) et E.1.1.1., le résultat est clair.

PROPOSITION E.2.7.

Soit x un point fermé maigre de $X(n)$ avec $\mathcal{K}(x) = 3(E)$, $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$ et, avec les notations de E.1. (2-1),

(1) $\alpha[V(u_1, u_2)] = 1 + \nu(x)$ et

(2) $J(X(n),f,E(n),\{x\}) \neq u_1^{\nu}\mathfrak{M}_{X(x),x} \bmod. \mathfrak{M}_{X(n),x}^{2+\nu}$.

Alors

(i) $\tau(x) = 3(E**)$,

(ii) x est bon.

Preuve.

Par définition, si $\tau(x) = 3(E*)$, $V(u_1,u_2)$ est combinatoire et donc $\alpha[V(u_1,u_2)] = \nu[V(u_1,u_2)] = 1+\nu$, ce qui contredit la semi-continuité de $\nu(.)$. De plus, si $\tau(x) = 3(E***)$, on a $\alpha(x) = \nu(x)$. Donc on a $\tau(x) = 3(E**)$. Ce qui prouve (i).

Prouvons (ii). Bien sûr, $V(u_1,u_2)$ est permise et $V(u_1,u_2) \subset \mathrm{Sing}_{\nu}(X(n))$. Alors je dis que

(3) $v(x) = 1.$

En effet, sinon, par I.E.2.3. (6), lorsqu'on effectue l'éclatement $\pi' : X'' \longrightarrow X(n)$ centré en $V(u_1,u_2)$, il n'y a pas de point ν-proche de x et donc $V(u_1,u_2) = \mathrm{Sing}_{\nu}(X(n))$ et $\tau(x) = 1$, ce qui est une contradiction.

Par (3) et E.2.2., on a $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1\rangle$ ou $\langle U_1+U_2\rangle$. Regardons le cas où $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1\rangle$. Effectuons π'. Dans X'', en dehors du point x'' de paramètres $v = (u_1u_2^{-1},u_2,u_3)$, $\nu(.)$ a strictement baissé. On a

$$(4)\quad \begin{aligned} f &= h(x)(u_2u_1^{\nu}+u_2^2D) + R(f,u,\lambda) ,\\ f &= h(x'')(v_1^{\nu}+Dv_2^{-\nu+1}) + R(f,v,\lambda). \end{aligned}$$

Par (2), on a $\mathrm{ord}_x(D) = \nu-1$ et par (1) $\mathrm{ord}_{(u_1,u_2)}(D) = \nu-1$, d'où par (4), $\alpha(x'') \leq \nu-1$, donc $\nu(x'') \leq \nu-1$ et $V(u_1,u_2) = \mathrm{Sing}_{\nu}(X(n))$ et $\tau(x) = 1$, ce qui est une contradiction. Donc on a

(5) $\quad \mathrm{VDir}(x) = \langle U_1+U_2\rangle$.

Effectuons π'. Dans X'', en dehors du point x'' de paramètres $t = (1+u_1u_2^{-1},u_2,u_3)$, $\nu(.)$ a strictement baissé. D'autre part, puisque $A(1)+\nu = O(p)$, par E.1.3., on a $c\ell^{1+\nu}(h(x)^{-1}\ DM_{[1]}^{u,\lambda} f) = 0$.

Par I.F.3.5.3., on a

$$\begin{aligned} h(x'')^{-1}\ DM_{[2]}^{t,\lambda} f &= u_2^{-\nu-1}\ h(x)^{-1}\ (DM_{[1]}^{u,\lambda} + DM_{[2]}^{u,\lambda})f \\ &= u_2^{-\nu-1}\ h(x)^{-1}\ DM_{[2]}^{u,\lambda} f \bmod.(t_2,t_3) \\ &= t_1^{\nu} \bmod.(t_2,t_3) \in J(X'',f,E'',\{x''\}) \ . \end{aligned}$$

On en déduit que si $\nu(x'') = \nu$, x'' est à D.Q. et $\kappa(x'') \leq 2$ (IV.A.1). D'où le résultat.

PROPOSITION E.2.8.

Soit x un point fermé maigre de $X(n)$ avec $\kappa(x) = 3(E)$, $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$ et, avec les notations de E.1. (2-1),

(1) $\quad J(X(n),f,E(n),\{x\}) \neq u_1^{\nu}\ \mathfrak{m}_{X(n),x} \bmod.\ \mathfrak{m}_{X(n),x}^{2+\nu}$.

Effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x. Soit $x' \in X'$ un point fermé ν-proche de x avec $\kappa(x') > 2$. Alors

(i) si x' est le point de paramètres $v = (u_1u_3^{-1},u_2u_3^{-1},u_3)$, on a $\kappa(x') = 3(E*)$ ou $3(E**)$, de plus si $\kappa(x') = 3(E**)$ alors $\alpha(x') = 1+\nu$ et $\kappa(x) = 3(E**)$,

(ii) si x' n'est pas le point de paramètres v, alors $\kappa(x') = 3(B)$ ou $3(C)$.

Preuve.

E.2.8.1. Voyons d'abord le cas où x' a pour paramètres v. Alors si $\kappa(x') = 3(E*)$, on a

$$f = h(x)(u_3u_1^{\nu} + u_2B) + R(f,u,\lambda),\ \mathrm{div}(u_1u_2) \subset E(n)\ ,$$
$$f = h(x')(v_1^{\nu} + v_2\ B\ u_3^{-\nu}) + R(f,v,\lambda),\ \mathrm{div}(v_1\ v_2\ v_3) = E'\ ,$$

et $\mathrm{ord}_{v_1}(h(x')) = \mathrm{ord}_{u_1}(h(x)) = A(1)$. On en déduit que $\tau(x') = 3(E*)$.
Si $\tau(x) = 3(E**)$, on a

$$f = h(x)(u_2u_1^{\nu} + u_2^2D) + R(f,u,\lambda)\ ,\ \mathrm{div}(u_2) \not\subset E(n)\ ,$$
$$f = h(x')(v_2v_1^{\nu} + v_2^2\ Du_3^{-\nu+1}) + R(f,v,\lambda)\ ,\ \mathrm{div}(v_2) \not\subset E'\ ,$$

et $\mathrm{ord}_{v_1}(h(x')) = \mathrm{ord}_{u_1}(h(x)) = A(1)$.

On a $\mathrm{ord}_{x'}(v_2^2\ Du_3^{-\nu+1}) \geqslant 1+\nu$, sinon x' est à D.Q. et donc $\tau(x') = 3(E**)$ et $\alpha(x') = 1+\nu$.

E.2.8.2. Si $v(x) = 2$, c'est-à-dire si $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1,U_2\rangle$, (ii) est vide et on a E.2.8. Pour terminer, il faut regarder le cas où il existe un point $x' \in X'$ ν-proche de x avec $\tau(x') > 2$ et x' en dehors du transformé strict de $V(u_1,u_2)$. Par E.2.2., on a alors $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1\rangle$ ou $\langle U_1+U_2\rangle$.

E.2.8.3. Cas où $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1\rangle$. Posons

$$u' = (u_1u_2^{-1}, u_2, u_3u_2^{-1})\ .$$

Si $\tau(x) = 3(E**)$, on a

$$f = h(x)(u_2u_1^{\nu} + u_2^2D) + R(f,u,\lambda)$$

et par (1), on a

(2) $\quad \mathrm{ord}_x(D) = \nu - 1.$

Puisque

$$\mathrm{VDir}(x) = \mathrm{VDir}[J(X(n),f,E(n))] = \langle U_1\rangle\ ,$$

on a

$$u_1^{\nu}\ \mathfrak{M}_{X(n),x} \subset J(X(n),f,E(n))\ \mathrm{mod.}\ \mathfrak{M}_{X(n),x}^{\nu+2}\ .$$

Alors, par (2), il existe un polynôme K homogène non nul de degré $\nu-1$ tel que

(3) $$U_2^2\ K \in c\ell^{\nu}[J(X(n),f,E(n),\{x\})]\ .$$

Donc $K(u_1',1,u_3') \in J(X',f,E')\mathrm{mod}.(u_2')$, comme $\mathrm{ord}_{x'}[K(u_1',1,u_3')] \leq \nu-1$, x' n'est pas ν-proche de x, c'est une contradiction. Donc

(4) $$\kappa(x) = 3(E*).$$

(5) $$\begin{cases} f = h(x)(u_3u_1^{\nu} + u_2B) + R(f,u,\lambda), E(n) = \mathrm{div}(u_1\ u_2)\ , \\ c\ell^{\nu}(h(x)^{-1}\ D_{[3]}^{u,\lambda}\ f) = U_1^{\nu}\ . \end{cases}$$

Par (1) et (5), on a

(6) $$\begin{cases} c\ell^{\nu}\ B = G(U_1,U_2,U_3) \in k(x)[U_1,U_2,U_3^p]\ , \\ U_1^{\nu} \nmid G. \end{cases}$$

Alors je dis que

(7) $$A(2) + 1 = O(p).$$

Sinon, on a

$$A(1)+A(2)+\kappa(x) = A(1)+A(2)+1+\nu = A(2)+1 \neq O(p).$$

Par la relation d'Euler, on a

(8) $$\begin{cases} c\ell^{\nu}\left[h(x)^{-1}(DM_{[1]}^{u,\lambda} + DM_{[2]}^{u,\lambda} + DM_{[3]}^{u,\lambda})(f)\right] = \\ (A(2)+1)(U_3U_1^{\nu} + U_2G(U_1,U_2,U_3))\ ,\ U_1^{\nu} \nmid G\ . \end{cases}$$

Alors, par I.E.1. et I.F.4., on a

(9) $$\begin{cases} h(x')^{-1}(DM_{[2]}^{u',\lambda}\ f) = (A(2)+1)(u_3'u_1'^{\nu} + G(u_1',1,u_3'))\ \mathrm{mod}.(u_2) \\ = (A(2)+1)\ G(u_1',1,u_3') \neq 0\ \mathrm{mod}.(u_1'^{\nu},u_2') \\ \in J(X',f,E',\{x'\})\mathrm{mod}.(u_1'^{\nu},u_2')\ . \end{cases}$$

On en déduit que x' est à D.Q., ce qui est en contradiction avec l'énoncé de E.2.8. et donc on a (7). Je dis que

$$(10) \qquad G \in k(x)[U_1, U_2^p, U_3^p] \, .$$

Sinon, par (6), on a

$$\begin{cases} c\ell^{1+\nu}[h(x)^{-1} \, DM^{u,\lambda}_{[2]} \, f] = (A(2)+1) \, U_3 U_1^{\nu} + U_2^2 \, K(U_1, U_2, U_3) \, , \\ K \neq 0. \end{cases}$$

Alors, par (5), $U_2^2 \, K \in c\ell^{1+\nu}[J(X(n), f, E(n), \{x\})]$ et

$$K(u_1', 1, u_3') \in J(X', f, E') \text{ mod.}(u_2) \, .$$

Comme $\deg K = 1 + \nu - 2 = \nu - 1$, x' n'est pas ν-proche de x, c'est une contradiction qui entraîne (10). Alors par (10), pour un i, $4 \leq i \leq s$, on a

$$\begin{cases} c\ell^{\nu+1}[h(x)^{-1} \, DM^{u,\lambda}_{[i]} \, f] = U_2 \, F_i(U_1, U_2, U_3) \, , \\ F_i \in k(x) \, [U_1, U_2^p, U_3^p] \, , \quad U_1^{\nu} \nmid F_i \, . \end{cases}$$

Posons

$$F_i = \sum_{1 \leq j \leq \nu p^{-1}} U_1^{\nu - jp} \, G_{i,j} \, [U_2^p, U_3^p] \, ,$$

Alors $A_i = \sum u_1'^{\nu - jp} \, G_{i,j} \, (1, u_3'^p) \in J(X', f, E') \text{mod.}(u_2)$. On en déduit que x' est rationnel sur x, mais alors $A_i \in J(X', f, E', \{x'\}) \text{mod.}(u_2)$ et x' est à D.Q., c'est une nouvelle contradiction.

Finalement l'existence de x' avec $\nu(x') = \nu$ et $\kappa(x') > 2$ est en contradiction avec $\text{VDir}(x) = \langle U_1 \rangle$.

E.2.8.4. Cas où $\text{VDir}(x) = \langle U_1 + U_2 \rangle$. Posons

$$(11) \qquad u' = (u_1 u_2^{-1}, u_2, u_3 u_2^{-1}), \quad v_1 = 1 + u_1 u_2^{-1} \, .$$

Alors je dis que

(12) $\quad J(X(n),f,E(n),\{x\}) \neq \mathfrak{M}_{X(n),x}(u_1+u_2)^{\nu} \text{ mod. } \mathfrak{M}^{2+\nu}_{X(n),x}$.

Sinon, on a

$$J(X',f,E') = (v_1^{\nu})\text{mod.}(u_2').$$

De plus, si on pose $\Delta = h(x')^{-1}\left[(D^{u',\lambda}_{[i]} f)DM^{u',\lambda}_{[1]} - (DM^{u',\lambda}_{[1]} f)D^{u',\lambda}_{[i]}\right]$ avec $i = 3$ si $\kappa(x) = 3(E*)$ et $i=2$ si $\kappa(x) = 3(E**)$, on a $\Delta \in \mathcal{D}(X',E')$, $\Delta(f) = 0$ et

$$\begin{aligned}\Delta(v_1) &= h(x')^{-1}(D^{u',\lambda}_{[i]} f)(v_1-1)\\ &= u_2^{-\nu}\ h(x)^{-1}\ (D^{u,\lambda}_{[i]} f)(v_1-1)\\ &= (v_1-1)\ v_1^{\nu} \quad \text{mod.}(u_2).\end{aligned}$$

Par IV.B.2.2., on a $\kappa(x') \leq 2$, c'est une contradiction qui prouve (12).

Puisque $\text{VDir}(x) = \text{VDir}[J(X(n),f,E(n))] = \langle U_1+U_2\rangle$, on a

(13) $\quad \mathfrak{M}_{X(n),x}(u_1+u_2)^{\nu} \subset J(X(n),f,E(n),\{x\})\text{mod. } \mathfrak{M}^{2+\nu}_{X(n),x}$.

Par (12) et E.1.3. (2-2), E.1.4. (2-2), il existe G polynôme homogène de degré ν tel que

(19) $\quad \begin{cases} U_2G \in cl^{\nu+1}[J(X(n),f,E(n),\{x\})] \\ (U_1+U_2)^{\nu} \nmid G \end{cases}$

Donc $(G(v_1-1,1,u_3'),v_1^{\nu}) \subset J(X',f,E')\text{mod.}(u_2')$. Donc $\text{VDir}[J(X',f,E')\text{mod.}(u_2)]$ est de dimension 2. Si $E' = \text{div}(u_2)$, on a $\kappa(x') = 3(B)$ si $\alpha(x') = \nu$, $\kappa(x') = 3(C)$ sinon.

Montrons qu'on a $E' = \text{div}(u_2)$, ce qui terminera la preuve de (ii).

Si $E' \neq \text{div}(u_2)$, on a $\text{div}(u_3) \subset E(n)$ et $\kappa(x) = 3(E**)$ et $u_3'(x') = 0$.

D'où

$$f = h(x)(u_2u_1^{\nu} + u_2^2D) + R(f,u,\lambda)$$

avec $\mathrm{ord}_x(D) = \nu - 1$.

Si $A(3) + 1 \neq 0(p)$, par Euler, on a

$$\left\{\begin{array}{l} c t^{\nu+1}\left[h(x)^{-1}(DM^{u,\lambda}_{[1]} + DM^{u,\lambda}_{[2]} + DM^{u,\lambda}_{[3]})(f)\right] = \\ (A(3)+1)U_2\ U_1^{\nu} + U_2^2 K(U_1,U_2,U_3) \notin k(x)[U_2,U_3] \end{array}\right.$$

Donc $h(x')^{-1}\ DM^{u',\lambda}_{[2]}\ f = (A(3)+1)(v_1-1)^{\nu} + K(v_1-1,1,u'_3)\mathrm{mod.}(u_2) \notin k(x)[u'_3]$, donc x' est à D.Q. et $\pi(x') \leq 2$. C'est une contradiction. Donc $A(3)+1 = 0(p)$, mais alors

$$c t^{1+\nu}\left[h(x)^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[3]}\ f\right] = -U_2 U_1^{\nu} + U_2^2\ K(U_1,U_2,U_3) \notin k(x)\left[U_2,U_3\right].$$

Comme $u'_3(x') = 0$, on a

$$\left\{\begin{array}{l} h(x')^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[3]}\ f = -(v_1-1)^{\nu} + K(v_1-1,1,u'_3)\mathrm{mod.}(u_2) \\ \qquad\qquad \in J(X',f,E',\{x'\}). \end{array}\right.$$

Donc x' est à D.Q. et $\pi(x') \leq 2$, c'est une contradiction, qui montre que $E' = \mathrm{div}(u_2)$ et on a fini la preuve de E.2.8.

E.3. Les propositions E.2.3., E.2.5. et E.2.8. montrent que le théorème II.C.4.2. est vérifié pour $\pi(.) = 3(E)$. Montrons que II.C.4.4. est également vérifié pour $\pi(.) = 3(E)$. Soit donc une suite infinie d'éclatements $\pi(n+i) : X(n+i+1) \longrightarrow X(n+i)$, $i \geq 0$, où $\pi(n+i)$ est l'éclatement centré en $x(n+i)$, point fermé de $X(n+i)$ ν-proche de $x(n) = x \in X(n)$ avec $\pi(x) = 3(E)$ et $\pi(x(n+i)) > 2$.

Par B, C et E.2.8., E.2.5., E.2.3., nous n'avons qu'à regarder le cas où $\pi(x(n+i)) = 3(E)$ pour tout $i \geq 0$ et alors les $x(n+i)$ sont sur le transformé strict $Y(n+i) \subset X(n+i)$ de $Y = \mathrm{div}(u_1) \subset X(n)$. Nous allons donc utiliser le chapitre V.

Montrons d'abord le lemme suivant.

LEMME E.3.1.

Soit x un point fermé maigre de $\mathrm{Sing}(X(n))$ et soit (u,λ) une p-base adaptée de $O_{X(n),x}$ adaptée en x et telle que

(1) $\mathrm{div}(u_1u_2)\subset E(n)$, $\mathrm{div}(u_1) > \mathrm{div}(u_2)$, $A(1)+\nu(x) = O(p)$,

(2) $I(X(n),f,(u,\lambda)) = (u_1^{\nu})\mathrm{mod.}(u_2,u_3)$, où $\nu = \nu(x)$,

(3) $\Delta(I(X(n),f,(u,\lambda))\ ;\ u_3,u_2\ ;\ u_1) = \Delta$ n'a qu'un sommet (c,d),

(4) $\tau(x) \geq 2$.

Alors

(i) $\tau(x) = 3(E)$,

(ii) x est bon.

Preuve.

E.3.1.1. Montrons (i). On vérifie que, quitte à permuter u_2 et u_3, on peut appliquer IV.C.5.. Donc par IV.C.5. (i) (ii), on a $\alpha(x) = \nu$ et $c+d \geq 1$, donc $c > 0$ ou $d > 0$. Alors, par définition de Δ, si $c > 0$, on a $I(X(n),f,(u,\lambda)) = (u_1^{\nu})\mathrm{mod.}(u_3)$ et si $d > 0$, $I(X(n),f,(u,\lambda)) = (u_1^{\nu})\mathrm{mod.}(u_2)$. De plus, $A(1) + \nu = O(p)$ et donc par E.1.2. (2-1) ou E.1.3. (2-1), on a $\tau(x) = 3(E)$.

E.3.1.2. Montrons (ii) par récurrence sur $\lfloor a+b \rfloor$. Voyons le cas où $\lfloor c+d \rfloor = 1$, c'est-à-dire $c+d < 2$. Alors, par IV.C.5. (iii), on a

(5) $c \geq 1$ ou $d \geq 1$.

Donc $[c]+[d] = c+d-1 = \delta -1 < 1$. Alors, par IV.C.5. (vii), Δ n'est pas préparé, donc $(c,d)\in \mathbb{N}^2$ et donc $(c,d) = (1,0)$ ou $(0,1)$. Si $(c,d) = (1,0)$, on a $\alpha[V(u_1,u_2)] = \nu$ et les conditions de E.1. (2-1) pour u_1 et u_2 et donc par E.2.3., x est bon. Si $(c,d) = (0,1)$

alors $\operatorname{div}(u_3) \subset E(n)$, sinon x est à D.Q., on a les conditions de E.1. (2-1) pour u_1 et u_3, par E.2.3., x est bon.

Voyons le cas où $\lfloor c+d \rfloor > 1$, c'est-à-dire $c+d \geqslant 2$. Alors

$$(6) \qquad \operatorname{VDir}(x) = \langle U_1 \rangle .$$

Alors, on a $c \geqslant 1$ ou $d \geqslant 1$. Posons $C(2) = V(u_1,u_2)$ et $C(3) = V(u_1,u_3)$. Si $d \geqslant 1$ alors par IV.C.5.5. comme $\operatorname{div}(u_1u_2) \subset E(n)$, $C(2)$ est permise et $\nu(C(2)) = \nu$. De plus, par IV.C.5. (iv), on a

$$(7) \qquad \operatorname{Sing}_\nu(X(n)) \cap \operatorname{div}(u_1) \subset C(2) \cup C(3).$$

Par (2), on a $\alpha(V(u_2,u_3)) < \nu$. Alors, si $(\nu(C(3)) < \nu$ ou $\operatorname{div}(u_3) \not\subset E(n)$ ou $\sigma(C(3)) < \sigma(C(2)))$, $C(2)$ est la composante de $\operatorname{Sing}_\nu(X(n))$ où $m(.) = 2$ et où $\sigma(.)$ est maximal. L'algorithme du point bon nous impose d'effectuer l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en $C(2)$. Par (6), dans X' il y a au plus un point x' qui est ν-proche de x, c'est le point de paramètres $u' = (u_1u_2^{-1},u_2,u_3)$. Par I.F.3.5., on a

$$I(X',f,(u',\lambda)) = u_2^{-\nu}\, I(X(n),f,(u,\lambda)).$$

Alors par [12] p.127, x', (u',λ) satisfait à (1) (2) (3) avec $\Delta' = (c,d-1)$. Si $\kappa(x') > 2$, on a $\kappa(x') = 3(E)$ par (i) et x' est bon par récurrence et donc x est bon.

Si $\nu(C(3)) = \nu$ et $\operatorname{div}(u_3) \subset E(n)$ et $\sigma(C(3)) > \sigma(C(2))$ alors l'algorithme du point bon nous impose d'effectuer l'éclatement $\pi' : X'' \longrightarrow X(n)$ centré en $C(3)$. De plus, $\alpha(C(3)) = \nu$ et donc $c \geqslant 1$. Alors, par (6), dans X'' il y a au plus un point qui est ν-proche de x, c'est le point x'' de paramètres $u'' = (u_1u_3^{-1},u_2,u_3)$. On a $I(X'',f,(u',\lambda)) = u_3^{-\nu}\, I(X(n),f,(u,\lambda))$, quitte à permuter u_2 et u_3, on conclut comme précédemment.

Si $d < 1$, alors $c > 1$ et donc par IV.C.5.3.1. et IV.C.5.3.2., on a

$\nu(C(3)) = \alpha(C(3)) = \nu$, $C(3)$ est permise en x. Puisque $d < 1$, on a $\alpha(C(2)) < 1$ et donc par (7)

(8) $\qquad \mathrm{Sing}_{\nu}(X(n)) \cap \mathrm{div}(u_1) = C(3).$

Donc

(9) $\qquad C(2) = V(u_1,u_2) \not\subset \mathrm{Sing}_{\nu}(X(n)).$

De plus par (2), on a $\alpha[V(u_2,u_3)] < \nu$, d'où

(10) $\qquad V(u_2,u_3) \not\subset \mathrm{Sing}_{\nu}(X(n)).$

Si $\mathrm{div}(u_3) \subset E(n)$ alors $E(n) = \mathrm{div}(u_1u_2u_3)$ et par (8) (9) (10), $C(3)$ est la seule composante de dimension 1 de $\mathrm{Sing}_{\nu}(X(n))$ où $m(.)$ vaut 2.

Si $\mathrm{div}(u_3) \not\subset E(n)$ alors $E(n) = \mathrm{div}(u_1u_2)$ et $\mathrm{div}(u_1) > \mathrm{div}(u_2)$. Par (9), $C(3)$ est la composante de dimension 1 de $\mathrm{Sing}_{\nu}(X(n))$ où (m,α,σ) est maximal et $\alpha[C(3)] = \nu$.

Donc l'algorithme du point bon nous impose d'effectuer l'éclatement $\pi' : X'' \longrightarrow X(n)$ centré en $C(3)$. Par (6), il y a au plus un point de X'' qui est ν-proche de x, c'est le point de paramètres $u'' = (u_1u_3^{-1},u_2,u_3)$. Comme précédemment, on vérifie que $(x'',(u'',\lambda))$ satisfait aux hypothèses de notre proposition et que $\delta(u'',\lambda) = \delta(u,\lambda)-1$. On conclut donc par récurrence.

E.3.2. Revenons à notre suite d'éclatements $\pi(n+i)$. Alors, par V.1, on a un diviseur $F(n+i) \subset Y(n+i)$ et un entier $r \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $i \geqslant r$, $F(n+i)$ est un d.c.n. de $Y(n+i)$ et on a les conditions (4) et (5) de V.1.

Prenons les notations de V.1., en $x(n+i)$, pour $i \geqslant 1$, on a une p-base $(v(i),\mu(i))$ que l'on note (v,u) en abrégé de $O_{X(n+i),x(n+i)}$

adaptée en $x(n+i)$ telle qu'on a V.1. (4) (5) et $\mathrm{div}(v_1) = Y(n+i)$ et donc $A(1) = \mathrm{ord}_{u_1}(h(x)) = \mathrm{ord}_{v_1}(h(x(n+i)))$ et $A(1) + \nu = O(p)$. Pour le moment, nous ne prétendons pas qu'on a les conditions de E.1. pour v_1, v_2.

E.3.3. Regardons le cas où, pour un $i \geqslant r$ on a

(1) $\qquad F(n+i) = V(v_1,v_2)$, $\mathrm{div}(v_1v_2) \subset E(n+i)$.

Alors, puisque $\kappa(x(n+i)) = 3(E)$, par E.1. (2-1) (2-2), on a

(2) $\qquad c\ell^{\nu}(J(X(n+i),f,E(n+i))) \neq 0 \bmod.(v_2,v_3)$.

On peut appliquer V.1 et V.2.

Par V.2 (i) en $x(n+i+1)$, si $\mathrm{ord}_{x(n+i+1)}(F(n+i+1)) = 2$, $x(n+i+1)$ est le point de paramètres $w = (v_1v_3^{-1}, v_2v_3^{-1}, v_3)$, d'où $E(n+i) = \mathrm{div}(w_1w_2w_3)$ et $I(X(n+i),f,(w,\mu)) = J(X(n+i),f,E(n+i))$ et $\Delta(I(X(n+i+1),f,E(n+i+1))\ ;\ w_3,w_2\ ;\ w_1)$ n'a qu'un sommet, par E.3.1., $x(n+i+1)$ est bon.

Sinon, on a $\mathrm{ord}_{x(n+i+1)}(F(n+i+1)) = 1$, par V.1. et V.2. (ii), on a (1) pour $F(n+i+1)$ et $(v(i+1),\mu(i+1))$ et il existe une fonction entière positive $a(v(.),\mu(.))$ définie en tout i tel qu'on a (1) et on a

$$a(v(i+1),\mu(i+1)) = a(v(i),\mu(i))-1.$$

Donc, pour un $j \geqslant i$, on a $\mathrm{ord}_{x(n+j)}(F(n+j)) = 1$ et $\mathrm{ord}_{x(n+j+1)}(F(n+j+1)) = 2$, et $x(n+j+1)$ est bon.

E.3.4. Regardons le cas où pour tout $i \geqslant r$, on a

(1) $\qquad F(n+i) = V(v_1,v_2\ v_3)$, $\mathrm{div}(v_1v_2) \subset E(n+i)$.

Alors, par définition de $F(n+i)$ (cf. V.1), $F(n+i+1)$ est l'image inverse de $F(n+i)$ et donc, pour tout $i \geqslant r$, $x(n+i+1)$ est un point de croisement pour $(v(i),\mu(i))$ (cf. I.F.4.) et on a pour tout $i \geqslant r$

$$(2) \quad \begin{cases} I(X(n+i+1),f,(v(i+1),\mu(i+1))) = \\ \mathfrak{M}_{X(n+i),x(n+i)}^{-\alpha(x(n+i))} I(X(n+i),f,(v(i),\mu(i))). \end{cases}$$

E.3.4.1. Voyons le cas où en plus de (1), pour un $i \geqslant r$, on a

$$(3) \qquad \alpha(x(n+i))) = \nu(x(n+i)) = \nu .$$

Alors, par (2), pour tout $j \geqslant i$, on a

$$I(X(n+j),f,(v(j),\mu)) = (v_1^{\nu}(j))\text{mod.}(v_2(j),v_2(j)).$$

Par (2) et IV.C.7., pour un j assez grand, on a

$$\Delta(I(X(n+j),f,(v(j),\mu(j)) \; ; \; v_3(j),v_2(j) \; ; \; v_1(j))$$

n'a qu'un sommet.

Comme $Y(n+j) = \text{div}(v_1(j))$, on a $A(1) + \nu = \nu + \text{ord}_{Y(n+j)}(h(x(n+j))) = O(p)$, par E.3.1., $x(n+j)$ est bon.

E.3.4.2. Le dernier cas à étudier est le cas où pour tout $i \geqslant r$, on a (1) et

$$(4) \qquad \alpha(x(n+i)) = 1 + \nu(x(n+i)) = 1 + \nu .$$

Alors, $x(n+i)$ n'est pas combinatoire, et donc, pour tout $i \geqslant r$, on a $E(n+i) \neq \text{div}(v_1v_2v_3)$, d'où par (1)

$$(5) \qquad E(n+i) = \text{div}(v_1v_2).$$

De plus, $x(n+i+1)$ étant un point de croisement pour $(v(i),\mu(i))$ $x(n+i+1)$ est sur le transformé strict $Y(n+i+1)$ de

$Y(n+i) = \mathrm{div}(v_1(i))$. Par (5), pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

(6) $$v(i+1) = (v_1(i)v_2(i)^{-1},\ v_2(i), v_3(i)v_2(i)^{-1}) \ .$$

C'est-à-dire que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $x(n+j)$ est sur le transformé strict $V(v_1(i+1), v_2(i+j))$ de $V(v_1(i), v_2(i))$, et donc par (4), pour tout $i \geq r$, on a

(7) $$\alpha\left[V(v_1(i), v_3(i))\right] = 1 + \nu \ .$$

Quitte à augmenter r, on a pour tout $i \geq r$

(8) $$\begin{cases} f = h(x(n+i))\Big(\sum\limits_{0 \leq r \leq \nu} \gamma_r\, v_1^{\nu-r}\, v_2^{d(r)}\, v_3^{c(r)} + u_1^{1+\nu}\, g\Big) + R(f,v,\mu) \\ \text{avec } \gamma_r \text{ inversible ou nul, } 0 \leq r \leq \nu = \nu(x(n+i)) \text{ pour un } r', \\ 0 \leq r' \leq \nu \text{ tel que } \gamma_{r'} \neq 0, \text{ on a } d(r')r'^{-1} = \inf(d(r)r^{-1} \mid \gamma_r \neq 0\} \\ (c(r')+1)r'^{-1} = \inf((c(r)+r)r^{-1} \mid \gamma_r \neq 0\}. \end{cases}$$

(Voir IV.C.8.).

De plus par (7), on a

(9) $$\gamma_r \neq 0 \Longrightarrow c(r) \geq 1+r.$$

Je dis que

(10) $$\gamma(0) \neq 0 \quad \text{et} \quad (c(0), d(0)) = (1,0).$$

Sinon, par (8) et (9), on a $V_3 \mid c\ell^{\nu}[J(X(n),f,E(n))]$, d'où $V_3 \in \mathrm{VDir}(x(n+i))$ et comme $\mathrm{div}(v_3)$ est transverse à $E(n)$, et que $\tau(x(n+i)) = 3(E)$, par E.2.2., on a $v(x(n+i)) \geq 2$ et donc $v(x(n+i)) = 2$. De plus, par (7), $V(v_1, v_3)$ est permise en $x(n+i)$ et puisque $v(x(n+i)) = 2$, son éclatement n'engendre pas de point ν-proche de $x(n+i)$, donc $V(v_1, v_3) = \mathrm{Sing}_\nu(X(n+i))$ et $\tau(x(n+i)) = 1$, ce qui est une contradiction.

Alors par (9) et puisque $A(1) + \nu = O(p)$, on a les conditions

E.1.3. (2-2) pour $(x(n+i),(v_1,v_3))$ et donc $\kappa(x(n+i)) = 3$ (E**).
On remarque que si $d(r')>0$ alors on a les conditions de E.1.2. (2-2) pour $(x(n+i),(v_1,v_2))$ et donc on a à la fois $\kappa(x(n+i)) = 3$(E*) et (E**).

Nous allons prouver par récurrence sur $d(r')r'^{-1}$ que

(11) $x(n+i)$ est bon.

Si $d(r')\geqslant r'$ alors $\alpha[V(v_1,v_2)] = \nu$ et $C(2) = V(v_1,v_2)$ est une courbe combinatoire passant par $x(n+i)$. Donc

(12) $C(2)\subset \mathrm{Sing}_\nu(X(n))$

et comme $C(2)$ est la seule composante combinatoire de $\mathrm{Sing}_\nu(X(n))$, l'algorithme du point bon nous impose d'effecteur l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n+i)$ en $C(2)$.

Par (7), on a

(13) $J(X(n),f,E(n))\subset (v_1,v_3)^\nu$,

par (12), on a

(14) $J(X(n),f,E(n))\subset (v_1,v_2)^\nu$.

Par E.2.2., on a $\mathrm{VDir}(x) = \langle V_1\rangle$, dans X' il y a au plus un point ν-proche de x, c'est le point x' de paramètres $v' = (v_1v_2^{-1},v_2,v_3)$, on a (8), (9) et $A(1)+\nu = O(p)$ pour $(x',(v',\mu))$ et $d(r')$ est devenu $d(r')-r'$,d'où (11) par récurrence.
Si $d(r')<r'$,soit on a

$$J(X(n),f,E(n),\{x(n+i)\}) \neq \mathfrak{m}_{X(n),x}\, v_1^\nu \bmod. \mathfrak{m}^{2+\nu}_{X(n),x} ,$$

par E.2.7. et (7), $x(n+i)$ est bon.

Sinon, on a $\mathrm{VDir}(x(n+i)) = \langle V_1\rangle$. Effectuons l'éclatement

π' : $X'' \longrightarrow X(n+i)$ centré en $C(3) = V(v_1,v_3)$. Dans X'', il existe un point ν-proche x'' de $x(n+i)$. Sinon $C(3) = \mathrm{Sing}_\nu(X(n))$ et $\kappa(x(n+i)) = 1$. Puisque $\mathrm{VDir}(x) = \langle V_1 \rangle$, x'' est le point de paramètres $v'' = (v_1v_3^{-1},v_2,v_3)$. On vérifie que $\alpha(x'') = \nu$ et que $\Delta(I(X'',f,(v'',\mu))\ ;\ v_3'',v_2''\ ;\ v_1'')$ n'a qu'un sommet à savoir $((c(r')-1-r')r'^{-1},\ d(r'))$. Par IV.C.5., on a $\mathrm{Sing}_\nu(X'') \cap \mathrm{div}(v_1'') \subset V(v_1'',v_2'') \cup V(v_1'',v_3'')$, on en déduit que $\mathrm{Sing}_\nu(X(n)) \cap \mathrm{div}(v_1) = C(3)$.
Puisque $d(r') < r'$, on a $\alpha[V(v_1,v_2)] < \nu$, donc $V(v_1,v_2) \not\subset \mathrm{Sing}_\nu(X(n))$. Comme on a $\mathrm{div}(v_1) = Y(n+i) > \mathrm{div}(v_2)$, $C(3)$ est la composante de dimension 1 de $\mathrm{Sing}_\nu(X(n))$ où (m,α,σ) est maximal et donc l'éclatement π'' centré en $C(3)$ est imposé par l'algorithme du point bon. Par E.3.1., on a (10).

F. SIXIEME CAS DE $\kappa = 3$.

DEFINITION F.1.

Soit x un point fermé de $\mathrm{Sing}(X(n))$, on dit que $\kappa(x) = 3(F)$ si on a les conditions

(1) $\alpha(x) = \nu(x)$, entier noté ν ,

(2) $\kappa(x) > 2$,

(3) $e(x) \geq 2$, $e[J(X(n),f,E(n))] = 3$,

et pour une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ adaptée en x, on a une des deux conditions

(4) $U_1+U_2 \in \mathrm{VDir}(x)$ et $A(1) = \mathrm{ord}_{u_1}[h(x)] = 0(p)$.

(5) $\langle U_1,U_2 \rangle = \mathrm{VDir}(x)$.

F.1.1. Puisque $\alpha(x) = \nu(x)$ et $U_1+U_2 \in \mathrm{VDir}(x)$ et $\tau(x) > 2$, on a

(1) $E(n) \supset \mathrm{div}(u_1u_2)$

F.1.2. On dira que $\tau(x) = 3(F*)$ si $E(n) = \mathrm{div}(u_1u_2)$ et $\tau(x) = 3(F**)$ si $E(n) = \mathrm{div}(u_1u_2u_3)$.

PROPOSITION F.2.

Si $\tau(x) = 3(F**)$, avec les notations de F.1., on a une des deux conditions

(1) $\tau(x) = 3(D)$,

(2) $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1+U_2, U_3\rangle$ et, si on effectue l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x, en tout point $x' \in X'$ ν-proche de x, on a $\tau(x') \leq 2$.

Preuve.

Puisque $E(n) = \mathrm{div}(u_1u_2u_3)$, on a

(3) $J(X(n),f,E(n)) = J(X(n),f,E(n),\{x(n)\})$.

Donc, par F.1. (3), on a $e(x) = 3$. Par F.1. (4), quitte à multiplier u_3 par un inversible, on a

(4) $\mathrm{VDir}(x) \supset \langle U_1+U_2, U_2+U_3\rangle$ ou $\langle U_1+U_2, U_3\rangle$.

Ces inclusions sont des égalités, sinon on a $v(x) = 3$ et $\tau(x) = 0$. Donc $A(1) = O(p)$. Dans le premier cas, on a $\tau(x) = 3(D)$. Nous n'avons plus qu'à étudier le second cas. Désormais, nous supposons

(5) $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1+U_2, U_3\rangle$.

Alors je dis que

(6) $$c\ell^{\nu}[h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[1]}\, f] = 0.$$

En effet, puisque $A(1) = O(p)$, on a $D^{u,\lambda}_{[1]}\, \mathcal{H}(X(n),f,E(n)) \subset \mathcal{H}(X(n),f,E(n))$ et si on n'a pas (6), par A.1. appliqué avec $D = D^{u,\lambda}_{[1]}$, on a $\tau(x) = 3(A)$ et par A.4., on a $U_1 \in VDir(x)$, ce qui contredit (5).

On déduit de (6) que

(7) $$\begin{cases} c\ell^{\nu}[J(X(n),f,E(n),\{x\})] = \\ c\ell^{\nu}[h(x)^{-1}(DM^{u,\lambda}_{[1]} + DM^{u,\lambda}_{[2]} + DM^{u,\lambda}_{[3]}\ ,\ DM^{u,\lambda}_{[i]}\ ;\ 3 \leq i \leq s)(f)] \end{cases}.$$

Effectuons π. D'après (5), si $x' \in X'$ est ν-proche de x, x' est le point de paramètres $v = (1+u_1u_2^{-1}, u_2, u_3u_2^{-1})$. Alors, par I.F.4.2. (9) appliqué avec $v_3 = u_3'$, on a

(8) $$\begin{cases} u_2^{-\nu}\, h(x)^{-1}(DM^{u,\lambda}_{[1]} + DM^{u,\lambda}_{[2]} + DM^{u,\lambda}_{[3]}\ ,\ DM^{u,\lambda}_{[i]}\ ;\ 3 \leq i \leq s)(f) \\ \subset J(X',f,E',\{x'\}) \end{cases}$$

Par (7), on a donc

(9) $$\alpha(x') = \nu(x') = \nu\ .$$

Par (5), (7) et (8), on a

(10) $$V_1 \in VDir(J(X',f,E',\{x'\})) = VDir(x')\text{mod.}\langle V_3\rangle\ .$$

De (9) et (10), on déduit que x' est à D.Q. et donc $\tau(x') \leq 2$. Ce qui termine la preuve de F.2.

PROPOSITION F.3.

Si $\kappa(x) = 3(F*)$ alors, avec les notations de F.1., on a

(i) $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1+U_2\rangle$, $A(1) = O(p)$,

(ii) si on effectue l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x, dans X' il y a au plus un point x' qui est ν-proche de x avec $\kappa(x')> 2$, c'est le point de paramètres $u' = (u_1u_3^{-1},u_2u_3^{-1},u_3)$ et $\kappa(x') = 3(F**)$.

F.3.1. Remarquons tout de suite que F.2., F.3. et D prouvent que les théorèmes II.C.4.2. et II.C.4.4. sont vérifiés pour $\kappa = 3(F)$.

F.3.2. Prouvons F.3. Puisque $E(n) = \mathrm{div}(u_1u_2)$ et que $\kappa(x) > 2$, on a $\mathrm{VDir}(x) \subset \langle U_1,U_2\rangle$, par F.1.3., on a

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathrm{VDir}(x) = \langle U_1+U_2\rangle \text{ ou } \langle U_1,U_2\rangle , \\ \mathrm{c}\ell^{\nu}\,[h(x)^{-1}\, D^{u,\lambda}_{[3]}\, f] \notin k(x)\,[U_1,U_2] \end{cases}$$

Effectuons π et regardons le point x' de paramètres $u' = (u_1u_3^{-1},u_2u_3^{-1},u_3)$. Comme on a $E' = \mathrm{div}(u_1'\,u_2'\,u_3')$, on a

$$(2) \qquad J(X',f,E') = J(X',f,E',\{x'\}).$$

Bien sûr, regardons le cas où $\nu(x') = \nu$.

Par (7), on a

$$(3) \quad \langle U_1'+U_2'\rangle \text{ ou } \langle U_1',U_2'\rangle \in \mathrm{VDir}\,[J(X',f,E')] \bmod. \langle U_3'\rangle .$$

Par I.E.1., on a

$$u_3^{-\nu+1}\ h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[3]}\ f \in J(X',f,E') ,$$

or par (1), $u_3^{-\nu+1}\ h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[3]}\ f = u_3'g$ avec $\mathrm{ord}_{x'}(g) \leq \nu-1$, donc

(4) $\langle U'_3\rangle \in \mathrm{VDir}(J(X',f,E')] = \mathrm{VDir}(x')$.

Si $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1, U_2\rangle$, alors x' est le seul point μ-proche de x et par (3) et (4), on a $v(x') = 3$ et donc $\kappa(x') = 0$ et donc $\kappa(x) = 0$, c'est une contradiction. Par F.1.(4), on a (i). Si $\kappa(x') > 2$, on a par (3) et (4) que $\kappa(x') = 3(F**)$. Pour finir de prouver (ii), montrons qu'en dehors de x', (ν,K) a strictement baissé. On a :

(5) $$c\ell^{\nu}[h(x)^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[1]}\ f] = 0 ,$$

sinon, puisque $A(1) = O(p)$, on a

$$D^{u,\lambda}_{[1]}\ \mathcal{K}(X(n),f,E(n)) \in \mathcal{K}(X(n),f,E(n))$$

et par A.1. appliqué avec $D = D^{u,\lambda}_{[1]}$, on a $\kappa(x) = 3(A)$ et par A.4. , $U_1 \in \mathrm{VDir}(x)$, ce qui contredit (i) qui a été déjà établi. On en déduit que

(6) $$c\ell^{\nu}[h(x)^{-1}(DM^{u,\lambda}_{[1]} + DM^{u,\lambda}_{[2]} + DM^{u,\lambda}_{[3]}\ ,\ DM^{u,\lambda}_{[i]}\ ;\ 3 \leq i \leq s)(f)] \neq 0 .$$

Comme $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1+U_2\rangle$, on peut appliquer IV.B.2.3. qui dit que $(\nu,\kappa)(x') \leq (\nu,2)$, ce qui finit la preuve de (ii).

Par F.3.1., le cas $\kappa = 3(F)$ est terminé.

G. CAS $\kappa = 3(G)$, FIN DE $\kappa = 3$.

G.1. Le but de ce paragraphe est d'étudier un point $x \in X(n)$, tel qu'il existe un voisinage affine U de x et une p-base (u,λ) de $O_{X(n)}(U)$ qui est adaptée au point x et telle que

(1) $$\begin{cases} f = h(x)\ [u_1 g + \mu\ u_2^{\nu+1}] + R(f,u,\lambda) , \\ \nu+1 \neq O(p),\ \mathrm{ord}_x(g) = \nu-1 \geq 0,\ \nu = \nu(x) , \\ \mu \in O^*_{X(n),x} ,\ E(n) \subset \mathrm{div}(u_1u_3). \end{cases}$$

(2) $\alpha[V(u_1,u_2)] \geq \nu$ ou $t[V(u_1,u_2)] \leq 2\nu$.

Comme nous le verrons au chapitre VII, on a ces relations (1) et (2) si, au cours de notre algorithme, x est ν-proche d'un point $y \in X(n-1)$ avec $\kappa(y) = 4$ ou 5. De ce point de vue, le cas où x est à D.Q. est traité dans le chapitre IV. Aussi nous rajoutons la condition

(3) x n'est pas à D.Q.

G.2. Nous allons montrer qu'en fait, avec les conditions (1) (2) (3), sauf dans un cas particulier qui sera $\kappa(x) = 3(G)$, on a $\kappa(x) \leq 1$. (cf. G.4.1.)

PROPOSITION G.2.1.

Sous les conditions G.1. (1) (2) (3), on a

(i) $\alpha(x) = \nu$,

(ii) $U_1 \in \mathrm{VDir}(x)$,

(iii) $\mathrm{div}(u_1) \subset E(n)$.

Preuve.

(i) est clair, on remarque que U_1 divise $c\ell^{\nu}[I(X(n),f,(u,\lambda))]$, ce qui prouve (ii). On a (iii) car si $\mathrm{div}(u_1) \not\subset E(n)$ on a D.Q. (cf. IV.A.1).

PROPOSITION G.2.2.

Sous les conditions G.1. (1) (2) (3), si $\nu = 1$, alors $\kappa(x) = 1$.

Preuve.

Comme $\nu+1 \neq 0(p)$, on a

$$h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[2]}\, f = u_2\, u_1\, g'' + \mu''\, u_2^2 \ , \quad g'' \in O_{X(n),x} \ , \quad \mu'' \in O^*_{X(n),x} \ .$$

Puisque $\nu = 1$, g est inversible et $\exists i$, $1 \leq i \leq s$, tel que

$h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[i]}\, f = u_1 g' + \mu' u_2^2$, $g' \in O^*_{X(n),x}$, $\mu' \in O_{X(n),x}$

et on a $i \neq 2$ car u_2 divise $h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[2]}\, f$.

Donc

$$I(X(n), f, (u,\lambda)) = (u_1, u_2^2)\ .$$

Alors, en appliquant III.1.(v) en permutant les indices 1 et 2, on a le résultat.

G.2.3. Vue la proposition G.2.2., nous supposons désormais

(4) $\qquad \nu \geq 2$.

PROPOSITION G.2.4.

Sous les conditions G.1. (1) (2) (3) et G.2.3. (4), si $v(x) \geq 2$, alors $\kappa(x) = 0$.

Preuve.

Par G.1.(1)(3), on a

$\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1, U_3 \rangle$, $E(n) = \mathrm{div}(u_1 u_3)$.

Effectuons l'éclatement π centré en x, alors il y a au plus un point ν-proche x' de x, c'est le point de paramètres $u' = (u_1 u_2^{-1}, u_2, u_3 u_2^{-1})$ et $f = h(x')(u_1'.g.u_2^{-\nu+1} + \mu u_2) + R(f, u', \lambda)$.

On a $\hat{\nu}(x') \leq 1 < 2 \leq \nu(x)$, d'où le résultat.

G.2.5. Désormais nous supposons

(5) $\qquad v(x) = 1$.

Ce qui, par G.2.1. (ii) entraîne que $\langle U_1 \rangle = \mathrm{VDir}(x)$, et par G.1. (1) entraîne que $cl^{\nu}[u_1 g] = cU_1^{\nu} \neq 0$.

PROPOSITION G.2.6.

Sous les conditions G.1. (1) (2) (3), G.2.3. (4) et G.2.5. (5), si $\alpha[V(u_1,u_2)] = \nu$ alors $\kappa(x) \leq 1$.

Preuve.

La courbe $C = V(u_1,u_2)$ est permise. Effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en C. Alors, par G.2.5., on a $U_1 \in \mathrm{VDir}[J(X(n),f,E(n),C)]$ et donc dans l'ouvert O de X' où $\mathrm{div}(u_1) = \pi^{-1}(C)$, en tous les points y au-dessus de x, on a $\nu(y) = 0$.

Le point $x' \in X' \setminus O$ au dessus de x a pour paramètres $u' = (u_1u_2^{-1},u_2,u_3)$ et

$$f = h(x')(u_1 \; g \; u_2^{-\nu} + \mu \; u_2) + R(f,u',\lambda).$$

Donc $\nu(x') \leq 1 < 2 \leq \nu(x)$. Dans X', il n'y a pas de point ν-proche de x. Montrons que C est localement la seule courbe de $\mathrm{Sing}_{\nu-1}(X(n)) \cap E(n)$, et donc que l'algorithme de $\kappa = 1$ impose d'effectuer π. On a par G.1(1) :

(6) $\quad J(X(n),f,E(n)) = (u_2^{\nu})\mathrm{mod}.(u_1)$.

On en déduit que $C = \mathrm{Sing}(X(n)) \cap \mathrm{div}(u_1)$. Si $\mathrm{div}(u_3) \subset E(n)$ et si Γ est une composante de dimension 1 de $\mathrm{Sing}_{\nu-1}(X(n)) \cap \mathrm{div}(u_3)$ alors $\Gamma = V(u_3, \varphi)$. Par G.2.5., $\mathrm{in}_x(\varphi)^{\nu-1}$ divise U_1^{ν} mod.(U_3) et par (6) , $\mathrm{in}_x(\varphi)^{\nu-1}$ divise U_2^{ν} mod.(U_1,U_3), ce qui est impossible. Donc $\mathrm{Sing}_{\nu-1}(X(n)) \cap \mathrm{div}(u_3)$ est de dimension 0 et $\mathrm{Sing}_{\nu-1}(X(n)) \cap E(n) = C$ et $\kappa(x) \leq 1$.

REMARQUE G.2.7.

Nous supposons désormais $\alpha[V(u_1,u_2)] \neq \nu$, c'est-à-dire par I.A.3. , $\alpha[V(u_1,u_2)] \leq \nu-1$ et donc par G.1. (2) $t[V(u_1,u_2)] \leq 2\nu$.

G.3. Nous allons tester l'algorithme de $\kappa = 0$ en x. Rappelons les hypothèses et notations.

HYPOTHESES - NOTATIONS G.3.1.

Nous choisissons un corps de représentants dans $\hat{O}_{X(n),x} = k(x)[[u_1,u_2,u_3]]$. On a alors

$$(1)\quad \begin{cases} f = h(x)\left[cu_1^{\nu}+\mu u_2^{\nu+1} + \Sigma' f_{j,a,b}\, u_1^{\nu-j}\, u_2^a\, u_3^b\right] + R(f,u,\lambda) \\ f_{j,a,b}\in k(x),\ c\in O^*_{X(n),x},\ \mu\in O^*_{X(n),x},\ \nu\geqslant 2,\ 1+\nu \neq 0(p), \\ \Sigma' = \sum\limits_{1\leq j\leq \nu-1,\, a+b\geqslant j+1}, \end{cases}$$

$$(2)\quad \alpha[V(u_1,u_2)] \leq \nu-1 \quad \text{et} \quad t[V(u_1,u_2)] \leq 2\nu .$$

On pose $\theta = \theta[V(u_1,u_2)]$,(III.3.3.) , par III.3.5., on a

$$(3)\quad \theta \leq 2\nu(\nu - \alpha[V(u_1,u_2)])^{-1} \leq 2\nu .$$

TEST DE $\kappa = 0$. G.3.2.

Considérons la suite d'éclatements

$$\pi(n+\ell) : X(n+\ell+1) \longrightarrow X(n+\ell),\ 0\leq \ell \leq \theta-1 ,$$

où $\pi(n+\ell)$ est centré en $x(\ell)\in C(\ell)\subset X(n+\ell)$, $C(\ell)$ étant le transformé strict de $C(0) = C = V(u_1,u_2)$, $x(\ell)$ étant le point ν-proche de $x = x(0)$ situé sur $C(\ell)$, on note $P(\ell)$ le transformé strict dans $X(n+\ell)$ de $P(0) = \mathrm{div}(u_1)\subset X(n)$, on pose $\Gamma(0) = V(u_1,u_3)$, $\Gamma(\ell+1) = P(\ell+1)\cap \pi(\ell)^{-1}(x(\ell))$, et on note $\Gamma(\ell+1,\ell')$ le transformé strict de $\Gamma(\ell+1)$ dans $X(n+\ell')$, (donc $\ell'\geqslant \ell+1$ et $\Gamma(\ell+1,\ell+1) = \Gamma(\ell+1)$), on note $y(\ell) = \Gamma(\ell-1,\ell)\cap\Gamma(\ell)$, soit $\eta(\ell)$ le point générique de $\Gamma(\ell)$.

On définit par récurrence un ouvert affine $U(\ell)$ de $X(n+\ell)$ et une p-base $(u(\ell),\lambda)$ de $R(\ell) = O_{X(n+\ell)}(U(\ell))$. Pour $\ell = 0$, on prend $U(0) = U$ et $(u(0),\lambda) = (u,\lambda)$, (cf. G.1). Puis

$$R(\ell) = R(O)\,[u_1 u_3^{-\ell}, u_2 u_3^{-\ell}],$$
$$u(\ell) = (u_1 u_3^{-\ell}, u_2 u_3^{-\ell}, u_3),$$
$$U(\ell) = \mathrm{Spec}\, R(\ell).$$

On observe que pour $1 \leq \ell \leq \theta-1$

$$(1)\quad \begin{cases} E(n+\ell)\cap U(\ell) = \mathrm{div}(u_1(\ell)u_3(\ell)), \\ P(\ell) = \mathrm{div}(u_1(\ell)) \subset E(n+\ell), \\ \pi(\ell-1)^{-1}(x(\ell-1)) = \mathrm{div}(u_3(\ell)), \\ \Gamma(\ell)\cap U(\ell) = \mathbb{V}(u_1(\ell),u_3(\ell)) = \Gamma(\ell)-\{y(\ell)\}, \\ \{x(\ell)\} = \mathbb{V}(u_1(\ell),u_2(\ell),u_3(\ell)). \end{cases}$$

Par ailleurs, au point $y(\ell)$, on a une p-base adpatée $(u'(\ell),\lambda)$ avec

$$u'(\ell) = (u_1(\ell-1)u_2(\ell-1)^{-1}, u_2(\ell-1), u_3(\ell-1)u_2(\ell-1)^{-1}).$$

Puisque $\ell \leq \theta-1$, on a $\nu(x(\ell)) = \nu$. Puisque $x(\ell)$ est un point de croisement pour $(u(\ell-1),\lambda)$ on a $R(f,u,\lambda) = R(f,u(\ell-1),\lambda) = R(f,u(\ell),\lambda)$, (cf. I.E.1.4).

Puisque $m(y(\ell)) = 3$ on a $\alpha(y(\ell)) = \nu(y(\ell))$.

<u>LEMME G.3.3.</u>

Avec les hypothèses et notations de G.3.2., en tout point $y \in \Gamma(\ell)-\{y(\ell)\}$, $0 \leq \ell \leq \theta-1$, on a un système de générateurs $\varphi(\ell) = (\varphi_1(\ell),\ldots,\varphi_s(\ell))$ de $I(X(n+\ ),f,(u(\ell),\lambda))$ vérifiant

$$\begin{cases} \varphi_1(\ell) = u_1(\ell)^{\nu} + u_1(\ell)\, g_{1,\ell}, \\ \varphi_2(\ell) = u_2(\ell)^{1+\nu}\, u_3(\ell)^{\ell} + u_1(\ell)u_2(\ell)g_{2,\ell}, \\ \varphi_i(\ell) = u_1(\ell)\, g_{i,\ell}, \quad 3 \leq i \leq s, \end{cases}$$

$g_{i,\ell} \in O_{X(n+\ell)}(U(\ell))$, $1 \leq i \leq s$.

Preuve.

Pour $\ell = 0$, on prend

$$\varphi_2(0) = [h(x)(DM^{u,\lambda}_{[2]}\,\mu + (\nu+1)\mu)]^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[2]}\, f .$$

Comme $\langle U_1 \rangle = \mathrm{VDir}(I(X(n),f,(u,\lambda))) = \mathrm{VDir}(x)$, pour un i, $1 \leq i \leq s$, on a $f_i = h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[i]}\, f = c(i)u_1^{\nu} \bmod . \mathfrak{M}_x^{\nu+1}$, $c(i)$ inversible. Une combinaison linéaire de f_i et de $\varphi_2(0)$ donne $\varphi_1(0)$, par combinaison linéaire des $h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[i]}\, f$ et de $\varphi_2(0)$ on obtient les autres $\varphi_i(0)$.

Pour $1 \leq \ell \leq \theta-1$, il suffit de prendre $\varphi_i'(\ell) = \varphi_i(0)\, u_3^{-\ell}$, $1 \leq i \leq s$.

G.3.4. On remarque que $U_1(\ell)$ divise $c\ell^{\nu}_{x(\ell)}[I(X(n),f,(u(\ell),\lambda))]$ et donc que

$$U_1(\ell) \in \mathrm{VDir}(x(\ell)), \qquad 1 \leq \ell \leq \theta-1 .$$

LEMME G.3.5.

Pour tout ℓ, $1 \leq \ell \leq \nu-1$, si $y \in X(n+\ell)-\{x(\ell)\}$ est ν-proche de x, alors $y = y(\ell)$ et $\kappa(y) = 0$.

Preuve.

Par G.3.4., si $y \in \mathrm{Sing}_{\nu}(X(n+\ell))$ alors $y \in P(\ell) \cap \pi(\ell-1)^{-1}(x(\ell-1)) = \Gamma(\ell)$. De plus, si $y \in \Gamma(\ell)-\{x(\ell)\}-\{y(\ell)\}$ alors $\mathrm{ord}_y(\varphi_2(\ell)) \leq \ell \leq \nu-1$ et donc $\nu(y) \leq \nu-1$.

Si $y = y(\ell)$, alors on a

$$I(X(n+\ell),f,(u'(\ell),\lambda)) = I(X(n+\ell),f,(u(\ell-1),\lambda))u_2(\ell-1)^{-\nu} ,$$

Or $\varphi = \varphi_1(\ell-1).u_2(\ell-1)^{-\nu} = u_1'(\ell)^{\nu} + u_1'(\ell)g_{1,\ell-1}\, u_2(\ell-1)^{-\nu}$, et $\varphi' = \varphi_2(\ell-1)u_2(\ell-1)^{-\nu} = u_2'(\ell)^{\ell-1} + u_3'(\ell)^{\ell-1} + u_1'(\ell)g_{2,\ell-1}\, u_2'(\ell-1)^{-\nu+1}$.

Donc $I(X(n+\ell),j,(u'(\ell),\lambda))$, φ et φ' satisfont à III.1. (i) (après permutation des indices 1 et 2) et donc $\kappa(y(\ell)) = 0$.

G.3.6. On remarque que, si $\theta \leq \nu - 1$, par G.3.5., dans $X(n+\theta)$, tous les points y qui sont ν-proches de x vérifient $\kappa(y) = 0$ et donc $\kappa(x) = 0$.

Désormais nous supposons $\nu \leq \theta$, ce qui, par G.3.1. (3) implique $\nu - 1 \leq t[V(u_1,u_2)] \leq 2\nu$ et $\nu - \alpha[V(u_1,u_2)] \leq 2$.

LEMME G.3.7.

Soit ℓ, $1 \leq \ell \leq \theta - 1$ tel que $v(x(\ell-1)) = 1$, $v(x(\ell)) \geq 2$ alors

(i) si $\alpha(\Gamma(\ell)) < \nu$, on a $\kappa(x(\ell)) = 0$,

(ii) si $\alpha(\Gamma(\ell)) = \nu$, on a $\kappa(x(\ell)) = 1$.

Preuve.

Puisque $v(x(\ell-1)) = 1$, par G.3.4., on a $\langle U_1(\ell-1)\rangle = \mathrm{VDir}(x(\ell-1))$. Donc dans G.3.3., on a

$$\mathrm{ord}_{x(\ell-1)}(g_{1,\ell-1}) \geq \nu, \quad \mathrm{ord}_{x(\ell-1)}(g_{2,\ell-1}) \geq \nu - 1$$

et, quitte à combiner $\varphi_i(\ell-1)$ et $\varphi_1(\ell-1)$, $3 \leq i \leq s$, $\mathrm{ord}_{x(\ell-1)}(g_{i,\ell-1}) \geq \nu$. Donc $u_3(\ell)$ divise les $g_{i,\ell}$, $1 \leq i \leq s$ et puisque $v(x(\ell)) \geq 2$, on a $U_3(\ell) \in \mathrm{VDir}(x(\ell))$. Alors, $x(\ell)$, f et $(u(\ell),\lambda)$ satisfont aux hypothèses de III.4.1. (en permutant les indices 2 et 3). D'où (i). Si $\alpha(\Gamma(\ell)) = \nu$, par III.4.1, on a $\kappa(x(\ell)) \leq 1$, mais $\Gamma(\ell)$ étant combinatoire (I.A.6.(6)), on a $\alpha(\Gamma(\ell)) = \nu(\Gamma(\ell)) = \nu$, donc $\mathrm{Sing}_\nu(X(\ell)) \supset \Gamma(\ell)$, $x(\ell)$ n'est pas isolé dans $\mathrm{Sing}_\nu(X(\ell))$, on a $\kappa(x(\ell)) \neq 0$ et donc $\kappa(x(\ell)) = 1$.

LEMME G.3.8.

Si $\alpha[V(u_1,u_2)] \leq \nu - 2$ ou $t[V(u_1,u_2)] \leq \nu$ alors $\kappa(x) = 0$.

Preuve.

Par G.3.1. (3), on a

(1) $\quad \theta \leq t[V(u_1,u_2)](\nu-\alpha)^{-1} \leq \nu$

où $\alpha = \alpha[V(u_1,u_2)]$. Si $t[V(u_1,u_2)] \leq \nu-1$ ou $\alpha[V(u_1,u_2)] \leq \nu-3$, on a $\theta \leq \nu-1$ et G.3.6. prouve le résultat.

Voyons donc le cas où $\theta = \nu$. On a, en notant u au lieu de $u(\theta-1)$:

$$f = h(x(\theta-1))(cu_1^{\nu} + \mu\, u_2^{\nu+1} u_3^{\nu-1} + \sum f_{j,a,b}\, u_1^{\nu-j} u_2^{a} u_3^{b+\theta(j-a)}) + R(f,u,\lambda).$$

Par (1), on a un des deux cas

(a) $t[V(u_1,u_2)] = 2\nu$ et $\nu-\alpha = 2$,

(b) $t[V(u_1,u_2)] = \nu$ et $\nu-\alpha = 1$.

(a) $\Longrightarrow \exists j,a,b$, $f_{j,a,b} \neq 0$, $b = 2\nu$ $a = j-2$

$\Longrightarrow (\nu-j,a,b+\theta(j-a)) = (\nu-j,j-2,2)$

$\Longrightarrow c\ell^{\nu}[I(X(n+\theta-1),f,(u,\lambda))] \neq (U_1^{\nu})$

$\Longrightarrow v(x(\theta-1)) \geq 2.$

(b) $\Longrightarrow \exists j,a,b$, $f_{j,a,b} \neq 0$, $b = \nu$, $a = j-1$

donc $(\nu-j,a,b+\theta(j-a)) = (\nu-j,j-1,1)$ et $v(x(\theta-1)) \geq 2$.

Or $v(x) = 1$, donc $\exists \ell$, $1 \leq \ell \leq \theta-1$ avec $v(x(\ell)) \geq 2$ et $v(x(\ell-1)) = 1$, mais $\alpha(\Gamma(\ell)) \leq \mathrm{ord}_{\eta(\ell)}(\varphi_2(\ell)) \leq \ell \leq \theta-1 \leq \nu-1$, donc par G.3.7., $\kappa(x(\ell)) = 0$. Alors, par G.3.5., dans $X(n+\ell)$, en tous les points y qui sont ν-proches de x, on a $\kappa(y) = 0$, d'où $\kappa(x) = 0$.

<u>LEMME G.3.9</u>.

Si $\alpha[V(u_1,u_2)] = \nu-1$, on a :

(i) $\alpha(\Gamma(1)) = 1$,

(ii) $\alpha(\Gamma(\ell)) \leq \ell$, $1 \leq \ell \leq \theta$,

(iii) $\alpha(\Gamma(\ell)) \leq \nu$, $1 \leq \ell \leq \theta$,

(iv) si $\alpha(\Gamma(\ell)) \leq \alpha(\Gamma(\ell-1))$ alors $\alpha(\Gamma(\ell+1)) \leq \alpha(\Gamma(\ell))$, $2 \leq \ell \leq \theta-1$.

Preuve.

On a déjà vu que $\alpha(\Gamma(\ell)) \leq \mathrm{ord}_{\eta(\ell)}(\varphi_2(\ell)) \leq \ell$, ce qui prouve (ii).

De plus, puisque $V\mathrm{Dir}(x) = \langle U_1 \rangle$, on a $c\ell^{\alpha}[I(X(n),f,(u,\lambda))] = (U_1^{\nu})$ et donc

$$I(X(n+1),f,(u(1),\lambda)) = (u_1^{\nu}(1))\mathrm{mod}.(u_3) .$$

Comme $\Gamma(1) = V(u_1(1),u_3)$, on a $\alpha(\Gamma(1)) \neq 0$ et par (ii), $\alpha(\Gamma(1)) \leq 1$ d'où $\alpha(\Gamma(1)) = 1$, ce qui est (i). On a

$$\alpha(x(\ell)) = \mathrm{ord}_{x(\ell)}\left[I(X(n+\ell),f,(u(\ell),\lambda))\right]$$
$$= \mathrm{ord}_{x(\ell)}\left[I(X(n),f,(u,\lambda))\ u_3^{-\ell\nu}\right] \leq \nu .$$

Comme $\nu(x(\ell)) = \nu$ par définition de Θ, on a $\alpha(x(\ell)) = \nu$ et par I.A.3. (vii), on a $\alpha(\Gamma(\ell)) \leq \alpha(\Gamma(\ell),x(\ell)) \leq \alpha(x(\ell)) = \nu$. Ce qui prouve (iii).

Prouvons (iv). On a

$$f = h(x(\ell))(cu_1(\ell)^{\nu} + \mu\ u_2(\ell)^{\nu+1}\ u_3^{\ell} + \Sigma'\ f_{j,a,b}\ u_1(\ell)^{\nu-j}\ u_2(\ell)^a\ u_3^{b+\ell(a-j)})$$
$$+ R(f,u(\ell),\lambda).$$

Or on a $\alpha\left[V(u_1,u_2)\right] = \nu-1$, donc $f_{j,a,b} = 0$ si $0 \leq a \leq j-2$ et on a, en posant u au lieu de $u(\ell)$

$$(1)\qquad f = h(x(\ell))(cu_1^{\nu} + \mu\ u_2^{\nu+1}\ u_3^{\ell} + g_{\ell}\ u_1\ u_3^{\ell} + \sum_{1\leq j\leq \nu-1} u_1^{\nu-j}(\sum_{b\geq 0} f_{j,j,b}\ u_2^j\ u_3^b$$
$$+ f_{j,j-1,b}\ u_2^{j-1}\ u_3^{b-\ell})) + R(f,u,\lambda).$$

Avec $g_{\ell} \in O_{X(n+\ell)}(U(\ell))$.

Si $\alpha(\Gamma(\ell)) \leq \alpha(\Gamma(\ell-1))$, soit $\alpha\left[\Gamma(\ell)\right] = \nu$ et donc $\alpha(\Gamma(\ell)) = \alpha(\Gamma(\ell-1)) = \nu$, (iv) est alors une conséquence de (iii).

Soit on a $\alpha(\Gamma(\ell)) < \nu$ et $\alpha(\Gamma(\ell)) \leq \alpha(\Gamma(\ell-1))$, alors par (ii), on a $\alpha(\Gamma(\ell)) \leq \ell-1$. Puisque $\Gamma(\ell) = V(u_1,u_3)$, on a

$$\alpha(\Gamma(\ell)) = \inf\left\{\{b+\nu-j\ ;\ f_{j,j,b} \neq 0\} \cup \{b-\ell+\nu-j\ ;\ f_{j,j-1,b} \neq 0\}\right\}.$$

Si $\alpha(\Gamma(\ell)) = b'+\nu-j'$ avec $f_{j',j',b'} \neq 0$ alors en appliquant (1) pour l'indice $\ell+1$, on a $\alpha(\Gamma(\ell+1)) \leq b'+\nu-j' \leq \alpha(\Gamma(\ell))$.

Si $\alpha(\Gamma(\ell)) = b'+\nu-j'-\ell$ avec $f_{j',j'-1,b'} \neq 0$ et par (1), on a

$\alpha(\Gamma(\ell+1)) \leq b'+\nu-j'-\ell-1 \leq \alpha(\Gamma(\ell))-1$. On a (iv).

PROPOSITION G.3.10.

Si $\alpha(\Gamma(\ell)) = \nu$ et $\alpha(V(u_1,u_2)) = \nu-1$, alors

(i) $\kappa(x(\ell)) \geqslant 1$ pour $0 \leq \ell \leq \nu$,

(ii) au voisinage de $\Gamma(\nu)$, on a $\Gamma(\nu) = \mathrm{Sing}_\nu(X(n+\nu))$,

(iii) $\kappa(y) = 1$, $\forall y \in \Gamma(\nu) \setminus \{x(\nu)\}$,

(iv) l'éclatement $\pi'(\nu) : X' \longrightarrow X(n+\nu)$ centré en $\Gamma(\nu)$ est permis en tous les points de $\Gamma(\nu)$, dans X' il y a au plus un point ν-proche de $\Gamma(\nu)$: c'est le point x' au-dessus de $x(\nu)$ dans le transformé strict de $\mathrm{div}(u_1)$ et on a ($\kappa(x') = 0$ ou x' est à D.Q.).

Preuve.

La courbe $\Gamma(\nu)$ est intersection de deux composantes de $E(n+\nu)$, cf. (G.3.2.(1)) donc $\alpha(\Gamma(\nu)) = \nu(\Gamma(\nu)) = \nu$. On a $\Gamma_\nu \subset \mathrm{Sing}_\nu(X(n+\nu))$. Donc l'algorithme de $\kappa = 0$ aboutit à un échec en $X(n+\nu)$. On en déduit que $\kappa(x(\ell)) \geqslant 1$ pour $0 \leq \ell \leq \nu$.

Dans $X(n+\nu)$, on a

$$J(X(n+\nu),f,E(n+\nu)) = J(X(n+\nu),f,E(n+\nu),\Gamma(\nu))$$

et par I.D.1., $\Gamma(\nu)$ est permise en tous les points.

Effectuons $\pi'(\nu)$. Regardons d'abord les points y de $\Gamma(\nu) - \{x(\nu),y(\nu)\}$. Posons $f_2 = h(y)^{-1}\, DM_{[2]}^{u(\ell),\lambda} f$, par G.3.9. (1) appliqué pour $\ell = \nu$, on a

$$(1)\quad f_2 = u_2(\ell) D_{[2]}^{u(\ell),\lambda} c\, u_1(\ell)^\nu + \left[(\nu+1)\mu + D_{[2]}^{u(\ell),\lambda}\mu\right] u_2(\ell)^{\nu+1} u_3(\ell)^\nu$$
$$+ u_1(\ell)\, u_3(\ell)\, g'_\nu \ ,$$

avec $g'_\nu \in (u_1(\ell),u_3(\ell))^{\nu-2}\, O_{X(n+\nu)}(U(\nu))$.

Comme $c \in O_{X(n)}(U)$, on a $D_{[2]}^{u(\ell),\lambda} c \in u_3(\ell)\, O_{X(n+\nu)}(U)$.

Désormais, quand il n'y a pas d'ambiguité, on abrège $u_i(\ell)$ en u_i.

Comme $\nu+1 \neq 0(p)$ et $u_2(y) \neq 0$, on a $\mathrm{ord}_y(f_2) = \nu$, par (1) u_3 divise f_2. De plus, par G.3.3., u_1 divise $\varphi_1(\nu)$ et comme $\varphi_1(\nu)$ est le transformé strict de $\varphi_1(0)$, on a $\mathrm{ord}_y [\varphi_1(\nu)] \leq \nu$ et donc $\mathrm{ord}_y [\varphi_1(\nu)] = \nu$. Donc

$$\langle U_1, U_3\rangle = \mathrm{VDir}[I(X(n+\nu), f, (u,\lambda))O_{X(n+\nu),y}]$$
$$= \mathrm{VDir}[J(X(n+\nu), f, E(n+\nu), \Gamma(\nu))O_{X(n+\nu),y}] .$$

Par I.E.1., il n'y a pas de point ν-proche de y dans X'.
En le point $y(\nu)$, en notant u' au lieu de $u'(\nu)$, on a par G.3.9. (1).

$$f = h(y(\nu))(c\,u_1'^{\nu} + \mu\, u_2'^{\nu}\, u_3'^{\nu-1} + \sum_{1\leq j\leq \nu-1} u_1'^{\nu-j}\, (\sum_b f_{j,j,b}\, u_2^b\, u_3^b$$
$$+ f_{j,j-1,b}\, u_2^{b-\nu} u_3^{b-\nu+1}) + g_\nu'\, u_1 u_2^{\nu}) + R(f,u',\lambda) .$$

On a $\Gamma(\nu) = V(u_1', u_2')$, on remarque que $U_1' \in \mathrm{VDir}(y(\nu))$, donc dans X' il y a au plus un point ν-proche de $y(\nu)$, c'est le point z de paramètres $v = (u_1'\, u_2'^{-1}, u_2', u_3')$, un calcul simple montre que $\alpha(z) \leq \mathrm{ord}_z(\mu\, v_3^{\nu-1}) \leq \nu-1$.

Regardons ce qui se passe au-dessus de $x(\nu)$. On a $U_1 \in \mathrm{VDir}(x(\nu))$ (cf. G.3.4.) et donc il y au plus un point ν-proche x' de $x(\nu)$, c'est le point de paramètres $w = (u_1\, u_3^{-1}, u_2, u_3)$. Donc $\mathrm{Sing}_\nu(X') \subset \{x'\}$, ce qui prouve (ii) et (ii) entraîne (iii) puisque au-dessus de $\Gamma_\nu - \{x(\nu)\}$ il n'y a pas de point ν-proche de x et que l'algorithme de $\kappa = 1$ impose d'effectuer $\pi'(\nu)$.

Si $\nu(x') \leq \nu-1$, on a (iv). Si $\nu(x') = \nu$, alors $\langle U_1\rangle = \mathrm{VDir}(x(\nu))$; par G.3.9. (1), on a

$$f = h(x')(c w_1^{\nu} + \mu w_2^{\nu+1} + g_\nu w_1 + \sum_{1\leq j\leq \nu-1} w_1^{\nu-j} (\sum_b f_{j,j,b}\, w_2^j\, w_3^{b-j}$$
$$+ f_{j,j-1,b}\, w_2^{j-1}\, w_3^{b-\nu-j})) + R(f,w,\lambda) .$$

Donc f, x' et (w,λ) satisfont à G.1.
On a $\alpha[V(u_1,u_2)] = \alpha[V(w_1,w_2)] = \nu-1$ et par III.3.5., $t[V(w_1,w_2)] \leq t(V(u_1,u_2)) - \nu - 1 \leq \nu-1$. Par G.2.4., si x' n'est pas à

D.Q. et $v(x')\geq 2$ alors $\kappa(x') = 0$; par G.3.8., si x' n'est pas à D.Q. et $v(x') = 1$ alors $\kappa(x') = 0$. On a prouvé (iv).

PROPOSITION G.3.11.

Si $\alpha(\Gamma(\nu))<\nu$ et $\alpha(V(u_1,u_2)) = \nu-1$ alors $\kappa(x) = 0$.

Preuve.

G.3.11.0. Nous allons montrer qu'en tous les points de $X(n+\Theta)$ qui sont ν-proches de x (s'il en existe !), $\kappa(.)$ est nul. Ce qui entraînera que $\kappa(x) = 0$.

G.3.11.1. On a $\kappa(x(\Theta-1)) = 0$. En effet, d'après G.3.9. (1), en $x(\Theta-1)$, on a

$$f = h(x(\Theta-1))(cu_1^{\nu} +\mu\, u_2^{\nu+1}\, u_3^{\Theta-1} + \sum u_1^{\nu-j}\, (\sum f_{j,j,b}\, u_2^j\, u_3^b + \sum f_{j,j-1,b}\, u_2^{j-1}\, u_3^{b-\Theta+1}) + u_1\, u_3^{\Theta-1}\, g_{\Theta-1}) + R(f,u,\lambda).$$

Or $\alpha(C(0)) = \nu-1$, donc $\Theta = t[C(0)]$, par définition de $t(.)$, $\exists j',b'$ avec $f_{j',j'-1,b'} \neq 0$ et $b' = \Theta$, sur G.3.9 (1), on lit $\mathrm{VDir}(x(\Theta-1)) \neq \langle U_1\rangle$, donc (cf. 6.3.4.) $v(x(\Theta-1))\geq 2$, donc $\exists \ell$, $1\leq \ell\leq \Theta-1$ avec $v(x(\ell))\geq 2$ et $v(x(\ell-1)) = 1$. Comme $\alpha[\Gamma(\nu)]<\nu$, par G.3.9., on a $\alpha[\Gamma(\ell)]<\nu$. Par G.3.7, on a $\kappa(x(\ell)) = 0$, d'où $\kappa(x(\Theta-1)) = 0$.

G.3.11.2. Ainsi $\kappa(.)$ est nul en tous les points de $X(n+\Theta)$ ν-proches de $x(\Theta-1)$. Etudions les autres points de $X(n+\Theta)$ qui sont ν-proches de x .

Pour un tel point z, soit ℓ le plus petit entier tel que la projection y de z sur $X(n+\ell)$ n'est pas $x(\ell)$, alors $1\leq\ell\leq\Theta-1$ et $X(n+\Theta)\longrightarrow X(n+\ell)$ est un isomorphisme au voisinage de z. Donc en fait, on étudie un point $y \in \Gamma(\ell) - \{x(\ell)\}$, $1 \leq \ell \leq \theta - 1$; par G.3.5., si $1 \leq \ell \leq \nu - 1$, on a $\kappa(y) = 0$, regardons le cas où $\nu \leq \ell \leq \theta - 1$.

G.3.11.3. Regardons d'abord le point $y(\ell) \in \Gamma(\ell) \cap \Gamma(\ell-1,\ell)$. Alors, on a, en notant u' au lieu de $u'(\ell)$,

$$f = h(y(\ell))(cu_1'^{\nu} + \mu\, u_2'^{\ell} u_3'^{\ell-1} + \sum_{1 \leq j \leq \nu-1} u_1'^{\nu-j} (\sum_{0 \leq b} f_{j,j,b}\, u_2'^{b}\, u_3'^{b}$$
$$+ \sum_{\ell \leq b} f_{j,j-1,b}\, u_2'^{b-\ell}\, u_3'^{b-\ell+1})) + R(f,u',\lambda)$$
$$= h(y(\ell))(cu_1'^{\nu} + \mu\, u_2'^{\ell}\, u_3'^{\ell-1} + \sum_{1 \leq j \leq \nu-1} u_1'^{\nu-j}\, \gamma_j\, u_2'^{b(j)}\, u_3'^{c(j)})$$
$$+ R(f,u',\lambda)$$

Avec γ_j inversible ou nul, $\gamma_j \in O_{X(n+\ell),y(\ell)}$, $c(j) = b(j)$ ou $b(j) + 1$. De plus, $\alpha[V(u_1',u_3')] < \nu$, car $V(u_1',u_3')$ est le transformé strict de $\Gamma(\ell-1)$ et par G.3.9., si $\ell - 1 \geq \nu$, $\alpha(\Gamma(\ell-1)) \leq \alpha(\Gamma_\nu) < \nu$ et si $\ell - 1 = \nu - 1$, toujours par G.3.9., $\alpha(\Gamma(\ell-1)) \leq \ell - 1 = \nu - 1$. Donc, pour un j', $1 \leq j' \leq \nu - 1$, on a $\gamma_{j'}$ inversible et $c(j') \leq j'-1$ et donc $b(j') \leq j'-1$. De plus, par G.3.3., on a un élément $\varphi = \varphi_1(\ell-1)u_2^{-\nu}$ dans $I(X(n+\ell),f,(u',\lambda))$ avec $\varphi = u_1'^{\nu} + u_1'\, g$. On a donc

$$(*)\quad \begin{cases} f = h(y(\ell))(cu_1'^{\nu} + \mu\, u_2'^{a}\, u_3'^{b} + \sum_{1 \leq j \leq \nu-1} u_1'^{\nu-j}\, \gamma_j\, u_2'^{b(j)} u_3'^{c(j)}) + R(f,u',\lambda) \\ 0 < a,\ 0 < b,\ \mu \text{ inversible, pour un } j',\ 1 \leq j' \leq \nu-1, \\ \gamma_{j'} \text{ inversible et } b(j') \leq j'-1,\ c(j') \leq j'-1, \\ m(y(\ell)) = 3 \text{ et } \exists \varphi \in J(X(n+\ell),f,E(n+\ell)) = J(X(n+\ell),f,E(n+\ell),\{y(\ell)\}) \\ \varphi = u_1'^{\nu} + u_1'\, g. \end{cases}$$

Alors $U_1' \in VDir(\varphi) \subset VDir(y(\ell))$.

Effectuons l'éclatement π centré en $y(\ell)$, dans l'ouvert où $div(u_2') = \pi^{-1}(y(\ell))$, le monôme $u_1'^{\nu-j}\, u_2'^{b(j')}\, u_3'^{c(j')}$ devient

$(u'_1\ u'^{-1}_2)^{\nu-j'}\ u'^{\,b(j')+c(j')-j'}_2\ (u'_3\ u'^{-1}_2)^{c(j')}$, donc $(u'_3\ u'^{-1}_2)$ est nul en tout point proche de $y(\ell)$. De plus $b(j') + c(j')-j' < b(j')$. Par symétrie entre u'_2 et u'_3 , on en déduit que tout point ν-proche de $y(\ell)$ satisfait à (*) avec décroissance stricte de $b(j')+c(j')$. D'où $\kappa(y(\ell)) = 0$.

G.3.11.4. Voyons le cas où $y \neq y(\ell)$. Alors $y \in U(\ell)-\{x(\ell)\}$ et $u_2(\ell)(y) \neq 0$ et

$$J(X(n+\ell),f,E(\ell)) = I(X(n+\ell),f,(u(\ell),\lambda)) .$$

Posons $f_i = h(y)^{-1}\ DM^{u(\ell),\lambda}_{[i]}\ f,\ 1 \leq i \leq s$,

$$\alpha = \alpha(\Gamma(\ell)),\ F_i = f_i \text{ mod.}(u_1(\ell),u_3(\ell))^{\alpha+1} .$$

Reprenons la notation abrégée $u = u(\ell)$. On a

$$f = h(y)(cu_1^{\nu} + \mu\ u_2^{\nu+1}\ u_3^{\ell} + \Sigma''\ u_1^{\nu-j}\ u_3^{b}\ u_2^{j-1}(f_{j,j,b}\ u_2 + f_{j,j,b+\ell})) + R(f,u,\lambda) ,$$

où $\Sigma'' = \sum\limits_{1\leq j\leq \nu-1,\alpha-\nu+j\leq b}$, $h(y) = u_1^{A(1)}\ u_3^{A(3)+\ell(A(1)+\nu)}$,

$$\begin{cases} F_i = \sum\limits_{1\leq j\leq \nu-1} u_1^{\nu-j}\ u_3^{\alpha-\nu+j}\ u_2^{j-1}\ (s(i,j)u_2 + t(i,j)),\ 1\leq i\leq s ,\\ s(i,j) \text{ et } t(i,j)\in k(x), \end{cases}$$

posons :

$$\begin{cases} v(j)=s(j)u_2 + t(j) = f_{j,j,\alpha-\nu+j}\ u_2+f_{j,j,\alpha-\nu+j+\ell} ,\\ v(i,j) = s(i,j)u_2 + t(i,j),\ 1\leq i\leq s\ ,\ 1\leq j\leq \nu-1 . \end{cases}$$

Alors on a pour $1\leq j\leq \nu-1$

$$(1)\quad \begin{cases} v(1,j) = (A(1)+\nu-j)(s(j)u_2+t(j)) ,\\ v(2,j) = js(j)u_2 + (j-1)t(j) ,\\ v(3,j) = (A(3)+\ell(A(1)+\nu)+\alpha - \nu+j)(s(j)u_2 + t(j)) . \end{cases}$$

Comme $\alpha(\Gamma(\ell)) = \alpha$, un des $v(i,j)$ est non identiquement nul pour $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq \nu-1$. On a $\nu = \nu(y) \leq \alpha + \mathrm{ord}_y(v(i,j)) < \alpha+1 < \nu+1$, (rappelons que $u_2(y) \neq 0$). Donc

(2) $\alpha = \nu-1$ et y est rationnel sur x.

Si $v(i,j)$ est non identiquement nul, on a $\mathrm{ord}_y(v(i,j)) = 1$ et donc $s(i,j) \neq 0$ et comme $u_2(y) \neq 0$, on a $t(i,j) \neq 0$, donc $s(j)t(j) \neq 0$, donc $v(2,j)$ n'est pas identiquement nul car j et $j-1$ ne sont pas simultanément nuls, donc $s(2,j)t(2,j) \neq 0$ et donc

(3) $j(j-1) \neq 0(p)$ dès que $v(j) \neq 0$.

De plus les polynômes $v(i,j)$ sont tous proportionnels, donc par (1), dès que $v(j) \neq 0$, on a :

(4) $A(1)+\nu-j = 0(p)$, $A(3)+\ell(A(1)+\nu)+\alpha-\nu+j = 0(p)$.

On en déduit de (4) que

(5) $F_1 = F_3 = 0$.

De plus, si $v(j)$ est $\neq 0$ pour $1 \leq j \leq \nu-1$, par (3), on a $j \neq 1$, donc $2 \leq j \leq \nu-1$, d'où $3 \leq \nu$. On a $\mu \in O^*_{X(n),x}$, donc $D^{u(\ell),\lambda}_{[2]} c \in u_3 \; O_{X(n+\ell)}(U(\ell))$ et $D^{u(\ell),\lambda}_{[2]} \mu \in u_3 \; O_{X(n+\ell)}(U(\ell))$. Donc

$$(6)\quad \begin{cases} f_2 = ((\nu+1)\mu+u_2u_3\mu')u_2^{\nu+1} \; u_3^{\ell} + \displaystyle\sum_{2 \leq j \leq \nu-1} u_1^{\nu-j} \; u_2^{j-1} \; u_3^{j-1} \; v(2,j) \\ \mathrm{mod.}(u_1u_3(u_1,u_3)^{\nu-2}), \text{ de plus } \mu' \in O_{X(n+\ell)}(U(\ell)). \end{cases}$$

Posons

(7) $\Phi_2 = c\ell^{\nu}(f_2) = U_1U_3V_2 \; P(U_1,U_3)+U_1U_3Q(U_1,U_3)+\gamma U_3^{\nu}$

avec $P \neq 0$ et ($\gamma = 0$ si $\ell \geq 1+\nu$, $\gamma = (\nu+1)\bar{\mu} \; \bar{u}_2^{\nu+1}$ si $\ell = \nu$) , et où $v = (u_1, v_2, u_3)$ est un s.r.p. de $O_{X(n+\ell),y}$.

Effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n+\ell)$ centré en y. Alors, par I.E.1., on a $(u_1, v_2, u_3)^{-\nu+1} f_2 \in J(X', f, E')$.

Regardons le point z de paramètres $v' = (u_1 v_2^{-1}, v_2, v_3 v_2^{-1})$. On a

$$u_2^{-\nu+1} f_2 = v'_1 v'_2 v'_3 P(v'_1, v'_2) + v'_1 v'_2 v'_3 Q(v'_1, v'_3) + \gamma\, v'_2 v'^{\nu}_3 \ \mathrm{mod.}(v'^2_2) .$$

On a $E(n+\ell) = \mathrm{div}(u_1 u_3)$ donc $E' = \mathrm{div}(v'_1 v'_2 v'_3)$. Donc $J(X', f, E') = J(X', f, E', \{z\})$.

On a clairement $\langle V'_1, V'_2, V'_3 \rangle = \mathrm{VDir}(u_2^{-\nu+1} f_2)$, donc $v(z) = 3$ et $\kappa(z) = 0$.

Nous allons montrer que z est le seul point de X' qui peut être ν-proche de y. Cela entraînera que $\kappa(y) = 0$ et donc $\kappa(x) = 0$. Prouvons d'abord que $U_1 \in \mathrm{VDir}(y)$ mod. (U_3). Par (4) et (3) on a $A(1) + \nu \neq 0(p)$, de plus

$$c\ell_y^{\nu}(f_1) = (A(1)+\nu)\, c U_1^{\nu} + U_1 P_1(U_1, U_3) + \mu(1) U_3^{\ell}$$

avec $\mu(1) = 0$ si $\ell \geq 1+\nu$. Donc $U_1 \in \mathrm{VDir}(f_1 \ \mathrm{mod.}(u_3)) \subset (\mathrm{VDir}(f_1) \ \mathrm{mod.}(U_3))$. Or $DM_{[1]}^{u(\ell),\lambda}\, \mathcal{M}_y \subset \mathcal{M}_y$, donc $f_1 \in J(X(n+\ell), f, E(n+\ell), \{y\})$, d'où $U_1 \in \mathrm{VDir}(y) \mathrm{mod.}(U_3)$. De plus, si $\ell \geq 1+\nu$, $U_1 \mid c\ell_y^{\nu}(f_1)$ et donc $U_1 \in \mathrm{VDir}(y)$.

Ainsi, si $y' \in X' - \{z\}$ est ν-proche de y, y' est dans l'ouvert de X' où $E' = \mathrm{div}(u_3)$. Posons $w = (u_1 u_3^{-1}, v_2 u_3^{-1}, u_3)$. On a

$$u_3^{-\nu+1} f_2 = w_1 w_2 w_3\ P(w_1, 1) + w_1 w_3\ Q(w_1, 1) + \gamma\, w_3 \ \mathrm{mod.}(w_3^2) \in J(X', f, E') \ \mathrm{mod.}(w_3^2).$$

On a $D_{[2]}^{w,\lambda}\ (u_3^{-\nu+1}\ f_2) = w_1 w_3\ P(w_1, 1) \mathrm{mod.}(w_3^2)$. Alors $\mathrm{ord}_{y'}(w_1 w_3 P(w_1, 1)) \geq \nu - 1$, donc $w_1(y') = 0$. Si $\ell = \nu$ alors dans (7), on a $\gamma \neq 0$ et $\mathrm{ord}_{y'}(u_3^{-\nu+1}\ f_2) = 1 < 3 \leq \nu$. C'est une contradiction. Regardons le cas où $\ell \geq 1+\nu$, par (7), on a :

$$f_2 = ((\nu+1)\mu + u_2 u_3\ \mu')\ u_2^{\nu+1}\ u_3^{\ell} \ \ \mathrm{mod.}(u_1) .$$

Rappelons que $u_2(y)$ est inversible. On a

$$u_3^{-\nu+1}\ f_2 = ((\nu+1)\mu + u_2\ w_3\ \mu')u_2^{\nu+1}\ w_3^{\ell-\nu+1} \mod.(w_1)\ .$$

On en déduit que $\mathrm{ord}_{y'}[u_3^{-\nu+1}\ f_2] \leq \ell-\nu+1 \leq \theta-\nu \leq \nu$, et si $\ell < 2\nu-1$, $\nu(y') \leq \ell-\nu+1 \leq \nu-1$. Regardons le cas où $\ell = 2\nu-1$. On a

$$\begin{cases} f_3 = (A(3)+\ell(A(1)+\nu)\mu\ u_2^{\nu+1}\ u_3^{\ell} \mod.(u_3^{\ell+1},u_1) \\ f_1 = A(1)\mu\ u_2^{\nu+1}\ u_3^{\ell} \mod.(u_3^{\ell+1},u_1)\ . \end{cases}$$

De plus, $DM^{u(\ell),\lambda}_{[1]}\mathfrak{M}_y \subset \mathfrak{M}_y$ et $DM^{u(\ell),\lambda}_{[3]}\mathfrak{M}_y \subset \mathfrak{M}_y$, donc $(f_1,f_3) \subset J(X(n+\ell),f,E(n+\ell),\{y\})$, donc $u_3^{-\nu}\ f_i \in J(X',f,E')$, $i=1$ ou 3. Or

$$\begin{cases} u_3^{-\nu}\ f_3 = (A(3)+\ell(A(1)+\nu)+\ell)\mu\ u_2^{\nu+1}\ w_3^{\ell-\nu} \mod.(w_1,w_3^{\ell-\nu+1}) \\ u_3^{-\nu}\ f_1 = A(1)\mu\ u_2^{\nu+1}\ w_3^{\ell-\nu} \mod.(w_1,w_3^{\ell-\nu+1})\ . \end{cases}$$

Si $A(1) \neq 0(p)$, alors

$$\mathrm{ord}_{y'}[u_3^{-\nu}\ f_1] \leq \ell-\nu = 2\nu-1-\nu = \nu-1\ .$$

Si $A(1) = 0(p)$, par (2) et (4), on a $\nu = j(p)$.

$$\begin{aligned} A(3)+\ell(A(1)+\nu)+\ell &= \ell-(\alpha-\nu+j) = \ell-(j-1)(p) \\ &= 2\nu-1-(j-1) = j(p)\ . \end{aligned}$$

Par (3), on a $j(j-1) \neq 0(p)$, donc $A(3)+\ell(A(1)+\nu)+\ell \neq 0(p)$ et $\mathrm{ord}_{y'}(u_3^{-\nu}\ f_3) \leq \nu-1$.

Ainsi $\nu(y') \leq \nu-1$, on a (8) qui entraîne que $\kappa(x) = 0$.

G.4. Ainsi, sauf dans le cas exceptionnel de G.3.10, on a $\kappa(x) = 1$. Ceci nous amène à donner la définition suivante.

DEFINITION G.4.1.

Avec les hypothèses et notations de G.3., on dit que $\kappa(x) = 3(G)$ si x est un des points $x(n+\ell)$, $0 \leq \ell \leq \nu$ et si $\alpha[\Gamma(\nu)] = \nu$ et $\kappa(x) > 2$.

PROPOSITION G.4.2.

Les théorèmes II.C.4.1. et II.C.4.4. sont vérifiés pour $\kappa = 3(G)$.

C'est un corollaire de G.3.

G.5. ACCELERATION DE L'ALGORITHME.

Si en plus de G.1. (1) (2) (3), on a $\alpha(\Gamma(\nu)) < \nu$ et $\alpha[V(u_1,u_2)] = \nu - 1 > 0$ (ce sont les hypothèses de G.3.11), on peut, quitte à faire des éclatements non permis, raccourcir l'algorithme.

G.5.1. On peut effectuer en $x = x(0)$ l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en $V(u_1,u_2)$. Cet éclatement peut perturber très profondément l'algorithme global car, sans autre hypothèse, au dessus des points de $V(u_1,u_2)$ distincts de x, on ne sait pas a priori ce qui se passe. Mais au dessus de x, si $\nu \geqslant 3$, il n'y a pas de point ν-proche. En effet, posons

(1) $$f = h(x)(cu_1^{\nu} + \mu\, u_2^{\nu+1} + \Sigma'\, f_{j,a,b}\, u_1^{\nu-j}\, u_2^{a-j+1}\, u_3^{b}) + R(f,u,\lambda),$$

$$\Sigma' = \sum_{1 \leqslant j \leqslant \nu-1,\, a+b \geqslant j+1}.$$

On a, en posant $u' = (u_1u_2^{-1}, u_2, u_3)$:

(2) $$f = u_2'^{\nu-1} h(x)(cu_1'^{\nu} u_2' + \mu\, u_2'^{2} + \Sigma'\, f_{j,a,b}\, u_1'^{\nu-j}\, u_2'^{a-j+1}\, u_3'^{b}) + R(f,u',\lambda).$$

Si $f_{j,a,b} \neq 0$ et $a = j$ alors $b > 0$, sinon par (1), on a $\kappa(x) \leqslant 2$, ce qui contredit G.1. (3) de plus si $f_{j,a,b} \neq 0$ et $a = j-1$ alors puisque $\alpha(x) = \nu$, on a $b > 0$. D'où par (2) $I(X',f,(u',\lambda)) = (u_1'^{\nu} u_2') \bmod. (u_2'^{2}, u_3')$.

Donc en tout point x' qui est ν-proche de x dans l'ouvert de X' où $\pi^{-1}(x) = \mathrm{div}(u_2)$, on a $u_1'(x) = 0$ et par (2), on a $\alpha(x') \leqslant 2$, d'où si $\nu(x) \geqslant 3$, $\nu(x') < \nu$.

Si $\nu(x) = 2$, on peut montrer que $\kappa(x') = 0$.

En le point y de paramètres $v = (u_1, u_2 u_1^{-1}, u_3)$, on a

$$f = h(y)(cv_1 + \mu\, v_2^{1+\nu}\, v_1^2 + \Sigma'\, f_{j,a,b}\, v_1^{a-j+1}\, v_2^a\, v_3^b) + R(f,v,\mu)$$

d'où $\nu(y) \leq 1 < \nu(x)$.

G.5.2. Sous les hypothèses de G.5., il existe un éclatement non permis plus intéressant. Par G.3.9., pour un entier ℓ, $1 \leq \ell \leq \nu - 1$, on a

(1) $\alpha(\Gamma(\ell)) = \ell$ et $\alpha(\Gamma(\ell+1)) \leq \ell$.

Pour l'entier ℓ défini par (1), effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(\ell)$ centré en $\Gamma(\ell)$. Alors, nous allons prouver qu'en tout point fermé y de X' se projetant sur un point x de $\Gamma(\ell)$, on a $(\nu,\kappa)(y) \leq (\nu(x(\ell)),2) = (\nu,2)$.
De plus, comme $\Gamma(\ell) = \pi^{-1}(x(\ell-1))$, cet éclatement qui accélère l'algorithme se globalise facilement.

Montrons ce résultat.

Avec les notations de G.3.2., nous avons une p-base $(u(\ell),\lambda)$ de $O_{X(n+\ell)}(U(\ell))$, ouvert affine de $X(n+\ell)$ contenant $\Gamma(\ell)-\{y(\ell)\}$ et $(u(\ell),\lambda)$ est adaptée pour $x(\ell)$ et $\Gamma(\ell) = V(u_1(\ell),u_3(\ell))$. Par G.3.3., en tout point $y \in \Gamma(\ell)-\{x(\ell),y(\ell)\}$, on a $\Gamma(\ell) = V(u_1(\ell),u_3(\ell))$ et

$$\begin{aligned}\alpha(\Gamma(\ell),y) &= \mathrm{ord}_y[I(X(n+\ell),f,(u(\ell),\lambda))] \\ &\leq \mathrm{ord}_y[\varphi_2(\ell)] \leq \mathrm{ord}_y[u_2(\ell)^{1+\nu}\, u_3(\ell)^{\ell}] = \ell .\end{aligned}$$

Donc $\ell = \alpha(\Gamma(\ell),y) = \alpha[\Gamma(\ell)]$.
De plus, comme $\Gamma(\ell)$ est combinatoire, on a $\alpha[\Gamma(\ell)] = \nu[\Gamma(\ell)] \geq 1$.
Par I.D.1., $\Gamma(\ell)$ est permise en y et donc dans X, au-dessus de y, $\nu(.)$ est inférieur ou égal à $\nu(y)$ et donc strictement plus petit que $\nu(x)$.

Regardons les points de X' qui sont au-dessus de $x(\ell)$. Alors en notant u au lieu de $u(\ell)$, on a

$$(1) \qquad f = h(x(\ell))(cu_1^{\nu} + \mu\, u_2^{1+\nu}\, u_3^{\ell} + \Sigma' f_{j,a,b}\, u_1^{\nu-j}\, u_2^{a}\, u_3^{b+\ell(a-j)}) + R(f,u,\lambda).$$

Si $f_{j,a,b} \neq 0$ et $a = 0$, puisque $\alpha[x(\ell)] = \nu$, on a

$$1+\nu \leq \nu-j+b+\ell(0-j),$$

$$(2) \qquad 1+\nu-\ell \leq b+\ell(0-j)+\nu-j-\ell.$$

D'autre part, puisque $\alpha[\Gamma(\ell+1)] \leq \ell$, pour un (j',a',b'), on a $f_{j',a',b'} \neq 0$ et

$$\nu-j'+b'+(\ell+1)(a'-j') \leq \ell,$$

$$(3) \qquad \nu-j'+b'+\ell(a'-j')-\ell \leq j'-a'.$$

Posons

$$(4) \qquad u' = (u_1 u_3^{-1}, u_2, u_3).$$

En tout point $x' \in X'$ au dessus de $x(\ell)$ avec $\pi^{-1}[\Gamma(\ell)] = \mathrm{div}(u_3)$, on a

$$(5) \quad \begin{cases} f = h(x')(cu_1'^{\nu}\, u_3'^{\nu-\ell} + \mu\, u_2'^{1+\nu} + \Sigma' f_{j,a,b}\, u_1'^{\nu-j}\, u_2'^{a}\, u_3'^{b+\ell(a-j)+\nu-j-\ell}) \\ + R(f,u',\lambda). \end{cases}$$

De (2) et (5), on déduit

$$(6) \qquad u_1'^{\nu}\, u_3'^{\nu-\ell} \in J(X',f,E') \bmod.(u_2', u_3'^{\nu-\ell+1}).$$

Donc, si $\nu(x') \geq \nu$, on a $u_1'(x') = 0$, u' est donc un s.r.p. de $O_{X',x'}$ et on a

$$\begin{aligned} \alpha(x') &\leq \nu-j' + a' + b' + \ell(a'-j') + \nu - j' - \ell \\ &\leq \nu-j' + a' + j' - a' \leq \nu . \end{aligned}$$

La deuxième ligne découlant de (3).

Donc on a $\nu(x') = \nu = \alpha(x')$. Si dans (5) il existe (j,a,b) avec $f_{j,a,b} \neq 0$ et $\nu-j+a+b+\ell(a-j)+\nu-j-\ell = \nu$ et $a \neq 0$, alors x' est à D.Q. car $\mathrm{div}(u_2') \not\subset E'$. Sinon, par (2), on a $U_3'^{\nu-\ell} | c\ell^{\nu}(I(X',f,(u',\lambda))$. De plus, par G.1.(1), si $f_{j,a,b} \neq 0$, alors $\nu-j \geq 1$ et donc $U_1'^{\nu} | c\ell^{\nu}(I(X',f,(u',\lambda)))$. Donc

(7) $\langle U_1', U_3' \rangle = \mathrm{VDir}(x')$.

Si on effectue l'éclatement $\pi'' : X'' \longrightarrow X'$ centré en x', un calcul simple découlant de (5) et (7) montre qu'il n'y a pas de point ν-proche de x' dans X'' et donc $\pi(x') = 0$.

En le point x'' de paramètres $v = (u_1, u_2, u_3u_1^{-1})$, on a :

(8) $$\begin{cases} f = h(x'')(cv_1^{\nu-\ell} + \mu\, v_2^{1+\nu}\, v_3^{\ell} + \\ \Sigma'\, f_{j,a,b}\, v_1^{b+\ell(a-j)+\nu-j-\ell}\, v_2^{a}\, v_3^{b+\ell(a-j)}) + R(f,v,\lambda). \end{cases}$$

Par (2) et (8), on a

$$I(X',f,(v,\lambda)) = (v_1^{\nu-\ell})\mathrm{mod.}(v_2,v_3)$$

et donc $\nu(x'') \leq \nu-\ell \leq \nu-1 < \nu$.

Il n'y a donc plus qu'à étudier les points au-dessus de $y(\ell)$ (cf. G.3.2.). On a vu en G.3.11.3 qu'il existe une p-base (v,λ) de $O_{X(\ell),y(\ell)}$ adaptée en $y(\ell)$ et telle que

(9) $$\begin{cases} f = h(y(\ell))(cv_1^{\nu} + \mu\, v_2^{\ell}\, v_3^{\ell-1} + \\ \Sigma'\, f_{j,a,b}\, v_1^{\nu-j}\, v_2^{b+\ell(a-j)}\, v_3^{b+(\ell-1)(a-j)}) + R(f,u,\lambda) \end{cases}$$

avec

(10) $$\begin{cases} \Gamma(\ell) = V(v_1,v_2),\ \Gamma(\ell,\ell-1) = V(v_1,v_3), \\ v_1 = u_1(\ell-1)u_2(\ell-1)^{-1},\ v_2 = u_2(\ell-1),\ v_3 = u_3(\ell-1)u_2(\ell-1)^{-1}. \end{cases}$$

Remarquons que si pour un (j,a,b), on a :
$f_{j,a,b} \neq 0$, $\nu-j+b+\ell(a-j) = \ell$ et $b+(\ell-1)(a-j) = 0$, alors $\alpha[y(\ell)] = \ell = \alpha[\Gamma(\ell)] < \nu$ et donc π est permis en $y(\ell)$ et en tout point $y' \in X'$ au dessus de $y(\ell)$, on a $\nu(y') \leq \nu(y(\ell)) \leq \alpha[y(\ell)] < \nu$.
Ce cas est donc trivial et dorénavant nous supposons que l'implication suivante est vraie :

(11) $\quad (f_{j,a,b} \neq 0$ et $\nu-j+b+\ell(a-j) = \ell) \Longrightarrow b+(\ell-1)(a-j) \geqslant 1.$

Effectuons π. Regardons l'ouvert affine complémentaire du transformé strict de $\mathrm{div}(v_2)$. Posons donc $v' = (v_1v_2^{-1}, v_2, v_3)$. En tout point fermé y' de cet ouvert se projetant sur $y(\ell)$, on a

$$(12)\quad \begin{cases} f = h(y')(c{v'_1}^{\nu}{v'_2}^{\nu-\ell} + \mu\, {v'_3}^{\ell-1} + \\ \sum' f_{j,a,b}\, {v'_1}^{\nu-j}\, {v'_2}^{b+\ell(a-j)+\nu-j-\ell}\, {v'_3}^{b+(\ell-1)(a-j)}) + R(f,v',\lambda) \end{cases}$$

Nous allons montrer que si $\ell \geqslant 2$, alors on a l'implication

(13) $\quad f_{j,a,b} \neq 0 \Longrightarrow b + (\ell-1)(a-j) > 0.$

En effet, rappelons que $\alpha[V(u_1,u_2)] = \nu-1$ et donc on a $a \geqslant j-1$ si $f_{j,b,a} \neq 0$.

Si $a = j-1$ et $b+(\ell-1)(a-j) = 0$, alors on a $b+\ell(a-j) < 0$, ce qui contredit (9).

Si $a = j$, on a $b+(\ell-1)(a-j) = b$, or si $a = j$ et $b+(\ell-1)(a-j) = b = 0$ et $f_{j,a,b} \neq 0$, par G.3.1. (1), x est à D.Q., ce qui contredit G.1. (3).

Si $a \geqslant 1+j$ et $f_{j,a,b} \neq 0$ alors on a $b+(\ell-1)(a-j) \geqslant \ell-1 > 0$.

Remarquons que si on a (13), alors ${v'_1}^{\nu}\,{v'_2}^{\nu-1} \in J(X',f,E')\mathrm{mod.}(v'_3)$ et donc $\nu(y') < \nu$ ou $v'_1(y') = 0$. Mais par (12), si $v'_1(y') = 0$, on a $\alpha(y') \leq \ell-1 \leq \nu-1$ et donc $\nu(y') < \nu$. Pour terminer l'étude de l'ouvert affine où $div(v_2) = \pi^{-1}(y(\ell))$, il reste à étudier y' dans le cas où on n'a pas (13). On a donc

$$(14) \qquad \begin{cases} \ell = 1 , \\ \exists(j',a',b'),\ f_{j',a',b'} \neq 0 \quad \text{et} \quad b'+a'-j' = 0 \end{cases}$$

En se reportant à G.3.1. (1) on voit que cela implique

$$c\ell^{\nu}[I(X(n),f,(u,\lambda))] \neq (U_1^{\nu}).$$

Par G.2.1. (ii), on a $v(x) \geqslant 2$, par G.2.4., on a $\kappa(x) = 0$, ce qui est une contradiction.

Il n'y a plus qu'à étudier le point z qui est au dessus de $y(\ell)$ sur le transformé strict de $div(v_2)$, c'est-à-dire le point z de paramètres $w = (v_1, v_2v_1^{-1}, v_3)$. On a

$$(15) \qquad \begin{cases} f = h(z)(cw_1^{\nu-\ell} + \mu\, w_2^{\ell}\, w_3^{\ell-1} + \\ \Sigma'\, f_{j,a,b}\, w_1^{b+\ell(a-j)+\nu-j-\ell}\, w_2^{b+\ell(a-j)}\, w_3^{b+(\ell-1)(a-j)}) + R(f,w,\lambda) \end{cases} .$$

On a clairement $\nu(z) \leq \alpha(z) \leq \nu - \ell < \nu$.

C.Q.F.D.

VII $\kappa = 4$ ET $\kappa = 5$.

A. PREMIER CAS.

DEFINITION ET NOTATION A.1.

Soit x un point fermé de $\mathrm{Sing}(X(n))$, on dit qu'on a (*) pour x si x satisfait aux conditions suivantes.

(1) $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$,

(2) $1 + \nu \not\equiv 0(p)$ où $\nu = \nu(x)$,

pour une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ adaptée en x, on a :

(3) $\mathrm{ord}_x[I(X(n),f,(u,\lambda))\mathrm{mod.}(u_2,u_3)] = \nu+1$,

(4) le polygone $\Delta_u = \Delta[I(X(n),f,(u,\lambda)) : u_3, u_2 ; u_1]$ n'a qu'un sommet $(c(u,\lambda), d(u,\lambda))$ avec $[c(u,\lambda)] + [d(u,\lambda)] < 1$,

(5) le polygone $\Delta_{1,u} = \Delta[h(x)^{-1} D^{u,\lambda}_{[1]} f ; u_3, u_2 ; u_1]$ est préparé (IV.C.3.3.) et $\mathrm{div}(u_1) \not\subset E(n)$,

(6) $\mathrm{Sing}_\nu(X(n)) \subset V(u_1,u_2) \cup V(u_1,u_3)$.

PROPOSITION A.2.

Avec les hypothèses et notations de A.1., on a

(i) $U_1 \in \mathrm{VDir}(x)$,

(ii) pour un i, $i=2$ ou 3, on a $\alpha[V(u_1,u_i)] = 1+\nu$,

(iii) soit $C = V[u_1,u_i]$ avec $\alpha[V(u_1,u_i)] = 1+\nu$, l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en C est permis en x et il y a au plus un point $x' \in X'$ qui est ν-proche de x et si $(\nu,\kappa)(x') \geq (\nu,3)$ alors x' satisfait à (*) pour une p-base (v,λ) et on a

$$\begin{cases} (c(v,\lambda),d(v,\lambda)) = (c(u,\lambda),d(u,\lambda)-1) & \text{ou} \\ \qquad\qquad\qquad\quad = (c(u,\lambda)-1,\ d(u,\lambda)) . \end{cases}$$

Preuve.

On remarque que A.1.(3) et A.1.(2) impliquent

(1) $\quad \mathrm{ord}\left[h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[1]}\ f \bmod.(u_2,u_3)\right] = \nu$.

Bien sûr, on a $d(u,\lambda) > 0$ ou $c(u,\lambda) > 0$, donc

(2) $\quad I(X(n),f,(u,\lambda)) = (u_1^{\nu+1}) \bmod.(u_i)$, $i=2$ ou 3.

Donc

(3) $\quad \begin{cases} F_1 = c\,\ell^{\nu}(h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[1]}f) = \gamma\, U_1^{\nu} \bmod.(U_i), \quad i=2 \text{ ou } 3 , \\ \gamma \text{ inversible.} \end{cases}$

Si $F_1 = \gamma U_1^{\nu}$ alors on a clairement $U_1 \in \mathrm{VDir}(x)$, si $F_1 = \gamma U_1^{\nu} + U_i\ P(U_1,U_2)$ avec $P \neq 0$ alors par A.1.(4), F_1 n'est pas colinéaire à une puissance ν-ème. Par I.E.1.5.1.6. (ii), on a $\langle U_1,U_i\rangle \subset \mathrm{VDir}(x)$. On a (i).

On a clairement $d(u,\lambda) + c(u,\lambda) \geq 1$,

(4) $\quad \lfloor d(u,\lambda)\rfloor + \lceil d(u,\lambda)\rceil + \lfloor c(u,\lambda)\rfloor + \lceil c(u,\lambda)\rceil > 1$,

alors par A.1.(4), on a

(5) $\quad d(u,\lambda) \geq 1$ ou $c(u,\lambda) \geq 1$.

Par définition de $\Delta\left[I(X(n),f,(u,\lambda))\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1\right]$ que nous notons $\Delta(u,\lambda)$, si $c(u,\lambda) \geq 1$ alors $\mathrm{ord}_{(u_1,u_3)}(I(X(n),f,(u,\lambda))) = 1+\nu$ et donc

(6) $\quad c(u,\lambda) \geq 1 \Longrightarrow \alpha\left[V(u_1,u_3)\right] = 1+\nu$.

De même

(7) $\quad d(u,\lambda) \geqslant 1 \Longrightarrow \alpha[V(u_1,u_2)] = 1+\nu$.

D'autre part, $V(u_1,u_2)$ et $V(u_1,u_3)$ sont à croisements normaux avec $E(n)$, par I.D.4. (2) et (5)(6)(7), on a prouvé (ii).

Pour prouver (iii), par symétrie on peut supposer que $C = V(u_1,u_3)$. Effectuons donc l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en $C = V(u_1,u_3)$. Alors, comme $U_1 \in \mathrm{VDir}(x)$, il y a au plus un point $x' \in X'$ qui est ν-proche de x, c'est le point de paramètres $v = (u_1u_3^{-1},u_2,u_3)$ et on a

(8) $\quad I(X',f,(v,\lambda)) = I(X(n),f,(u,\lambda))\ u_3^{-\nu}$.

Si $\nu(x') < \nu$, il n'y a rien à prouver.

Si $\nu(x') = \nu$, alors par [12] (p.125, T-3, T-4), $\Delta_v = \Delta[I(X',f,(v,\lambda))\ ;\ v_3,\ v_2\ ;\ v_1]$ est le translaté de Δ_u de vecteur $(-1,0)$ et $\Delta_{1,v}$ est préparé. Il reste à prouver que si $\alpha(x') = \nu$ alors $\tau(x') \leq 2$. On a $c(u,\lambda) + d(u,\lambda) - 1 < 1$. Alors, $\forall g \in I(X',f,(v,\lambda))$, on a

(9) $\quad g = \gamma v_1^{\nu+1} + \Sigma'\ A(a,b,i,g)\ v_1^{\nu+1-i}\ v_2^a\ v_3^b \in k(x')[[v_1,v_2,v_3]]$,

où $\Sigma' = \displaystyle\sum_{1\leq i\leq \nu+1,\, ic(v,\lambda)\leq b,\, id(v,\lambda)\leq a}$.

De plus $\exists (g,i,a,b)$ avec

(10) $\quad a = id(v,\lambda), b = ic(v,\lambda), A(a,b,i,g) \neq 0.$

Si x' n'est pas à D.Q., alors dans (10), on a $a+b = \nu$ et $i = 1+\nu$. Si $c(v,\lambda) > 0$ et $d(v,\lambda) > 0$ alors V_2V_3 divise $c^{2\nu}(g)$ et donc

(11) $\langle V_2, V_3 \rangle \subset \mathrm{VDir}(x')$ et $\nu \geqslant 2$.

Par (9), on a

(12) $\begin{cases} f = h(x')(\mu\, v_1^{1+\nu} + v_2 v_3 g) + R(f,v,\lambda) \\ \text{et} \quad \alpha(x') = \nu \text{ , } \mu \text{ inversible.} \end{cases}$

Par (11) et VI.G.1., on a $\tau(x') \leq 2$.

Si $c(v,\lambda) = 0$ et si x' n'est pas à D.Q. alors dans (10), on a $b = \nu$ et $i = 1+\nu$. Donc

(13) $\mathrm{div}(v_3) \subset E'$, $c(v,\lambda) = \nu(1+\nu)^{-1}$, $d(v,\lambda) = 0$

Donc dans (9), si $A(a,b,i,g) \neq 0$, on a

(14) $b \geqslant i-1$,

Donc

(15) $\alpha[V(v_1,v_3)] = \nu$,

(16) $\begin{cases} f = h(x')(\mu\, v_1^{1+\nu} + v_3 g) + R(f,v',\lambda), \\ \alpha(x) = \nu \quad \text{et} \quad \mu \quad \text{inversible.} \end{cases}$

Par (15), (16) et VI.G.2., on a $\tau(x') \leq 2$. Si $d(v,\lambda) = 0$, on permute v_2 et v_3. On a prouvé (iii).

<u>DEFINITION ET PROPOSITION A.4.</u>

Soit x un point fermé maigre de $\mathrm{Sing}(X(n))$, on dit que $\tau(x) = 4(A)$

(1) $\kappa(x) > 3$,

(2) on a $(*)$ pour x ,

(3) $E(n) \neq \emptyset$

Alors x est bon.

Preuve.

Appliquons l'algorithme du point bon. Par A.1.(6), on doit effectuer l'éclatement centré en $C_2 = V(u_1,u_2)$ ou $C_3 = V(u_1,u_3)$ avec (II.B.8.3.) $\alpha(C_i) \geqslant \nu$ et $(\nu(C_i), \alpha(C_i), m(C_i), \sigma(C_i))$ maximal. Comme $E(n) \neq \emptyset$, on a $E(n) \supset \mathrm{div}(u_2)$ ou $E(n) \supset \mathrm{div}(u_3)$ et $\sigma(C_2) \neq \sigma(C_3)$. Donc l'algorithme est bien défini, A.2. et une récurrence décroissante sur $c(u,\lambda) + d(u,\lambda)$ donne le résultat.

B. $\kappa = 4(B)$ et $\kappa = 5$.

DEFINITION ET NOTATION B.1.

Soit x un point fermé de $\mathrm{Sing}(X(n))$ satisfaisant à

(1) $\nu(x) = \alpha(x) - 1$, entier que l'on note ν ,

(2) $1 + \nu \neq O(p)$,

(3) x n'est pas à D.Q. .

On dit qu'on a $(**)$ pour $(x,(u,\lambda))$ si (u,λ) est une p-base de $O_{X(n),x}$ adaptée en x et si de plus on a

(4) $\mathrm{div}(u_3) \subset E(n) \subset \mathrm{div}(u_2 u_3)$,

(5) $I(X(n),f,(u,\lambda)) = (u_1^{\nu+1}) \,\mathrm{mod.}(u_3)$,

(6) $A(3) = O(p)$ ou $A(3) + \nu = O(p)$ ou $\alpha[V(u_1,u_3)] \geqslant \nu$ ou $t[V(u_1,u_3)] \leqslant 2\nu$,

(7) $A(2) = O(p)$ ou $[(\alpha[V(u_1,u_2)] \geqslant \nu$ ou $t[V(u_1,u_2)] \leqslant 2\nu)$ et $\{(I(X(n),f,(u,\lambda)) = (u_1^{\nu+1}) \,\mathrm{mod.}(u_2)$ ou $c\ell^{1+\nu}[I(X(n),f,(u,\lambda))] \not\subset k(x)[U_1] \,\mathrm{mod.}(U_2))\}$.

PROPOSITION B.2.

Avec les hypothèses et notations de B.1., on a les conditions suivantes

(i) $f = h(x)(cu_1^{\nu+1} + u_3 g) + R(f,u,\lambda)$ avec c inversible et $\mathrm{ord}_x(g) \geq \nu$,

(ii) si $E(n) = \mathrm{div}(u_2 \cdot u_3)$ et $A(2) \neq O(p)$ et $c\ell^{1+\nu}[I(X(n),f,(u,\lambda))] \subset k(x)[U_1]$ alors $f = h(x)(cu_1^{\nu+1} + u_2 u_3 g) + R(f,u,\lambda)$ avec c inversible et $\mathrm{ord}_x(g) \geq \nu-1$,

(iii) $h(x)^{-1} D^{u,\lambda}_{[1]} f = \gamma u_1^{\nu} \mod.(u_3)$, γ inversible,

(iv) on peut modifier u_1 en $v_1 = u_1 + u_3 A$ (de plus, $v_1 = u_1 + u_2 u_3 B$ si $E(n) = \mathrm{div}(u_2 u_3)$ et $A(2) \neq O(p)$) de façon que, en posant $v = (v_1,u_2,u_3)$, on a (**) pour (v,λ) et

$$\Delta[h(x)^{-1} D^{v,\lambda}_{[1]} f \; ; v_3,v_2 \; ; v_1] \text{ est préparé.}$$

On dira qu'on a (***) pour $(v,\hat{\lambda})$.

Preuve.

Les relations (i), (ii) et (iii) sont des conséquences directes de B.1.. D'après IV.C.3.4., on peut trouver

$v_1 = u_1 + \sum_{0 \leq i, 0 \leq j} \lambda_{i,j} u_2^i u_3^j \in k(x)[[u_1,u_2,u_3]]$ tel que

(1) $\Delta[h(x)^{-1} D^{u,\lambda}_{[1]} f \; ; u_3, u_2 \; ; u_1]$ est préparé ,

(2) $\lambda_{i,j} \neq 0 \Rightarrow (j,i) \in \Delta[h(x)^{-1} D^{u,\lambda}_{[1]} f \; ; u_3, u_2 \; ; u_1]$.

Or, par (iii), les points de $\Delta[h(x)^{-1} D^{u,\lambda}_{[1]} f \; ; u_3, u_2 \; ; u_1]$ sont d'abscisses strictement positives. Donc

(3) $v_1 = u_1 + u_3 A.$

On a clairement $D^{u,\lambda}_{[1]} f = \gamma D^{v,\lambda}_{[1]} f$, $\gamma \in \mathcal{O}^*_{X,x}$. Donc

(4) $\Delta[h(x)^{-1}\, D^{v,\lambda}_{[1]}\, f \; ; v_3,\, v_2 \; ; v_1] = \Delta[h(x)^{-1}\, D^{u,\lambda}_{[1]}\, f \; ; v_3,\, v_3 \; ; v_1]$,

polygone que l'on note $\Delta_{1,v}$.

Bien sûr, $\Delta_{1,v}$ est préparé.

On a par C.12.d

$$(5)\qquad \begin{cases} h(x)^{-1}(D^{u,\lambda}_{[1]}\, f \;,\; DM^{u,\lambda}_{[i]}\, f \;;\; 2\leq i\leq s) = \\ h(x)^{-1}\;(D^{u,\lambda}_{[1]}\, f \;,\; DM^{v,\lambda}_{[i]}\, f \;;\; 2\leq i\leq s) = \\ (v_1^{\nu})\,\mathrm{mod}.(u_3) = (u_1^{\nu})\mathrm{mod}.(u_3). \end{cases}$$

$$(6)\qquad I(X(n),f,(v,\lambda)) = (v_1^{\nu+1})\ \mathrm{mod}.(v_3)\ .$$

Donc on a (**) pour $(x,(v,\lambda))$ si $E(n) = \mathrm{div}(u_3)$ ou $E(n) = \mathrm{div}(u_2u_3)$ et $A(2) = O(p)$. Voyons le cas où $E(n) = \mathrm{div}(u_2u_3)$ et $A(2) \neq O(p)$. Alors je dis que

$$(7)\qquad v_1 = u_1+u_2u_3B\ .$$

En effet par B.1.(7), on a

$$h(x)^{-1}\; D^{u,\lambda}_{[1]}\; f = \mathfrak{d}\, u_1^{\nu+1}\ \mathrm{mod}.(u_2)\ ,$$

alors, les sommets du polygone $\Delta[h(x)^{-1}\, D^{u,\lambda}_{[1]}\, f \; ; u_3,\, u_2 \; ; u_1]$ sont tous d'ordonnée positive strictement, par (iii) ils sont tous d'abscisse positive strictement, pour [11(3)] ou IV.C.3.4., on a (7). Alors, en appliquant IV.C.12 à (u_1,u_3) et (v_1,v_3), on a

$$(8)\qquad I(X(n),f,(v,\lambda)) = I(X(n),f,(u,\lambda))\mathrm{mod}.(u_2u_3).$$

Ce qui prouve qu'on a (**) pour $(x,(v,\lambda))$. Pour finir la preuve de (iv), il suffit de rappeler que $V(u_1,u_3) = V(v_1,v_3)$ et $(V(u_1,u_2) = V(v_1,v_2)$ si $E(n) = \mathrm{div}(u_1u_2)$ et $A(2) \neq O(p))$, et que par III.3.1. ,

$t[V(v_1,v_j)]$ n'est pas modifié par le changement de p-base.

LEMME B.3.

Soit J un idéal de $O_{X(n),x}$ avec $\mathrm{ord}_x(J \bmod.(u_3)) = \nu$. Alors on a

$$\Delta(J\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1) = \Delta(u_1 J\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1)\ .$$

Preuve.

Bien sûr, on a $\mathrm{ord}_x(u_1\ J \bmod.(u_3)) = 1 + \nu$. Par IV.C.2.(4), il suffit de montrer que pour toute forme linéaire Λ de $\mathbb{R}^{2*}$ à coefficients strictement positifs, si l'on note $L(x_1,x_2,x_3) = x_1 + \Lambda(x_2,x_3)$ alors

(1) $\forall g \in J\ ,\ v_{L,u}(g) \geqslant \nu \Longleftrightarrow v_{L,u}(g) \geqslant \nu + 1.$

Ce qui est parfaitement clair par définition de $v_{L,u}$ (IV.C.1.(1)).

COROLLAIRE B.4.

Avec les hypothèses et notations de B.1., on note $c(u,\lambda)$ et $d(u,\lambda)$ (resp. $c_1(u,\lambda)$ et $d_1(u,\lambda)$) les minimum des abscisses et des ordonnées des points de $\Delta[I(X(n),f,(u,\lambda))\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1]$ (resp. de $\Delta(h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[1]}\ f\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1)$), dans B.2. (iv), on a

$v_1 = u_1 + u_3^a\ v_2^b c$ avec $a \geqslant \lceil c_1(u,\lambda)\rceil \geqslant \lceil c(u,\lambda)\rceil$,

$b \geqslant \lceil d_1(u,\lambda)\rceil \geqslant \lceil d(u,\lambda)\rceil$.

Preuve.

En effet, on a par B.3.(2), [11(3)] ou IV.C.3.4.

$$(1)\quad \begin{cases} v_1 = u_1 + \sum \lambda_{i,j}\ u_2^i\ u_3^j \\ \text{avec}\quad \lambda_{i,j} \neq 0 \Longrightarrow (j,i) \in \Delta(h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[1]}\ f\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1)\ . \end{cases}$$

Or par B.3., on a

(2) $\Delta[h(x)^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[1]}\ f\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1] = \Delta[h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[1]}\ f\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1]$.

Or, on a $h(x)^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[1]}\ f \in I(X(n),f,(u,\lambda))$ donc

(3) $$\begin{cases} \Delta(h(x)^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[1]}\ f\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1) = \Delta(h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[1]}\ f\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1) \\ \subset \Delta(I(X(n),f,(u,\lambda))\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1)\ . \end{cases}$$

D'où $c_1(u,\lambda) \geqslant c(u,\lambda)$ et $d_1(u,\lambda) \geqslant d(u,\lambda)$, (1) finit la preuve.

NOTATIONS B.5.

Soit $(x,(v,\lambda))$ tels qu'on a (***); On note

(1) $(c(u,\lambda),\beta(u,\lambda))$ et $(\gamma(u,\lambda),d(u,\lambda))$

les sommets d'abscisse et d'ordonnée minimales respectivement de

(2) $\Delta(I(X(n),f,(u,\lambda))\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1)$ que l'on note Δ_u.

On note (IV.C.6.)

(3) $$\begin{cases} \delta(u,\lambda) = \inf(i+j\ ;\ (i,j) \in \Delta_u)\ , \\ e(u,\lambda) = \delta(u,\lambda) - d(u,\lambda) - c(u,\lambda)\ . \end{cases}$$

(4) $$\begin{cases} \varepsilon(u,\lambda) = \lceil \beta(u,\lambda) \rceil & \text{si } E(n) = \mathrm{div}(u_3) \text{ et } \beta(u,\lambda) \geqslant 2\ , \\ \varepsilon(u,\lambda) = 1{,}5 & \text{si } E(n) = \mathrm{div}(u_3) \text{ et } 2 > \beta(u,\lambda) > 1\ , \\ \varepsilon(u,\lambda) = 1 & \text{si } E(n) = \mathrm{div}(u_3) \text{ et } 1 \geqslant \beta(u,\lambda)\ , \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon(u,\lambda) = 1 + \lfloor d(u,\lambda) \rfloor & \text{si } E(n) = \mathrm{div}(u_2u_3) \text{ et } d(u,\lambda) \geqslant 1\ , \\ \varepsilon(u,\lambda) = 1 & \text{si } E(n) = \mathrm{div}(u_2u_3) \text{ et } d(u,\lambda) < 1. \end{cases}$$

(5) $\varepsilon(x) = \inf \{\varepsilon(u,\lambda)\ ;\ x,(u,\lambda)$ satisfaisant à $(***)\}$.

PROPOSITION B.6.

Soit $(x,(u,\lambda))$ tel qu'on a (***) et $\kappa(x) > 3$. Alors

(i) $U_1 \in VDir(x)$.

Effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x. Soit $x' \in X'$ un point ν-proche de x avec $\kappa(x') > 3$. Alors, il existe une p-base adpatée (w,μ) de $O_{X',x'}$ telle qu'on a (***) pour $(x',(w,\mu))$. De plus

(ii) $\mathcal{E}(w,\mu) \leq \mathcal{E}(u,\lambda)$ avec inégalité stricte si $[\mathcal{E}(u,\lambda) \geq 1,5$ et $(x'$ irrationnel sur x ou $(m(x') = 2$ et $m(x) = 1))$ et $((\beta(u,\lambda), m(x)) \neq (2,1))]$.

(iii) si en plus de (***), on a

(****) $c(u,\lambda) < 1$ et $[\beta(u,\lambda) < 1$ ou $(\beta(u,\lambda) = 1$ et $E(n) = div(u_3)]$

alors on a (****) pour $(x',(w,\mu))$ et $(c(w,\mu),\beta(w,\mu)) \leq (c(u,\lambda),\beta(u,\lambda))$ pour l'ordre lexicographique et si on a égalité alors $\beta(u,\lambda) = \beta(w,\mu) = 1$ et x' est rationnel sur $x(n)$ et $div(w_3) = E'$,

(iv) si $(\beta(u,\lambda), m(x)) = (2,1)$ et $(x'$ irrationnel sur x ou $(m(x') = 2$ et $m(x) = 1))$ et $(\mathcal{E}(w,\mu) = \mathcal{E}(u,\lambda))$ alors si on effectue l'éclatement $\pi : X'' \longrightarrow X'$ centré en x' en tout point $x'' \in X''$ ν-proche de x' avec $\kappa(x'') \geq 3$, on a $\mathcal{E}(x'') < \mathcal{E}(u,\lambda)$.

Prouvons (i). Rappelons que $\alpha(x) = 1+\nu$ et donc (I.E.2.1.), on a

(1) $$VDir(x) = VDir[J(X(n),f,E(n))] .$$

Posons

(2) $$F_1 = cl^{\nu}[h(x)^{-1} D^{u,\lambda}_{[1]} f] .$$

On pose $\bar{c} = cl^{o}(c)$, par B.2.(i), on a

(3) $$\begin{cases} F_1 = (\nu+i)\bar{c}U_1^{\nu} + U_3 G(U_1,U_2,U_3) \in k(x)[U_1,U_2,U_3] , \\ G \text{ polynôme homogène, nul ou de degré } \nu-1. \end{cases}$$

Si $G = 0$, (i) est clair. Si $G \notin k(x)[U_1,U_3]$, par I.E.1.5.1.6., on a $\mathrm{VDir}(F_1) = \langle U_1,U_2,U_3\rangle$, par (1), $v(x) = 3$ et donc $\mathcal{K}(x) = 0$ ce qui est impossible par hypothèse.

Si $0 \neq G \in k(x)[U_1,U_3]$, comme $\Delta_{1,u}$ (cf. B.E.(4)) est préparé, F_1 n'est pas colinéaire à une puissance ν-ème et donc $\langle U_1,U_3\rangle = \mathrm{VDir}(x)$. On a (i) et même

(4) $\qquad \mathrm{VDir}(F_1) = \langle U_1\rangle$ ou $\langle U_1,U_3\rangle$.

Prouvons (ii) et (iii). Effectuons donc π .

B.6.1. Etudions d'abord l'ouvert affine $O \subset X'$ où $\mathrm{div}(u_3) = \pi^{-1}(x)$. Posons donc

(5) $\qquad u' = (u_1u_3^{-1} , u_2\, u_3^{-1} , u_3)$.

Par I.F.4. appliqué avec $\delta = \varepsilon = 0$ et en permutant les indices 2 et 3, il existe une p-base (v,μ) de $O_{X',x'}$ adaptée avec $v_1 = u_1'$, $v_3 = u_3'$ et si x' est rationnel sur x, on a $\lambda = \mu$, si $u_2'(x) = 0$ on a $(v,\mu) = (u', \lambda)$.

B.6.1.1. Voyons le cas où $\delta(u,\lambda) = 1$. Comme x' n'est pas sur le transformé strict de $\mathrm{div}(u_3)$, par (4), on a $\mathrm{VDir}(F_1) = \langle U_1\rangle$ et donc

(6) $\qquad F_1 = (\nu+1)\, \bar{c}\, U_1^{\nu} \neq 0$.

L'hypothèse $\delta(u,\lambda) = 1$ implique qu'il existe i, $1 \leq i \leq s$ tel que $\mathrm{c}\ell^{\nu+1}[h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[i]}\, f] \neq dU_1^{1+\nu}$,par (6) on a $2 \leq i \leq s$ et $\exists\, \ell \in O_{X(n),x}$ tel que

(7) $$\begin{cases} \mathrm{c}\ell^{\nu+1}[h(x)^{-1}\, Df] = U_3K(U_1,U_2,U_3) \neq 0 , \\ D = \ell\, DM^{u,\lambda}_{[1]} + DM^{u,\lambda}_{[i]} . \end{cases}$$

Par I.E.1., on a

(8) $\quad K(u'_1,u'_2,1) \in J(X',f,E')\mathrm{mod.}(u'_3)$

B.6.1.1.1. Etudions le cas où $D\mathfrak{M}_{x'} \subset \mathfrak{M}_{x'}$. On a $\alpha(x') = \nu$ et $K(u'_1,u'_2,1) \in J(X',f,E',\{x'\})\mathrm{mod.}(u'_3)$. Je dis que :

$$K(u'_1,u'_2,1) = \gamma u_2'^{\nu} \ , \ \gamma \in k(x)^* , \ E(n) = \mathrm{div}(u_2u_3) \ , \ u'_2 = v_2 \ .$$

En effet, x' n'est pas à D.Q. puisque $\kappa(x') > 3$ et donc $K(u'_1,u'_2,1) \in k(x')[v_2]$ et $\mathrm{div}(v_2) \subset E'$. On en déduit qu'on peut prendre dans (7) $D = DM^{u,\lambda}_{[i]}$, $2 \leq i \leq s$ et que $U'_2 \in \mathrm{VDir}(x')$ et donc, par B.1.(7), on a

(8bis) $\quad A(2) = O(p)$ ou $I(X(n),f,(u,\lambda)) = (u_1^{1+\nu})\mathrm{mod.}(u_2)$.

Je dis que

$$c\ell^{\nu}[J(X',f,E',\{x'\})] = (U_2'^{\nu}).$$

Sinon, puisque x' n'est pas à D.Q., on a $e(x') = 2$. Comme $h(x')^{-1} D^{u',\lambda}_{[1]} f = (\nu+1)\, c\, u_1'^{\nu}\mathrm{mod.}(u'_2,u'_3)$, on a $e[J(X',f,E')] = 3$. Si $A(2) = O(p)$ par VI.F., on a $\kappa(x') \leq 3(F)$, ce qui est une contradiction, si $A(2) \neq O(p)$, par (8 bis), on a $I(X(n),f,(u,\lambda)) = (u_1^{1+\nu})\mathrm{mod.}(u_2)$ et donc $I(X',f,(u',\lambda)) = (u_1'^{1+\nu})\mathrm{mod.}(u'_2)$, et $\alpha(x') = \nu$, on a $U'_2 \in \mathrm{VDir}(x')$, mais on a $e(x') = 2$, d'où $v(x') = 2$ et donc par VI.F., on a $\kappa(x') \leq 3(F)$.

Donc $c\ell^{\nu}[J(X',f,E',\{x'\})] = (U_2'^{\nu})$. On a $A(2) \neq O(p)$, sinon par VI.A.E., on a $\kappa(x') \leq 3$. Par (8 bis), on a $I(X(n),f,(u,\lambda)) = (u_1^{\nu+1})\ \mathrm{mod.}(u_2)$ et $A(2) \neq O(p)$.

On en déduit que

$$f = h(x')(u'_2\, g + c\, u_1'^{1+\nu}) + R(f,u',\lambda)$$

avec $\alpha(x') = \nu(x')$, c inversible.

Par B.1.(6) et III.3.5, on a

$$\begin{cases} \alpha[V(u'_1,u'_2)] \geq \nu & \text{ou} \\ t[V(u'_1,u'_2)] \leq t[V(u_1,u_2)] -1 \leq 2\nu -1 . \end{cases}$$

Par VI.G.1., on a $\kappa(x') \leq 3(G)$, ce qui contredit l'hypothèse $(\nu,\kappa)(x') \geq (\nu,4)$.

Ainsi l'hypothèse $D\mathcal{M}_{x'} \subset \mathcal{M}_{x'}$ apporte toujours une contradiction.

B.6.1.1.2. Donc $D\mathcal{M}_{x'} \not\subset \mathcal{M}_{x'}$, ce qui implique

$$u'_2(x') \neq 0 .$$

Si $I(X',f,(u',\lambda)) \neq (u_1'^{\nu})\mathrm{mod}.(u'_3)$, comme $F_1(u'_1,u'_2,1) \in I(X',f,(u',\lambda))$, que $F_1(u'_1,u'_2,1) = (1+\nu)\ \bar{c}\ u_1'^{\nu}\ \mathrm{mod}.(u'_3)$, on a $\mathrm{VDir}[J(X',f,E')\mathrm{mod}.(u'_3)] = \langle U'_1,V_2\rangle$ et donc par VI.B.C., on a $\kappa(x') \leq 3(B)$ si $\alpha(x') = \nu$ et $\kappa(x') \leq 3(C)$ si $\alpha(x') = 1+\nu$, ce qui contredit l'hypothèse $(\nu,\kappa)(x') \geq (\nu,4)$.

Donc $I(X',f,(u',\lambda)) = (u_1'^{\nu})\mathrm{mod}.(u'_3)$.

On en déduit, avec les notations de B.6.1.,

$f = h(x')(Av_1^{\nu} + v_3B) + R(f,v,\mu)$.

De plus, pour un i, $2 \leq i \leq s$, $v_1^{-\nu}\ h(x')^{-1}\ DM^{u',\lambda}_{[i]}\ Av_1^{\nu}$ est inversible.

Soit A est inversible et x' est à D.Q., soit $A = Cv_2 + Dv_1$, C inversible et comme $E' = \mathrm{div}(v_3)$, en remplaçant v_2 par A, on peut appliquer III.2 si $\alpha(x') = \nu(x')$ et IV.A.1. si $\alpha(x') = 1+\nu(x')$ et donc $\kappa(x') \leq 2$. Ce qui est une contradiction.

B.6.1.2. En conclusion, si $\delta(u,\lambda) = 1$, en tout point $x' \in O$ au-dessus de x, on a $(\nu,\kappa)(x') \leq (\nu,3)$.

B.6.1.3. Regardons le cas où $\delta(u,\lambda) > 1$. Alors $c\ell^{1+\nu}[I(X(n),f,(u,\lambda)] = (U_1)^{1+\nu}$ et donc

$$F_1 = (\nu+1)\ \bar{c}\ U_1^{1+\nu} \quad \text{et} \quad \mathrm{VDir}(x) = \langle U_1 \rangle .$$

Alors par I.F.4.2.(8), I.F.4.3.1.(3), I.F.4.3.2. (3) et I.F.4.3. (9bis) appliqué pour $\varepsilon = \delta = 0$ et en permutant les indices 2 et 3, on a

$$(9)\quad \begin{cases} v_1\, D^{v,\mu}_{[1]}\, f = DM^{u,\lambda}_{[1]}\, f + \ell\, v_3\, DM^{u,\lambda}_{[i]}\, f\,, \\ \text{pour un } i,\ 2 \leq i \leq s \text{ et } \ell \in O_{X',x'}. \end{cases}$$

De plus, en appliquant I.E.1., on a

$$(10)\quad \begin{cases} h(x)^{-1}(DM^{v,\mu}_{[i]}\, f,\ u'_2\, D^{v,\mu}_{[2]}\, f\ ;\ 1 \leq i \leq s) = \\ u_3^{-1-\nu} I(X(n),f,(u,\lambda)) = I(X',f,(u',\lambda))\ . \end{cases}$$

Soient $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 1$, $k \in \mathbb{R}^+$ et $(L,M) \in (\mathbb{R}^{2*})^2$ définies par $L(x_2,x_3) = (x_2+x_3)\,\delta^{-1}$, $M(x_2,x_3) = x_3(\delta-1)^{-1}$. On pose

$$(11)\quad \mathfrak{M}^k_\delta = \{\mathfrak{M}, L\}^k_u = (u_1^a\, u_2^b\, u_3^c\ ;\ a + (b+c)\delta^{-1} \geq k) \subset O_{X,x}\ ,$$

$$\mathfrak{M}^{k+}_\delta = \{\mathfrak{M}, L\}^{k+}_u = (u_1^a\, u_2^b\, u_3^c\ ;\ a + (b+c)\delta^{-1} > k) \subset O_{X,x}\ ,$$

$$\mathfrak{M}'^k_\delta = \{\mathfrak{M}, M\}^k_{u'} = (u_1'^a\, u_3'^c\ ;\ a + c(\delta-1)^{-1} \geq k) \subset O_{X',x'}\ ,$$

$$\mathfrak{M}'^{k+}_\delta = \{\mathfrak{M}, M\}^{k+}_{u'} = (u_1'^a\, u_3'^c\ ;\ a + c(\delta-1)^{-1} > k) \subset O_{X',x'}\ .$$

(voir IV.C.1.4.(5) et IV.C.12).

Désormais, nous notons

$$(12)\quad \delta(u,\lambda) = \delta \quad , \quad \delta\left[h(x)^{-1}\, D^{u,\lambda}_{[1]}\, f\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1\right] = \delta'\ .$$

Alors, on a

$$(13)\quad I(X(n),f,(u,\lambda)) \subset \mathfrak{M}^{\nu+1}_\delta\ .$$

Ce qui donne par (10)

$$(14)\quad h(x')^{-1}\left[DM^{v,\mu}_{[i]}\, f,\ u'_2\, D^{v,\mu}_{[2]}\, f\ ;\ 1 \leq i \leq s\right] \subset u_3^{-1-\nu}\, \mathfrak{M}^{\nu+1}_\delta = \mathfrak{M}'^{\nu+1}_\delta\ .$$

De plus, par B.3. et B.4.(3), on a

$$(15)\quad \delta' \geq \delta\ .$$

Alors (9), (16) et B.4.(3) donnent

$$(16) \qquad h(x')^{-1} D^{v,\mu}_{[1]} f = u_3^{-\nu} h(x)^{-1} D^{u,\lambda}_{[1]} f \bmod. (\mathfrak{M}'^{\nu} \delta') \in \mathfrak{M}'^{\nu}_{\delta'} .$$

Donc si $c_1(v,\mu)$ est l'abscisse minimale des points de $\Delta(h(x')^{-1} D^{v,\mu}_{[1]} f \; ; v_3, v_2 \; ; v_1)$ que l'on note $\Delta_{1,v}$, on a

$$(17) \qquad c_1(v,\mu) = \delta' - 1.$$

D'après B.4., on peut trouver (w,μ) avec

$$(18) \quad \begin{cases} w = (w_1, v_2, v_3), \; w_1 = v_1 + v_3^{\ell} g \;, \; \ell \geq \lceil \delta' - 1 \rceil \geq 1 \;, \\ g \in k(x')\,[\,[v_2, v_3]\,] \subset \hat{O}_{X',x'} \end{cases}$$

Posons

$$(19) \qquad dg = g_1 \, dv_1 + g_2 \, dv_2 + g_3 \, dv_3 + \sum_{3 \leq i \leq s} g_i \, d\mu_i \; .$$

Alors on a

$$(20) \qquad \begin{aligned} D^{w,\mu}_{[1]} &= (1 + v_3^{\ell} g_1) \, D^{v,\mu}_{[1]} \;, \\ DM^{w,\mu}_{[2]} &= DM^{v,\mu}_{[2]} + v_2 \, v_3^{\ell} \, g_2 \, D^{v,\mu}_{[1]} \;, \\ DM^{w,\mu}_{[3]} &= DM^{v,\mu}_{[3]} + v_3^{\ell} \, (\ell g + v_3 \, g_3) \, D^{v,\mu}_{[1]} \;, \\ DM^{w,\mu}_{[i]} &= DM^{v,\mu}_{[i]} + v_3 \, \mu_i \, g_i \, D^{v,\mu}_{[1]} \;, \; 3 \leq i \leq s \; . \end{aligned}$$

On remarque que

$$v_3^{\ell} \, h(x')^{-1} D^{v,\mu}_{[1]} f \in \mathfrak{M}'^{\nu+1}_{\delta} \quad \text{et donc}$$

$$(21)\quad h(x')^{-1}\, DM^{w,\mu}_{[1]}\, f = (1+v_3^{\ell}\, g_1)(DM^{v,\mu}_{[1]}\, f - v_3^{\ell}\, g\, D^{v,\mu}_{[1]}\, f) \in \mathfrak{m}'^{\,\nu+1}_{\delta}$$

$$h(x')^{-1}\, DM^{w,\mu}_{[i]}\, f = h(x')^{-1}\, DM^{v,\mu}_{[i]}\, f \ \mathrm{mod.} (v_3^{\ell}\, h(x')^{-1}\, D^{v,\mu}_{[1]}\, f) \in \mathfrak{m}'^{\,\nu+1}_{\delta}\ ,$$

$$2 \leq i \leq s.$$

B.6.1.4. Je dis que

$$(22)\qquad \alpha[V(u_1',u_3')] \geq \nu \qquad \text{ou} \qquad t[V(u_1',u_3')] \leq 2\nu\ .$$

Nous allons prouver (22) et en même temps prouver une inégalité du même type (29bis) qui sera utile pour le corollaire B.6.4. qui suivra B.6. Choisissons un corps de représentants dans $\hat{O}_{X(n),x}$ et posons

$$(23)\quad h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[i]}\, f = \sum_{1 \leq j \leq \nu+1} u_1^{\nu+1-j}\, \ell_{a,b,i,j}\, u_2^a\, u_3^b + Au_1^{\nu+1}$$

$$\in k(x)[[u_1,u_2,u_3]] = \hat{O}_{X(n),x}\ .$$

Soit $d(i,j) = \inf\{a+b\ ;\ \ell_{a,b,i,j} \neq 0\}$ et si $d(i,j) < \infty$, posons

$$(24)\quad P_{i,j} = c\ell^{d(i,j)}\Big(\sum_{0 \leq a, 0 \leq b} \ell_{a,b,i,j}\, u_2^a\, u_3^b\Big) = U_2^{a(i,j)}\, U_3^{a(i,j)}\, Q_{i,j}$$

$$\in k(x)[U_2,U_3],\ a(i,j) \geq jd(u,\lambda), b(i,j) \geq jc(u,\lambda) > 0.$$

Alors, on a

$$(25)\quad u_3^{-\nu-1}\, h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[i]}\, f = \sum_{j \leq j \leq \nu+1} u_1'^{\,\nu+1-j}\, u_3'^{\,d(i,j)-j}\, B_{i,j} + Au_1'^{\,\nu+1}$$

$$= \sum_{1 \leq j \leq \nu+1} u_1'^{\,\nu+1-j}[Q_{j,i}(u_2',1)u_2'^{\,a(i,j)} + u_3'\, g_{i,j}')\, u_3'^{\,d(i,j)-j} + Au_1'^{\,1+\nu},$$

$$g_{i,j}' \in O_{X',x'}\ .$$

Prouvons (22). Posons $C = V(u_1',u_3') \subset X'$. Alors on a

$$(26)\qquad J(X',f,E',C) = I(X',f,(u',\lambda)) = I(X(n),f,(u,\lambda))u_3^{-1-\nu}\ .$$

Si $\alpha(C) \leq \nu-1$, alors par (26), $\exists i$, $1 \leq i \leq s$ tel que

(27) $\mathrm{ord}_{\eta} \left[u_3^{-\nu-1} h(x)^{-1} DM^{u,\lambda}_{[i]} f\right] \leq \nu-1$, où $C = \bar{\eta}$.

Alors, $\exists i,j$, $1 \leq i \leq s$, $2 \leq j \leq \nu+1$ tel que $\nu+1-j + d(i,j)-j \leq \nu-1$, c'est-à-dire

(28) $d(i,j) \leq 2j-2$.

Par (24), on a $\deg(Q_{j,i}) + a(i,j) \leq d(i,j) - b(i,j) \leq d(i,j) - 1 \leq 2j-3$ $\leq 2(\nu+1) - 3 = 2\nu-1$. Donc pour (i,j) satisfaisant à (28), on a $\mathrm{ord}_{x'}(B_{i,j} \bmod. (v_1,v_3)) \leq 2\nu-1$ et $\nu+1-j + d(i,j)-j \leq \nu-1$. Par (10), $v_2\, u_3^{-\nu-1} h(x)^{-1} DM^{u,\lambda}_{[i]} f \in I(X',f,(v,\mu))$, donc $t(C) \leq \mathrm{ord}_{x'}(v_2 B_{i,j} \bmod. (v_1,v_3))$ $\leq 2\nu$, ce qui prouve (22).

B.6.1.4.1. Avant de continuer la preuve de B.6., regardons le cas où $\varepsilon(u,\lambda) = 1$, $\delta(u,\lambda) \notin \mathbb{N}$, $u_2'(x') \neq 0$ et $\exists (i,j)$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq \nu+1$ avec

$d(i,j) - j\lfloor \delta(u,\lambda) \rfloor + \nu + 1 - j \leq \nu - 1$, c'est-à-dire

(29) $d(i,j) \leq j\lfloor \delta(u,\lambda) \rfloor + j - 2$.

Notons $q(i,j)$ le degré de $Q_{i,j}$ alors

$$\begin{aligned} q(i,j) &\leq j\lfloor \delta(u,\lambda) \rfloor + j - 2 - jc(u,\lambda) - jd(u,\lambda) \\ &< j(1+\delta(u,\lambda)-c(u,\lambda)-d(u,\lambda))-2 \quad (\text{car } \delta(u,\lambda) \notin \mathbb{N}) , \\ &\leq j(1+e(u,\lambda)) - 2 \leq 2j-2 \quad . \end{aligned}$$

D'où $q(i,j) \leq 2j-3 \leq 2\nu-1$.

D'où

(29 bis) $\mathrm{ord}_{x'}(B_{i,j} \bmod. (v_1,v_2)) \leq 2\nu-1$.

Cette inégalité sera utile pour le corollaire B.6.4.

B.6.1.5. Reprenons la preuve de B.6. par C.12(e)

(30) $\quad I(X',f,(v,\mu)) = (v_1^{\nu+1}) \bmod.(v_3)$.

Par (22) et (30), VI.G.2. et VI.G.4.1., on a

(31) $\quad \alpha(x') = \nu \Longrightarrow \kappa(x') \leq 3$.

Comme par hypothèse $\kappa(x') > 3$, on a

(32) $\quad \alpha(x') = 1 + \nu$.

B.6.1.6. Voyons le cas où $u_2'(x') = 0$. Alors $(v,\mu) = (u',\lambda)$. Par I.F.4.2., on a

(33) $$\begin{cases} I(X',f,(u',\lambda)) = I(X(n),f,(u,\lambda))u_3^{-1-\nu} , \\ h(x')^{-1} D^{u',\lambda}_{[1]} f = u_3'^{-\nu} h(x)^{-1} D^{u,\lambda}_{[1]} f . \end{cases}$$

Alors, par IV.C.6., le polygone $\mathcal{L}(h(x')^{-1} D^{u',\lambda}_{[1]} f \,;\, u_3', u_2' \,;\, u_1')$ est préparé.

Si $div(u_3') = E'$ alors par (22) et (30), on a (***) pour $(x',(u',\lambda))$.

Si $div(u_2' u_3') = E'$ alors $div(u_2 u_3) = E(n)$, on a $A(2) = ord_{u_2}[h(x)] = ord_{u_2'}[h(x')]$, donc si $A(2) = 0(p)$, on a (***) pour $(x',(u',\lambda))$, si $A(2) \neq 0(p)$ alors comme $\delta(u,\lambda) > 1$, on a $cl^{1+\nu}[I(X(n),f,(u,\lambda))] = (U_1^{1+\nu})$ d'où par B.1.(7) $I(X',f,(u',\lambda)) = (u_1'^{\nu+1}) \bmod.(u_2)$ et par (33), $I(X',f,(u',\lambda)) = (u_1'^{\nu+1}) \bmod.(u_2')$, on a (***) pour $(x',(u',\lambda))$.

B.6.1.6.1. On a donc (***) pour $(x',(u',\lambda))$.
Par IV.C.6. appliqué à $I(X',f,(u',\lambda))$, on a

$$(34)\quad \begin{cases} \beta(u',\lambda) \leq \beta(u,\lambda),\ c(u',\lambda) = \delta(u,\lambda)-1 \leq c(u,\lambda)+\beta(u,\lambda)-1, \\ e(u',\lambda) \leq e(u,\lambda). \end{cases}$$

Ce qui prouve (ii) et (iii) en ce cas.

De plus, si on a (****) pour $(x,(u,\lambda))$, on a (****) pour $(x',(u',\lambda))$ et $(c(u',\lambda),\beta(u',\lambda)) \leq (c(u,\lambda),\beta(u,\lambda))$, si on a égalité alors $\beta(u,\lambda) = 1$ et donc $E(n) = \mathrm{div}(u_3)$ et $E' = \mathrm{div}(u_3')$, ce qui prouve (iv) en ce cas.

B.6.1.7. Regardons le cas où $u_2'(x') \neq 0$ et $\delta' = \delta > 1$. Dans (18), on a $\ell \geq \lceil \delta'-1 \rceil = \lceil \delta-1 \rceil$, d'où

$$(35)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}'^{k}_{\delta} = (w_1^a\, w_3^c\ ;\ a + c(\delta-1)^{-1} \geq k) = (v_1^a\, v_3^c\ ;\ a + c(\delta-1)^{-1} \geq k) \\ \qquad = (u_1'^a\, u_3'^c\ ;\ a + c(\delta-1)^{-1} \geq k) \end{cases}$$
$$\mathfrak{M}'^{k+}_{\delta} = (w_1^a\, w_3^c\ ;\ a + c(\delta-1)^{-1} > k).$$

Posons

$$(36)\quad c\ell^{\nu}_{L}[h(x)^{-1}\, D^{u,\lambda}_{[1]}\, f] = \sum_{0 \leq j \leq \nu} U_1^{\nu-j}\, U_2^{b(j)}\, U_3^{c(j)}\, P_j(U_2,U_3)\ ,$$

où $L(a,b,c) = a + (b+c)\delta^{-1}$, $P_j \in k(x)[U_2,U_3]$, P_j nul ou $[P_j$ divisible ni par U_2 ni par U_3 et $\deg(P_j) = j\delta - a(j) - b(j)]$, de plus

$$(37)\quad \exists j,\ 1 \leq j \leq \nu\ ,\ P_j \neq 0.$$

En effet $\delta = \delta'$. De plus, par (9) et (21), on a

$$(38)\quad h(x')^{-1}\, D^{w,\mu}_{[1]}\, f = h(x')^{-1}\, D^{v,\mu}_{[1]}\, f = h(x')^{-1}\, D^{u',\lambda}_{[1]}\, f \mod.\ \mathfrak{M}^{\nu+}_{\delta'}$$
$$= \sum_{0 \leq j \leq \nu} v_1^{\nu-j}\, u_2'^{b(j)}\, v_3^{(\delta-1)j}\, P_j(u_2',1) \mod.\ \mathfrak{M}^{\nu+}_{\delta'}\ .$$

De plus, comme $h(x)^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[1]}\ f \in I(X(n),f,(u,\lambda))$ et que $\delta = \delta'$ par B.3. et B.4. (3), si $P_j \neq 0$, on a

(39) $a(j) \geq jc(u,\lambda), b(j) \geq jd(u,\lambda),\ \deg(P_j) \leq je(u,\lambda),\ \deg(P_j) + b(j) \leq j\beta$.

Soit

(40) (c_1,β_1) le point d'abscisse minimale de $\Delta_{1,w}$ où
$\Delta_{1,w} = \Delta(h(x')^{-1}\ D^{w,\mu}_{[1]}\ f\ ;\ w_3,\ w_2\ ;\ w_1)$.

Par IV.C.4.2.2. appliqué à $h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[1]}\ f$ et (17) et (20),

(41) $c_1 = \delta - 1 = \delta' - 1 = \delta(u,\lambda) - 1,\quad \beta_1 \leq \delta' - c(u,\lambda)$,

$\beta_1 < \lfloor e(u,\lambda)/[k(x') : k(x)] \rfloor + 1.$

Par (23) et B.4.(3), on a $c(w,\mu) \geq \delta - 1$ et

$$\Delta_{1,w} \subset \Delta[I(X',f,(w,\mu))\ ;\ w_3,\ w_2\ ;\ w_1] ,$$

de plus $\beta(u,\lambda) \leq \delta - c(u,\lambda) = \delta' - c(u,\lambda)$, d'où

(42) $\begin{cases} c(w,\mu) = \delta - 1, & \beta(w,\mu) \leq \beta_1 \leq \beta(u,\lambda), \\ \beta(w,\mu) \leq \beta_1 < \lfloor e(u,\lambda)/[k(x') ; k(x)] \rfloor + 1. \end{cases}$

Par (42), (22) et (30), on a (ii) en ce cas.

De plus, on a $\delta = \delta(u,\lambda) \leq \beta(u,\lambda) + c(u,\lambda)$, d'où si $\beta(u,\lambda) < 1$ et $c(u,\lambda) < 1$, on a $c(w,\mu) < c(u,\lambda)$ et $\beta(w,\mu) < 1$. Si x' est irrationnel sur x et $\beta(u,\lambda) = 1$ alors $e(u,\lambda) \leq 1$ et $\beta(w,\mu) \leq \beta_1 < 1$, d'où $(c(w,\mu),\beta(w,\mu)) < (c(u,\lambda),\beta(u,\lambda))$.

Ces inégalités et (42) prouvent (iv) en ce cas.

B.6.1.8. Pour terminer l'étude du cas $x' \in O$, nous n'avons plus qu'à étudier le cas où $\delta' \neq \delta > 1$ et $u_2'(x') \neq 0$. Par B.4.(3), on a $\delta' > \delta > 1$. Alors dans (18), on a $\ell > \delta - 1$ et donc $v_3^{\ell} \in \mathfrak{M}'^{1+}$ on a

(43) $\quad h(x')^{-1}\, D^{v,\mu}_{[1]} f \in \mathfrak{M}'^{\nu}_{\delta'} .\, \mathfrak{M}'^{1+}_{\delta} \subset \mathfrak{M}'^{\nu}_{\delta} \,.\, \mathfrak{M}'^{1+}_{\delta} \subset \mathfrak{M}'^{\nu+1+}_{\delta}$.

Ce qui donne par (21)

(44) $\quad h(x')^{-1}\, DM^{w,\mu}_{[i]} f = h(x')^{-1}\, DM^{v,\mu}_{[i]} f \bmod. (\mathfrak{M}'^{\nu+1+}_{\delta}),\ 1 \leq i \leq s$.

Ce qui donne :

(45) $\quad h(x')^{-1}\, u'_2\, D^{w,\mu}_{[2]} f = h(x')^{-1}\, u'_2\, D^{v,\mu}_{[2]} \bmod. (\mathfrak{M}'^{\nu+1+}_{\delta})$.

Alors, (10) et (44) nous donnent

(46) $\quad \begin{cases} h(x')^{-1}(DM^{w,\mu}_{[i]} f,\ u'_2\, D^{w,\mu}_{[2]} f\ ;\ 1 \leq i \leq s) = \\ u_3^{-1-\nu}\, I(X(n),f,(u,\lambda)) = I(X',f,(u',\lambda)) \bmod. (\mathfrak{M}'^{+\nu+1+}_{\delta}). \end{cases}$

Comme $v_3^a \in \mathfrak{M}'^{1+}_{\delta}$, on a

(47) $\quad w_1 = v_1 = u'_1 \bmod. \mathfrak{M}'^{1+}_{\delta}$.

Par définition de $\delta = \delta(u,\lambda)$ (B.5.), pour tout $M = h(x)^{-1}(\sum_{1\leq i\leq s} \lambda(i)\, DM^{u,\lambda}_{[i]} f)$, on a

(48) $\quad \begin{cases} M = \sum_{0\leq j\leq \nu+1} U_1^{\nu+1-j}\, U_2^{a(j)}\, U_3^{b(j)}\, Q_j\, (U_2,U_3) \bmod. (\mathfrak{M}^{\nu+1+}_{\delta}) , \\ b(j) \geq jc(u,\lambda),\ a(j) \geq jd(u,\lambda) , \\ Q_j \text{ polynôme nul ou homogène de degré } j\delta - a(j)-b(j). \end{cases}$

Bien sûr, on peut trouver des $\lambda(i)$, $1\leq i\leq s$ tels qu'un des Q_j est non nuls pour $1 \leq j \leq 1+\nu$.

Alors, par (47), on a

(49) $\quad u_3^{-1-\nu}\, M = \sum_{0\leq j\leq 1+\nu} w_1^{\nu+1-j}\, w_3^{j(\delta-1)}\, Q_j(u'_2,1) \bmod. (\mathfrak{M}'^{\nu+1+}_{\delta})$.

Par (14) et (46), on a

(50) $\quad I(X',f,(w,\mu)) \subset \mathfrak{m}'^{\nu+1}_{\delta}$.

Donc $c(w,\mu)) \geqslant \delta-1$, mais comme dans (49) on peut avoir un des Q_j non nul pour $1 \leq j \leq 1+\nu$ et que $w_2\, u_3^{-1-\nu} M \in I(X',f,(w,\mu))$, on a

(51) $\quad c(w,\mu) = \delta - 1.$

Comme $\delta(u,\lambda) \leq c(u,\lambda) + \beta(u,\lambda)$, on a donc

(52) $\quad c(w,\mu) \leq c(u,\lambda) + (\beta(u,\lambda)-1).$

Si $D(\mathfrak{m}_{x'}) \subset \mathfrak{m}_{x'}$, alors, par (46), on a $u_3^{-1-\nu} M \in I(X',f,(w,\mu)) \bmod. (\mathfrak{m}'^{\nu+1+}_{\delta})$, d'où

(53) $\quad j\beta(w,\mu) \leq \mathrm{ord}_{x'} [Q_j(u'_2,1)]$, $1 \leq j \leq \nu+1$.

Or, par (48), si $Q_j \neq 0$, pour un j, $1 \leq j \leq \nu+1$, on a

(54) $\quad \begin{cases} \deg Q_j \leq j(\delta - c(u,\lambda) - d(u,\lambda)) \leq je(u,\lambda) \\ \qquad \leq j\,\bar{\beta}(u,\lambda), \end{cases}$

(55) $\quad \begin{cases} \beta(w,\mu) \leq e(u,\lambda)\ [k(x') : k(x)]^{-1} \\ \qquad \leq \beta(u,\lambda)\ [k(x') : k(x)]^{-1} \end{cases}$.

Les relations (51)(52) et (55) entraînent clairement (ii), (iii). Voyons donc le cas où dans (48) on ne peut avoir à la fois un $Q_j \neq 0$ et $D\mathfrak{m}_{x'} \subset \mathfrak{m}_{x'}$.

Alors, par (46), on a

(56) $\quad w_2\, u_3^{-1-\nu} M \in I(X',f,(w,\mu))$.

D'où, par (49), en posant $d = [k(x') : k(x)]$, on a

(57) $$\begin{cases} j\beta(w,\mu) \leq 1 + \mathrm{ord}_{x'} [Q_j(u_2',1)] \\ \qquad \leq 1 + \lfloor (j\delta - a(j) - b(j))/d \rfloor \\ \qquad \leq 1 + \lfloor j(\delta - c(u,\lambda) - d(u,\lambda))/d \rfloor , \\ \text{pour tout } j,\ 1 \leq j \leq \nu+1 \text{ tel que } Q_j \neq 0 . \end{cases}$$

Si $E(n) = \mathrm{div}(u_2 u_3)$, on a

(58) $$j\delta - a(j) - b(j) \leq j\varepsilon(u,\lambda)$$

et si $E(n) = \mathrm{div}(u_3)$ et si $b(j) > 0$ (par exemple si $D = DM^{u,\lambda}_{[2]}$), on a

(58 bis) $$j\delta - a(j) - b(j) < j\beta(u,\lambda).$$

Regardons le cas où on a

(58 *) $$\begin{cases} E(n) = \mathrm{div}(u_2\ u_3) \text{ ou} \\ E(n) = \mathrm{div}(u_3) \text{ et } j\delta - a(j) - b(j) < j\beta(u,\lambda) . \end{cases}$$

Alors si on a $E(n) = \mathrm{div}(u_2\ u_3)$, par (58), on a

(59) $$j\beta(w,\mu) \leq 1 + \lfloor (j\varepsilon(u,\lambda) - 1) \rfloor / d \leq j\ \varepsilon\ (u,\lambda) .$$

Si $E(n) = \mathrm{div}(u_3)$ et si on a (58 *), par (58 bis), on a

(59 bis) $$j\beta(w,\mu) \leq 1 + \lfloor (j\beta(u,\lambda) - 1) \rfloor / d \leq j\beta(u,\lambda).$$

Ces relations (59) et (59 bis) prouvent (ii) si $\varepsilon(u,\lambda) = 1$ ou 1,5 ou si $d = 1$. Si $\varepsilon(u,\lambda) = 2$ et $d \geq 2$, on a

$$j\beta(w,\mu) \leq 1 + \lfloor j - 1/2 \rfloor \leq j$$

et donc $\beta(w,\mu) \leq 1$ et donc $\varepsilon(w,\mu) = 1$, on a (ii). Si $\varepsilon(u,\lambda) \geq 3$

alors $\mathcal{E}(u,\lambda)/2 \leq \mathcal{E}(u,\lambda)-3/2$ et $(\beta(u,\lambda) \leq \mathcal{E}(u,\lambda)$ si $E(n) = \mathrm{div}(u_3))$, alors on a $j\beta(w,\mu) \leq 1 + (j\mathcal{E}(u,\lambda)-1)/2 \leq j\mathcal{E}(u,\lambda)-3j/2 - 1/2 \leq j(\mathcal{E}(u,\lambda)-1)$, on a donc (ii) en ce cas et donc (ii) dans le cas où on a (58 *).

De plus, si on a (****) pour $(x,(u,\lambda))$, par (52), (59 bis) et les relations qui suivent on a (****) pour $(x',(w,\mu))$ et $c(w,\mu) \leq c(u,\lambda)$; si $c(w,\mu) = c(u,\lambda)$, par (52), on a $\beta(u,\lambda) = 1$ et donc $\beta(w,\mu) \leq \beta(u,\lambda)$; si x' est irrationnel sur x et $(1 = \beta(u,\lambda),\ E(n) = \mathrm{div}(u_3))$, alors $\mathcal{E}(u,\lambda) = \beta(u,\lambda) = 1$ et $0 < c(u,\lambda) < 1$, donc $b(j) + \deg(Q_j) < 2j$ et $j \geq 2$, alors par (59 bis), ona $j\beta(w,\mu) \leq 1 + (j-1)/2 \leq j-1$ d'où $\beta(w,\mu) < \beta(u,\lambda)$, ce qui prouve (iii).

Voyons donc le cas où on n'a ni $D\mathfrak{M}_{x'} \subset \mathfrak{M}_{x'}$, ni (58 *). Alors, comme on l'a remarqué après (58), on a

$$(60) \qquad D \neq DM^{u,\lambda}_{[2]}\ ,\ E(n) = \mathrm{div}(u_3)\ .$$

En appliquant I.F.4.2.(7) et I.F.4.3.1.(3) et I.F.4.3.2.(3) pour $\delta = \mathcal{E} = 0$ et en permutant les indices 2 et 3, l'hypothèse $D\mathfrak{M}_{x'} \not\subset \mathfrak{M}_{x'}$ implique

$$(61) \quad \begin{cases} D \neq DM^{u,\lambda}_{[1]}\ ,\ D \neq DM^{u,\lambda}_{[1]} + DM^{u,\lambda}_{[2]} + DM^{u,\lambda}_{[3]}\ , \\ [D \neq DM^{u,\lambda}_{[i]}\ ,\ 4 \leq i \leq s \text{ si } x' \text{ est rationnel sur } x \text{ ou si} \\ k(x')/k(x) \text{ séparable}]\ . \end{cases}$$

D'après (60) et (61) on a donc $k(x')/k(x)$ inséparable et par I.F.4.3.1.(3) $D = DM^{u,\lambda}_{[4]}$ et par (46) (45), on a

$$(62) \quad h(x')^{-1}\, Df = h(x')^{-1}\, D^{w,\mu}_{[2]} f \ \mathrm{mod.}\ (\mathfrak{M}_{\delta}^{\,1+\nu})\ .$$

Par (57), on a

(63) $\quad j\beta(w,\mu) \leq 1 + \lfloor j\beta(u,\lambda)/d \rfloor$.

Si $\beta(u,\lambda) > 2$, on a $\lfloor j\beta(u,\lambda)/d \rfloor \leq \lfloor j\beta(u,\lambda) \rfloor - 2$ et $\lfloor j\beta(u,\lambda)/d \rfloor < \lfloor j\beta(u,\lambda) - j \rfloor$ on a (ii) et (iv), (63) et (52) donnent (iii).

Si ($\beta(u,\lambda) \leq 2$ et $d \geqslant 3$) ou ($\beta(u,\lambda) < 2$ et $d = 2$) alors $\lfloor j\beta(u,\lambda)/d \rfloor \leq j-1$ donc $\beta(w,\mu) \leq 1$, on a (ii), (iii) et (iv).

Si $\beta(u,\lambda) = 2$ et $d = 2$, l'extension $k(x')/k(x)$ étant inséparable, on a $d = p = 2$ alors on a $j\beta(w,\mu) \leq 1+j$, si $j > 1$, on a (ii), mais si $j=1$, on a $\beta(w,\mu) = 0$, sinon par (62), on a

$$h(x')^{-1} D^{w,\mu}_{[2]} f = \gamma w_1^{1+\nu} + \gamma' w_1^{\nu} w_2 \text{ mod.}(I_{\delta}'^{1+\nu}),$$

$$\gamma' \in O^{*}_{X',x'} \quad .$$

Ce qui est impossible puisque $p=2$, on ne peut avoir des termes de degré impair en w_2.

Donc on a (ii).

Prouvons (iii). Alors, comme on l'a vu après (58 $*$), il suffit d'étudier le cas $\beta(u,\lambda) = 1$ et on a pour $1 \leq j \leq \nu+1$

$$b(j) + \deg(Q_j) < 2j \quad (\text{cf. } (48)),$$

d'où $j \geqslant 2$. De plus $\beta(u,\lambda) \leq 1$ implique $\deg(Q_j) \leq j$ et par (57), on a

$$j\beta(w,\mu) \leq 1 + \lfloor j/d \rfloor .$$

De plus, on a p/d , $\nu+1 \neq 0(p)$ et $\nu+1-j = 0(p)$. D'où $(d,j) \neq (2,2)$ et donc $d \geqslant 3$ et $j \geqslant 3$ d'où $1+\lfloor j/d \rfloor \leq j-1$ d'où $\beta(w,\mu) < 1$ ce qui avec (52) donne (iii).

B.6.2. Par (3) et B.6.1., il n'y a plus qu'à étudier le cas où x' est le point de paramètres $w = (u_1 u_2^{-1}, u_2, u_3 u_2^{-1})$. Alors, par I.F.4.2., on a

(63) $$\begin{cases} h(x')^{-1} D^{w,\lambda}_{[1]} f = u_3^{-\nu} h(x)^{-1} D^{u,\lambda}_{[1]} f , \\ I(X',f,(w,\lambda)) = I(X(n),f,(u,\lambda))u_2^{-\nu-1}. \end{cases}$$

Alors, par B.1.(3), on a

$$(64)\qquad I(X',f,(w,\lambda)) = (w_1^{\nu+1}) \text{ mod.}(w_3) .$$

Par III.3.2., on a

$$(65)\qquad (t[V(w_1,w_3)] \leq t[V(u_1,u_3)] -1) \quad \text{ou} \quad \alpha[V(w_1,w_3)] \geq \nu .$$

De plus

$$(66)\qquad A(3) = \text{ord}_{u_3}[h(x)] = \text{ord}_{w_3}[h(x')] .$$

Par VI.G.1. et 2., (64) et (66), on a

$$(67)\qquad \kappa(x') > 3 \Longrightarrow \alpha(x') = 1 + \nu .$$

Par (63) et (67), on a

$$(68)\qquad c\ell^{1+\nu}[I(X(n),f,(u,\lambda))] \subset k(x)[U_1,U_3] .$$

Si $c\ell^{1+\nu}[I(X(n),f,(u,\lambda))] \subset k(x)[U_1]$, alors on a $c\ell^{1+\nu}[I(X(n),f,(u,\lambda))] = (U_1^{1+\nu})$ et par (63),

$$(69)\qquad I(X',f,(w,\lambda)) = (w_1^{1+\nu})\text{mod.}(w_2).$$

Si $c\ell^{1+\nu}[I(X(n),f,(u,\lambda))] \not\subset k(x)[U_1]$, par (63) et (67), $c\ell^{1+\nu}[I(X(n),f,(u,\lambda))] \subset k(x)[U_1,U_3]$ et par (63)

$$(70)\qquad c\ell^{1+\nu}[I(X',f,(w,\lambda))] \not\subset k(x')[W_1] \text{ mod.}(W_2) \quad (\text{cf.B.1.(7)}).$$

De plus par [12] (T.2. p.125) et IV.C.6., on a

(71) $$\begin{cases} \Delta[h(x')^{-1} D^{w,\lambda}_{[i]} f \; ; w_3, w_2 \; ; w_1] \text{ est préparé }, \\ \beta(w,\lambda) = c(u,\lambda) + \beta(u,\lambda) - 1, \\ c(w,\lambda) = c(u,\lambda), \; e(w,\lambda) \leq e(u,\lambda) , \\ d(w,\lambda) = \delta(u,\lambda) - 1, \; \gamma(w,\lambda) \leq \delta(u,\lambda) - d(u,\lambda), \\ e(w,\lambda) \leq \sup(1, \beta(u,\lambda) - 1). \end{cases}$$

Pour montrer que si $\tau(x') > 3$ on a (***) pour (w,λ), il n'y a plus qu'à voir que

(72) $$\begin{cases} \alpha[V(w_1,w_2)] \geq \nu \quad \text{ou} \\ t[V(w_1,w_2)] \leq 2\nu . \end{cases}$$

Voyons le cas où $\alpha[V(w_1,w_2)] \leq \nu-1$, alors on remarque que $E' = \mathrm{div}(w_1,w_3)$ et que

(73) $$\begin{cases} J(X',f,E',C) = I(X',f,(w,\lambda)) \\ \text{où } \; C = V(w_1,w_2) . \end{cases}$$

Choisissons un corps de représentants de $k(x)$ dans $\hat{O}_{X(n),x}$ et posons

(74) $$\begin{cases} h(x)^{-1} DM^{u,\lambda}_{[i]} f = \sum_{1\leq j\leq \nu+1} u_1^{\nu+1-j} M_{a,b,i,j} u_2^a u_3^b + B_i u_1^{\nu+1} \\ \in k(x)[[u_1,u_2,u_3]] . \end{cases}$$

Alors, on a

(75) $$\begin{cases} u_2^{-\nu-1} h(x)^{-1} DM^{u,\lambda}_{[i]} f = \\ \sum w_1^{\nu+1-j} M_{a,b,i,j} w_2^{a+b-j} w_3^b + B_i w_1^{\nu+1} \in I(X',f,(w,\lambda)). \end{cases}$$

Si $\alpha(V(w_1,w_2)) \leq \nu-1$ alors pour tout (a,b,i,j) tel que

(76) $\quad \nu+1-j+a+b-j \leq \nu-1$ et $M_{a,b,i,j} \neq 0$.

D'où

$$b \leq 2j-a-2 \leq 2(\nu+1)-2 \leq 2\nu \quad ,$$

ce qui prouve (72).

On remarque que (71) entraîne (ii) et (iii). Pour terminer la preuve de B.6., il n'y a plus qu'à montrer (iv). L'hypothèse $m(x) = 1$ et $m(x') = 2$ impose que $x' \not\in O$. Alors, par (71), où $\beta(u,\lambda) = 2$, on a $e(w,\mu) \leq 1$. Si $e(w,\mu) < 1$ alors $\varepsilon(w,\mu) = 1$ et $\varepsilon(u,\lambda) = 2$, il n'y a rien à prouve. Si $e(w,\mu) = 1$ alors $\varepsilon(w,\mu) = 2$ et nous effectuons l'éclatement $\pi'' : X'' \longrightarrow X'$ centré en x' et nous étudions un point fermé x'' ν-proche de x' avec $\tau(x'') > 3$. Alors par (ii), on a (***) en x'', ce qu'il faut prouver est que $\varepsilon(x'') = 1$. Par (ii), ce résultat est clair si x'' est irrationnel sur x'. Supposons donc que $k(x') = k(x)$.

Par IV.C.6., on a

$$(77) \quad \begin{cases} \gamma(u,\lambda) = 1 + c(u,\lambda) = \delta(u,\lambda), \\ d(u,\lambda) = 0 \ , \\ \beta(w,\lambda) = 1 + d(w,\lambda) = e(w,\lambda) + d(w,\lambda) \ , \\ \gamma(w,\lambda) = 1 + c(u,\lambda) = e(w,\lambda) + c(w,\lambda) \ , \\ \delta(w,\lambda) = 1 + c(w,\lambda) + d(w,\lambda). \end{cases}$$

Alors, si x'' est le point de paramètres $(w_1 w_3^{-1}, w_2 w_3^{-1}, w_3) = w'$, par (34) et IV.C.6., on a

$$(78) \quad e(w',\lambda) = 0.$$

De même, si x'' est le point de paramètres $(w_1 w_2^{-1}, w_2, w_3 w_2^{-1}) = z$, on a

(79) $\qquad e(z',\lambda) = 0.$

Voyons le cas général où on a en $O_{X'',x''}$ une p-base (y,μ) avec $y_1 = w_1'$, $y_3 = w_3'$ et $w_2'(x'') \neq 0$. Alors, par (72), si on pose $f = h(x)\ g + R(f,u,\lambda)$, on a par (72) et IV.C.12. $g \in \mathfrak{m}_{\delta}^{\nu+1}$ et en développant g dans $k(x)[[u_1,u_2,u_3]]$

(80) $$\begin{cases} g = c\,u_1^{\nu+1} + \sum\limits_{1\leq j\leq 1+\nu} u_1^{\nu+1-j}\ u_3^{c(j)}\ u_2^{d(j)}\ r_j \ , \\ r_j \in k(x)[[u_2,u_3]] \ , \\ c(j) + d(j) + \mathrm{ord}_x(r_j) \geq j\,\delta(u,\lambda),\ 1\leq j\leq \nu+1 \ \text{ avec égalité pour un } j. \end{cases}$$

Comme on a $\gamma(u,\lambda) = 1+c(u,\lambda) = \delta(u,\lambda)$ (cf. (72)) alors pour un j', $1\leq j'\leq \nu+1$, on a

(81) $$\begin{cases} u_3^{c(j')}\ u_2^{d(j')}\ r_{j'} = \gamma\, u_3^{j'(1+c(u,\lambda))} \ \mathrm{mod.}(u_2, u_3^{j'\delta+1}) \ , \\ \gamma \text{ inversible.} \end{cases}$$

En x', on a

$$f = h(x')\ g\ u_2^{-1-\nu} + R(f,w,\lambda)$$

(82) $$\begin{cases} g u_2^{-1-\nu} = c w_1^{\nu+1} + \sum\limits_{1\leq j\leq 1+\nu} w_1^{\nu+1-j}\ w_3^{c(j)}\ w_2^{c(j)+d(j)-j}\ (r_j\ u_2^{-d(j)}) \\ \text{avec } d(j) = \mathrm{ord}_x(r_j) \ . \end{cases}$$

Par (81), on a pour un j', $1\leq j'\leq 1+\nu$

(83) $$w_3^{c(j')}\ w_2^{c(j')+d(j')-j'}\ r_{j'}\ u_2^{-d(j')} = w_3^{j'c(u,\lambda)}\ w_2^{j'\delta-j'}(\gamma w_3^{j'} + w_2\ r'_{j'})$$

Posons $\delta' = \delta(w,\lambda)$ alors, par (77), on a $\delta' = 1+c(u,\lambda)+\delta-1$ et donc

$$(84)\quad \begin{cases} c\ell_{L'}^{1+\nu}\ g\ u_2^{-1-\nu} = c\ W_1^{\nu+1} + \sum_{1\le j\le 1+\nu} W_1^{\nu+1-j}\ W_3^{c(j)}\ W_2^{c(j)+d(j)-j}\ R_j(W_2,W_3) \\ \text{avec}\quad 0\ne R_{j'} = \gamma W_3^{j'}\ \mathrm{mod.}(W_2),\ c(j') = j'c(u,\lambda) = j'c(w,\lambda), \\ c(j') + d(j') - j' = j'(\delta-1),\ \text{pour un}\ \ j',\ 1\le j'\le 1+\nu\ , \\ L'(x_1,x_2,x_3) = x_1 + (x_2+x_3)\ \delta'^{-1}\quad . \end{cases}$$

Si pour un j , $1\le j\le \nu+1$, on a $\nu+1-j \ne 0(p)$ et $R_j \ne 0$, alors $c\ell_{L'}^{\nu}[h(x')^{-1}\ D_{[1]}^{w,\lambda}\ f] \ne 0$ et par (42) appliqué pour $\pi'' : X' \longrightarrow X'$ et (w,λ) et (y,μ), on a

$$(85)\qquad \beta(y,\mu) < \lfloor e(w,\lambda)\rfloor + 1 = 2,$$

d'où

$$(86)\qquad \varepsilon(y,\mu) \le 1,5 < \varepsilon(w,\lambda) = \varepsilon(u,\lambda) = 2.$$

Si $c\ell_{L'}^{\nu}[h(x')^{-1}\ D_{[1]}^{w,\lambda}\ f] = 0$, alors

$$(87)\qquad \nu+1-j' = 0(p).$$

Admettons pour le moment qu'on peut trouver $D = \sum_{1\le i\le s} \lambda(i)\ DM_{[i]}^{w,\lambda}$ telle que $c\ell_L^{1+\nu}[h(x')^{-1}\ Df] \notin (U_1^{1+\nu})$ et $D\mathcal{M}_{x''} \subset \mathcal{M}_{x''}$. Alors, par (53), on a $\beta(z,\mu) \le e(w,\lambda) = 1$, d'où

$$(88)\qquad \varepsilon(z,\mu) = 1 < \varepsilon(w,\lambda) = \varepsilon(u,\lambda) = 2.$$

Montrons l'existence de D. Posons $h(x) = u_3^{A(3)}$, alors on a $h(x') = w_3^{A(3)}\ w_2^{A(3)+1+\nu}$.

$$(89)\quad \begin{cases} \deg[W_3^{A(3)}\ W_2^{A(3)+\nu+1}\ W_3^{c(j')}\ W_2^{c(j')+d(j)-j'}\ R_{j'}] = \\ 2(A(3) + c(j')) + d(j') + \nu + 1\quad \text{que l'on note}\quad D(j'). \end{cases}$$

Or $\nu+1-j' = 0(p)$ et par (84) et (87), on a

$$c(j') + d(j') = j'\delta = j'(1+c(u,\lambda)) = j'+c(j') ,$$

d'où $d(j') = j'$ et dans (89)

$$D(j') = 2(A(3)+c(j')+j')\mathrm{mod.}(p).$$

Si $2(A(3)+c(j')+j') \neq 0(p)$, on prend

$$D = DM^{w,\lambda}_{[1]} + DM^{w,\lambda}_{[2]} + DM^{w,\lambda}_{[3]} .$$

Si $A(3)+c(j')+j' = 0(p)$, alors

$$W_3^{A(3)} W_2^{A(3)+\nu+1} W_1^{\nu+1-j'} W_3^{c(j')} W_2^{c(j')+d(j')-j'} R_{j'} =$$

$$W_1^{\nu+1-j'} W_3^{A(3)+c(j')} W_2^{A(3)+c(j')+\nu+1} (\gamma W_3^{j'}+W_2 R'_{j'})$$ et

$$\gamma W_1^{\nu+1-j'} W_3^{A(3)+c(j')+j'} W_2^{A(3)+c(j')+j'+\nu+1-j'} = \gamma(W_1^A W_2^B W_3^C)^p$$

on a $\gamma \notin k(x')^p$ et donc on peut prendre $D = DM^{w,\lambda}_{[i]}$ pour un i, $4 \leq i \leq s$.

Si $p = 2$ et $A(3)+c(j')+1 \neq 0(2)$ alors $A(3)+c(j') = 0(2)$, $j' = 1(2)$ et $\nu = 0(2)$. De plus, comme $\beta(w,\lambda) = d(w,\lambda)+1$, on a pour un j'', $1 \leq j'' \leq \nu+1$

$$R_{j''} \neq 0 \quad \text{et} \quad R_{j''}(W_2,W_3) = \theta W_2^{j'} + W_3 R''_{j''} ,$$

θ inversible. Alors en raisonnant sur le monôme $\theta\, W_1^{\nu+1-j''} W_3^{A(3)+c(j'')} W_2^{A(3)+c(j'')+j''+\nu+1}$ on a $A(3)+c(j'') = 0(2)$, $j'' = 1(2)$ et donc $\theta \notin k(x')^p$, donc on prend $D = DM^{w,\lambda}_{[i]}$, pour un i, $4 \leq i \leq s$.

Les relations (86) et (88) prouvent (iv). Ce qui termine la preuve de B.6. En B.6.2., nous avons montré l'assertion suivante.

B.6.3. En le point $x' \in X'$ de paramètres $w = (u_1u_2^{-1},u_2,u_3u_2^{-1})$, on a (***) pour (w,λ) ou bien $\iota(x') \leq 3$.

<u>COROLLAIRE B.6.4.</u>

Avec les hypothèses et notations de B.6., nous supposons de plus que

(1) $\delta(u,\lambda) \geq 2$,

(2) $m(x') = 1$.

On pose $\theta = \lfloor \delta(u,\lambda) \rfloor - 1$. Soit l'algorithme

(3) $\forall i$, $0 \leq i \leq \theta$ on effectue l'éclatement $\pi'(i) : X'(i+1) \longrightarrow X'(i)$ centré en $Y(i) \subset X'(i)$ où $Y(i) = \mathrm{Sing}\,(X'(i)) \cap E'(i)$, avec $X'(0) = X'$ et $E'(0) = E'$.

Alors, on a

(i) $\forall i$, $0 \leq i \leq \theta - 1$, il existe dans $X'(i)$ un et un seul point $x'(i)$ ν-proche de $x' = x'(0)$, $Y(i)$ est permis en $x'(i)$ et $\alpha[Y(i)] = 1+\nu$,

(ii) dans $X'(\theta+1)$, il existe au plus un point y ν-proche de x',

(iii) si $\varepsilon(u,\lambda) = 1$ et si y existe alors $\pi(y) \leq 3$ ou bien on a (****) en y pour $(w',\mu) = (w_1 w_3^{-\theta}, w_2, w_3)$.

Preuve.

L'hypothèse $m(x') = 1$ implique que $x' \in O$, où O est l'ouvert affine de X' où $\mathrm{div}(u_3) = \pi^{-1}(x)$. On a $\delta(u,\lambda) > 2 > 1$, reprenons les calculs de B.6.1.3. Par B.6.1.3.(41) (51), on a

(1) $$c(w,\mu) = \delta(u,\lambda) - 1 \geq 1.$$

On en déduit que

(2) $$\begin{cases} I(X',f,(w,\mu)) = (w_1^{1+\nu})\,\mathrm{mod.}(w_3), \\ h(x')^{-1}\, D^{w,\mu}_{[1]}\, f = \gamma\, w_1^{\nu}\ \mathrm{mod.}(w_3), \quad \gamma \text{ inversible}, \\ E'(0) = \mathrm{div}(w_3). \end{cases}$$

On en déduit que

(3) $$Y(0) = V(w_1,w_3), \quad \alpha[Y(0)] = 1+\nu .$$

Par (2) et (***), on a

(4) $$\mathrm{VDir}(x') \ni W_1 .$$

On montre facilement par récurrence que pour $0 \leq i \leq \Theta-1$,

(5) $(w(i),\mu)$ est une p-base de $O_{X'(i),x'(i)}$ adaptée en $x'(i)$,

(6) $$\begin{cases} I(X'(i),f,(w(i),\mu)) = I(X',f,(w,\mu))\; w_3^{-i(\nu+1)} \\ \qquad = (w_1(i)^{1+\nu})\,\mathrm{mod.}(w_3) , \end{cases}$$

(7) $$\begin{cases} h(x'(i))^{-1}\; D^{w(i),\mu}_{[1]}\, f = w_3^{-i\nu}\; h(x')^{-1}\; D^{w,\mu}_{[1]}\, f \\ \qquad = \gamma w_1(i)^{\nu}\ \mathrm{mod.}(w_3) , \end{cases}$$

(8) $\Delta[I(X'(i),f,(w(i),\mu))\ ;\ w_3(i),w_2(i)\ ;\ w_1(i)]$ est le translaté de $\Delta[I(X',f,(w,\mu))\ ;\ w_3,\ w_2\ ;\ w_1]$ de $-i$ dans le sens des abscisses,

(9) $c(w(i),\mu) = c(w,\mu)-i = \delta(u,\lambda)-1-i \geqslant 1$,

(10) $Y(i) = V(w_1(i),w_3(i))$, $\alpha[Y(i)] = 1+\nu$, $W_1(i) \in \mathrm{VDir}(x'(i))$.

(11) $\alpha(x'(i)) = 1+\nu$.

Ces relations prouvent (i). Par (11), dans $X'(\Theta)$, il y a au plus un point y ν-proche de x', c'est le point de paramètres $w' = (w_1 w_3^{-\Theta},w_2,w_3)$. On a (ii).

Prouvons (iii). Par hypothèse, $\nu(y) = \nu$. On a

(12) $$\begin{cases} I(X'(\Theta),f,(w',\mu))=I(X',f,(w,\mu))w_3^{-\Theta(1+\nu)}= (w_1'^{\,1+\nu})\ \mathrm{mod.}(w_2',w_3) , \\ h(y)^{-1}\; D^{w',\mu}_{[1]}\, f=w_3^{-\Theta\nu}h(x')^{-1}\; D^{w,\mu}_{[1]}f =\gamma w_1'^{\,\nu}\ \mathrm{mod.}(w_2',w_3) \\ \qquad =\gamma w_1'^{\,\nu}+w_2'P(w_1',w_2')\mathrm{mod.}(w_3), P\in k(y)[W_1',W_2'],\ \deg P \leq \nu-1 . \end{cases}$$

De plus,

(13) $\Delta[I(X'(\Theta),f,(w',\mu))\ ;\ w'_3,\ w'_2\ ;\ w'_1]$ est le translaté de $\Delta[I(X',f,(w,\mu))\ ;\ w_3,\ w_2\ ;\ w_1]$ de $-\Theta$ dans le sens des abscisses, son point d'abscisse minimale a pour coordonnées $(c(w,\mu)-\Theta,\ \beta(w,\mu)) = (c',\beta')$.

Par hypothèse, $\varepsilon(w,\mu) = 1$, d'où $\beta(w,\mu) \leq 1$, donc

(14) $\beta' \leq 1$.

B.6.4.1. Voyons le cas où $\varepsilon(w,\mu) \in \mathbb{N}$. On a alors $c(w,\mu) = \lfloor \delta(u,\lambda) \rfloor \dot{-} 1 = \Theta$. D'où

(15) $(c',\beta') = (0,\beta')$.

Si $\beta' < 1$, alors par (15), on a

(16) $\mathrm{ord}_y[I(X',f,(w',\mu))\,\mathrm{mod.}\,(w'_3)] < 1+\nu$.

D'où $\alpha(y) < 1+\nu$ et donc $\alpha(y) = \nu = \nu(g)$. De plus, par (16), $c\ell^{\nu}[I(X',f,(w',\mu)] \not\subset k(y)[W'_3]$, comme $E'(\Theta) = \mathrm{div}(W'_3)$, y est à D.Q. et $\kappa(y) \leq 2$.

Si $\beta' = 1$, on peut avoir

(17) $\mathrm{VDir}[J(X'(\Theta),f,E'(\Theta))\,\mathrm{mod.}\,(W'_3)] = \langle W'_1,W'_2\rangle$,

alors par VI.C. si $\alpha(y) = 1+\nu$ et par VI.B. si $\alpha(y) = \nu$, on a $\kappa(y) \leq 3$.

Si $\beta' = 1$ et si on n'a pas (17), alors par (12), on a

(18) $$\begin{cases} c\ell^{\nu}[J(X'(\Theta),f,E'(\Theta))] = (W_1'^{\nu})\,\mathrm{mod.}\,(W_3), \\ h(y)^{-1}\, D^{w',\mu}_{[1]}\, f = \gamma w_1'^{\nu}\ \mathrm{mod.}\,(w_3) \end{cases}$$.

Alors on a

$$(19)\quad \begin{cases} f = h(y)(\varphi\, w_1'^{\nu} + w_3\, g + g') + R(f,w',\mu), \\ \mathrm{ord}_y(g') \geq \nu+2 \ , \ \mathrm{ord}_y(\varphi) = 1, \quad g \in O_{X'(\theta),y} \ . \end{cases}$$

Comme $(c',\beta') = (0,1)$, pour un i, $1 \leq i \leq s$, on a

$$h(y)^{-1}\, DM^{w',\mu}_{[i]}\, f = \sum_{0 \leq j \leq \nu+1} \gamma_j\, w_1'^{\nu-j}\, w_2'^{j} \ \mathrm{mod.}(w_3) \ ,$$

avec un γ_j inversible, $1 \leq j \leq \nu+1$. Par (19), on a alors $j=1$ et donc $\varphi = aw_1' + bw_2'$ avec $(a,b) \in O^2_{X'(\theta),y}$, b inversible. Par (18), a est aussi inversible et $\nu = 0(p)$, on a $h(y)^{-1}\, D^{w',\mu}_{[2]}\, f = \delta'\, w_1^{\nu}$ mod. (w_3). Si $\alpha(y) = 1+\nu$, par IV.A.1. (ii), y est à D.Q. et $\tau(y) \leq 2$. Si $\alpha(y) = \nu$, par III.2, on a $\tau(y) \leq 1$.

B.6.4.2. Voyons le cas où $\delta(w,\mu) \notin \mathbb{N}$. Alors, $c' = c(w,\mu) - \theta > 0$ et (12) devient

$$(20)\quad \begin{cases} I(X'(\theta), f, (w',\mu)) = (w_1'^{1+\nu})\,\mathrm{mod.}(w_3) \ , \\ h(y)^{-1}\, D^{w',\mu}_{[1]}\, f = \gamma\, w_1'^{\nu}\,\mathrm{mod.}(w_3) \end{cases}$$

On a

$$(21)\qquad Y(\theta) = V(w_1',w_3), \ 0 < c(w',\mu) < 1, \ \beta(w',\mu) = 1.$$

Si $\tau(y) \leq 2$, il n'y a rien à prouver. Dans le cas où $\tau(y) \geq 3$, nous allons montrer qu'on a

$$(22)\qquad \alpha(Y(\theta)) \geq \nu \quad \text{ou} \quad t(Y(\theta)) \leq 2\nu \ .$$

Si $\alpha(y) = \nu$, par VI.G., (20)(22) montrent que $\tau(y) \leq 3$, si $\alpha(y) = 1+\nu$, par (13) (20)(21)(22), comme $E'(\theta) = \mathrm{div}(w_3)$, on aura (****) pour y, $O_{X(\theta),y}$ et (w',μ). Donc (22) entraîne (iii).

Si $\alpha(Y(\theta))\geqslant \nu$, (22) est clair. Voyons donc le cas où $\alpha(Y(\theta))<\nu$ et majorons $t(Y(\theta))$. Montrons que cette majoration a été faite en B.6.1.6.1. (31 bis). On a vu en B.6.1.6., B.6.1.7. et B.6.1.8. que (w,μ) est construit à partir d'une p-base adaptée (v,μ) de $O_{X',x'}$ avec

$$(23) \qquad w_2 = v_2,\ w_3 = v_3 = u_3,\ w_1 = v_1+v_3^{\lceil\delta(u,\lambda)\rceil -1}g = u_1'+u_3^{\lceil\delta\rceil-1}g.$$

Or ici $\delta(u,\lambda)\notin \mathbb{N}$ donc $\lceil\delta(u,\lambda)\rceil -1 = \lfloor\delta(u,\lambda)\rfloor = \theta+1$. D'où

$$(24) \qquad w_1 = v_1+v_3^{\theta} g = u_1' + u_3^{\theta} g .$$

Donc $v' = (v_1v_3^{-\theta},v_2,v_3,\mu)$ est une base adaptée à y de $O_{X'(\theta),y}$. De plus,

$$(25) \qquad I(X'(\theta),f,(v',\mu)) = I(X',f,(v,\mu))\, v_3^{-\theta(1+\nu)} .$$

On a $w_1' = v_1'+w_3\, g$, $g\in O_{X',x'}\subset O_{X'(\theta),y}$. D'où

$$(26) \qquad Y(\theta) = V(v_1',v_3') = V(w_1',w_3).$$

Par III.3.2.1., on a

$$(27) \qquad t(Y(\theta)) = t\left[Y(\theta),I(X'(\theta),f,(v',\mu)),y\right] .$$

Or, on a vu (B.6.1.3.(10)) que

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} I(X,f,(u,\lambda))v_3^{-1-\nu} &= h(x')^{-1}(DM^{v,\mu}_{[i]} f,u_2'\, D^{v,\mu}_{[2]} f,\ 1\leq i\leq s) \\ &= I(X',f,(u',\lambda)). \end{aligned}\right.$$

On en déduit que

(29) $\quad t(Y(\Theta)) \leq 1+t[Y(\Theta), I(X', f, (u',\lambda))v_3^{-\Theta(1+\nu)}, y]$.

En reprenant les notations de B.6.1.4., on a

$$v_3^{-1-\nu}\ h(x)^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[i]}\ f = \sum_{1\leq j\leq \nu+1} u_1'^{\nu+1-j}\ u_3'^{d(i,j)-j}\ B_{i,j} + A_i\ u_1'^{\nu+1}$$

(30) $$\begin{cases} v_3^{-(\Theta+1)(1+\nu)}\ h(x)^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[i]}\ f = \\ \displaystyle\sum_{1\leq j\leq \nu+1} v_1^{\nu+1-j}\ v_3'^{d(i,j)-j-\Theta j}\ B_{i,j} + A_i\ u_1'^{\nu+1} . \end{cases}$$

Par B.6.1.4.1. (31) (31 bis), $\forall(\epsilon, j)$, $1\leq i\leq s$, $1\leq j\leq \nu+1$ avec $\nu+1-j+d(i,j)-j[\delta(u,\lambda)]\leq \nu-1$, (c.à.d. $\nu+1-j+d(i,j)-j-\Theta j\leq \nu-1$), on a $\mathrm{ord}_y(B_{i,j}\ \mathrm{mod.}(v_1',v_3')) = \mathrm{ord}_{x'}(B_{i,j}\ \mathrm{mod.}(v_1,v_3)) \leq 2\nu-1$, d'où $t[Y(\Theta, I(X',f,(u',\lambda))\ v_3^{-\Theta(1+\nu)}] \leq 2\nu-1$ d'où par (29)

(31) $\quad t(Y(\Theta)) \leq 2\nu-1$.

Ce qui prouve (22) qui termine la preuve de (iii).

DEFINITION B.7.

Soit x un point fermé de $\mathrm{Sing}(X(n))$, on dit que $\tau(x) = 4(B)$ si

(1) $\tau(x) > 3$,

(2) pour une p-base (w,λ) de $O_{X(n),x}$, en x on a les conditions (***) et (****) de B.2. et B.6.

DEFINITION B.8.

Soit x un point fermé de $\mathrm{Sing}(X(n))$, on dit que $\tau(x) = 5$ si

(1) $\tau(x) > 4$,

(2) pour une p-base de (u,λ) de $O_{X(n),x}$ adaptée en x on a la condition (**) de B.1.

PROPOSITION B.9.

Les théorèmes II.C.4.1. et II.C.4.4. sont vérifiés pour $\tau = 4$ et $\tau = 5$.

B.9.1. Le théorème II.C.4.1. pour $\tau = 4$ ou 5 dit qu'on a stabilité de $\tau \leq 4$ et de $\tau \leq 5$ par éclatement de points fermés, c'est un corollaire de B.6. Nous n'avons qu'à prouver II.C.4.4. , pour cela nous avons besoin d'un lemme.

LEMME B.9.2.

Soit $\pi(n+i) : X(n+i+1) \longrightarrow X(n+i)$, $i \geqslant 0$ une suite infinie d'éclatements centrés en $x(n+i)$ point fermé de $X(n+i)$ tel que

(1) $\tau(x(n+i)) = 4(B)$

(2) $\nu[x(n+i)] = \nu[x(n)] \geqslant 1$, on pose $\nu = \nu(x(n))$.

De plus, pour $i \geqslant 1$,

(3) $x(n+i+1)$ n'est pas sur le transformé strict de $\pi(n+i-1)^{-1}(x(n+i-1))$,

(4) $x(n+i+1)$ est rationnel sur $x(n+i)$.

Alors $\exists \ell \geqslant 0$ tel que $\tau(x(n+\ell)) = 4(A)$.

Preuve.

Par IV.B.4.1., pour tout $i \geqslant 1$, il existe une courbe formelle régulière $C \subset X(n+i)$ telle que $x(n+i) \in C(n+i)$, $C(n+i)$ étant le transformé strict dans $X(n+i)$ de $C = C(n+i)$. Par II.B.9.1., pour un entier j, on a $\alpha(x(n+i)) = \alpha(C)$, $\forall i \geqslant j$. Par (1) (2), on a $\alpha(x(n+i)) = 1+\nu$ $\forall i \geqslant 0$, donc $\alpha(C) \geqslant 1+\nu \geqslant 2$, donc $\nu(C) \geqslant 1$, donc $C \subset \mathrm{Sing}_{\nu}(X(n+1))$, c'est localement un fermé de $X(n+1)$. Bien sûr, quitte à grandir j, $C(n+i)$ est à croisements normaux avec $E(n+i)$ et est transverse à $\pi(n+i-1)^{-1}(x(n+i-1))$, $\forall i \geqslant j$.

Soit (u,λ) une p-base de $O_{X(n+j),x(n+j)}$ telle qu'on a (**) pour $(x(n+j),(u,\lambda))$. Alors

$$(5) \qquad h(x(n+j))^{-1}\, D^{u,\lambda}_{[1]} f = \gamma u_1^{\nu} + u_3\, g_1 \in I(C(n+j))^{\nu} .$$

Donc pour un $A \in O_{X(n+j),x(n+j)}$, $u_1+u_3A \in I(C(n+j))$. Si $I(c(n+j)) \ni u_3$, alors $I(C(n+j)) = (u_1,u_3)$ et quitte à modifier u_1 en $w_1 = u_1+u_3g$, on a $I(C(n+j)) = (w_1,w_3)$ et on a (***) pour (w,λ) (cf.B.2. (iv)).

Si $I(C(n+j)) \not\ni u_3$, alors comme $C(n+j)$ est à croisements normaux avec $E(n+j) \supset div(u_3)$, $C(n+j)$ est transverse à $div(u_3)$ et donc $I(C(n+j)) = (u_1+u_3A,\ u_2+u_3B)$, $B \in O_{X(n+j),x(n+j)}$, B nul si $div(u_2) \subset E(n+j)$.

Si $div(u_2) \not\subset E(n+j)$, alors quitte à remplacer u_2 par u_2+u_3B , ce qui ne modifie pas (**), on peut supposer $B=0$, c-à-d. $I(C(n+j)) = (u_1+u_3A,u_2)$.

Bien sûr, par B.2.(iv), on peut supposer qu'on a (***) pour (u,λ). Si $A \in I(C(n+j))$ alors on a $I(C(n+j)) = (u_1,u_2)$. Je dis que $A \in I(C(n+j))$. Dans $X(n+j+1)$, $x(n+j+1)$ est le point de paramètres $(u_1u_3^{-1}+A,u_2u_3^{-1},u_3)$. Or puisqu'on a (***) pour (u,λ) , $U_1 \in VDir(x(n+j))$, donc $ord\ A \geq 1$. Donc $x(n+j+1)$ a pour paramètres $u' = (u_1u_3^{-1},u_2u_3^{-1},u_3)$, on vérifie qu'on a (***) pour (u',λ) et une récurrence décroissante sur $ord_{x(n+j)}$ $(A \bmod.(u_1,u_2))$ donne le résultat.

En résumé, on peut trouver une p-base (w,λ) de $O_{X(n+j),x(n+j)}$ vérifiant (***) en $x(n+j)$ et

$$(6) \qquad C(n+j) = V(w_1,w_3) \quad \text{ou} \quad V(w_1,w_2).$$

Donc, $\forall i \geq j$, $x(n+i+1)$ est un point de croisement pour $(w(i),\lambda)$ où

$$(7) \qquad w(i) = (w_1w_3^{j-i},w_2\, w_3^{j-i},w_3) \quad \text{ou} \quad (w_1\, w_2^{j-i},\ w_2,w_3\, w_2^{j-i}) .$$

De plus, $\forall i \geq j$, par B.6. (i), on a

$$(8) \qquad Sing_{\nu}(X(n+i)) \subset V(w_1(i),t) \cup T_{j,i}$$

où $T_{j,i}$ est le transformé strict de $\mathrm{Sing}_\nu(X(n+j))$ et $\mathrm{div}(t) = \pi(n+i-1)^{-1}(x(n+i-1))$. Bien sûr, $C(n+i) \subset T_{j,i}$.

Quitte à grandir j, on peut supposer que

(9) $$\mathrm{Sing}_\nu(X(n+i)) \subset V(w_1(i),t) \cup C(n+i).$$

De plus, on a

(10) $$\begin{cases} I(X(n+i),f,(w(i),\lambda)) = t^{j-i}\, I(X(n+i),f,(w,\lambda)) \\ \text{où } t = w_2 \text{ ou } w_3 . \end{cases}$$

Donc, par IV.C.7, $\exists \ell \geq j$ tel que

(11) $$\begin{cases} \Delta[I(X(n+\ell),f(w(\ell),\lambda)) \ ; \ w_3(\ell),w_2(\ell) \ ; \ w_1(\ell)] \\ \text{n'a qu'un sommet } (c,d) \text{ avec } [c] + [d] < 1. \end{cases}$$

Par (9), on a

(12) $$\mathrm{Sing}_\nu(X(n+\ell)) \subset V(w_1(\ell),w_2(\ell)) \cup V(w_1(\ell),w_3(\ell)).$$

De plus $h(x(n+\ell))^{-1}\, D^{w(\ell),\lambda}_{[1]} f = t^{j-\ell}\, h(x(n+j))^{-1}\, D^{w,\lambda}_{[1]} f$, par (7), $\Delta(h(x(n+\ell))^{-1}\, D^{w(\ell),\lambda}_{[1]} f \ ; \ w_3(\ell),\ w_2(\ell) \ ; \ w_1(\ell))$ est préparé. Par A.1., on a $\kappa(x(n+\ell)) = 4(A)$. Ce qui prouve B.9.1.

B.9.2. Montrons que le théorème II.C.4.4. est vérifié pour $\kappa = 4$. Par A.4., il n'y a qu'à considérer le cas $\kappa = 4(B)$. Soit donc une suite infinie d'éclatements $\pi(n+i) : X(n+i+1) \longrightarrow X(n+i)$, $i \geq 0$ où $\pi(n+i)$ est centré en $x(n+i) \in X(n+i)$ où $(\nu,\kappa)(x(n+i)) = (\nu(x(0)),4) = (\nu,4)$. Nous allons montrer que pour un $\ell \geq 0$, $x(n+\ell)$ est bon. D'après B.6.(iii), pour tout $i \geq 0$, il existe une p-base $(w(i),\mu(i))$ de $O_{X(n+i),x(n+i)}$

telle qu'on a (**) et (****) pour $(x(n+i), w(i), \mu(i)))$ et on a , pour l'ordre lexicographique

$$(1) \quad \begin{cases} (c(w(i+1),\mu(i+1))), \beta(w(i+1),\mu(i+1))) \leq \\ (c(w(i),\mu(i)), \beta(w(i),\mu(i)). \end{cases}$$

Alors, puisque la suite $\pi(n+i)$ est infinie, pour un $A \in \mathbb{N}$, on a pour tout $i \geq A$:

$$(2) \quad \begin{cases} c(w(A),\mu(A)) = c(w(i),\mu(i)), \\ \beta(w(A),\mu(A)) = \beta(w(i),\mu(i)). \end{cases}$$

Par B.6.(iii), pour tout $i \geq A$, $x(n+i)$ est rationnel sur $x(n+A)$ et $E(n+i) = \mathrm{div}(w_3(i))$. Donc $E(n+i) = \pi(n+i-1)^{-1}[x(n+i-1)]$ et pour $i \geq A+1$, $x(n+i)$ n'est pas sur le transformé strict de $\pi(n+i-2)^{-1}[x(n+i-2)]$. Alors B.9.1. implique que pour un ℓ , $\kappa(x(n+\ell)) = 4(A)$. Par A.4. $x(n+\ell)$ est bon.

B.9.3. Prouvons que II.C.4.4. est vérifié pour $\kappa = 5$. Considérons donc une suite infinie d'éclatements $\pi(n+i) : X(n+i+1) \longrightarrow X(n+i)$ centrés en $x(n+i) \in X(n+i)$, avec $(\nu,\kappa)(x(n+i)) = (\nu,5)$, $i \geq 0$. Nous allons montrer que pour un $\ell \geq 0$, $x(n+\ell)$ est bon.

Par B.6. (ii), on a $\mathcal{E}(x(n+i+1)) \leq \mathcal{E}(x(n+i))$. Donc, pour un $A \in N$, on a

$$(1) \quad \forall i \geq A, \quad \mathcal{E}(x(n+i)) = \mathcal{E}(x(n+A)).$$

Alors, je dis que

$$(2) \quad \forall B \in \mathbb{N} \quad , \quad \exists i \geq B \ , \ m(x(n+i)) = 1.$$

Supposons le contraire, alors pour un $B \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \geq B$ on a $m(x(n+i)) = 2$. Soit (w,μ) une p-base de $O_{X(n+B),x(n+B)}$ telle qu'on a (***) en $x(n+B)$. Comme $m(x(n+B)) = 2$, on a

(3) $$E(n+B) = \mathrm{div}\,(w_1\ w_3).$$

Alors, par B.6.1.6.1. et B.6.3., pour $i \geq 0$, les $x(n+i+1)$ ont pour paramètres $w(i+1)$ où

(4) $$w(i+1) = (w_1(i)w_2(i)^{-1}, w_2(i), w_3(i)w_2(i)^{-1}) \quad \text{ou}$$
$$(w_1(i)w_3(i)^{-1},\ w_2(i)w_3(i)^{-1},\ w_3(i)),$$

et on a (***) pour $(x(n+i),(w(i),\mu))$.

Alors, par IV.C.7. quitte à augmenter B, pour tout $i \geq B$,

(5) $\mathcal{L}\,[I(X(n+i),f,(w(i),\mu));w_3(i),w_2(i)\ ;w_1(i)]$ n'a qu'un sommet $(c(i),\beta(i))$.

De plus, par B.6.(i), $W_1(i) \in \mathrm{VDir}(x(n+i))$ et donc, quitte à augmenter B, pour tout $i \geq B$,

(6) $$\mathrm{Sing}_p(X(n+i)) \subset V(w_1(i),w_3(i)) \cup V(w_1(i),w_2(i)) .$$

Alors, par IV.C.7., pour un $\ell \geq B$, $[c(\ell)] + [\beta(\ell)] < 1$, d'où $\kappa(x(n+i)) = 4(A)$, ce qui est une contradiction qui prouve (2).

Je dis que

(7) $$\varepsilon(x(n+A)) = 1.$$

Supposons le contraire, alors $\varepsilon(x(n+A)) \geq 1,5$. Soit $B \geq A$ tel que $m(x(n+B)) = 1$. Alors, $\forall i \geq B$,

$\mathcal{E}(x(n+i)) = \mathcal{E}(x(n+B)) = \mathcal{E}(x(n+A)) \geqslant 2$. Par B.6.(ii)(iv).

(8) $\forall i \geqslant B$, $m(x(n+i)) = 1$ et $x(n+i)$ est rationnel sur $x(n+B)$.

Alors comme $m(x(n+i)) = 1$, $\forall i \geqslant B$, $x(n+i+1)$ n'est pas sur le transformé strict de $\pi(n+i-1)^{-1}[x(n+i-1)]$, alors par B.9.1., pour un $\ell \geqslant B$, $\kappa(x(n+\ell)) = 4(A)$, ce qui est une contradiction. On a (7).

Par (2) et (7), pour un $B \geqslant A+1$, on a

(9) $m(x(n+B)) = 1$, $\mathcal{E}(x(n+B)) = 1 = \mathcal{E}(x(n+B-1))$.

Par définition de $\mathcal{E}(.)$, il existe une p-base (u,λ) de $O_{X(n+B-1),x(n+B-1)}$ telle qu'on a (***) pour $(x(n+B-1),(u,\lambda))$ et par B.6.(ii), il existe une p-base (w,μ) de $O_{X(n+B),x(n+B)}$ telle qu'on a (***) pour $(x(n+B),(w,\mu))$ et

(10) $\mathcal{E}(u,\lambda) = \mathcal{E}(w,\mu) = 1$ et $c(w,\mu) = \delta(u,\lambda) - 1$.

Comme $m(x(n+B)) = 1$, par définition de $\mathcal{E}(.)$, on a

(11) $\beta(w,\mu) \leq 1$.

Alors $c(w,\mu) \geqslant 1$, sinon on aurait $\kappa(x(n+B)) = 4(B)$, ce qui serait une contradiction. Alors, par (10), on a

(12) $\mathcal{E}(u,\lambda) \geqslant 2$.

Alors (11), (12) et (9) nous permettent d'appliquer B.6.4. qui dit que l'algorithme du point bon appliqué à $x(n+B-1)$ aboutit à un succès en $x(n+B)$ et donc que $x(n+B)$ est bon. Ce qui termine la preuve de B.9. et ce chapitre.

VIII $\kappa = 6$.

A - PLAN DU CHAPITRE - $\kappa = 6(A)$

DEFINITION A.1.

Soit x un point fermé maigre de Sing(X(n)) on dit que $\kappa(x) = 6$ si

(1) $\kappa(x) \notin \{0,1,2,3,4,5\}$,

(2) $\alpha(x) = \nu(x)$ ou $v(x) = 2$.

A.1.1. PLAN DU CHAPITRE

Comme nous le faisons depuis le chapitre VI, nous allons partager ce cas $\kappa = 6$ en plusieurs cas indexés par des lettres et on passera de chaque cas à un cas précédent par éclatements centrés en des points. Nous allons montrer que l'on va recouvrir tout le cas $\alpha(x) = \nu(x)$ ou $v(x) = 2$.

$\kappa = 6(A)$ contiendra le cas $\alpha(x) = \nu(x)$ et $e(x) = 1$,

$\kappa = 6(B)$ sera le cas $\alpha(x) = \nu(x)$, $v(x) = 1$ et $e(x) = 3$,

$\kappa = 6(C)$ sera le cas $e(x) = 2$ et $e(J,f,E)) = 3$ et $\alpha(x) = \nu(x)$,

$\kappa = 6(D)$ sera le cas $e(x) = 3$, $v(x) = 2$, un élément de VDir(x) est transverse à E et $\alpha(x) = 1+\nu(x)$,

$\kappa = 6(E)$ sera le cas $e(x) = v(x) = 2$ et un élément de VDir(x) est transverse à E et $\alpha(x) = 1+\nu(x)$,

$\kappa = 6(F)$ sera le cas $v(x) = 2$, $e(x) = 3$ et $\alpha(x) = \nu(x)$,

$\kappa = 6(G)$ sera le cas $e(x) = 2$ et $\alpha(x) = \nu(x)$,

$\kappa = 6(H)$ sera le cas $v(x) = 2$, $\alpha(x) = 1+\nu(x)$ et il n'y a pas d'élément de VDir(x) qui est transverse à E.

Bien sûr on a $v(x) \neq 3$, sinon $\kappa(x) = 0$. Donc le cas $\alpha(x) = \nu(x)$ se partage en $v(x) = 1$ et $v(x) = 2$. Le cas $\alpha(x) = \nu(x)$ et $v(x) = 1$ est recouvert par $\kappa(x) = 6(A)$ (pour $e(x) = 1$), $\kappa(x) = 6(C)$ ou (G) pour $e(x) = 2$) et $\kappa(x) = 6(B)$ (pour $e(x) = 3$).

Le cas $\alpha(x) = \nu(x)$ et $v(x) = 2$ est recouvert par $\kappa(x) = 6$(C)(G) (pour $e(x) = 2$), $\kappa(x) = 6$(F) (pour $e(x) = 3$).

Le cas $\alpha(x) = 1+\nu(x)$ (et donc $v(x) = 2$) est recouvert par $\kappa(x) = 6$ (E) ou (H) (pour $e(x)) = 2$), $\kappa(x) = 6$(D) (pour $e(x) = 3$). On remarque en effet que si $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$, on a $m(x) \neq 3$ et donc $e(x) = 3$ implique l'existence d'un élément de VDir(x) transverse à E.

PROPOSITION A.2.

Soit x un point fermé de $X(n)$ tel que

(1) $\kappa(x) = 6$,

(2) $\alpha(x) = \nu(x)$ que l'on note ν,

(3) $e(x) = 2$.

Alors

(i) pour toute p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ adaptée à x, quitte à faire une permutation sur les indices, on a

$$\mathrm{VDir}(x) \subset \langle U_1, U_2\rangle \quad \text{et} \quad E(n) \supset \mathrm{div}(u_1u_2),$$

(ii) si on effectue l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x, il y a au plus un point $x' \in X'$ ν-proche de x avec $\kappa(x') \geq 6$, c'est le point de paramètres $u' = (u_1u_3^{-1}, u_2u_3^{-1}, u_3)$ et on a $\kappa(x') \leq 6$, $e(x') \geq e(x)$.

Preuve.

A.2.1. Soit (u,λ) une p-base de $O_{X(n),x}$ adaptée en x, alors, par (3), quitte à permuter les indices des u_i, on a $\mathrm{VDir}(x) \subset \langle U_1, U_2\rangle$. Comme $\kappa(x) \neq 2$ et $\alpha(x) = \nu(x)$, x n'est pas à D.Q. et puisque $e(x) = 2$, on a $E(n) \supset \mathrm{div}(u_1u_2)$, d'où (i).

A.2.2. Si $v(x) = 2$, alors $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1, U_2\rangle$ et (ii) est clair.

A.2.3. Voyons le cas où $v(x) = 1$, alors quitte à multiplier u_1 et u_2

par des inversibles, on a

(4) $\quad \mathrm{VDir}(x) = \langle U_1+U_2 \rangle$.

Alors, si

(5)
$$\left|\begin{array}{l} c\ell^{\nu}\left[h(x)^{-1}(DM^{u,\lambda}_{[1]} + DM^{u,\lambda}_{[2]} + DM^{u,\lambda}_{[3]})\right](f) \neq 0 \ , \\ \text{ou} \\ c\ell^{\nu}\left[h(x)^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[i]}\ f\right] \neq 0 \ , \ 3 \leq i \leq s \ , \end{array}\right.$$

par IV.B.2.2., en tout point ν-proche y de x avec $y \neq x'$, on a $\kappa(y) \leq 2$, ce qui prouve (ii).

Si on n'a pas (5) alors en tout point $y \neq x'$ avec $y \in \mathrm{Sing}_{\nu}(X')$, pour une p-base (v,μ) de $O_{X',y}$ adaptée en y, on a

(6)
$$\left\{\begin{array}{l} f = h(y)\ (\gamma\ v_1^{\nu+1} + v_2 y) + R(f,v,\mu)\ , \\ h(y) = M^p, \quad \gamma \in O^*_{X',y} \quad , \ \mathrm{div}(v_2) \subset E'. \end{array}\right.$$

En effet, si $\nu = 0(p)$, c'est une conséquence de I.E.5.6., si $\nu \neq 0(p)$, par I.E.5.3. (iii), on peut appliquer I.E.5.5. qui donne également (6).

Si $\alpha(y) = 1+\nu$, alors $(y,(v,\mu))$ satisfont aux conditions de VII.B.1. et $\kappa(y) \leq 5$. Si $\alpha(y) = \nu$ alors $\mathrm{ord}_y(v_2 g) = \nu$ et par VI.A et VI.E, on a $\kappa(y) \leq 3$.

DEFINITION A.3.

Soit x un point fermé de $X(n)$ avec $\kappa(x) = 6$, on dit qu'on a $\kappa(x) = 6(A)$ s'il existe une composante $Y(n)$ de $E(n)$ telle que l'on a une des conditions

(1) $\quad J(X(n),f,E(n),\{x\}) = I(Y(n))^{\nu} \bmod. \mathfrak{m}^{\nu+1}_{X(n),x'}$,

ou

(2) $J(X(n),f,E(n),\{x\}) = I(Y(n))^{\nu} \bmod . I(Z(n))$,

où $Z(n)$ est une composante de $E(n)$ avec $Z(n) \neq Y(n)$.

REMARQUE A.3.1.

Soit x un point fermé de $X(n)$ avec $\kappa(x) = 6(A)$, alors pour toute p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ adaptée à x ,
à permutation près de (u_1,u_2,u_3), on a une des conditions

(1) $f = h(x)(cu_1^{\nu} + g_1) + R(f,u,\lambda)$

avec $\operatorname{div}(u_1) = Y(n) \subset E(n)$, $g_1 \in \mathfrak{m}^{\nu+1}_{X(n),x(n)}$, $c \in O^{*}_{X(n),x}$,

(2) $f = h(x)\ (cu_1^{\nu} + u_2g_2) + R(f,u,\lambda)$

avec $\operatorname{div}(u_1) = Y(n) \subset E(n)$, $\operatorname{div}(u_2) = Z(n) \subset E(n)$, $g_2 \in \mathfrak{m}^{\nu-1}_{X(n),x}$, $c \in O^{*}_{X(n),x}$.

En effet, on vérifie que A.3.(1) et A.3.1.(1) sont équivalentes, il en est de même de A.3.(2) et A.3.1.(2).

PROPOSITION A.3.2.

Soit $x \in X(n)$ avec $\kappa(x) = 6(A)$. Alors, avec les notations de A.3.1., on a

(i) $\operatorname{VDir}(x) \subset \langle U_1,U_2 \rangle$,

(ii) $A(1) = \operatorname{ord}_{u_1}[h(x)] \neq 0(p)$,

(iii) $A(1) + \nu \neq 0(p)$.

(iv) Effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x alors tout point $x' \in X(n+1)$ qui est (ν,κ)-proche de x est sur le transformé strict Y' de $Y(n) = \operatorname{div}(u_1)$ et $\kappa(x') = 6(A)$ et on a A.3.(2) pour x' et $(X(n+1),Y(n+1),E(n+1)) = (X',Y',\pi^{-1}(x))$.

Preuve.

A.3.3. Si x satisfait à A.3.1.(1), alors on a $c\ell^{\nu}[J(X(n),f,E(n),\{x\})] = (U_1^{\nu})$ et donc par I.E.2.1. $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1 \rangle$.

Si x satisfait à A.3.1.(2), alors avec les notations de A.3.1.(2), si $\mathrm{ord}_x(g_2) \geq \nu$, on est dans le cas A.3.1.(1). Si $\mathrm{ord}_{x(n)}(g_2) = \nu-1$ et si $\mathrm{VDir}(x) \not\subset \langle U_1, U_2 \rangle$, alors par I.E.1.5.1.6. appliqué à $J(X(n),f,E(n),\{x\})$, on a $v(x) = 3$ et donc $\kappa(x) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $\kappa(x) = 6$. On a donc (i).

A.3.4. Si $A(1)+\nu = 0(p)$ et si x satisfait à A.3.1.(1) ou (2) alors par VI.E., on a $\kappa(x) \leq 3$. Si $A(1)+\nu \neq 0(p)$ et $A(1) = 0(p)$, alors par VI.A., on a $\kappa(x) \leq 3$. On a donc (ii) et (iii).

A.3.5. Prouvons (iv).

A.3.5.1. Voyons d'abord le cas où x satisfait à A.3.1.(1). Alors

(1) $\langle U_1 \rangle = \mathrm{VDir}(x)$.

Donc $x' \in Y'$. De plus par (iii), on a

(2) $c\ell^{\nu}[h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[1]}\, f] = (A(1)+\nu)\, \bar{c}\, U_1^{\nu} \neq 0.$

Quitte à permuter u_2 et u_3, on a

(3) $u_2\, O_{X',x'} = \mathfrak{m}_{X(n),x}\, O_{X',x'}$,

et alors par I.E.1.

(4) $$\begin{cases} u_2^{-\nu}\, J(X(n),f,E(n),\{x(n)\}) = J(X',f,E') \\ \qquad = (u_1 . u_2^{-1})^{\nu} \mod. (u_2). \end{cases}$$

Posons

(5) $$u' = (u_1.u_2^{-1}, u_2, u_3.u_2^{-1}) .$$

On a par (2)

(6) $$\begin{cases} DM_{[1]}^{u',\lambda}\, \mathfrak{m}_{X',x'} \subset \mathfrak{m}_{X',x'} \quad \text{et} \\ h(x')^{-1}\, DM_{[1]}^{u',\lambda} f = (A(1)+\nu)\ \bar{c}\ u_1'^{\nu} \ \mathrm{mod.}(u_2). \end{cases}$$

Alors (4) et (6) impliquent

(7) $$J(X',f,E',\{x'\}) = (u_1'^{\nu})\mathrm{mod.}(u_2).$$

Ce qui implique qu'on a A.3.(2) pour $(x',Y',\pi^{-1}(x))$, donc si $\kappa(x') > 5$, on a $\kappa(x') = 6(A)$.

A.3.5.2. Pour terminer, étudions le cas où x satisfait à A.3.1.(2) et pas à A.3.1.(1), ce qui signifie que $\mathrm{ord}_x(g_2) = \nu-1$. On a $\mathrm{VDir}(x) \neq \langle U_1 \rangle$, donc par (i), on a $e(x) = 2$ et par A.2., x' est le point de paramètres $u' = (u_1.u_3^{-1}, u_2.u_3^{-1}, u_3)$. On a

(8) $$f = h(x')(cu_1'^{\nu} + u_2'\ g_2\ u_3'^{-\nu+1}) + R(f,u',\lambda).$$

Alors, si $(\nu, \kappa)(x') \geq (\nu,6)$, on a $\alpha(x') \geq \nu$ et donc $\mathrm{ord}_{x'}(g_2 u_3'^{-\nu+1}) = \nu-1$ donc $e(x') \geq 2$ et x' satisfait à A.3.(2) pour $Y' = \mathrm{div}(u_1')$, $(\nu,\kappa)(x') = (\nu,6)$ et $\kappa(x') = 6(A)$.

A.3.6. Nous venons de prouver A.3.2. qui prouve que le théorème II.C.4.1. est vérifié pour $\kappa = 6(A)$. Les calculs étant posés, nous allons prouver que le théorème II.C.4.4. est vérifié pour $\kappa(x) = 6(A)$ et $e(x) = 2$.

En effet, par A.3.5.2., si on a une suite infinie d'éclatements $\pi(i) : X(n+i+1) \longrightarrow X(n+i)$, $i \geq 0$, centrés en $x(i) \in X(n+i)$ points

(ν,κ)-proches de $x(0) = x$ avec $e(x) = 2$ et $\kappa(x) = 6(A)$, alors, avec les notations de A.3.1., $x(i)$ a pour paramètres

(9) $\quad u(i) = (u_1u_3^{-i},\ u_2u_3^{-i}, u_3).$

C'est-à-dire que les $x(i)$ sont sur le transformé strict $C(i) \subset X(n+i)$ de $C(0) = V(u_1,u_2) \subset X(n)$. Par II.B.9.1., on a $\alpha(C(i)) = \nu$, $i \geqslant 0$ et comme $C(i)$ est combinatoire (I.A.5.(6)), on a

(10) $\quad \alpha(C(i)) = \nu(C(i)) = \nu$, $i \geqslant 0.$

De plus par A.3.5.2.,

(11) $\quad e(x(i)) = 2.$

Par I.D.4., $C(i)$ est permise en $x(i)$, $i \geqslant 0$. Alors, je dis que

(12) $\quad v(x(n+i)) = 1,\ i \geqslant 0.$

En effet, si $v(x(n+i)) \geqslant 2$ alors, par A.3.2.(i), on a

(13) $\quad VDir(x(n+i)) = \langle U_1(i), U_2(i)\rangle.$

Par I.E.2.3.(6), l'éclatement centré en $C(i)$ n'engendre pas de point ν-proche de $x(i)$ et donc $C(i) = Sing_\nu(X(n+i))$ et $\kappa(x(i)) = 1$, ce qui est une contradiction. Par (11), (12) et A.3.2 (i), quitte à multiplier u_1 par un inversible, on a

(14) $\quad VDir(x(i)) = \langle U_1(i)+U_2(i)\rangle.$

D'où

(15) $\quad J(X(n+i), f, E(n+i), \{x(i)\}) = (u_1(i)+u_2(i))^\nu \bmod. \mathfrak{m}_{x(i)}^{\nu+1}.$

Alors, par I.E.1., on a

(16) $\quad J(X(n+i+1),f,E(n+i+1)) = (u_1(i+1)+u_2(i+1))^{\nu} \bmod.(u_3(i+1))$.

Or $m(x(i+1)) = 3$, $i \geqslant 0$. D'où

(17) $$\begin{cases} J(X(n+i+1),f,E(n+i+1)) = J(X(n+i+1),f,E(n+i+1),\{x(i+1)\}) \\ = J(X(n+i+1),f,E(n+i+1),C(i+1)) = (u_1(i+1)+u_2(i+1))^{\nu} \bmod.(u_3(i+1)) \\ = (u_1(i+1)+u_2(i+1))^{\nu} \bmod.\ u_3(i+1)(u_1(i+1),u_2(i+1))^{\nu}. \end{cases}$$

La dernière égalité étant donnée par (10). Alors, par le lemme suivant, $x(i+1)$ est bon pour $i \geqslant 0$. Ce qui prouve A.3.6. Remarquons que tous les $x(i+1)$ sont bons, c'est-à-dire que dans ce cas très particulier, la propriété d'être bon est stable.

<u>LEMME A.3.7.</u>

Soit $x \in \mathrm{Sing}(X)$ et soit (u,λ) une p-base de $O_{X,x}$ et telle que

(1) $E \supset \mathrm{div}(u_1u_2)$,

(2) $J(X,f,E) = (u_1+u_2)^{\nu} \bmod [u_j(u_1,u_2)^{\nu}]$

où $C = V(u_1,u_2)$, $\nu = \nu(x)$ et $\mathrm{div}(u_j) \subset E(n)$, $j = 1,2$ ou 3.

Alors

(i) C est permise en x,

(ii) si $\kappa(x) = 6$ alors x est bon.

Preuve.

Puisque C est combinatoire, on a $J(X,f,E) = J(X,f,E,C)$, donc, par (2), on a $\alpha(C) = \nu(C) = \nu \geqslant 1$. Par I.D.1., C est permise en x, ce qui prouve (i).

On déduit de (2) que $J(X,f,E) \not\subset (u_1,u_3)^{\nu}$ et $J(X,f,E) \not\subset (u_2,u_3)^{\nu}$.

Donc C est la seule composante de dimension 1 de $\mathrm{Sing}_\nu(X)$ passant par x avec $m(C) = 2$ et l'algorithme du point bon ou celui de $\kappa = 1$ nous impose d'effectuer l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X$ centré en C.

Par I.E.1., dans X' il y a au plus un point ν-proche de x, c'est le point x' de paramètres $u' = (1+u_1u_2^{-1}, u_2, u_3)$.

Prouvons (ii). On a $\nu(x') = \nu$, sinon, comme l'éclatement de C est imposé par l'algorithme de $\kappa = 1$, on aurait $\kappa(x) \leq 1$ et même $\kappa(x) = 1$ puisque x n'est pas isolé dans $\mathrm{Sing}_\nu(X)$.

Par I.E.1., on a $J(X',f,E') = J(X,f,E,C)u_2^{-\nu}$ d'où

$$(3)\qquad \begin{cases} J(X',f,E') = (u_1'^{\nu})\mathrm{mod.}(u_3') & \text{si } j=3 \\ \qquad\qquad\quad = (u_1'^{\nu})\mathrm{mod.}(u_2') & \text{si } j=1 \text{ ou } 2. \end{cases}$$

D'où

$$(4)\qquad \begin{cases} f = h(x')(\rho\, u_1'^{\nu} + u_i' g) + R(f,u',\lambda),\ i=2 \text{ ou } 3, \\ \mathrm{div}(u_i') \subset E',\ \mathrm{ord}_{x'}(\rho \ \mathrm{mod.}(u_2)) \leq 1 . \end{cases}$$

Si $\mathrm{ord}_{x'}(\rho) = 0$ alors x' est à D.Q. et donc $\kappa(x') \leq 2$, (ii) est clair. Voyons le cas où $\mathrm{ord}_{x'}(\rho) = 1$. On a

$$(5)\qquad \begin{cases} h(x')^{-1}(u_1'-1)D^{u',\lambda}_{[1]} f = u_2^{-\nu}\, h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[1]} f , \\ h(x')^{-1}\, DM^{u',\lambda}_{[2]} f = u_2^{-\nu}\, h(x)^{-1}\, (DM^{u,\lambda}_{[1]} + DM^{u,\lambda}_{[2]})(f), \\ h(x')^{-1}\, DM^{u',\lambda}_{[t]} f = u_2^{-\nu}\, h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[t]} f ,\ 3 \leq t \leq s. \end{cases}$$

Par (5), on a

$$(6)\qquad \mathrm{ord}_x\left[h(x)^{-1}\left\{(DM^{u,\lambda}_{[1]} + DM^{u,\lambda}_{[2]})(f),\ DM^{u,\lambda}_{[t]} f\right\}\right] \geq 1+\nu ,$$

sinon on aurait $h(x')^{-1}\, DM^{u',\lambda}_{[t]} f = \gamma_t\, u_1'^{\nu} \ \mathrm{mod.}(u_i)$, γ_t inversible, pour $2 \leq t \leq s$ et x' serait à D.Q.

D'autre part, par I.E.4.1., on a

$$c\ell^{\nu}\left[h(x)^{-1}\ (f-R(f,u,\lambda))\right] \in k(x)\left[U_1,U_2\right] .$$

Alors, par (6), en posant $h(x) = u_1^{A(1)}\ u_2^{A(2)}\ u_3^{A(3)}$, on a

(7) $\quad A(1)+A(2)+\nu = O(P)\ ,\ A(3) = O(p).$

De plus, par I.E.1., on a

(8) $\quad h(x') = u_2'^{A(1)+A(2)+\nu}\ u_3'^{A(3)} = M^P.$

Par (5) et (6), on a

(9) $$\begin{cases} h(x')^{-1}\ D^{u',\lambda}_{[1]}\ f = \gamma u_1'^{\nu} \bmod.(u_i')\ , \\ h(x')^{-1}\ DM^{u',\lambda}_{[t]}\ f \in (u_i')\ ,\ 2 \leq t \leq s\ . \end{cases}$$

On en déduit que dans (6), on peut prendre $\rho = \gamma u_1'$ avec γ inversible. Si $\alpha(x') = 1 + \nu$, par VI.B.1., B.7 et B.8, on a $\kappa(x') \leq 5$; si $\alpha(x') = \nu$, par VI.A ou E, on a $\kappa(x') \leq 3$. Ce qui prouve (ii) et termine la preuve de A.3.7.

A.3.8. La relation (3) de la preuve de A.3.7. donne une interprétation géométrique de la relation (2) des hypothèses.

Si $j=3$ dans (2), alors la courbe $V(u_1',u_3') \subset X'$ qui se projette sur $V(u_1+u_2,u_3) \subset X$ est dans $\mathrm{Sing}(X')$ et l'éclatement π l'a mise à croisements normaux avec E'.

Si $j=1$ ou 2 dans (2), alors $V(u_1',u_2') = \mathrm{Sing}(X') \cap \pi^{-1}(C)$, cette courbe se projette isomorphiquement sur $V(u_1,u_2) \subset X$. Observons que C était contenue dans deux composantes de $E(n)$ et que $V(u_1',u_2')$ n'est contenue que dans une seule composante de E'.

A.4. La proposition A.3.2. montre que $Y(n) = \mathrm{div}(u_1)$ a la contact maximal pour $(\nu, 6(A))$ au sens du chapitre V. Nous allons appliquer les propositions V.1, V.2 et V.3.

Soit $\pi(n+i) : X(n+i+1) \longrightarrow X(n+i)$, $i \in \mathbb{N}$ une suite infinie d'éclatements $\pi(n+i)$ centrés en $x(n+i) \in Y(n+i) \subset X(n+i)$ où $Y(n+i)$ est le transformé strict de $Y(n) = \mathrm{div}(u_1)$ et $x(n+i)$ est (ν,κ)-proche de $x(n)$ avec $\kappa(x(n)) = 6(A)$.

Alors, il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \geqslant \ell$ et pour tout $x \in Y(n+i) \subset X(n+i)$, il existe une p-base (v,μ) de $O_{X(n+i),x}$ et un d.c.n. $F(n+i)$ de $Y(n+i)$ tel que

$$Y(n+i) \cap \mathrm{div}(v_2) \subset F(n+i) \subset \mathrm{div}(v_2 v_3) \cap Y(n+i),$$
$$\mathrm{div}(v_2) \subset E(n+i),$$

et on a les conditions de V.1(4)(5) pour $F(n+i), x, f$ et (v,μ).

De plus, quitte à augmenter ℓ de 1 et à permuter v_2 et v_3, on a :

$$(1) \qquad \mathrm{div}(v_1) = Y(n+i) > \pi(n+i-1)^{-1}(x(n+i-1)) = \mathrm{div}(v_2) \subset E(n+i).$$

Par A.3.2., on a $\kappa(x(n+i)) = 6(A)$ et donc $\alpha(x(n+i)) = \nu(x(n+i))$, $i \in \mathbb{N}$. Alors, par V.3, pour tout $i \geqslant \ell+1$, on a pour un γ inversible,

$$(2) \qquad \begin{cases} J(X(n+i),f,E(n+i)) = (v_1 + \gamma v_2^{a(v,\mu)})^{\nu} \quad \mathrm{mod}.v_2 \; I_{a(v,\mu)} \\ \text{si} \quad F(n+i) = \mathrm{div}(v_2) \cap Y(n+i) \;, \end{cases}$$

où $I_{a(v,\mu)} = (v_1^a \, v_2^b \;,\; a + ba(v,\mu)^{-1} \geqslant \nu) \;,\; a(v,\mu) \in \mathbb{N}$.

Or, puisque $\kappa(x(n+i)) = 6(A)$, on a $\alpha(x) = \nu$ et donc

$$(3) \qquad \begin{cases} I(X(n+i),f,(v,\mu)) = (v_1 + \gamma v_2^{a(v,\mu)})^{\nu} \quad \mathrm{mod}.v_2 \; I_{a(v,\mu)} \\ \text{si} \quad F(n+i) = \mathrm{div}(v_2) \cap Y(n+i). \end{cases}$$

$$(4) \qquad \begin{cases} J(X(n+i),f,E(n+i)) = (v_1 + \gamma v_2^{a(v,\mu)} \; v_3^{b(v,\mu)})^{\nu} \quad \mathrm{mod}.v_3 \; I_{\delta(v,\mu)} \\ \text{si} \quad F(n+i) = \mathrm{div}(v_2 \; v_3) \cap Y(n+i), \end{cases}$$

où $I_{\delta(v,\mu)} = (v_1^a \; v_2^b \; v_3^c,\; a + ba(v,\mu)^{-1} \geqslant \nu$ et $a + c(a(v,\mu)-1)^{-1} \geqslant \nu, (a(v,\mu), b(v,\mu)) \in \mathbb{N}^2$.

Alors, puisque $\mathcal{K}(x(n+i)) = 6(A)$, on a $\alpha(x) = \nu$ et donc

$$(5)\quad \begin{cases} I(X(n+i),f,(u,\lambda)) = (v_1+\delta v_2^{a(v,\mu)} \; v_3^{b(v,\mu)})^{\nu} \bmod . v_3 \; I_{\delta(v,\mu)} \\ \text{si} \quad F(n+i) = \operatorname{div}(v_2 \; v_3) \cap Y(n+i). \end{cases}$$

LEMME A.4.1.

Soit $x \in X(n)$ avec $\mathcal{K}(x) = 6(A)$ et tel qu'il existe une p-base (v,μ) de $O_{X(n),x}$ adaptée en x et vérifiant

(1) $I(X(n),f,(v,\mu)) = (v_1+\gamma v_2^d \; v_3^e)^{\nu} \bmod . v_i \; I_{\delta(v,\mu)}$,

$\operatorname{div}(v_i) \subset E(n)$, $(d,e) \in \mathbb{N}^2$, $\nu = \nu(x)$,

$I_{\delta(v,\mu)} = (v_1^a \; v_2^b \; v_3^c$, $a+bd^{-1} \geqslant \nu$ et $a+ce^{-1} \geqslant \nu)$

(2) $\operatorname{div}(v_1 \; v_2) \subset E(n) \subset \operatorname{div}(v_1 \; v_2 \; v_3)$,

(3) $\operatorname{div}(v_1) > \operatorname{div}(v_2)$.

Alors x est bon.

A.4.2. Nous allons prouver ce lemme par récurrence sur $d+e$.

Si $d+e = 1$ alors $(d,e) = (1,0)$ ou $(0,1)$.

Si $E(n) = \operatorname{div}(v_1 \; v_2 \; v_3)$ alors $I(X(n),f,(v,\mu)) = J(X(n),f,E(n))$ et, quitte à permuter les indices 2 et 3 , A.3.7. nous donne le résultat.

Si $E(n) = \operatorname{div}(v_1 \; v_2)$ alors $(d,e) = (0,1)$, sinon x serait à D.Q. et on aurait $\mathcal{K}(x) \leq 2$; dans (1), on a $i=1$ ou 2. Alors par (1), on a

$$h(x)^{-1} \, DM_{[3]}^{v,\mu} f \in (v_1+\gamma v_2)^{\nu} + v_i \; I_{\delta(v,\mu)} \;,\; v_i = v_1 \text{ ou } v_2$$

donc $h(x)^{-1} \, D_{[3]}^{v,\mu} f \in (v_1+\gamma v_2)^{\nu} + v_i \; I_{\delta(v,\mu)}$ et donc

$J(X(n),f,E(n)) = (v_1+\gamma v_2)^{\nu} \bmod . v_i \; I_{\delta(v,\mu)}$. Alors A.3.7. donne le résultat.

Voyons le cas où $d+e \geqslant 2$. Si $d \geqslant 1$ alors $C_2 = V(v_1,v_2)$ est permise en x et combinatoire. Si $e \geqslant 1$ alors $C_3 = V(v_1,v_3)$ est permise en x et par IV.C.5.3.2., si $e > 1$ ou $E(n) = \operatorname{div}(v_1\ v_2\ v_3)$ on a $C_3 \subset \operatorname{Sing}_\nu(X(n))$. Par (1), il est clair que $\alpha[V(v_2,v_3)] < \nu$ et donc que $V(v_2,v_3)$ n'est pas permise en x.

Si $d \geqslant 1$ et $E(n) = \operatorname{div}(v_1\ v_2)$ alors l'algorithme du point bon nous impose d'effectuer l'éclatement centré en C_2.

Si $d \geqslant 1$ et $E(n) = \operatorname{div}(v_1\ v_2\ v_3)$ alors l'algorithme du point bon nous impose d'effectuer l'éclatement centré en C_i, $i=2$ ou 3 avec $(\nu(C_i), m(C_i), \alpha(C_i), \sigma(C_i))$ maximal.

Si $d = 0$, alors on a $e \geqslant 2$ puisque $e+d \geqslant 2$ et $C_3 \subset \operatorname{Sing}_\nu(X(n))$, si $E(n) = \operatorname{div}(v_1\ v_2\ v_3)$ c'est la seule courbe combinatoire permise et son éclatement est imposé. Si $E(n) = \operatorname{div}(v_1\ v_2)$, on a $C_3 = \operatorname{Sing}_\nu(X(n)) \cap \operatorname{div}(v_1)$ (cf. (1)) et comme $\operatorname{div}(v_1) > \operatorname{div}(v_2)$ et $\alpha(C_2) < \nu$ l'éclatement de C_3 est imposé.

Maintenant remarquons que, puisque $d+e \geqslant 2$, alors

$$(4) \qquad \langle V_1 \rangle = \operatorname{VDir}(x).$$

Effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ imposé par l'algorithme de $\kappa = 1$. Si π est centré en C_2, par (4), il y a au plus un point ν-proche $x' \in X'$ de x, c'est le point de paramètres $v' = (v_1\ v_2^{-1},\ v_2, v_3)$. On vérifie qu'on a $\alpha(x') \leqslant \nu(x')$ et par (1) et I.F.4.1., on a

$$(5) \qquad I(X',f,(v',\mu)) = (v_1'+\gamma v_2'^{\,d-1}\ v_3'^{\,e})^{\nu} \ \operatorname{mod}. v_i'\ I_{\delta(v',\mu)}\ .$$

Si x' est ν-proche de x, on a $\alpha(x') = \nu(x')$, on a $\kappa(x') \leq 6$ et par (5), si $\kappa(x') = 6$ on a $\kappa(x') = 6(A)$, par récurrence, x' est bon et donc x est bon.

Si $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ est centré en C_3, alors on vérifie qu'il y a au plus un point $x'' \in X'$ qui est ν-proche de x, c'est le point de paramètres $v'' = (v_1\ v_3^{-1},\ v_2, v_3)$ et on a

(6) $\quad I(X',f,(v'',\mu)) = (v''_1+\gamma v''^d_2 \; v''^{e-1}_3)^\nu \; \mathrm{mod}.v''_i \; I_{\delta(v'',\mu)}$.

On conclut par récurrence sur $d+e$.

A.4.3. Nous allons montrer que le théorème II.C.4.4. est vérifié pour $\kappa = 6(A)$. Alors nous devons étudier la suite d'éclatements $\pi(n+i)$ de A.4. et montrer que pour un $i \geqslant 0$, $x(n+i)$ est bon. Par A.4.1., nous n'avons plus qu'à regarder le cas où $F(n+i)$ est d'ordre 2 pour tout $i \geqslant \ell+1$. Par IV.C.7., quitte à augmenter ℓ, on a que

$$\begin{cases} \Delta_i = \Delta(I(X(n+i),f,(v,\mu)) \; ; \; v_3,v_2 \; ; \; v_1) \text{ n'a qu'un sommet} \\ (c(v,\mu,i),\ d(v,\mu,i)). \end{cases}$$

Par IV.C.5., Δ_i n'est pas préparé, sinon $\kappa(x(n+i)) \leq 1$. Alors, par IV.C.3.2., les coordonnées $(c(v,\mu,i),\ d(v,\mu,i))$ du sommet de Δ_i sont entières.

En niant la préparation, on a :

$I(X(n+i),f,(v,\mu)) = (v_1+\gamma v_3^{c(i)} \; v_2^{d(i)})^\nu \; \mathrm{mod}. \; I^+_{\delta(v,\mu)}$, avec

$(c(i),d(i)) = (c(v,\mu,i),d(v,\mu,i))$, $\gamma \in O^*_{X(n+i),x(n+i)}$ et

$I^+_{\delta(v,\mu)} = \mathcal{M}_{X(n+i,x(n+i)}(v_1^a \; v_2^b \; v_3^c \; ; \; a+bd(i)^{-1} \geqslant \nu$ et $a+cc(i)^{-1} \geqslant \nu)$.

Comme $F(n+i+1)$ est d'ordre 2 et est l'image inverse réduite de $F(n+i)$, $x(n+i+1)$ est un point de croisement pour (u,λ) (cf. I.F.4.1.) et donc $I(X(n+i+1),f,(v,\mu)) = t^{-\nu} I(X(n+i),f,(v,\mu))$ où t est une équation du diviseur exceptionnel de $\pi(n+i)$, (donc $t = v_2$ ou v_3). On en déduit que

$$(4) \quad \begin{cases} I(X(n+i+1),f,(v,\mu)) = (v_1+\gamma v_3^{c(i+1)} \; v_2^{d(i+1)})^\nu \; \mathrm{mod}.v_j \; I_{\delta(v,\mu)} \, , \\ j=2 \text{ ou } 3, \; I_{\delta(v,\mu)} = (v_1^a \; v_2^b \; v_3^c, \; a+bd(i+1)^{-1} \geqslant \nu \text{ et } a+cc(i+1)^{-1} \geqslant \nu). \end{cases}$$

Par A.4.1., $x(n+i)$ est bon.

B - DEUXIEME CAS DE $\kappa = 6$.

DEFINITION B.1.

Soit x un point fermé maigre de $\mathrm{Sing}(X(n))$ avec $\kappa(x)=6$, on dit que $\kappa(x) = 6(B)$ si on a

(1) $v(x) = 1$ et $e(x) = 3$ (I.E.4.).

B.2. Puisque $v(x) = 1$, par A.1., on a

(2) $\alpha(x) = \nu$.

PROPOSITION B.3.

Soit x un point fermé de $X(n)$ avec $\kappa(x) = 6(B)$, effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x, alors dans X', il n'y a pas de point (ν,κ)-proche de x.

B.4. On remarque que B.3. implique que les théorèmes II.C.4.1. et II.C.4.4. sont vérifiés pour $\kappa = 6(B)$.

B.5. Preuve de B.3.

Par définition de e (cf.I.E.4.), on peut trouver une p-base adaptée (u,λ) de $O_{X(n),x}$ telle que

(3) $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1+U_2+U_3\rangle$.

Comme $\alpha(x) = \nu$ et que $\kappa(x) > 2$, par IV.A.1., on a

(4) $E(n) = \mathrm{div}(u_1\ u_2\ u_3)$.

Par I.E.5.1., on a

$$(5)\quad \begin{cases} f = u_1^{A(1)}\ u_2^{A(2)}\ u_3^{A(3)}\ (c(u_1+u_2+u_3)^{\nu} + g) + R(f,u,\lambda), \\ c \in O^{*}_{X(n),x}\ ,\ \mathrm{ord}_x(g) \geq 1+\nu\ ,\ \nu = O(p). \end{cases}$$

Soit $x' \in X'$ un point ν-proche de x, comme u_1, u_2, u_3 jouent des rôles symétriques nous supposons que $\mathrm{div}(u_2) = \pi^{-1}(x)$ et que $u_1\ u_2^{-1}(x')$ est inversible. Posons

$$(6)\qquad v_1 = u_1\ u_2^{-1} + 1 + u_3\ u_2^{-1}\ ,\ v_2 = u_2\ .$$

On a en x' une p-base (v,μ) avec v_3 et μ_i, $4 \leq i \leq 0$, choisis comme en I.F.4. avec $\delta = \varepsilon = 1$.

Puisque $v(x) = 1$, on a $c\ell^{\nu}[J(X,f,E,\{x\})] = (U_1+U_2+U_3)^{\nu}$ et par I.E.1., on a

$$(7)\qquad J(X',f,E') = (v_1^{\nu})\mathrm{mod}.(v_2).$$

B.5.1. Voyons le cas où

$$(8)\qquad c\ell^{\nu}[h(x)^{-1}\ (DM^{u,\lambda}_{[1]}\ f + DM^{u,\lambda}_{[2]}\ f + DM^{u,\lambda}_{[3]}\ f)] \neq 0\ .$$

Alors, par I.F.4.4., pour un $D \in \mathcal{D}(X',E',\{x'\})$, on a $h(x')^{-1}\ Df = v_1^{\nu}\ \mathrm{mod}.(v_2)$ et donc par (7),

$$(9)\qquad J(X',f,E',\{x'\}) = (v_1^{\nu})\mathrm{mod}.(v_2).$$

Ce qui implique que $\kappa(x') \leq 2$ (IV.A.1). Comme $\nu = O(p)$, (8) est équivalent à

$$(10)\qquad A(1) + A(2) + A(3) \neq O(p).$$

B.5.2. Voyons le cas où

$$(11)\qquad c\ell^{\nu}[h(x)^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[i]}\ f] \neq 0 \quad \text{pour un } i,\ 4 \leq i \leq s\ .$$

Comme d'habitude, nous posons

$$(12)\quad \begin{cases} f_j = h(x)^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[j]}\ f\ ,\ 1\leq i\leq s\ , \\ \Delta = f_i\ DM^{u,\lambda}_{[1]} - f_1\ DM^{u,\lambda}_{[i]}\ . \end{cases}$$

On a $\Delta f = 0$ et par I.F.4.5., $u_2^{-\nu}\Delta$ se prolonge en une dérivation Δ' de $\mathcal{D}(X',E')$ avec

$\Delta' = \gamma_1\ D^{v,\mu}_{[1]} + u_3'\ \gamma'\ D^{v,\mu}_{[3]} + \sum_{4\leq i\leq s} \gamma_i'\ D^{v,\mu}_{[i]} \in \mathcal{D}(X',E')$, $\gamma_1 = f_i\ v_2^{-\nu}$,

$(\gamma',\gamma_i') \subset u_2^{-\nu}(f_1,f_i) \subset (v_1^{\nu}) + (u_3)$.

Par IV.B.2.2., on a $\kappa(x')\leq 2$.

Remarquons que (11) est équivalent à

$$(13)\qquad c\ell^{o}_{x}(c) \not\subset k(x)^{p}.$$

B.5.3. Voyons le cas où on n'a ni (8) ni (11) et où

$$(14)\qquad u_3\ u_2^{-1}(x') = 0.$$

Ce qui implique que x' est rationnel et, par I.F.4.2., on prend $v_3 = u_3\ u_2^{-1}$ et $\lambda = \mu$.

Si $A(3) \neq O(p)$, ce qui est équivalent à $c\ell^{\nu}\left[h(x)^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[3]}\ f\right] \neq 0$, alors, avec $u' = (u_1\ u_2^{-1}, u_2, u_3\ u_2^{-1})$, on a

$$(15)\qquad h(x')^{-1}\ DM^{u',\lambda}_{[3]}\ f = A(3)\ c\,v_1^{\nu} \bmod.(v_2).$$

Comme $DM^{u',\lambda}_{[3]} \in \mathcal{D}(X',E',\{x'\})$, on a alors $J(X',f,E',\{x'\}) = (v_1^{\nu}) \bmod.(v_2)$.

Donc, si $A(3) \neq O(p)$, on a $\kappa(x')\leq 2$.

Si $A(3) = O(p)$ et si on n'a ni (8) ni (11), alors par I.F.4.2.(8), on a

$$(16)\quad \begin{cases} h(x')^{-1}\ DM^{v,\lambda}_{[j]}\ f \in (v_2) \quad \text{pour}\quad 2\leq j\leq s\ , \\ h(x')^{-1}\ D^{v,\lambda}_{[1]}\ f = \gamma v_1^{\nu} \bmod.(v_2),\quad \gamma\ \text{inversible.} \end{cases}$$

De plus on a $h(x') = v_2^{A(1)+A(2)+A(3)+\nu} v_3^{A(3)} = M^p$, on a donc

(17) $$f = M^p(\gamma' v_1^{1+\nu} + v_2 g) + R(f,v,\mu).$$

Si $\alpha(x') = 1+\nu$, par VII.B, on a $\kappa(x') \leq 5$, si $\alpha(x') = \nu$ par VI.A. ou VI.E., on a $\kappa(x') \leq 3$.

B.5.4. Voyons le cas final où on n'a ni (8), ni (11), ni (14). On a

(18) $$\begin{cases} c\ell_x^{\nu+1}\left[h(x)^{-1}\left[u_3\, DM_{[1]}^{u,\lambda} f - u_1\, DM_{[3]}^{u,\lambda} f\right]\right] = \\ c\,\ell_x^{o}(c)(U_1+U_2+U_3)^{\nu}\ (A(1)U_3 - A(3)U_1). \end{cases}$$

Alors on pose

(19) $$D = u_3\, DM_{[1]}^{u,\lambda} - u_1\, DM_{[3]}^{u,\lambda}.$$

On a, avec les notations de (12)

(20) $$h(x)^{-1}\, Df = u_3\, f_1 - u_1\, f_3.$$

Posons

(21) $$\Delta = (u_3\, f_1 - u_1\, f_3)\, DM_{[1]}^{u,\lambda} - f_1\, D.$$

Alors $u_2^{-\nu-1}\,\Delta$ se prolonge en $\Delta' \in \mathcal{D}(X'^{\bullet},E')$ avec

(22) $$\begin{cases} \Delta' = u_2^{-\nu}\ (u_3\, u_2^{-1}\, f_1 - u_1\, u_2^{-1}\, f_3)\, D_{[1]}^{v,\mu} + \sum_{3\leq i\leq s} \gamma_i\, D_{[i]}^{v,\mu}, \\ \gamma_i \in u_2^{-\nu}\ (f_1,f_3) \subset (v_1)^{\nu} + (v_2). \end{cases}$$

C'est un corollaire de I.F.4.2. (9), I.F.4.3.1. (4) et I.F.4.3.2. (4).

Bien sûr, $\Delta f = \Delta' f = 0$. Par (18), on a

$$u_2^{-\nu}(u_3\, u_2^{-1}\, f_1 - u_1\, u_2^{-1}\, f_3) = cv_1^{\nu}\ (A(1)u_3\, u_2^{-1} - A(3)\, u_1\, u_2^{-1})(x') \bmod.(v_2).$$

Donc si $(A(1)u_3\, u_2^{-1} - A(3)u_1\, u_2^{-1})(x') \neq 0$, par IV.B.2.2., on a $\mathcal{H}(x') \leq 2$.

Voyons le cas où

$$(A(1)u_3\, u_2^{-1} - A(3)u_1\, u_2^{-1})(x') = 0. \tag{23}$$

Alors, comme on n'a pas (14), $u_3 u_2^{-1}(x') \neq 0$. Par (23), on a $A(1) \neq 0(p)$ et x' a pour paramètres $(v_1, v_2, u_3\, u_2^{-1} - A(3)A(1)^{-1} u_1 u_2^{-1})$, c'est-à-dire que x' est rationnel sur x et que (cf. I.F.4.2.)

$$v_3 = u_3\, u_2^{-1} - A(3)A(1)^{-1}\, u_1\, u_2^{-1} \quad . \tag{24}$$

Alors, puisqu'on n'a ni (8), ni (11), par I.F.4.2.(8), on a

$$\left\{\begin{array}{ll} h(x')^{-1}\, D^{v,\lambda}_{[j]} f \in (v_2) \quad , & 3 \leq j \leq s \ , \\ h(x')^{-1}\, DM^{v,\lambda}_{[2]}\, f \in (v_2) \quad , & \\ h(x')^{-1}\, D^{v,\lambda}_{[1]}\, f = \gamma v_1^{\nu} \quad \text{mod.}(v_2), & \gamma \text{ inversible .} \\ h(x') = v_2^{A(1)+A(2)+A(3)+\nu} = M^p \ . & \end{array}\right. \tag{25}$$

On a donc

$$f = M^p(\gamma'\, v_1^{1+\nu} + v_2\, y) + R(f,v,\mu) \ . \tag{26}$$

On a déjà vu (cf. (17)) qu'alors $\mathcal{H}(x') \leq 5$.

C - TROISIEME CAS DE $\mathcal{H} = 6$.

DEFINITION C.1.

Soit $x \in X(n)$ avec $\mathcal{H}(x) = 6$, on dit que $\mathcal{H}(x) = 6(C)$ si on a les conditions suivantes

(1) $e(x) = 2$,

(2) $e[J(X,f,E)] = 3$ (cf. I.E.4.).

PROPOSITION C.2.

Soit $x \in X(n)$ avec $\kappa(x) = 6(C)$, alors

(i) $\alpha(x) = \nu(x)$; entier que l'on note ν ,

(ii) si on effectue l'éclatement π centré en x, $\pi : X' \longrightarrow X$, il n'y a pas de point (ν,κ)-proche de x.

C.2.1. On remarque que C.2. implique que les théorèmes II.C.4.1. et II.C.4.4. sont vérifiés pour $\kappa = 6(C)$.

C.2.2. Prouvons C.2.(i). Par C.1., on a $e(x) \neq e(J(X,f,E))$, donc, par définition de $e(x)$, on a $\alpha(x) = \nu$ (cf. I.E.4.), ce qui prouve C.2.(i).

C.2.3. Prouvons C.2.(ii). Par C.2.(i) et C.1.(1), nous pouvons appliquer A.2. Prenons donc les notations de A.2.

Par C.1., $J(X,f,E) \neq J(X,f,E,\{x\})$, on a $E(n) \neq \mathrm{div}(u_1\, u_2\, u_3)$ et donc, par A.2.(i),

(1) $E(n) = \mathrm{div}(u_1\, u_2)$, $\mathrm{VDir}(x) \subset \langle U_1, U_2 \rangle$.

Ainsi, on a $J(X,f,E) = J(X,f,E,\{x\}) + h(x)^{-1}\, D^{u,\lambda}_{[3]}\, f$.

Par (1) et C.1.(ii), on a

(2) $c\ell^{\nu}(h(x)^{-1}\, D^{u,\lambda}_{[3]}\, f) = G(U_1,U_2,U_3) \notin k(x)\, [U_1,U_2]$.

Effectuons π , par A.2.(ii), il y a au plus un point (ν,κ)-proche de x, c'est le point $x' \in X'$ de paramètres $u' = (u_1\, u_3^{-1},\ u_2\, u_3^{-1},\ u_3)$. Par (1), on a $e(x') = 3$ et donc

(3) $J(X',f,E') = J(X',f,E',\{x'\})$.

D'autre part $\nu(x') = \nu$, sinon $\kappa(x) = 0$.

Par I.F.4.1., on a

$$(4) \begin{cases} u_3^{-\nu+1}\, h(x)^{-1}\, D^{u,\lambda}_{[3]} f = h(x')^{-1}\left[DM^{u',\lambda}_{[3]} - DM^{u',\lambda}_{[1]} - DM^{u',\lambda}_{[2]}\right](f). \\ \qquad = u'_3\, G(u'_1,u'_2,1) \bmod.(u'^2_3)\ . \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} u_3^{-\nu} h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[i]} f = h(x')^{-1}\, DM^{u',\lambda}_{[i]} f,\ 1 \le i \le s, \quad i \neq 3\ , \\ \qquad = F_i(u'_1,u'_2) \bmod.(u'_3)\ . \end{cases}$$

Si $v(x) = 2$ alors par (1), $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1,U_2\rangle$ et par (4) et (5), on a $\mathrm{VDir}(x') = \langle U'_1,U'_2,U'_3\rangle$ et donc $\kappa(x') = 0$ et donc $\kappa(x) = 0$ car x' est alors le seul point ν-proche de x. C'est une contradiction.

Donc $v(x) = 1$, on a $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1+U_2\rangle$ et donc

$$(6) \quad F_i(u'_1,u'_2) = \gamma_i(u'_1+u'_2)^{\nu}\ ,\ 1 \le i \le s,\ i \neq 3,\ \gamma_i \in k(x).$$

Si on pose $h(x) = u_1^{A(1)}\, u_2^{A(2)}$, on a

$$(7) \qquad h(x') = u'^{A(1)}_1\, u'^{A(2)}_2\, u'^{A(1)+A(2)+\nu}_3\ .$$

Par (4)

$$(8) \begin{cases} c\ell^{\nu}\left[h(x')^{-1}\left[f-R(f,u',\lambda)\right]\right] = \Phi(U'_1,U'_2) + U'_3\,\Psi(U'_1,U'_2) + U'^2_3\,\Theta(U'_1,U'_2) \\ \text{avec} \quad \Psi \neq 0\ ,\ \Phi \neq 0\ ,\quad \Phi\,(U_1,U_2) = c\ell^{\nu}\left[h(x)^{-1}(f-R(f,u,\lambda))\right]. \end{cases}$$

On en déduit que si $A(1)+A(2)+\nu = 0(p)$, alors on a $\kappa(x') \le 3$. (cf. VI.A en permutant les indices 1 et 3). Supposons désormais que

$$(9) \qquad A(1) + A(2) + \nu \neq 0(p).$$

Par (4), (5), (6), on a $\mathrm{VDir}(x') \supset \langle U'_1+U'_2\ ,\ U'_3\rangle$. Si $v(x') = 3$, on a $\kappa(x') = 0$, C.2.(ii) est clair. Il n'y a plus qu'à étudier le cas où

(10) $\qquad \mathrm{VDir}(x') = \langle U'_1+U'_2 \ , \ U'_3 \rangle$.

Alors en appliquant I.E.5.1. à x , par (9), on a

(11) $\qquad \nu = O(p), \quad \phi(U_1,U_2) = C(U_1+U_2)^{\nu}$.

Alors par (10),

$$c\ell^{\nu}\left[h(x')^{-1}(DM^{u',\lambda}_{[i]}\ (h(x')u'_3\,\Psi(u'_1,u'_2)),\ 1 \le i \le s)\right] = (\,U'_3(U'_1+U'_2)^{\nu-1}).$$

D'où, en appliquant I.E.5.1. à

$$U_1'^{A(1)}\ U_2'^{A(2)}\ U_3'^{A(1)+A(2)+\nu+1}\ \Psi(U'_1,U'_2)\ ,$$

on a

(12) $$\begin{cases} A(1)+A(2)+\nu-1 = O(p)\ , \\ A(1)+A(2)+\nu+1 = O(p)\ , \end{cases}$$

Or, par I.E.5.2., $p \neq 2$. Donc (10) est impossible, on a $v(x') = 3$ et $\kappa(x') = 0$. Ce qui termine la preuve de C.2.(ii).

D - QUATRIEME CAS DE $\kappa = 6$.

DEFINITION D.1.

Soit $x \in X(n)$ avec $\kappa(x) = 6$. On dit que $\kappa(x) = 6(D)$ si on a les conditions

(1) $\quad e(x) = 3,\ v(x) = 2,$

(2) un élément de $\mathrm{VDir}(x)$ est transverse à $E(n)$.

PROPOSITION D.2.

Soit $x \in X(n)$ avec $\kappa(x) = 6(D)$ alors, on a

(1) $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$.

Pour une p-base adaptée (u,λ) de $O_{X(n),x}$; on a

(2) $E(n) = \mathrm{div}(u_2\ u_3)$,

(3) $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1, U_2+U_3\rangle$.

(4) De plus, si on effectue l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X$ centré en x, et si un point $x' \in X'$ est (ν,κ)-proche de x, alors $\kappa(x') = 6(A)$.

D.3. Il est clair que D.2. et A prouvent les théorèmes II.C.4.1. et II.C.4.4. pour $\kappa = 6(D)$.

D.4. Prouvons D.2 (1)(2)(3). Comme $\kappa(x) > 2$, x n'est pas à D.Q. et donc par IV.A.1., $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$. Ce qui prouve D.2. (1). Par D.1. (2), on peut choisir une p-base adaptée (u,λ) de $O_{X(n),x}$ avec $U_1 \in \mathrm{VDir}(x)$ et $\mathrm{div}(u_1) \not\subset E(n)$. Alors, puisque $e(x) = 3$, on a $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1, \alpha U_2 + \beta U_3\rangle$, α, $\beta \in k(x)^*$.
En multipliant u_2 et u_3 par des inversibles, on a $(\alpha = \beta = 1)$, de plus, puisque $e(x) = 3$, on a $\mathrm{div}(u_2\ u_3) \subset E(n)$ et donc $\mathrm{div}(u_2\ u_3) = E(n)$.

D.5. Prouvons D.2.(4). Effectuons π. Il y a au plus un point ν-proche de x, c'est le point x' de paramètres $v = (u_1.u_3^{-1},\ 1+u_2.u_3^{-1}, u_3)$.
Puisque $\kappa(x) \neq 0$, on a $\nu(x') = \nu(x)$ que l'on note ν. On a $v(x') \leq 2$, sinon $\kappa(x') = 0$ et donc $\kappa(x) = 0$. Par I.E.1. et puisque $\alpha(x) = 1 + \nu$, on a

(1) $J(X',f,E') \subset J(X(n),f,E(n))\ u_3^{-\nu}$.

D'où

(2) $\mathrm{VDir}\ J(X',f,E') \subset \langle V_1,V_2\rangle \bmod.(V_3)$.

Si $\alpha(x') = 1 + \nu$, alors, par définition, $\mathrm{VDir}(x') = \mathrm{VDir}\ J(X',f,E')$, donc $\mathrm{VDir}(x')$ est transverse à E' et

$v(x') = 2$, par VI.C.1., on a $\kappa(x') \leq 3$.

Si $\alpha(x') = \nu$, soit $\mathrm{VDir}(x') = \langle V_3 \rangle$ auquel cas on a $\kappa(x) \leq 5$ ou $\kappa(x) = 6(A)$, sinon comme $E' = \mathrm{div}(v_3)$, x' est à D.Q. (IV.A.1) et $\kappa(x') \leq 2$. On a fini la preuve de D.2.

E - CINQUIEME CAS DE $\kappa = 6$.

DEFINITION E.1.

Soit $x \in X(n)$ avec $\kappa(x) = 6$, on dit que $\kappa(x) = 6(E)$ si on a les conditions suivantes

(1) $v(x) = 2$,

(2) $e(x) = 2$,

(3) un élément de $\mathrm{VDir}(x)$ est transverse à E.

PROPOSITION E.2.

Soit $x \in X(n)$ avec $\kappa(x) = 6(E)$, alors

(i) $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$,

(ii) on peut trouver une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$, adaptée en x et telle que

$$\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1, U_2 \rangle , \quad \mathrm{div}(u_1) \not\subset E(n), \quad \mathrm{div}(u_2) \subset E(n) ,$$

(iii) effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x, alors il y a un et un seul point ν-proche de x, c'est le point x' de paramètres $u' = (u_1 u_3^{-1}, u_2 u_3^{-1}, u_3)$,

(iv) si $\alpha(x') = \nu(x')$ et $\kappa(x') > 5$, alors $\kappa(x') = 6(A)$ ou (C),

(v) si $\alpha(x') = 1 + \nu(x')$ et $\kappa(x') > 5$, alors $\kappa(x') = 6(D)$ ou (E).

(vi) si $\kappa(x') = 6(E)$, pour un $c \in O_{X',x'}$, en posant $v = (u_1'+cu_3', u_2', u_3')$, on a les conditions de (ii) pour x' et (v', λ).

E.3. On remarque que E.2. prouve que le théorème II.C.4.1. est vérifié pour $\kappa(x) = 6(E)$.

E.4. Prouvons E.2. (i)(ii). Puisque $e(x) = v(x) = 2$, on peut trouver une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ adaptée en x avec $VDir(x) = \langle U_1, U_2\rangle$. On peut prendre $div(u_1) \not\subset E(n)$ par E.1.(3). Alors $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$, sinon x est à D.Q. et $\kappa(x) \leq 2$ (IV.A.1). On a $div(u_2) \subset E(n)$, sinon on a $\kappa(x) \leq 3$ (VI.C.1).

E.5. Prouvons E.2. (iii)(iv)(v)(vi). Effectuons π. Puisque $VDir(x) = \langle U_1, U_2\rangle$, il y a au plus un point ν-proche de x, c'est le point x' de paramètres u'. On a $\nu(x') = \nu$, sinon $\kappa(x) = 0$. D'où (iii).

Puisque $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$, par I.E.1., on a

$$(1) \qquad J(X',f,E') \subset J(X(n),f,E(n))\ u_3^{-\nu(x)}\ .$$

On en déduit que

$$(2) \qquad VDir[J(X',f,E')] = \langle U_1, U_2\rangle \ \mathrm{mod.}(U_3')\ .$$

De plus (ii) nous donne que

$$(3) \qquad E' = div(u_2'\ u_3')\ .$$

On remarque que l'on a

$$(4) \qquad v(x') \leq 2.$$

Sinon on a $v(x') = 3$ et donc $\kappa(x') = 0$ et donc $\kappa(x) = 0$.

E.5.1. Prouvons (iv). Si $\alpha(x') = \nu(x')$ et $\kappa(x') > 5$, alors, par définition, $\kappa(x') = 6$. Comme $\kappa(x') > 5$, x' n'est pas à D.Q., par IV.A.1. et (3), on a

(5) $\quad VDir(x') \subset \langle U_2', U_3' \rangle$.

Si $e(x') = 2$, par (2) et (5), on a $e(J(X',f,E')) = 3$ et donc $\kappa(x') = 6(D)$.

Si $e(x') = 1$ alors on a $\kappa(x') = 6(A)$.

E.5.2. Prouvons (v) . Si $\alpha(x') = 1 + \nu(x')$, par définition, on a $v(x') = v(J(X',f,E'))$ et donc par (2), on a

(6) $\quad VDir(x') = \langle U_1', U_2' \rangle \ mod.(U_3')$.

Si $e(x') = 3$, alors par D.1., on a $\kappa(x') = 6(D)$.

Si $e(x') = 2$, il est clair qu'on a $\kappa(x') = 6(E)$. Maintenant, (vi) est clair.

PROPOSITION E.6.

Le théorème II.C.4.4. est vérifié pour $\kappa(x) = 6(E)$.

Preuve.

Soit une suite infinie d'éclatements $\pi(n+i) : X(n+i+1) \longrightarrow X(n+i)$, $i \in \mathbb{N}$, centrés en $x(n+i)$ point (ν,κ)-proche de $x(n) = x$. Nous allons montrer que pour un $i \in \mathbb{N}$, $x(n+i)$ est bon. Par A, B, C, D il suffit de regarder le cas où $\kappa(x(n+i)) = 6(E)$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Ce cas est impossible. En effet, par E.2. (vi), on aurait $\alpha(x(n+i)) = 1 + \nu(x)$, $x(n+i)$ rationnel sur x et $x(n+i)$ n'est pas sur le transformé strict de $\pi(n+i-2)^{-1}(x(n+i-2))$, pour $i \geq 2$. Alors les $x(n+i)$ seraient sur le transformé strict $C(i)$ d'une courbe $C \subset X(n)$ (IV.B.4.1.) et $\alpha(C) = 1 + \nu(x)$, d'où $\nu(C) = \nu(x)$, et, pour i assez grand, $C(i)$ est permise en $x(n+i)$ (II.B.9.1.).

Alors comme $\alpha(C(i)) = 1 + \nu(x(n+i))$, que $v(x(n+i)) = 2$, par I.E.2.(4), on a que l'éclatement $\pi' : X'' \longrightarrow X(n+i)$ centré en $C(i)$ n'engendre pas de point ν-proche de $x(n+i)$. D'où $C(i) = Sing_{\nu}(X(n+i))$ et $\kappa(x(n+i)) = 1$, ce qui est une contradiction.

F- SIXIEME CAS DE $\kappa = 6$.

DEFINITION F.1.

Soit $x \in X(n)$ avec $\kappa(x) = 6$, on dit que $\kappa(x) = 6(F)$ si on a les conditions suivantes

(1) $\alpha(x) = \nu(x)$,

(2) $v(x) = 2$,

(3) $e(x) = 3$.

PROPOSITION F.2.

Soit $x \in X(n)$ avec $\kappa(x) = 6(F)$ alors, on peut trouver une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$, adaptée en x et telle que

(i) $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1+U_2, U_3\rangle$.

(ii) Si on effectue l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$, il y a un et un seul point ν-proche x' de x et si $\kappa(x') > 5$, on a $\kappa(x') = 6(A)$ ou (B) ou (C) ou (D) ou (E).

F.3. On remarque que F.2. et les § précédents prouvent que les théorèmes II.C.4.1. et II.C.4.4. sont vérifiés pour $\kappa(x) = 6(F)$.

F.4. Prouvons F.2. L'hypothèse $v(x) = 2$ et $e(x) = 3$ implique qu'on peut trouver une p-base adaptée (u,λ) avec

$$\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1+U_2 \ , \ U_2+U_3\rangle \quad \text{ou} \quad \langle U_1+U_2 \ , \ U_3\rangle \ .$$

Mais, par VI.D., le premier cas implique $\kappa(x) \leq 3$. Donc on a

$$(1) \qquad \mathrm{VDir}(x) = \langle U_1+U_2 \ , \ U_3\rangle \ .$$

Effectuons π . Il y a au moins un point $x' \in X'$ qui est ν-proche de x, sinon $\kappa(x) = 0$. Par (1), x' est le point de paramètres $v = (1+u_1 u_2^{-1}, u_2, u_3 u_2^{-1})$. On a $J(X',f,E') = J(X(n),f,E(n),\{x\})u_2^{-\nu}$.

D'où

(2) $\quad VDir(J(X',f,E')) = \langle V_1,V_3\rangle \bmod.(V_2)$.

On a $v(x')\leq 2$, sinon $\kappa(x') = 0$ et donc $\kappa(x) = 0$. D'autre part, puisque $\kappa(x) > 2$, x n'est pas à D.Q. et par (1), on a

(3) $\quad E(n) = div(u_1\, u_2\, u_3)$, $E' = div(v_2\, v_3)$.

F.4.1. Voyons le cas où $\alpha(x') = 1 + \nu(x')$. Alors, par définition, on a $VDir(x') = VDir(J(X',f,E'))$, et par (2) et (3), on a

(4) $\quad v(x') = 2$ et un élément de $VDir(x')$ est transverse à E'.

Donc, si $\kappa(x') > 5$, on a $\kappa(x') = 6$(D) ou (E).

F.4.2. Voyons le cas où $\alpha(x') = \nu(x')$, $\kappa(x') > 5$.
Si $e(x) = 1$ alors $\kappa(x') = 6$(A).
Si $e(x') = 2$, comme x' n'est pas à D.Q., on a $VDir(x') \subset \langle V_2,V_3\rangle$ et par (2), on a $e(J(X',f,E')) = 3$, d'où $\kappa(x') = 6$(C). On ne peut avoir $e(x') = 3$, sinon par (3), x' serait à D.Q.

G - SEPTIEME CAS DE $\kappa = 6$.

DEFINITION G.1.

Soit $x \in X(n)$ avec $\kappa(x) = 6$. On dit que $\kappa(x) = 6$(G) si on a les conditions suivantes

(1) $\quad \alpha(x) = \nu(x)$,

(2) $\quad e(x) = 2$.

PROPOSITION G.2.

Les théorèmes II.C.4.1. et II.C.4.4. sont vérifiés pour $\kappa(x) = 6$(G).

G.3. Nous allons d'abord prouver la proposition suivante.

PROPOSITION G.4.

Soit $x \in X(n)$ avec $\kappa(x) = 6(G)$. Alors, on peut trouver une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$, adaptée en x et telle que

(i) $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1, U_2 \rangle$ ou $\langle U_1+U_2 \rangle$.

(ii) $E(n) \supset \mathrm{div}(u_1\, u_2)$.

(iii) Si on effectue l'éclatement π centré en x, il y a au plus un point $x' \in X'$ qui est ν-proche de x avec $\kappa(x) > 5$, c'est le point de paramètres $u' = (u_1\, u_3^{-1},\, u_2\, u_3^{-1},\, u_3)$ et $\kappa(x') = 6$,

(iv) si $\alpha[V(u_1,u_2)] = \nu$ alors $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1+U_2 \rangle$; si de plus $(\nu,\kappa)(x') = (\nu(x),6)$, x' est bon.

Preuve de G.4.

Puisque $e(x) = 2$, on a (i). On a (ii), sinon x est à D.Q. et $\kappa(x) \leq 2$. Par A.2., on a (iii).

Prouvons (iv). La courbe $C = V(u_1,u_2)$ est combinatoire. Donc $\alpha(C) = \nu(C)$. Si $\alpha(C) = \nu(x)$, C est permise. Si $v(x) = 2$, l'éclatement centré en C n'engendre pas de point ν-proche de x, donc $C = \mathrm{Sing}_{\nu(x)}(X(n))$ et $\kappa(x) = 1$, c'est une contradiction. Donc $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1+U_2 \rangle$. Donc

(1) $\qquad J(X,f,E,\{x\}) = (U_1+U_2)^{\nu} \bmod. (\mathfrak{m}_x (U_1,U_2)^{\nu})$.

Par I.E.1., on a

(2) $\qquad J(X',f,E') = (u_1'+u_2')^{\nu} \bmod.\ u_3' \,(u_1,u_2)^{\nu}$.

Or par (ii), on a $E' = \mathrm{div}(u_1'\, u_2'\, u_3')$. Donc

(3) $\qquad J(X',f,E',V(u_1',u_2')) = J(X',f,E')$.

Alors, par (2) (3) et A.3.7., x' est bon. Ce qui termine la preuve de G.4.

G.5. Prouvons G.2. Bien sûr, nous supposons $\kappa(x') = 6$. On a $\alpha(x') = \nu(x')$ (cf. A.2). Si $e(x') = 3$ on a $\kappa(x') = 6$(B) ou (F) et G.2. est clair. Si $e(x') = 2$ alors on a $\kappa(x') = 6$(G) et on a les conditions G.4.(i)(ii) pour x' et (u',λ). Une récurrence sur $t(V(u_1,u_2))$ donne le résultat.

H - DERNIER CAS DE $\kappa = 6$.

H.1. Comme on a vu en A.1.1, il ne reste plus qu'à étudier le cas où $\kappa(x) = 6$ et

(1) $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$

(2) $v(x) = 2$

(3) il n'y a pas d'élément de $\mathrm{VDir}(x)$ transverse à $E(n)$.

Alors on a

(4) $e(x) = 2$.

En effet, puisque $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$, on a $E(n) \neq \mathrm{div}(u_1\ u_2\ u_3)$ et $e(x) = 3$ contredirait (3).

Alors pour une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ adaptée à x, on a

(5) $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1,U_2\rangle$, $E(n) = \mathrm{div}(u_1\ u_2)$.

Si on effectue l'éclatement $\pi: X' \longrightarrow X(n)$ centré en x, il y a un et un seul point ν-proche, c'est le point x' de paramètres $u' = (u_1\ u_3^{-1},\ u_2\ u_3^{-1},\ u_3)$. On a $E' = \mathrm{div}(u_1'\ u_2'\ u_3')$, donc $\alpha(x') = \nu(x')$ et si $\kappa(x') > 5$, $\kappa(x') = 6$(A)(B)(F) ou (G). On a donc II.C.4.1. et II.C.4.4. pour $\kappa(x) = 6$(H) et donc pour $\kappa(x) = 6$.

IX FIN, $\kappa = 7$.

A - $\kappa(x) = 7(A)$ ou (B)

DEFINITION A.

Soit x un point fermé maigre de $\mathrm{Sing}(X(n))$, on dit que $\kappa(x) = 7$ si $\kappa(x) > 6$.

A.1. D'après le chapitre précédent, si $\kappa(x) = 7$, on a

(1) $\alpha(x) = 1 + \nu(x) \geq 2$, $v(x) = 1$.

Deux cas distincts apparaissent

(2-1) $\mathrm{VDir}(x)$ est transverse à E ,

(2-2) $\mathrm{VDir}(x)$ n'est pas transverse à E.

On rappelle que, par définition, quand $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$, on a

(3) $\mathrm{VDir}(x) = \mathrm{VDir}[J(X,f,E)]$.

A.2. Regardons le cas (2-1). Alors, on peut choisir une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ adaptée en x et telle que

(1) $\langle U_1 \rangle = \mathrm{VDir}(x)$ et $E(n) \subset \mathrm{div}(u_2\, u_3)$.

Alors, par A.1.(3), on a

(2) $$\begin{cases} \forall D \in \mathcal{D}(X,E),\ c\ell^{\nu}[h(x)^{-1}\, Df] = cU_1^{\nu} , \\ \exists D \in \mathcal{D}(X,E),\ c\ell^{\nu}[h(x)^{-1}\, Df] \neq 0 \ , \text{ où } \nu = \nu(x) . \end{cases}$$

DEFINITION A.2.1.

Soit $x \in X(n)$ avec $\kappa(x) = 7$, on dit que $\kappa(x) = 7(A)$ si $\mathrm{VDir}(x)$ est transverse à E et si pour une dérivée $D \in \mathcal{D}(X,E)$, on a

(1) $c\ell^{\nu}[h(x)^{-1}\, Df] \neq 0$.

(2) $\forall v \in \mathfrak{M}_{X(n),x}$ avec $c\ell^1(v) \in VDir(x)$, on a $Dv \in \mathfrak{M}_{X(n),x}$.

A.2.2. Si $\kappa(x) = 7(A)$, soit une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ satisfaisant à A.2.1., alors quitte à permuter u_2 et u_3 on peut prendre $D = D_{[2]}^{u,\lambda}$ et alors $E(n) \subset div(u_3)$. On a

$$f = u_3^{A(3)}(\varepsilon u_1^{\nu} + \sum_{1\le i\le \nu} u_1^{\nu-i} g_i + \mathfrak{M}_{X(n),x}^{\nu+2}) + R(f,u,\lambda) ,$$

$ord_x(g_i) = i+1$ ou $g_i = 0$, $D_{[2]}^{u,\lambda}\varepsilon \in O_{X(n),x}^{*}$, $D_{[2]}^{u,\lambda} g_i = 0$.
On prend $u_2 = \varepsilon$ et alors

(3) $$c\ell^{1+\nu}[h(x)^{-1}(f-R(f,u,\lambda))] = U_2 U_1^{\nu} + \sum_{1\le i\le \nu} U_1^{\nu-i} G_i(U_2,U_3) .$$

Puisque $E(n) \subset div(u_3)$, A.2.(1) nous donne

(4) $$\begin{cases} \nu = O(p),\ G_i = 0 \ \text{si} \ i \neq O(p) , \\ G_i = U_3 K_i(U_2,U_3) ,\ K_i \in k(x)[U_2^p,U_3^p] . \end{cases}$$

PROPOSITION A.2.3.

Soit $x \in X(n)$ avec $\kappa(x) = 7(A)$. Si on effectue l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x, alors en tout point ν-proche de x, on a $\kappa(x) \le 3$.

A.2.3.1. On remarque que A.2.3. prouve que les théorèmes II.C.4.1. et II.C.4.4. sont vérifiés pour $\kappa(x) = 7(A)$.

A.2.3.2. Prouvons A.2.3.

Soit $x' \in X'$ un point ν-proche de x. Si x' est le point de paramètres $u' = (u_1 u_2^{-1}, u_2, u_3 u_2^{-1})$, on constate que $\alpha(x') = \nu(x')$ et que $I(X',f,(u',\lambda)) = (u_1'^{\nu}) \text{mod.} (u_2',u_3')$, donc x' est à D.Q. (IV.A.1) et donc $\kappa(x') \le 2$.

Voyons le cas où en x', on a $\pi^{-1}(x) = div(u_3)$. Posons $v = (u_1 u_3^{-1}, u_2 u_3^{-1}, u_3)$. Voyons d'abord le cas où pour un i, $1 \le i \le \nu$, on a $G_i \neq 0$. Alors, pour un j, $3 \leq j \leq s$, on a

$$(1)\quad \begin{cases} c\ell^{\nu+1}[h(x)^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[j]}\ f] = \gamma_j\ U_1^{\nu}\ U_2 + \sum\limits_{1\leq i\leq \nu} U_1^{\nu-i}\ U_3\ K_{i,j}(U_2,U_3)\ , \\ \gamma_j \in k(x) \quad \text{et un} \quad K_{i,j} \neq 0. \end{cases}$$

Par I.E.1., on a

$$(2)\quad \begin{cases} \gamma_j\ v_1^{\nu}\ v_2 + \sum\limits_{1\leq i\leq \nu} v_i^{\nu-i}\ K_{i,j}(v_2,1) \in J(X',f,E')\mathrm{mod.}(v_3)\ , \\ v_3^{-\nu}\ h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[2]}\ f = v_1^{\nu}\ \mathrm{mod.}(v_3) \in J(X',f,E')\mathrm{mod.}(v_3)\ . \end{cases}$$

On en déduit que dans $\mathrm{VDir}(J(X',f,E')\mathrm{mod.}(v_3))$, il y a au moins deux éléments indépendants transverses à $E' = \mathrm{div}(v_3)$ et donc par VI.B.C.D., on a $\kappa(x') \leq 3$. Voyons le cas où les G_i sont tous nuls. Alors, par I.E.1., on a

$$(3)\qquad J(X',f,E') = (v_1^{\nu})\mathrm{mod.}(v_3).$$

Notons

$$(4)\quad \begin{cases} f_i = h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[i]}\ f \quad , \quad i=1 \text{ ou } 2\ , \\ \Delta = f_2\ D^{u,\lambda}_{[1]} - f_1\ D^{u,\lambda}_{[2]} \quad . \end{cases}$$

Alors on a $\Delta f = 0$. De plus, $v_3^{-\nu}\Delta$ se prolonge en une dérivée $\Delta' \in \mathcal{D}(X',E')$ avec

$$(5)\quad \Delta' = u_3^{-\nu}\ f_2\ D^{u,\lambda}_{[1]} - D'\ ,\ D' \in ((v_1^{\nu}) + (v_3))\mathcal{D}(X',E')$$

(cf. I.F.4.5. en permutant les indices 2 et 3 car ici $\mathrm{div}(u_3) = \pi^{-1}(x)$).

Alors, par IV.B.2.2., on a $\kappa(x') \leq 2$. Ce qui prouve A.2.3.

<u>DEFINITION A.2.4.</u>

Soit $x \in X(n)$ avec $\kappa(x) = 7$, on dit que $\kappa(x) = 7(B)$ si $\mathrm{VDir}(x)$ est transverse à E et si on n'a pas $\kappa(x) = 7(A)$.

A.2.5. Si $\kappa(x) = 7(B)$, pour toute p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ adaptée en x et satisfaisant à A.2.(1), on a

$$f = u_2^{A(2)} u_3^{A(3)} (\gamma u_1^{1+\nu} + \sum_{1\leq i\leq \nu+1} u_1^{1+\nu-i} g_i + \mathcal{M}_{X(n),x}^{\nu+2}) + R(f,u,\lambda) ,$$

avec γ inversible, $\mathrm{ord}_x(g_i) = i$ ou $g_i = 0$, $g_i = 0$ si $1+\nu-i \neq 0$, $\nu = \nu(x)$, $1+\nu \neq 0(p)$.

Posons alors

$$(1) \qquad c\ell^{1+\nu}[h(x)^{-1}(f-R(f,u,\lambda))] = \rho U_1^{1+\nu} + \sum_{1\leq i\leq \nu+1} U_1^{1+\nu-i} F_i(U_2,U_3) ,$$

$$F_i = 0 \text{ si } 1+\nu-i \neq 0(p), \ \rho\in k(x)^* .$$

A.2.5.1. Soit $x\in X(n)$ avec $\kappa(x) = 7(B)$. Si on effectue l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x, en tout point x' (ν,κ)-proche de x, on a $\kappa(x) = 7(A)$ ou B. En effet, on a $J(X',f,E') \subset \mathcal{M}_{X(n),x}^{-\nu} J(X,f,E)$, donc $\mathrm{VDir}(J(X,f,E'))$ a un élément transverse à E', ce qui implique que $\kappa(x') = 7(A)$ ou (B) si on a $\kappa(x') = 7$.

PROPOSITION A.2.6.

Soit $x\in X(n)$ avec $\kappa(x) = 7(B)$ et soit (u,λ) une p-base de $O_{X(n),x}$ avec $\langle U_1\rangle = \mathrm{VDir}(x)$. Alors

$$(i) \quad \begin{cases} U_1\in \mathrm{VDir}\,[I(X(n),f,(u,\lambda))] , \\ 1+\nu \neq 0(p), \text{ où } \nu = \nu(x). \end{cases}$$

Effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x.

Alors

(ii) si $\mathrm{VDir}[I(X(n),f,(u,\lambda))] = \langle U_1\rangle$, en tout point $y\in X'$ avec $(\nu,\kappa)(y) = (\nu,7)$, on a $\kappa(y) = 7(B)$ et il existe une p-base adpatée (v,μ) de $O_{X',y}$ avec

$$\begin{cases} I(X',f,(v,\mu)) = (v_1^{1+\nu})\mathrm{mod.}(v_3) , \\ \mathrm{div}(v_3) = \pi^{-1}(x)\subset E' = \mathrm{div}(v_2\, v_3) , \\ v_1 = u_1\, u_3^{-1} \mathrm{mod.}(v_3), \langle V_1\rangle = \mathrm{VDir}(y), v_3 = u_3 , \end{cases}$$

(iii) si $\mathrm{VDir}[I(X(n),f,(u,\lambda))] = \langle U_1, U_3\rangle$ alors il y a au plus un point $y \in X'$ avec $(\nu,\kappa)(y) = (\nu,7)$ et $\kappa(y) = 7(B)$ c'est le point de paramètres $u' = (u_1\, u_2^{-1},\ u_2,\ u_3\, u_2^{-1})$.

(iv) si $\mathrm{VDir}[I(X(n),f,(u,\lambda))] = \langle U_1, U_2, U_3\rangle$, dans X' en tout point x' (ν,κ)-proche de x, on a $\kappa(x') = 7(A)$.

REMARQUE A.2.6.1.

Le cas où $\mathrm{VDir}[I(X(n),f,(u,\lambda))] = \langle U_1, U_2+U_3\rangle$ sera étudié en A.2.9.2. lors de la preuve de A.2.9.

A.2.6.2. Prouvons A.2.6.(i). On a vu en A.2.5. que $1+\nu \neq 0(p)$. De plus, puisque $\langle U_1\rangle = \mathrm{VDir}(x)$,

$$(1)\qquad c\ell_x^{1+\nu}\left[h(x)^{-1}\, DM_{[1]}^{u,\lambda} f\right] = (1+\nu)\; c\ell_x^{o}(\gamma)\; U_1^{1+\nu}\quad ,$$

ce qui prouve (i).

A.2.6.3. Effectuons π. Soit $x' \in X'$ un point ν-proche de x dans l'ouvert où $\pi^{-1}(x) = \mathrm{div}(u_3)$. Posons donc

$$(2)\qquad u' = (u_1\, u_3^{-1},\ u_2\, u_3^{-1},\ u_3)$$

On a par I.E.1.

$$(3)\quad (u_3^{-\nu} h(x)^{-1}\, D_{[1]}^{u,\lambda} f\ ,\ u_3^{-1-\nu} h(x)^{-1}\, DM_{[i]}^{u,\lambda} f\ ,\ 2 \le i \le s) \subset J(X',f,E')\ ,$$

avec égalité si $E(n) = \mathrm{div}(u_2\, u_3)$. De plus par (1), on a

$$(4)\qquad u_3^{-\nu}\ h(x)^{-1}\ D_{[1]}^{u,\lambda} f = (\nu+1)\gamma\ u_1'^{\nu}\ \mathrm{mod}.(u_3'),$$

$$(4\ \text{bis})\qquad U_1' \in \mathrm{VDir}(J(X',f,E'))\,\mathrm{mod}.(U_3').$$

A.2.6.4. Voyons le cas où

$$(5)\qquad U_3 \in \mathrm{VDir}[I(X(n),f,(u,\lambda))]\ .$$

Alors, par (1), on a

(6) $\quad U_3 \in \mathrm{VDir}(h(x)^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[i]}\ f\ ;\ 2 \leq i \leq s)\mathrm{mod}.\langle U_1\rangle$.

On en déduit que

(7) $\quad c\ell^{\nu}[h(x)^{-1}\ u_3^{-1-\nu}\ DM^{u,\lambda}_{[i]}\ f\ ;\ 2 \leq i \leq s] \neq 0 \ \mathrm{mod}.(U_3')$.

Soit on a $\alpha(x') = \nu$ ou $(\alpha(x') = 1+\nu$ et $v(J(X',f,E')) = 2)$ et donc $\kappa(x') \leq 6$, soit $v(J(X',f,E')) = 1$ et par (5), $\exists D \in \mathcal{D}(X',E')$ et $c\ell^{\nu}(h(x')^{-1}Df) \neq 0$ et $D(u_1') = 0$ et donc par (4 bis) $\kappa(x') = 7(A)$.

On remarque que (7) prouve que sous la condition (4), dans l'ouvert affine considéré, il n'y a pas de point (ν,κ)-proche de x, cela prouve (iii). On a (iv) par permutation des indices 2 et 3.

A.2.6.4. Prouvons (ii). On vérifie que la condition

$$\langle U_1\rangle = \mathrm{VDir}[I(X(n),f,(u,\lambda))]$$

implique

(8) $\quad J(X,f,E,\{x\}) = \mathfrak{m}_{X(n),x}\ u_1^{\nu} \ \mathrm{mod}.\ \mathfrak{m}^{\nu+2}_{X(n),x}$.

Par I.E.1., on a

(9) $\quad J(X',f,E') = (u_1'^{\nu})\mathrm{mod}.(u_3')$.

Regardons le cas où $\mathrm{VDir}[J(X',f,E')]$ est de dimension 1 et $\alpha(x') = 1+\nu$. Sinon, par VIII.A.1., on est assuré que $\kappa(x') \leq 6$. On peut trouver une p-base (v,μ) satisfaisant à A.2.(1) avec

(10) $\quad v_3 = u_3', v_1 = u_1' \ \mathrm{mod}.(u_3')$.

Alors, on a $\kappa(x') = 7(B)$, sinon, par (9) et A.2.2.(3), on a

$$f = h(x')(v_1^{\nu}\ v_2 + u_3\ g) + R(f,v,\mu)\ ,\quad \nu = 0(p)\ ,$$

ce qui implique que x' est à D.Q. et $\kappa(x') \leq 2$. Donc $\kappa(x') = 7(B)$

et on a par (9) et A.2.5.

(11) $I(X',f,(v,\mu)) = v_1^{1+\nu} \bmod.(v_3)$.

Si $E' = \mathrm{div}(u_3')$ alors

(12) $h(x') = u_3'^{A(2)+A(3)+\nu+1}$.

Alors, si $A(2) + A(3) + \nu + 1 = O(p)$ ou si $\alpha[V(u_1',u_3')] \geq \nu$, par VII.B, on a $\kappa(x') \leq 5$.

Si on a $\alpha[V(u_1',u_3')] < \nu$ comme $I(X(n),f,(u,\lambda)) = (u_1^{1+\nu}) \bmod.(u_3)$, on recopie servilement VII.B.6.1.4. et on obtient que $t[V(u_1',u_3')] \leq 2\nu$ et donc, par VII.B et que $\kappa(x') \leq 5$. Ce qui finit de prouver (ii). On en déduit la proposition-définition qui suit.

PROPOSITION-DEFINITION A.2.7.

Soit $x \in X(n)$ avec $\kappa(x) = 7(B)$, on dit qu'on a $\kappa(x) = 7(B)(*)$ si pour une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ adaptée en x, on a

(1) $I(X(n),f,(u,\lambda)) = (u_1^{\nu+1}) \bmod.(u_3)$,

(2) $\mathrm{div}(u_3) \subset E(n) \subset \mathrm{div}(u_2\ u_3)$.

Si on effectue l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x, il y a au plus deux points (ν,κ)-proches de x, avec $\kappa(.) \neq 7(A)$, ce sont les points de paramètres $(u_1\ u_3^{-1},\ u_2\ u_3^{-1},\ u_3) = v$ et $(u_1\ u_2^{-1},\ u_2,\ u_3\ u_2^{-1}) = w$ et en ces points, on a (1) et (2) pour $(X',f,(v,\lambda))$ ou $(X',f,(w,\lambda))$.

Preuve.

Quitte à remplacer u_1 par u_1+u_3g, $g \in O_{X(n)x}$, on a en plus de (1) et (2) :

(3) $\langle U_1 \rangle = \mathrm{VDir}(x)$ ce qui ne modifie pas (1).

Si $VDir[I(X(n),f,(u,\lambda))] = \langle U_1 \rangle$, le résultat découle de A.2.6.(ii). Sinon, par (1), on a

$$VDir[I(X(n),f,(u,\lambda))] = \langle U_1,U_3\rangle \quad \text{ou} \quad \langle U_1,U_2,U_3\rangle \ ,$$

dans le premier cas, par A.2.6.(iii), le seul point y (ν,κ)-proche avec $\kappa(y) \neq 7(A)$ est le point de paramètres w , dans le deuxième cas, par A.2.6.(iv), il n'y a pas de point y (ν,κ)-proche de x avec $\kappa(y) \neq 7(A)$. Par I.F.4., on a

(3) $$I(X',f,(w,\lambda)) = u_2^{-1-\nu}\, I(X(n),f,(u,\lambda)) = (w_1^{1+\nu})\mathrm{mod}.(w_3).$$

Ce qui prouve le résultat.

PROPOSITION A.2.8.

Les théorèmes II.C.4.1.et II.C.4.4 sont vérifiés pour $\kappa(x) = 7(B)(*)$.

Preuve.

La proposition A.2.7. prouve que II.C.4.1. est vérifié pour $\kappa(x) = 7(B)(*)$.

Maintenant, on remarque que quitte à remplacer u_1 par $u_1 + u_3g$ avec g convenable, $g \in \hat{O}_{X(n),x}$, on peut obtenir qu'en plus de A.2.7.(1)(2), on a

(1) $\Delta(h(x)^{-1}\, D_{[1]}^{u,\lambda} f \ ; u_3,u_2 \ ; u_1)$ est préparé.

Soit $\pi(n+i) : X(n+i+1) \longrightarrow X(n+i)$ une suite d'éclatements centrés en $x(n+i) \in X(n+i)$ point (ν,κ) proche de $x = x(n)$. Par A.2.7., les $x(n+i)$ sont des points de croisement pour (u,λ) (cf.I.F.4) et donc, si la suite $\pi(n+i)$ est infinie, pour un i, et pour une p-base $(u(i),\lambda)$ de $O_{X(n+i),x,(n+i)}$ adaptée en $x(n+i)$, on a

(2) $\Delta(I(X(n+i),f,(u(i),\lambda))\ ; u_3(i), u_2(i)\ ; u_1(i))$ n'a qu'un sommet (a,b) avec $[a] + [b] < 1$ et est préparé.

(3) $\quad \mathrm{Sing}_{\nu}(X(n+i)) \subset V(u_1(i),u_2(i)) \cup V(u_1(i),u_3(i))$.

L'assertion (2) découle de IV.C.7 et I.F.4. Quant à l'assertion (3), elle découle du fait que $\mathrm{Sing}_{\nu}(X(n))$ est au plus de dimension 1.

Alors, par VII.A.1, on a $\kappa(x(n+i)) \leq 4$. Ce qui termine la preuve de A.2.8.

PROPOSITION A.2.9.

Les théorèmes II.C.4.1. et II.C.4.4 sont vérifiés pour $\kappa(x) = 7(B)$.

Preuve.

Par A.2.5.1., le théorème II.C.4.1. est vérifié pour $\kappa(x) = 7(B)$.

A.2.9.1. Nous allons étudier une suite infinie.

$$\pi(n+i) : X(n+i+1) \longrightarrow X(n+i)$$

où $\pi(n+i)$ est l'éclatement centré en $x(n+i)$ point ν-proche de $x = x(n)$ avec $\kappa(x(n+i)) = 7(B)$ et $\kappa(x(n+i)) \neq 7(B)(*)$. Nous allons montrer que pour un $i \geq 0$, $x(n+i)$ est bon. Alors II.C.4.4. sera conséquence de A.2.8. et A.2.3.

On remarque que si (u,λ) est une p-base de $O_{X(n),x(n)}$ adaptée en $x(n)$ et satisfaisant à A.2.(1), alors

(1) $\quad \mathrm{VDir}(I(X(n),f,(u,\lambda))) \neq \langle U_1 \rangle$.

Sinon, par A.2.6.(ii), on a $\kappa(x(n+1)) = 7(B)(*)$, ce qui est une contradiction.

A.2.9.2. Voyons le cas où $x = x(n)$ ne satisfait à aucun des cas étudiés en A.2.6. Alors, quitte à multiplier u_3 par un inversible, on a

(2) $\quad \mathrm{VDir}[I(X(n),f,(u,\lambda))] = \langle U_1, U_2+U_3 \rangle$.

Alors, je dis que $x(n+1)$ est le point de paramètres

(3) $$v = (u_1 u_3^{-1}, 1+u_2 u_3^{-1}, u_3) .$$

En effet, sinon on a

$$\begin{cases} \mathrm{ord}_{x(n+1)}[u_3^{-\nu-1} h(x)^{-1} DM_{[j]}^{u,\lambda} f , 2 \le j \le s] = \nu , \\ u_3^{-\nu} h(x)^{-1} D_{[1]}^{u,\lambda} f = (\nu+1)\gamma v_1^{\nu} \bmod.(v_3). \end{cases}$$

Puisque $\kappa(x(n+1)) = 7$, on a $\mathrm{VDir}(J(X(n+1),f,E(n+1))) = \langle V_1\rangle \bmod.\langle V_3\rangle$, d'où :

$$c\ell^{\nu}(u_3^{-\nu-1} h(x)^{-1} DM_{[j]}^{u,\lambda} f , 2 \le j \le s) = (V_1^{\nu}) \bmod.(V_3) ,$$

donc il existe $D \in \mathcal{D}(X(n+i),E(n+1))$ avec $c\ell^{\nu}[h(x(n+1))^{-1} Df] = V_1^{\nu} \bmod.(V_3)$ et $Dv_1 = 0$, et donc $\kappa(x(n+1)) = 7(A)$, ce qui est une contradiction. On a (3)

Comme $E(n) \subset \mathrm{div}(u_2 u_3)$, par (3), on a

(4) $$E(n+1) = \mathrm{div}(u_3) .$$

Alors, on a

(5) $$\begin{cases} J(X(n+1),f,E(n+1)) = \\ (u_3^{-\nu} h(x)^{-1} D_{[1]}^{u,\lambda} f , u_3^{-\nu-1} h(x)^{-1} DM_{[j]}^{u,\lambda} f ; 2 \le j \le s). \end{cases}$$

Bien sûr, on a

(6) $$u_3^{-\nu} h(x)^{-1} D_{[1]}^{u,\lambda} f = (\nu+1)\gamma v_1^{\nu} \bmod.(v_3).$$

D'autre part, par (2), on a pour $2 \le j \le s$:

(7) $$u_3^{-\nu-1} h(x)^{-1} DM_{[j]}^{u,\lambda} f = \gamma_j v_1^{\nu+1} + \sum_{1 \le i \le 1+\nu} \gamma_{j,i} v_1^{\nu+1-i} v_2^{i} \bmod.(v_3) ,$$

$\gamma_{j,i}$ inversible ou nul, γ_j inversible ou nul.

Modifions v_1 en $w_1 = v_1+v_3 g$ et posons $w = (w_1,v_2,v_3)$ pour avoir

(8) $$\Delta(h(x(n+1))^{-1} D_{[1]}^{w,\lambda} f ; w_3,w_2 ; w_1) \text{ préparé} .$$

Alors $\langle W_1\rangle = \mathrm{VDir}(x(n+1))$ puisque $\mathcal{K}(x(n+1)) = 7$ et on a

(9) $\quad cl^{\nu+1}[I(X(n+1),f,(w,\lambda))] = (W_1^{\nu+1}) \bmod.(W_3).$

En effet, sinon, par (2)(6)(7), on aurait

$$(f-R(f,w,\lambda))h(x(n+1))^{-1} = \delta w_1^{\nu+1} + \sum_{1\leq i\leq 1+\nu} \delta_i\, w_1^{\nu+1-i}\, w_2^i \bmod.(w_3)$$

avec un δ_i inversible et comme $\nu+1 \neq 0(p)$ et $E(n+1) = \mathrm{div}(w_3)$, par (8), on aurait

$$\langle W_1,W_2\rangle \subset \mathrm{VDir}(x(n+1))\bmod.(v_3).$$

On déduit de (4)(7)(9) que

(10) $\quad h(x(n+1))^{-1}\, D^{w,\lambda}_{[2]}\, f = \theta w_1^{\nu+1} + \sum_{1\leq i\leq 1+\nu} \theta_i\, w_1^{\nu+1-i}\, w_2^i \bmod.(w_3)$

avec un θ_i inversible.

Par (9), on a

$$\mathrm{VDir}[I(X(n+1),f,(w,\lambda))] = \langle W_1\rangle \text{ ou } \langle W_1,W_3\rangle \text{ ou } \langle W_1,W_2,W_3\rangle .$$

Mais en fait on a

(11) $\quad \mathrm{VDir}[I(X(n+1),f,(w,\lambda))] = \langle W_1,W_3\rangle$

sinon par A.2.6.(ii)(iv), on aurait $\mathcal{K}(x(n+2)) = 7(B)(*)$ ou $7(A)$, ce qui est une contradiction.

Par (11) et A.2.6.(iii), $x(n+2)$ est le point de paramètres $t = (w_1w_2^{-1},w_2,w_3\, w_2^{-1})$. Par I.F.4., on a

(12) $\quad w_3^{-1-\nu}\, h(x(n+1))^{-1}\, DM^{w,\lambda}_{[2]}\, f \in I(X(n+2),f,(t,\lambda)).$

Alors je dis que

(13) $\quad \mathrm{ord}_{x(n+1)}[h(x(n+1))^{-1}\, DM^{w,\lambda}_{[2]}\, f] = \nu+2$,

sinon, par (10), on a

$$c\ell^{\nu+1}_{x(n+1)}[h(x(n+1))^{-1}\ DM^{w,\lambda}_{[2]}\ f] = U_2\ U_3\ G \neq 0$$

et par (12), $\mathrm{ord}_{x(n+2)}[I(X(n+2),f,(t,\lambda))] \leq \nu$ et donc $(\nu,\kappa)(x(n+2)) \leq (\nu,6)$, ce qui est une contradiction. Alors, par (10) et (13), on a

(14) $w_2^{-1-\nu} h(x(n+1))^{-1}\ DM^{w,\lambda}_{[2]}\ f = \Theta\ t_1^{\nu+1}\ t_2 + \sum_{1 \leq i \leq 1+\nu} \Theta_i\ t_1^{\nu+1-i}\ t_2 \mod.(t_2\ t_3)$.

Donc $\Theta_i \in \mathfrak{m}_{x(n+2)}$ pour $2 \leq i \leq 1+\nu$ et Θ_1 est inversible et par (14), on a

(15) $\qquad T_2 \in \mathrm{VDir}[I(X(n+2),f,(t,\lambda))]$.

De plus, par I.F.4., on a

$$I(X(n+2),f,(t,\lambda)) = w_2^{-1-\nu}\ I(X(n+1),f,(u,\lambda)) ,$$

d'où par (11)

(16) $\quad \langle T_1,T_2,T_3\rangle = \mathrm{VDir}(I(X(n+2),f,(t,\lambda)))$.

On remarque que (8) implique que $\Delta(w_2^{-\nu}\ h(x(n+1))^{-1}\ D^{w,\lambda}_{[1]}\ f\ ;\ t_3,\ t_2\ ;\ t_1)$ est préparé et comme $v(x(n+2)) = 1$ puisque $\kappa(x(n+2)) = 7$, on a $\langle T_1\rangle = \mathrm{VDir}(x(n+2))$.

Donc on peut appliquer A.2.6. à $(x(n+2),(t,\lambda))$, par A.2.6.(iv) et (16), on a $\kappa(x(n+2)) = 7(A)$ ce qui est une contradiction. On n'a pas (2).

A.2.9.3. Choisissons u_1 de façon à ce que

(17) $\quad \Delta(h(x(n))^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[1]}\ f\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1)$ est préparé.

Par (1) et A.2.9.2., on a

$$\mathrm{VDir}[I(X(n),f,(u,\lambda))] = \langle U_1,U_2\rangle \text{ ou } \langle U_1,U_3\rangle .$$

En permutant les indices 2 et 3 si nécessaire, nous avons

(18) $\qquad \mathrm{VDir}[I(X(n),f,(u,\lambda))] = \langle U_1,U_3\rangle$.

Par A.2.6.(iii), $x(n+1)$ est le point de paramètres

$u(1) = (u_1 u_2^{-1}, u_2, u_3 u_2^{-1})$. Par I.F.4., on a

$$(19) \quad \begin{cases} h(x)(n+1))^{-1} D_{[1]}^{u(1),\lambda} f = u_2^{-\nu} h(x(n))^{-1} D_{[1]}^{u,\lambda} f , \\ I(X(n+1),f,(u(1),\lambda)) = u_2^{-1-\nu} I(X(n),f,(u,\lambda)) . \end{cases}$$

On en déduit que

$$(20) \quad \Delta(h(x(n+1))^{-1} D_{[1]}^{u(1),\lambda} f ; u_3(1), u_2(1) ; u_1(1)) \text{ est préparé}$$

et puisque $v(x(n+1)) = 1$

$$(21) \quad \langle U_1(1)\rangle = \mathrm{VDir}(x(n+1))$$

et par (18)

$$\mathrm{VDir}[I(X(n+1),f,(u(1),\lambda))] = \langle U_1(1),U_3(1)\rangle .$$

Par récurrence, on voit que $x(n+i)$ est le point de paramètres $u(i) = (u_1 u_2^{-i}, u_2, u_3 u_2^{-i})$, que

$$(22) \quad \begin{cases} I(X(n+i),f,(u(i),\lambda)) = u_2^{-i(1+\nu)} I(X(n),f,(u,\lambda)) , \\ h(x(n+i))^{-1} D_{[1]}^{u(i),\lambda} f = u_2^{-i\nu} h(x(n))^{-1} D_{[1]}^{u,\lambda} f , \\ \Delta(h(x(n+i))^{-1} D_{[1]}^{u(i),\lambda} f ; u_3(i), u_2(i) ; u_1(i)) \text{ est préparé,} \\ \langle U_1(i)\rangle = \mathrm{VDir}(x(n+i)). \end{cases}$$

On remarque que la relation

$$\mathrm{VDir}(I(X(n+i),f,(u(i),\lambda)) = \langle U_1(i),U_3(i)\rangle$$

implique

$$c\ell_{x(n+i)}^{1+\nu} [(f-R(f,u(i),\lambda)) h(x(n+i))^{-1}] =$$

$$\gamma u_1(i)^{1+\nu} + \sum_{1\leq j\leq \nu+1} \gamma_j U_1(i)^{\nu+1-j} U_3(i)^j , \text{ un } \gamma_j \text{ inversible.}$$

Cela nous donne

(22) $\operatorname{div}(u_3(i)) \subset E(n+i)$.

Sinon on a $c\ell^{\nu}_{x(n+i)}(h(x(n+i))^{-1} D^{u,\lambda}_{[3]} f) \neq 0$, ce qui contredit $\kappa(x(n+i)) = 7(B)$.

Ainsi, les $x(n+i)$ sont sur les transformés stricts (ii) de $C = V(u_1,u_3) \subset X(n)$. Comme $\alpha(x(n+i)) = 1+\nu$, par II.B.9.1., on a $\alpha(C) = 1+\nu$. Par I.D.4.(2), $C(i)$ est permise en $x(n+i)$. Effectuons l'éclatement $\pi'(i) : X'(i) \longrightarrow X(n+i)$ centré en $C(i)$. Comme $\langle U_1(i)\rangle = \operatorname{VDir}(x(n+i))$, par I.E.2.3.(4), il y a au plus un point ν-proche de $x'(i)$ de $x(n+i)$, c'est le point de paramètres $v(i) = (u_1(i)u_3(i)^{-1}, u_2(i), u_3(i))$. Si $\nu(x') < \nu$ alors $\operatorname{Sing}_{\nu}(X(n+i)) = C$ et $\kappa(x(n+i)) = 1$, ce qui est une contradiction. Donc $\nu(x'(i)) = \nu$. Mais

$$I(X'(i), f, (v(i),\lambda)) = I(X(n+i), f, (u(i),\lambda))\ u_3^{-1-\nu}(i)$$

et par (22), on a

$$\alpha(x'(i)) = \operatorname{ord}_{x'(i)} I(X'(i), f, (v(i),\lambda)) \leq \nu\ .$$

Donc $\alpha(x'(i)) = \nu(x'(i)) = \nu$ et $\kappa(x') \leq 6$. Si $C(i) = \operatorname{Sing}_{\nu}(X(n+i))$, alors $x(n+i)$ est bon. Sinon, par (22), pour $i \geq 1$, on a

(23) $E(n+i) = \operatorname{div}(u_2(i)u_3(i))$, $\operatorname{div}(u_2(i)) = \pi(n+i)^{-1}(x(n+i-1)) < \operatorname{div}(u_3(i))$.

De plus, x' n'est pas sur le transformé strict de $\operatorname{div}(u_3(i))$, donc $C(i) = \operatorname{Sing}_{\nu}(X(n+i)) \cap \operatorname{div}(u_3(i))$ et donc $V(u_2(i), u_3(i)) \not\subset \operatorname{Sing}_{\nu}(X(n+i)) \cap \operatorname{div}(u_3(i))$. On a $\alpha(C(i)) = 1+\nu$, par (23), $C(i)$ est la composante de $\operatorname{Sing}_{\nu}(X(n+i))$ où $(\nu(.), m(.), \alpha(.), \sigma(.))$ est maximal. On en déduit que pour $i \geq 1$, $x(n+i)$ est bon.

B. $\kappa(x) = 7(C)$.

DEFINITION B.1.

Soit $x \in X(n)$ avec $\kappa(x) = 7$, on dit que $\kappa(x) = 7(C)$ si $e(x) = 2$.

PROPOSITION B.2.

Soit $x \in X(n)$ avec $\kappa(x) = 7(C)$, alors

(i) il existe une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ adaptée en x et telle que

$E(n) = \mathrm{div}(u_1\ u_2)$, $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1+U_2\rangle$,

(ii) si on effectue l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x, en tout point x' (ν,κ)-proche de x, on a

$\kappa(x') = 7(A)$ ou (B).

Preuve.

Par A.1.(1), on a $v(x) = 1$, alors l'hypothèse $e(x) = 2$ implique qu'on peut trouver (u,λ) avec

$$\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1+U_2\rangle \quad \text{et} \quad \mathrm{div}(u_1\ u_2) \subset E(n).$$

D'autre part, puisque $\alpha(x) = 1+\nu(x)$, on a

$J(X(n),f,E(n)) \neq J(X(n),f,E(n),\{x\})$ et donc $E(n) \neq \mathrm{div}(u_1\ u_2\ u_3)$. Ce qui établit (i).

Prouvons (ii). Remarquons que le point y de paramètres $(u_1\ u_3^{-1},\ u_2\ u_3^{-1},\ u_3)$ n'est pas (ν,κ)-proche de x. En effet, on a $m(y) = 3$ et donc $\alpha(y) = \nu(y)$ et donc $(\nu,\kappa)(y) \leq (\nu,6)$.

Donc tout point (ν,κ)-proche de x' est dans l'ouvert de X' où $\pi^{-1}(x) = \mathrm{div}(u_2)$. Posons $u' = (1+u_1\ u_2^{-1},\ u_2,\ u_3\ u_2^{-1})$.

Par définition de $\mathrm{VDir}(x)$ (I.E.2.3.), on a

$J(X(n),f,E(n)) = (u_1+u_2)^{\nu} \bmod. \mathfrak{m}_{X(n),x}^{\nu+1}$.

Par I.E.1., on a

$$J(X',f,E') \supset J(X(n),f,E(n))\ u_2^{-\nu} = (u_1'^{\nu}) \bmod. (u_2') .$$

On en déduit que $\mathrm{VDir}(x')$ est transverse à E' et donc que $\kappa(x') = 7(A)$ ou (B).

C. $\kappa(x) = 7(D)$.

DEFINITION C.1.

Soit $x \in X(n)$ avec $\kappa(x) = 7$, on dit que $\kappa(x) = 7(D)$ si

$e(x) = 1$ et $\mathrm{VDir}(x)$ n'est pas transverse à $E(n)$.

C.1.1. Il est clair (cf.A.1.(2-1)(2-2) que les cas (A)(B)(C)(D) recouvrent le cas $\kappa(x) = 7$.

PROPOSITION C.2.

Soit $x \in X(n)$ avec $\kappa(x) = 7(D)$.

(i) Alors on peut trouver une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ adaptée en x et telle que

$$f = u_1^{A(1)}\ u_3^{A(3)}\ g + R(f,u,\lambda),\ h(x) = u_1^{A(1)}\ u_3^{A(3)}\ ,$$

$\mathrm{ord}_x(g) = 1+\nu$, $\mathrm{div}(u_1) \subset E(n) \subset \mathrm{div}(u_1u_3)$, $c\ell_x^{1+\nu}(g) = U_1^{\nu}\ U_2 + \Sigma\ U_1^{\nu-i}\ F_i(U_2^p, U_3)$.

(ii) Si on effectue l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x, il y a au plus un point x' qui est (ν,κ)-proche de x, x' est rationnel sur x et n'est pas sur le transformé strict de $\mathrm{div}(u_3)$.

De plus, si $\kappa(x') = 7(D)$, on a

$$\mathrm{VDir}(x') = \langle c\ell_x^1, (u_1\ u_3^{-1})\rangle\ .$$

Preuve de (i).

Par définition, on peut choisir (u,λ) de façon que

(1) $\langle U_1\rangle = \mathrm{VDir}(x)$ et $\mathrm{div}(u_1) \subset E(n)$.

De plus, puisque $\alpha(x) \neq \nu(x)$, on a $m(x) \leq 2$. Quitte à permuter u_2 et u_3 , on peut avoir que

(2) $$\begin{cases} c\ell^{\nu}[h(x)^{-1}\ D_{[2]}^{u,\lambda}\ f] = \rho U_1^{\nu}\ ,\ \rho \in h(x)^* , \\ \mathrm{div}(u_2) \not\subset E(n). \end{cases}$$

Quitte à modifier u_2, on peut obtenir les autres conditions de (i).

Remarquons que (2) donne

(3) $$F_i \in k(x)\ [U_2^p\ ,\ U_3]\ .$$

Prouvons (ii). Remarquons tout de suite qu'en le point y de paramètres $(u_1\, u_2^{-1},\, u_2,\, u_3\, u_2^{-1})$, on a $\alpha(y) \leq \nu$ et donc $(\nu,\kappa)(y) \leq (\nu,6)$.

Soit $x' \in X'$ un point (ν,κ)-proche de x. Comme $x' \neq y$ et que $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1 \rangle$, x' n'est pas sur le transformé strict de $\mathrm{div}(u_3)$. Etudions donc l'ouvert affine O de X' où $\mathrm{div}(u_3) = \pi^{-1}(x)$. Posons $u' = (u_1\, u_3^{-1},\, u_2\, u_3^{-1},\, u_3)$.

On a

$$(4)\quad \begin{cases} f = u_1'^{A(1)}\, u_3'^{A(3)+A(1)+\nu+1}\, (u_1'^{\nu} u_2' + \sum u_1'^{\nu-i}\, F_i(u_{2,1}'^{p})) + R(f,u,\lambda) \\ \mathrm{mod}.\, h(x')\, u_3' \,. \end{cases}$$

C.2.1. Si $A(1)+\nu \neq 0(p)$ ou $A(3)+1 \neq 0(p)$ alors $u_2'(x') = 0$, sinon on aurait $\alpha(x') \leq \nu$, donc $\kappa(x') \leq 6$. En ce cas, on a $U_1' \in \mathrm{VDir}(x')\mathrm{mod}.\, \langle U_3' \rangle$ et donc, si $\kappa(x') = 7(D)$, on a $\langle U_1' \rangle = \mathrm{VDir}(x')$.

C.2.2. Montrons que si $A(1)+\nu = 0(p)$ et si les F_i sont tous nuls alors en tout point ν-proche, on a $\kappa \leq 6$. En effet, $J(X',f,E') = (u_1'^{\nu})\mathrm{mod}.(u_3')$, et il y a donc une dérivée $D \in \mathcal{D}(X',E')$ telle que $h(y)^{-1}\, Df = u_1'^{\nu} \mathrm{mod}.(u_3')$ et $Du_1' = 0$. Donc, si $A(1)+\nu = 0(p)$ et si les F_i sont tous nuls, en tout point $y \in O$, on a

$$(5)\quad f = u_1'^{A(1)}\, u_3'^{A(3)+A(1)+\nu+1}\, (u_1'^{\nu} u_2' + u_3' g) + R(f,u',\lambda)$$

où (u',λ) est une p-base de $O_{X',y}$. Par VI.E et VIII.A, $\kappa(x') \leq 6$.

C.2.3. Regardons le cas où, pour un i, $1 \leq i \leq \nu$, $F_i \neq 0$ et $A(1)+\nu = 0(p)$.

C.2.3.1. Si $A(1)+\nu - i \neq 0(p)$, alors on a

$$\alpha(x') \leq \nu - i + \mathrm{ord}_{x'}[F_i(u_2',1)]\ ,$$

puisque $(\nu,\kappa)(x') = (\nu,7)$, on a $\alpha(x') = 1+\nu$ et donc

$$\begin{cases} \mathrm{ord}_{x'}\ [F_i(u_2',1)] = i+1 = \deg F_i\ , \\ F_i(u_2',1) = \gamma v_2^{i+1},\ \gamma \in O^*_{X',x'},\ (u_1',v_2,u_3',\lambda_i) \text{ p-base adpatée en } x' \\ \text{de } O_{X',x'}. \end{cases}$$

Donc x' est rationnel sur x. De plus, puisque $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1\rangle$, on a

$$\begin{cases} c\ell^{\nu}[h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[2]}\ f] = U_1^{\nu}\ , \\ u_3^{-\nu}\ h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[2]}\ f = u_1'^{\nu} \mathrm{mod.}(u_3') \in J(X',f,E') \end{cases}$$

Puisque $\kappa(x') = 7$, on a $v(x') = 1$ et donc

$$\mathrm{VDir}(x') = \langle U_1'\rangle \ \mathrm{mod.}(U_3')$$

Et donc, si $\kappa(x') = 7(D)$, on a

(6) $\qquad \mathrm{VDir}(x') = \langle U_1'\rangle$.

Ce qui prouve (ii) en ce cas .

C.2.3.2. Si $A(1) + \nu - i = 0(p)$, alors $i = 0(p)$ et $i+1 = 1(p)$.

Par (3), on a

(7) $\qquad F_i = U_3\ G_i(U_2,U_3)$.

Par (i), pour tout j , $1 \leq j \leq s$, on a

(8) $\qquad c\ell^{\nu+1}[h(x)^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[j]}\ f] = \rho_j\ U_1^{\nu}\ U_2 + \sum_{1\leq r\leq \nu} U_1^{\nu-r'}\ F_{r,j}(U_2,U_3)$.

Pour un j, on a $F_{i,j} = U_3\ G_{i,j}(U_2,U_3) \neq 0$ (cf. (7)). Par I.E.1., on a

$$(9)\ \begin{cases} \rho_j\ u_1'^{\nu} u_2' + \sum_{1\leq r\leq \nu} u_1'^{\nu-r}\ F_{r,j}(u_2',1) \in J(X',f,E')\ , \\ u_3^{-\nu}\ h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[2]}\ f = u_1'^{\nu}\ \mathrm{mod.}(u_3'). \end{cases}$$

Or $F_{i,j}(u_2',1) = G_{i,j}(u_2',1) \neq 0$ et $\deg G_{i,j} = i \geq p$, on déduit de (9) que $\mathrm{VDir}(J(X',f,E') \neq \langle U_1'\rangle \ \mathrm{mod.}(U_3')$ donc $\dim(\mathrm{VDir}(J(X',f,E'))) \geq 2$, ce qui contredit l'hypothèse $\kappa(x') = 7$.

PROPOSITION C.3.

Les théorèmes II.C.4.1.. et II.C.4.4. sont vérifiés pour $\kappa(x) = 7(D)$.

C.4. Comme $\kappa(x) = 7(D)$ est le dernier cas de cet algorithme, il est clair que II.C.4.1 . est vérifié pour $\kappa(x) = 7(D)$.

C.5. Il est également clair que C.3. met un point final à la preuve de II.C.4.2. et II.C.4.4.

C.7. Prouvons C.3. Etudions une suite d'éclatements $\pi(n+i)\ X(n+i+1) \longrightarrow X(n+i)$ centrés en $x(n+i) \in X(n+i)$, point (ν,κ)-proche de $x(n) = x$ et on a $\kappa(x(n+i)) = 7(D)$. Alors, par C.2.(ii), $x(n+i+1)$ est sur le transformé strict de $\mathrm{div}(u_1)$ et n'est pas sur le transformé strict de $\pi(n+i-1)(x(n+i-1))$, pour $i \geq 1$. Alors, par IV.B.4.1., les $x(n+i)$ sont sur le transformé strict d'une courbe formelle lisse $C \subset X(n)$. Par II.B.9.1., on a $\alpha(C) = 1 + \nu$. Donc $\nu(C) = \nu$ et C est une composante de dimension 1 de $\mathrm{Sing}_\nu(X(n))$. Comme les $x(n+i)$ sont sur le transformé strict $Y(i)$ de $\mathrm{div}(u_1)$, on a $C \subset \mathrm{div}(u_1)$. Pour i assez grand, $\mathrm{Sing}_\nu(X(n+i)) \cap Y(i) = C(i)$. Bien sûr, pour $i \geq 1$, $Y(i)$ est la plus ancienne composante de $E(n+i)$. Donc, pour $i \geq 1$, l'éclatement $\pi: X'(i) \longrightarrow X(n+i)$ centré en $C(i)$ est imposé par l'algorithme du point bon. En $x(n+i)$, on a une p-base (v,λ) avec

$$(1) \quad \begin{cases} E(n+i) = \mathrm{div}(v_1\ v_3),\ Y(i) = \mathrm{div}(v_1)\ , \\ C(i) = V(v_1,v_2),\ \mathrm{VDir}(x(n+i)) = \langle V_1 \rangle\ . \end{cases}$$

Dans $X'(i)$ il y a au plus un point ν-proche $x'(i)$ de $x(n+i)$ c'est le point de paramètres $w = (v_1\ v_2^{-1}, v_2, v_3)$.

Or, puisque $\mathrm{VDir}(x(n+i)) = \langle V_1 \rangle$ et $E(n+i) = \mathrm{div}(v_1\ v_3)$, on a

$$(2)\qquad \begin{cases} h(x)^{-1}\, D^{u,\lambda}_{[2]}\, f = \rho v_1^{\nu} + g,\ g \in (v_1,v_2)^{\nu+1} + v_3(v_1,v_2)^{\nu}\ , \\ \rho \text{ inversible.} \end{cases}$$

On a

$$(3)\qquad v_2^{-1-\nu}\, h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[2]}\, f = \rho w_1^{\nu} \bmod .(w_2,w_3) \in I(X',f,\omega,\lambda)).$$

On en déduit que $\alpha(x'(i)) \leq \nu$, donc $(\nu,\kappa)(x'(i)) \leq (\nu,6)$ et $x(n+i)$ est bon. C.Q.F.D.

"On n'est jamais, jamais assez fort pour ce calcul".

(Comtesse Maxime de La Falaise)

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ABHYANKAR - Weighted expansions for a canonical desingularization. Proceedings of La Rabida. Lecture Notes 910.

[2] S. ABHYANKAR - Uniformization in a p-cyclic extension of a two-dimensional regular domain of residue field characteristic p. wiss. Abh. des Landes Nordrhein-Westfallen. Band. vol. 33. 1966. p. 243-317.

[3] S. ABHYANKAR - Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces. Academic Press, New York and London, 1966.

[4] V. COSSART - Desingularization of embedded excellent surfaces. Tohoku Math. Jour., vol. 33, n°1. pp.25-33, 1981.

[5] J. GIRAUD - Forme normale d'une fonction sur une surface de caractéristique positive. Bull. Soc. Math. France. 111, 1983, p.109-124.

[6] J. GIRAUD - Etude locale des singularités. Cours de 3ème cycle 1972. Orsay. Pub. n°26.

[7] J. GIRAUD - Contact maximal en caractéristique positive. Ann. Sc. de l'E.N.S., 4ème série. t.8. fasc. 2, 1975.

[8] H. HIRONAKA - Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic 0 . I and II. Ann. Math. 79 (1964).

[9] H. HIRONAKA - Certain numerical characters of singularities. J. Math. Kyoto Univ., 10 (1970).

[10] H. HIRONAKA - Additive groups associated with points of a projective space. Ann. Math. vol. 92. (1970). p.151-187.

[11] H. HIRONAKA - Characteristic polyhedra of singularities. J. Math. Kyoto Univ. 10 (1967). p.251-293.

[12] H. HIRONAKA - Desingularization of excellent surfaces. Advanced Science Seminar in Algebraic Geometry. Bowdoin college 1967. Notes by B. Bennett. Lectures Notes 1101. Resolution of Surfaces Singularities by V. COSSART, J. GIRAUD, U. ORBANZ, appendix of H. HIRONAKA.

[13] H. HIRONAKA - Introduction to the theory of infinitely near singular points. Memorias de Matematica del instituto "Jorge Juan". 28.

[14] H. HIRONAKA, J.M. AROCA, J.L. VICENTE - The theory of the maximal contact. Desingularization theorems. Memorias de Mat. del inst. "Jorge Juan", 29 et 30.

[15] J. LIPMAN - Desingularization of two dimensional schemes, Ann. of Math. 107 (1978), p.151-207.

[16] T. SANCHEZ - Teoria de singularidades de superficias algebroîdes sumergidas. Monografias y memorias de Matematica. IX. pub. del Inst."Jorge Juan" de Mat. Madrid (1976).

DESINGULARIZATION IN DIMENSION 2

VINCENT COSSART
Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)
Mathématiques
4, Place Jussieu
F - 75005 PARIS

INTRODUCTION. The aim of this paper is to link four different methods of desingularization of excellent surfaces: The methods of Jung, Zariski, Abhyankar and Hironaka. The basic reference is Giraud's lecture in this volume ([8]). In this paper, Giraud shows how close the methods of Zariski and Jung are. So we are going to show that the proofs by Zariski, Abhyankar and Hironaka are almost the same from the point of view of the characteristic polyhedron of singularity. Indeed these three authors want to reach this case: At every closed point of the worst Samuel stratum of X (= a reduced hypersurface of an excellent, regular scheme Z of dimension 3) there exists a regular system of parameters (y,u_1,u_2) such that the polyhedron $\Delta(J,u_1,u_2)$ (see [9] , 1.12)) has only one vertex, J being the ideal of X in $O_{Z,x}$. In that case, Hironaka calls the singularity "quasi-ordinary" and Abhyankar calls it "curve-like".

The first section defines properly the notion "$\Delta(J,u_1,u_2)$ has only one vertex" and shows how nice it is.

In the second section we translate Zariski's method into terms of the characteristic polyhedron.

In the third section we give a new proof of Abhyankar's theorem with the help of the characteristic polyhedron.

The fourth section is just a reminder of Hironaka's proof.

Acknowledgement

I would like to thank U. Orbanz for his thorough and critical reading of the drafts of these notes. He also carried out considerable editing on them and ultimately wrote them up in a much better final form than my original version.

DESINGULARIZATION OF EMBEDDED EXCELLENT SURFACES

BY

VINCENT COSSART

Reprinted from the
Tôhoku Mathematical Journal
The Second Series, vol. 33, no. 1, pp. 25-33
March 1981

SUJET PROPOSE PAR L'UNIVERSITE

"ANALYSE SUR L'ESPACE DE WIENER"

TABLE DES MATIERES