ALEXIS MARIN

Quelques remarques sur les courbes algébriques planes réelles

Thèses d'Orsay, 1979, 19 p
<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1979__2205__A4_0>

QUELQUES REMARQUES SUR LES COURBES ALGEBRIQUES PLANES REELLES

Alexis MARIN

I. - INTRODUCTION

Harnack nous a appris qu'une courbe algébrique plane réelle de degré m n'a pas plus de $M = \frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$ composantes, des courbes ayant ce nombre maximal de composantes existent en tous degrés et sont nommées M courbes. Les composantes d'une courbe séparent le plan, et sont nommées ovales, sauf dans le cas m impair où une seule composante ne sépare pas, on la nomme pseudo-droite On note p le nombre d'ovales pairs (i.e. inclus dans un nombre pair d'ovales) et n le nombre d'ovales impairs (les autres).

Après avoir résolu directement, dans le cas des courbes de degré six, le 16e problème de Hilbert sur la topologie des M-courbes, Gudkov formule la conjecture $p - n \equiv k^2$ modulo 8 pour une M-courbe de degré pair $2k$.

En 1971, Rohlin ([R_1]) publie une preuve de cette conjecture s'appuyant sur une formule reliant la signature d'une variété de dimension quatre, l'autointersection d'une surface caractéristique orientable et l'invariant de Arf d'une forme quadratique définie sur l'homologie de cette surface. Plus tard, il donne une nouvelle preuve s'appuyant sur le théorème d'Atiyah-Singer et valable en toutes dimensions

([R_2]) , Gudkov et Krakhnov s'inspireront de cette méthode pour donner en toutes dimensions la généralisation d'une nouvelle congruence pour les (M-1)-courbes : $p - n \equiv k^2 \pm 1$ modulo 8 ([GK]).

Dans cet article, utilisant une généralisation de la formule de Rohlin au cas où la surface caractéristique n'est plus orientable ([GM]) , nous donnons une preuve unifiée de ces deux congruences ; l'utilisation de surfaces caractéristiques non orientables semble nécessaire : nous présenterons des contre-exemples à la première preuve de Rohlin au § IV. L'exposition de ces contre-exemples nécessitera une étude de l'orientation des courbes séparant leurs complexifiées. Nous la ferons au § III, paragraphe essentiellement botanique, où nous donnerons aussi toutes les configurations possibles en degré cinq et six : dès le degré cinq, il y a des configurations qui peuvent être séparantes ou non, dès le degré sept, il y a des configurations séparantes qui ont des orientations distinctes. Nous terminerons ce paragraphe en remarquant que la méthode de Hilbert permet de construire deux M-courbes de degré sept ayant même configuration orientée, mais qui sont dans des composantes distinctes du complémentaire du discriminant. Enfin nous remarquerons au § V que la méthode exposée par Arnold ([A]) pour établir les inégalités de Petrovski pour les courbes de degré pair fonctionne aussi pour les courbes à singularités de degré pair et donne en particulier l'inégalité de Petrovski pour les courbes de degré impair.

II. - PREUVE DES CONGRUENCES

Soit C une courbe algébrique plane réelle de degré pair 2k , ayant $N \leq M$ ovales. On choisit une équation F de C qui est négative sur la composante non orientable de $\mathbb{RP}^2 - C$. On note $\mathbb{RP}^+ = \{x \in \mathbb{RP}^2 \mid F(x) \geq 0\}$.

Soit c la conjugaison complexe du plan projectif complexe $\mathbb{C}P^2$, le quotient $\mathbb{C}P^2/c$ est difféomorphe à la sphère S^4 (considérer une décomposition en anses de $\mathbb{C}P^2$ ayant une seule anse d'indice 2 dont l'âme est formée d'une droite réelle). Soit $D \subset S^4$ l'image de $C_{\mathbb{C}}$ la complexifiée de la courbe C, c'est une surface connexe de caractéristique d'Euler $\chi(C_{\mathbb{C}})/2 = 2 - M$ (rappelons que $M = g + 1$) et ayant un bord à N composantes ; elle est orientable si et seulement si la courbe C sépare sa complexifiée $C_{\mathbb{C}}$.

Considérons dans la sphère S^4 la surface $F = D \cup \mathbb{R}P^+$; elle est caractéristique puisque $H_2(S^4) = 0$ et est en général non orientable (même si D l'est !) ; on a :

$$\sigma(S^4) = 0$$

$$F \cdot F = \frac{1}{2} C_{\mathbb{C}} \cdot C_{\mathbb{C}} + 2(-\chi(\mathbb{R}P^+) \overset{(\dagger)}{=} 2(k^2 - (p-n)) .$$

Soit $q : H_1(F ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ la forme de Rohlin de la surface F ([GM]), les composantes de C engendrent un sous-espace L de $H_1(F ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

<u>PROPOSITION 1</u>. La forme de Rohlin q est nulle sur L.

<u>Démonstration</u>. Il suffit de remarquer que L est engendré par les bords des composantes orientables de $\mathbb{R}P^-$ ($= \{x \in \mathbb{R}P^2 \mid F(x) \leq 0\}$). Ces composantes B_i sont des membranes (cf. [GM]) qui ne recoupent pas F et dont les bords ∂B_i ont des voisinages orientables dans F ; la valeur $q(B_i)$ est donc le double de l'obstruction à étendre à B_i une section du fibré normal à ∂B_i dans F, soit $2(-2\chi(B_i))$ qui est congrue à zéro modulo quatre. □

($\dagger$) Soit v un champ de vecteur tangent à $\mathbb{R}P^+$ et transverse à $\partial \mathbb{R}P^+$, soit n un champ normal à F étendant iv ; les sommes des indices des zéros de n sur D et $\mathbb{R}P^+$ sont $1/2\, C_{\mathbb{C}} \cdot C_{\mathbb{C}}$ et $2(-\chi(\mathbb{R}P^+))$ respectivement.

COROLLAIRE.

1) Si C est une M-courbe, $p - n - k^2 \equiv 0 \bmod 8$ (Rohlin [R1][R2]) ;

2) Si C est une M-1 courbe, $p - n - k^2 \equiv \pm 1 \bmod 8$ (Gudkov et Krakhnov [GK]);

3) Si C est une M-2 courbe qui ne sépare pas sa complexifiée, $p - n - k^2 \equiv 0 , \pm 2 \bmod 8$;

4) Si C est une courbe qui sépare sa complexifiée, $p - n - k^2 \equiv 0 \bmod 4$ (Arnold [A]) .

Démonstration. D'après la formule de Rohlin ([GM]) , $p - n - k^2$ modulo 8 est l'invariant de Brown de la forme q . Si C est une M-i courbe, l'orthogonal d'un facteur hyperbolique contenant L dans $H_1(F ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est de rang i et représenté par des classes d'homologie de D ; la conclusion résulte alors de la classification des formes quadratiques sur les $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ espaces vectoriels ([GM]) . □

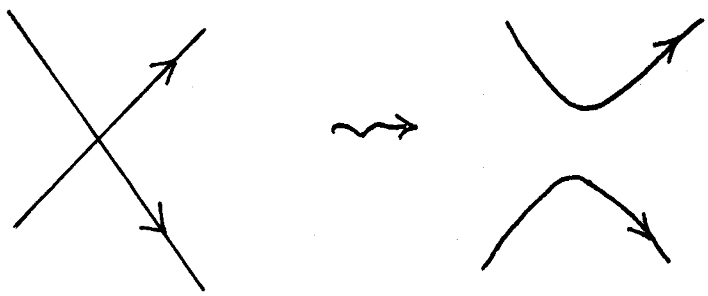
III. - ORIENTATION DES COURBES SEPARANT LEUR COMPLEXIFIEE

PROPOSITION 2. Soit C une courbe algébrique plane réelle de degré d dont les seules singularités réelles sont des points doubles ordinaires et des cusps. Soit $\tilde{C}$ une courbe réelle de degré d proche de C . Pour que $\tilde{C}$ sépare sa complexifiée $\tilde{C}_{\mathbb{C}}$, il faut et il suffit que :

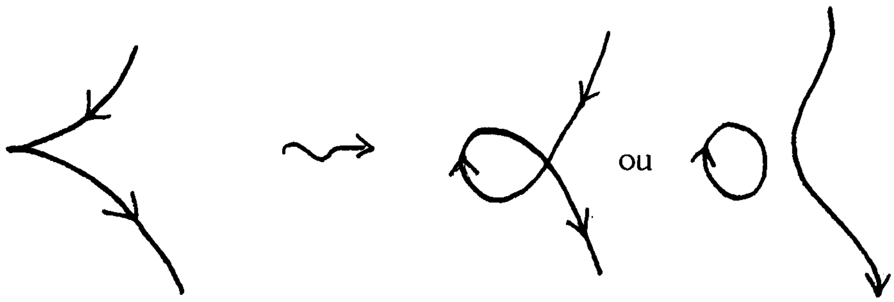
i) C sépare sa complexifiée $C_{\mathbb{C}}$;

ii) On puisse choisir une moitié de $C_{\mathbb{C}}$ (†) de façon à ce que si on oriente C comme bord de cette moitié, les singularités de C qui disparaissent le fassent suivant les modèles :

(†) Une moitiée de $C_{\mathbb{C}}$ est $D \subset C_{\mathbb{C}}$ tel que $D \cap c(D) = \partial D = C$, $D \cup c(D) = C_{\mathbb{C}}$ où c est la conjugaison complexe. Si C est réductible, il peut y avoir plusieurs moitiés (voir plus loin).



pour les points doubles ordinaires



pour les cusps

De plus, l'orientation ainsi obtenue pour $\tilde{C}$ est bord de l'orientation d'une moitié de $\tilde{C}_{\mathbb{C}}$.

La démonstration résulte de l'observation de la courbe près du plan projectif réel.

<u>RAPPELS</u> (voir Rohlin $[R_3]$ et Mishachev [M]) .

Soit C une courbe de degré d séparant sa complexifiée ; on oriente la courbe C comme bord d'une de ses moitiés. Une paire d'ovales emboités est dite positive si son orientation est bord d'une orientation de l'anneau qu'elle délimite, négative dans le cas contraire ; un ovale est désorienté s'il est impair et forme une paire négative avec le premier ovale dans lequel il est inclus. On note d le nombre d'ovales désorientés, D^+ (respectivement D^-) le nombre de paires positives (respectivement négatives) dont l'ovale extérieur est désorienté. Si le degré d est impair, on peut assigner un signe à chaque ovale : l'homologie du plan privée de l'intérieur de l'ovale est libre, de rang un, engendrée par la pseudo-droite ; l'ovale vaut

$\pm$ 2 fois ce générateur, il est dit positif s'il vaut -2 fois le générateur, négatif sinon. On note p^- le nombre d'ovales pairs négatifs et n^+ le nombre d'ovales impairs positifs.

Bien qu'ils ne les énoncent que pour les M-courbes, Rohlin et Mishachev prouvent ([R3], [M]) :

Soit C une courbe de degré d séparant sa complexifiée :

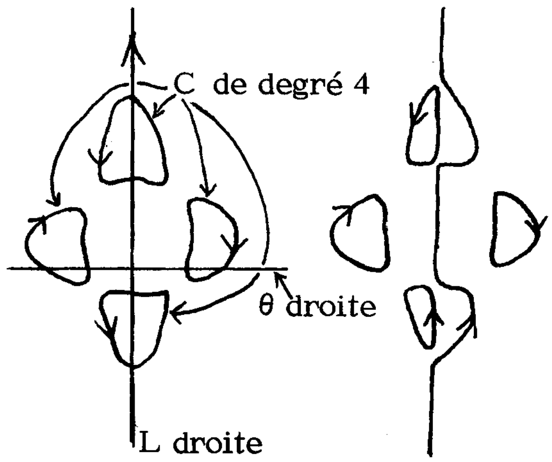
si $d = 2k$ est pair, $k^2 - (p - n) = 4(d + D^- - D^+)$;

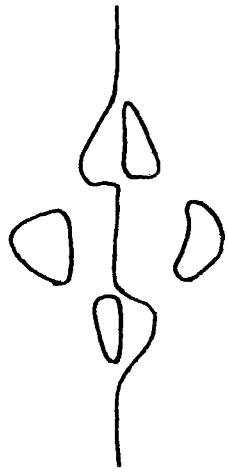
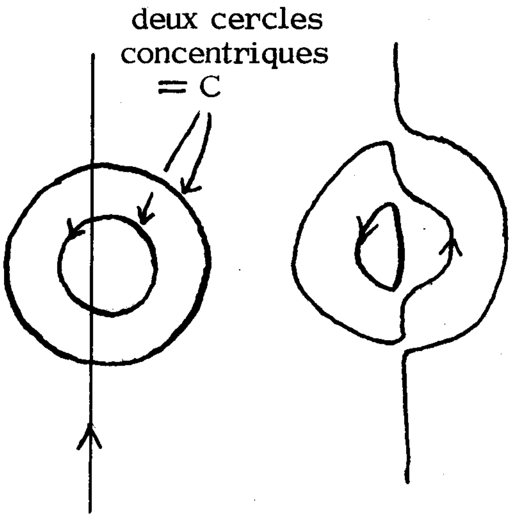
si $d = 2k + 1$ est impair, $\frac{k(k+1)}{2} - (p^- - n^+) = 2(d + D^- - D^+)$.

Remarquons que jusqu'au degré 6, ces relations fixent l'orientation d'une disposition donnée. Les dispositions possibles sont déterminées par les conditions d'intersection avec une droite plus le fait que le nombre de composantes d'une courbe séparante est congru au nombre maximal M modulo deux. Dans les tableaux suivants, nous construisons toutes les possiblités non maximales en degré cinq et six.

L'orientabilité et les orientations sont déterminées par la proposition 2. Dans le tableau concernant le degré 6, les constructions sont indiquées de manière beaucoup plus schématique. Pour plus de détails sur la construction des courbes par les méthodes de Hilbert, de Harnack et de Gudkov, le lecteur pourra consulter l'article d'A'Campo [A'] .

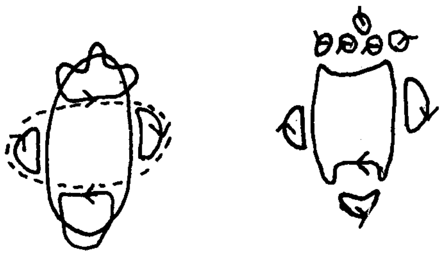
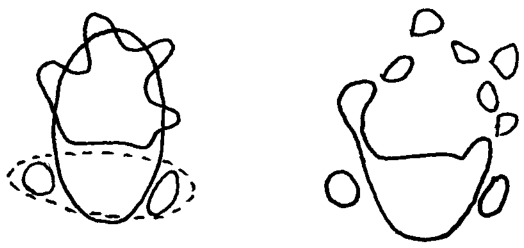
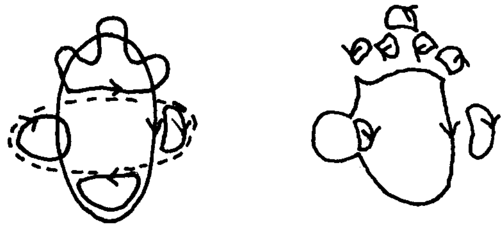
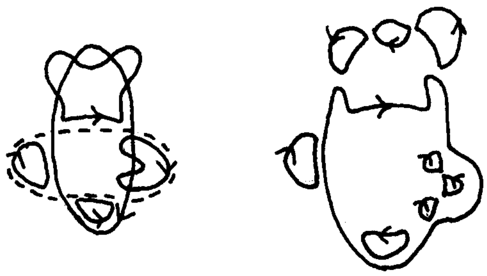
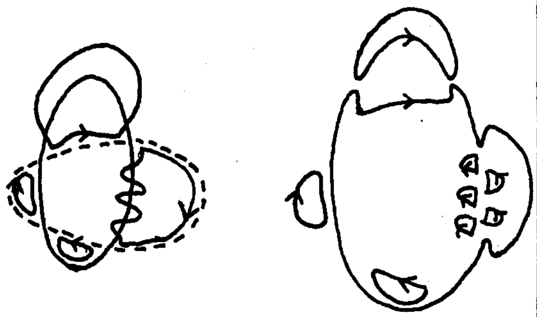
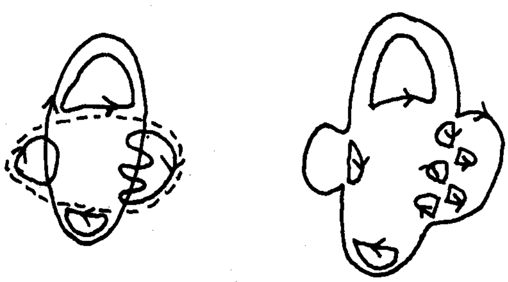
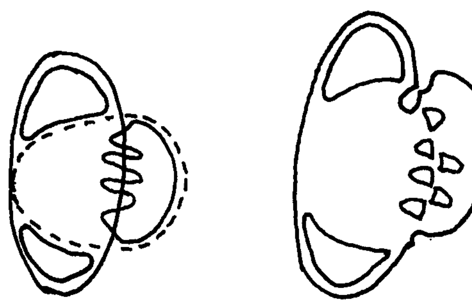
Degré 5

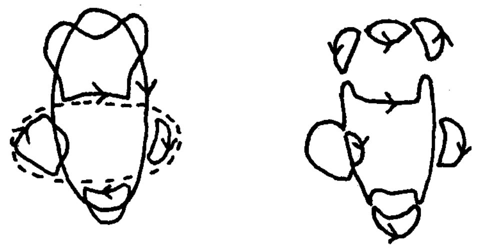
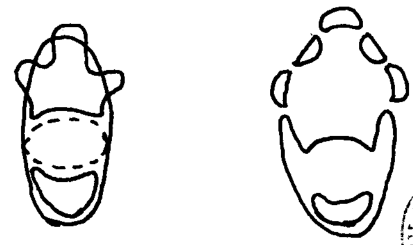
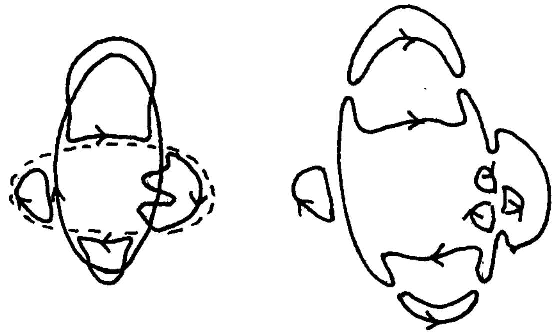
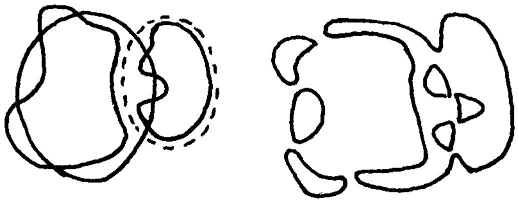
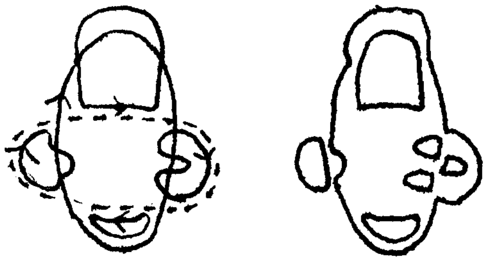
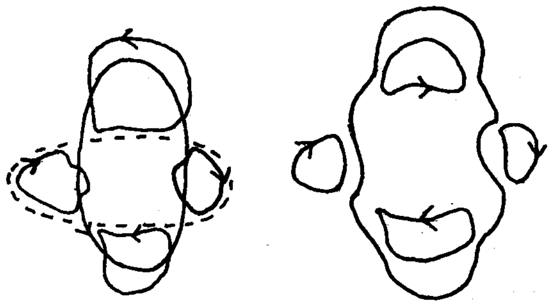
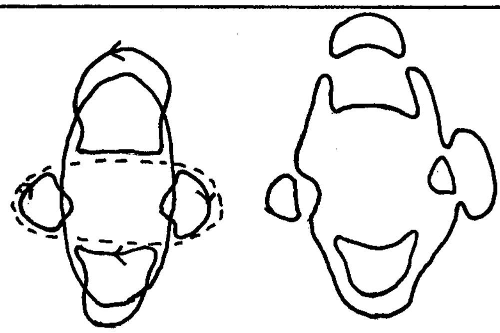
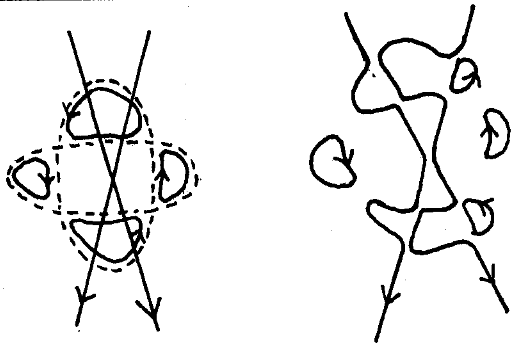
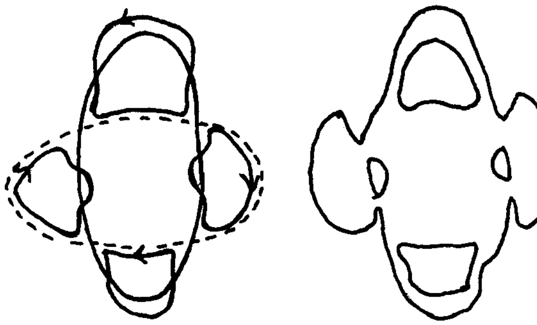
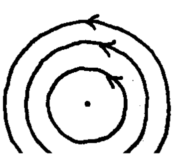
<table>
<tr><th>$p^- n^+ d D^+ D^-$</th><th>Notation</th><th>Construction d'une courbe séparante</th><th>Construction d'une courbe non séparante ayant m̂ configuration</th></tr>
<tr><td>3 0 0 0 0</td><td>$I\,3^-\,1^+$</td><td>

CL = ε</td><td>
CL = εθ</td></tr>
<tr><td>1 0 1 0 0</td><td>$I\,\frac{1^-}{1^-}$</td><td>

L droite CL = ε</td><td>N'existe pas : prendre une droite D qui a un point à l'intérieur du plus petit ovale, transformer $C \cup D$ en une courbe de degré 6 formée de trois ovales emboités qui sépare (voir p. 10) .</td></tr>
</table>

Degré 6

p n d D^+ D^-	Notation	Construction d'une courbe séparante	Construction d'une courbe non séparante ayant même configuration
9 0 0 0 0	9		
7 2 1 0 0	$6\frac{1,1^-}{1}$		N'existe pas car c'est une M-2 courbe pour laquelle $p - n - k^2 \equiv 4 \bmod 8$ (3e partie du corollaire du § 2)
5 4 2 0 0	$4\frac{2,2^-}{1}$		Faire dégénérer une courbe $1\frac{5}{1}$ de Gudkov
3 6 3 0 0	$2\frac{3,3^-}{1}$		N'existe pas car c'est une M-2 courbe pour laquelle $p - n - k \equiv 4 \bmod 8$ (3e partie du corollaire du § 2)
1 8 4 0 0	$1\frac{4,4^-}{1}$		

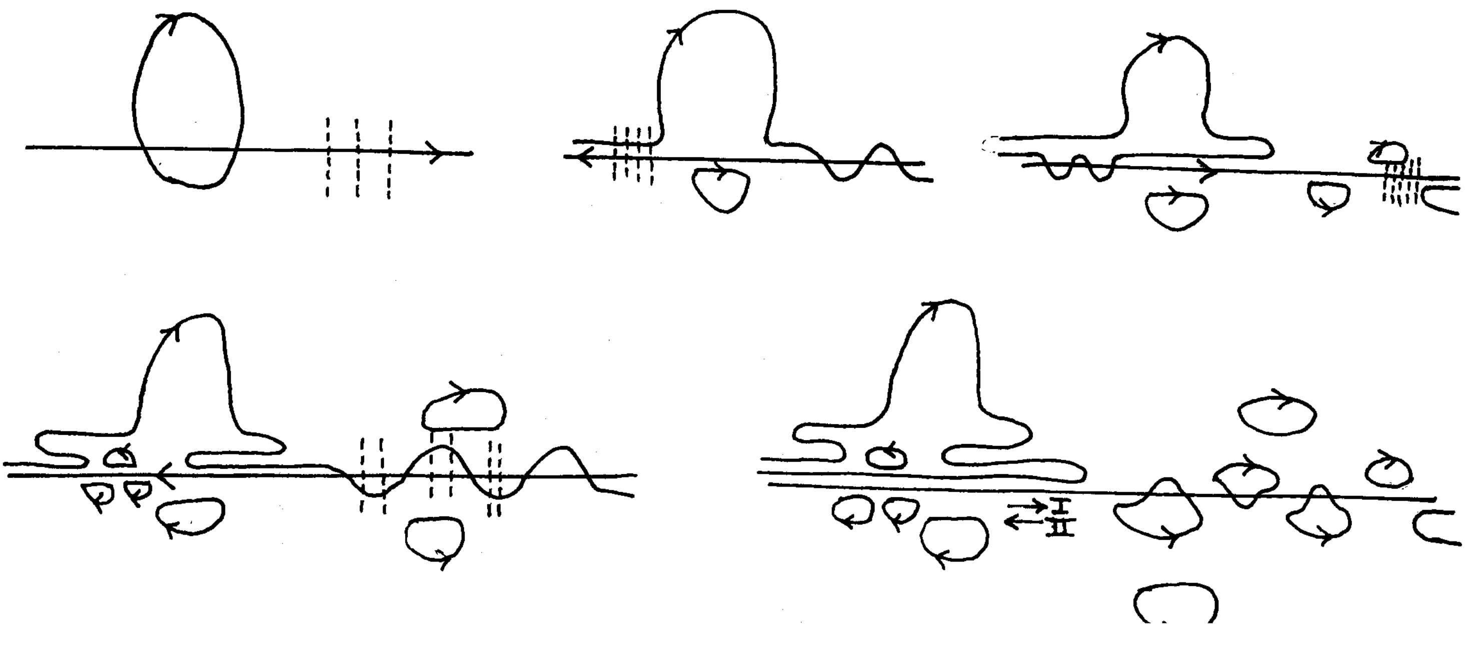
p n d D^+ D^-	Notation	Construction d'une courbe séparante	Construction d'une courbe non séparante ayant même configuration
6 1 1 0 0	$5\,\frac{1^-}{1}$		
4 3 2 0 0	$3\,\frac{1,2^-}{1}$		
2 5 4 0 0	$1\,\frac{1,4^-}{1}$		
3 2 2 0 0	$1\,\frac{2^-}{1}$		
1 4 3 0 0	$1\,\frac{1,3^-}{1}$		
2 1 1 1 0	$\frac{1^-}{\frac{1^-}{1}}$	 trois cercles concentriques	N'existe pas : voir page 10

<u>Une courbe de degré six formée de trois ovales emboités sépare sa complexifiée</u> :

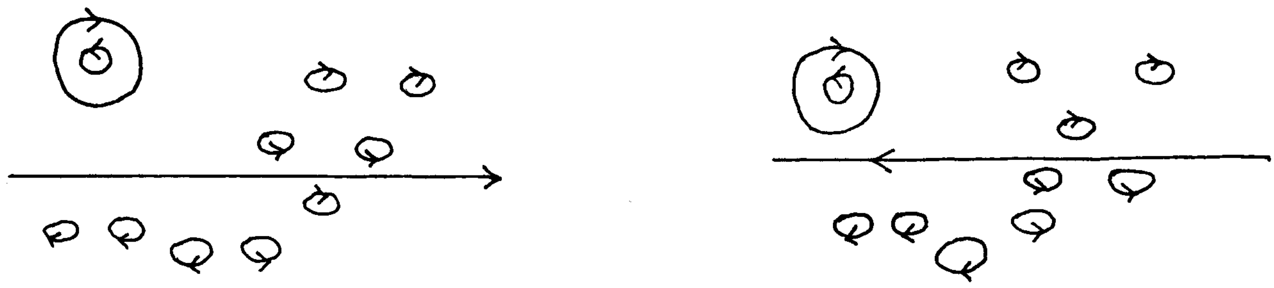
Soit Y le revêtement double de $\mathbb{CP}^2$ ramifié sur $C_{\mathbb{C}}$; on a : $\chi(Y) = 2\chi(\mathbb{CP}^2) - \chi(C_{\mathbb{C}}) = 6 + 18 = 24$; donc, puisque Y est simplement connexe, le second nombre de Betti de Y est $b_2(Y) = 22$, la signature est $\sigma(Y) = 2\sigma(\mathbb{CP}^2) - \frac{C_{\mathbb{C}}.C_{\mathbb{C}}}{2} = 2 - 18 = -16$. La forme quadratique est donc de type $(3,19)$. Soient A, B, C les images réciproques des composantes de $\mathbb{RP}^2 - C$ de caractéristique d'Euler 0 et D l'image réciproque de la droite $\mathbb{CP}^1$; la forme quadratique est positive sur le sous-espace engendré par A, B, C et D ; ces classes sont donc liées , ce qui est équivalent au fait que C est nul en homologie dans $C_{\mathbb{C}}$, donc que C sépare $C_{\mathbb{C}}$.

<u>Remarque</u>. Les formules de Rohlin et de Mishachev assurent qu'une courbe séparante de degré $2k$ (respectivement $2k+1$) a au moins k composantes (respectivement $k+1$ composantes), que tous les ovales sont emboités les uns dans les autres et que toutes les orientations sont les mêmes : $d = n$ dans le cas pair (respectivement $d = n = n^-$ dans le cas impair). Est-ce qu'une courbe ayant cette disposition sépare sa complexifiée ?

Dès le degré sept, les formules ci-dessus ne déterminent plus l'orientation d'une configuration donnée et l'exemple suivant, basé sur la méthode de Harnack, fournit deux courbes séparantes ayant des orientations distinctes :



En désingularisant les orientations I et II de la droite, on obtient les configurations :

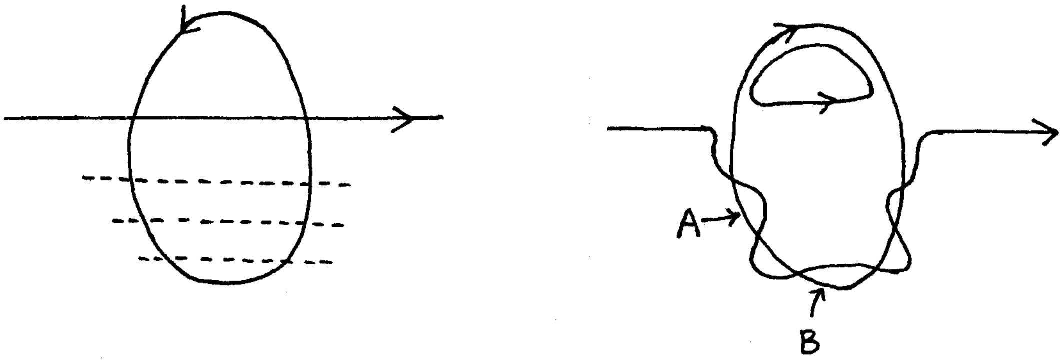


qui ont des orientations distinctes.

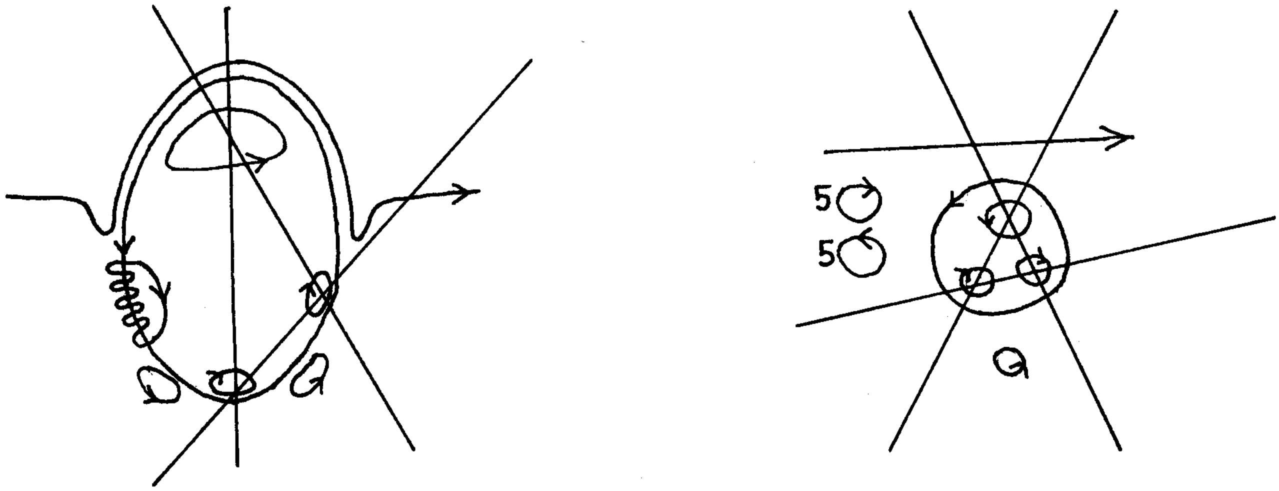
Nous ne savons pas construire de tels exemples avec des M-courbes ; remarquons cependant que pour la courbe I $13 \frac{1}{1}$ par exemple, la relation de Mishachev donne deux possibilités d'orientation, mais en appliquant la relation de Rohlin à des courbes séparantes de degré huit dégénérant sur la réunion de la courbe et d'une droite joignant l'ovale impair et un ovale pair extérieur, on en élimine une et il ne reste plus que l'orientation I $5^+ 7^- \frac{1^-}{1^+}$ (cette courbe est obtenue par la méthode de Harnack) : les restrictions que l'on peut tirer de ces deux formules ne sont pas claires.

Pour conclure ce paragraphe de résultats expérimentaux, construisons par la méthode de Hilbert, deux M-courbes de degré sept de type I $6^+ 5^- \frac{1^+ 2^-}{1^+}$ qui sont dans des composantes distinctes du complémentaire du discriminant.

La distinction des deux courbes se fait en étudiant la position des ovales extérieurs par rapport aux droites joignant les ovales impairs. Il serait intéressant de savoir s'il y a une isotopie équivariante (pour la conjugaison complexe de $\mathbb{CP}^2$) joignant ces deux courbes.

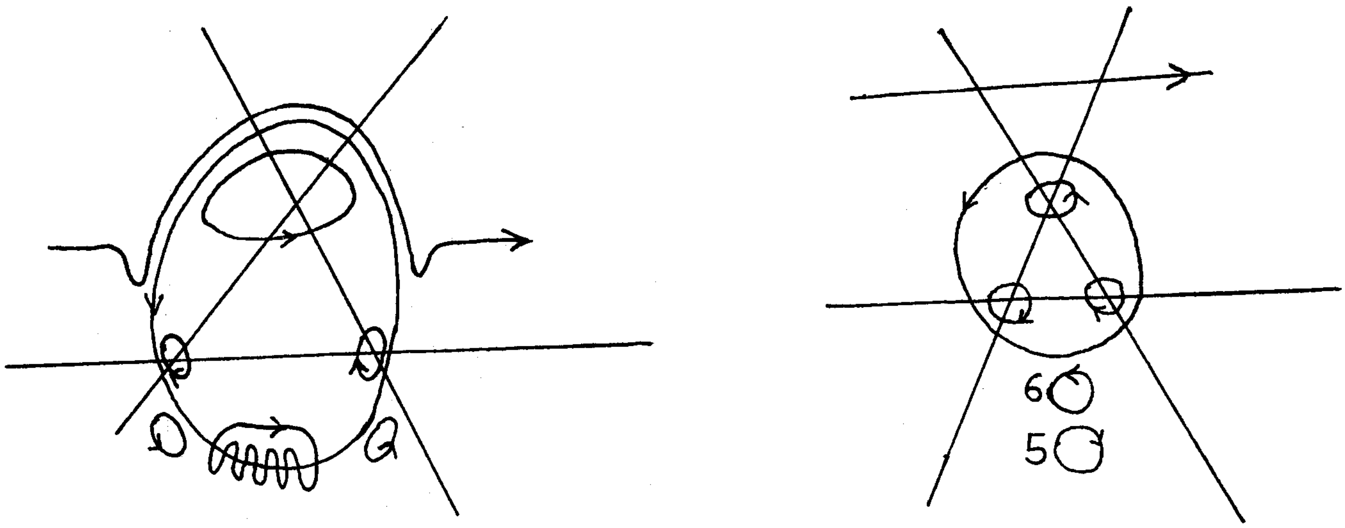


A:



en faisant vibrer dans la région **A** , on obtient cette disposition

B:



en faisant vibrer dans la région B , on obtient cette disposition

IV. - CONTRE-EXEMPLES A LA PREMIERE PREUVE DE ROHLIN

Rappelons brièvement cette preuve : Rohlin considère Y le revêtement double de $\mathbb{CP}^2$ ramifié sur la courbe $C_{\mathbb{C}}$ de degré 2k Si k est impair, l'image réciproque Π_- de $\mathbb{RP}^-$ est une surface caractéristique pour Y et la congruence est équivalente à ce que l'invariant de Arf de cette surface est nul. Rohlin donne la base suivante de $H_1(\Pi_-)$: $\alpha_1 \dots \alpha_p$ les ovales pairs et $\beta_1 \dots \beta_p$ les images réciproques de p sections b_i de $\mathbb{RP}^-$ qui transforment $\mathbb{RP}^-$ en une collection de cercles ; il affirme que $q(\beta_i) = 0$. Il spécifie que les b_i joignent les ovales pairs aux ovales impairs ne précisant pas le choix des b_i pour la composante non orientable de $\mathbb{RP}^-$. Quoi qu'il en soit, les β_i restent dans chaque composante de Π_-. Nous allons construire une M-courbe de degré 10 pour laquelle Π_- a sept composantes, cinq sont une sphère et les invariants de Arf de la forme de Rohlin q restreinte à l'homologie de chacune des autres composantes vaut 1 .

Avant de donner l'exemple, calculons $q(\alpha_i)$ et $q(\beta_i)$ où β_i est l'image réciproque d'un segment de $\mathbb{RP}^-$ joignant deux ovales (ils peuvent être indifférem-ment pairs ou impairs).

1) Soit α_i une composante paire de la courbe C et D_i le disque bordé par α_i ; il se relève en un disque Δ_i qui est une membrane pour α_i ; on a : $\Delta_i \cdot \Pi_- =$
$= -\chi(\mathbb{RP}^- \cap D_i) \equiv n_i \bmod 2$ où n_i est le nombre d'ovales intérieurs à α_i et l'obstruction à étendre un collier de α_i dans Π_- en un champ de vecteur normal à Δ_i est $-\chi(D_i) = -1$. On a donc :

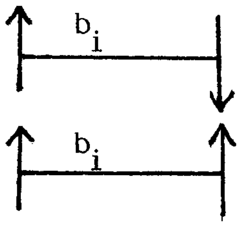
$$q(\alpha_i) = 1 + n_i \ .$$

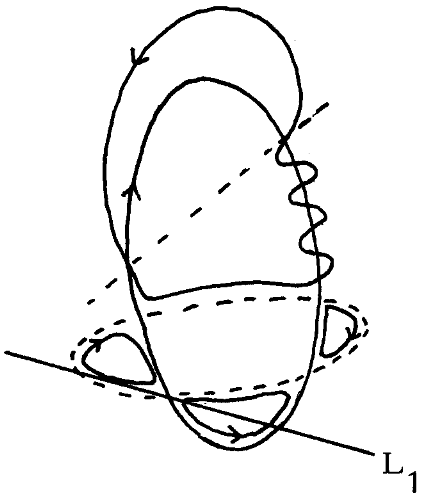
2) Soit b_i un segment de $\mathbb{RP}^-$ joignant deux ovales et d_i un arc dans une moitié A de la complexifiée $C_{\mathbb{C}}$ joignant les deux extrémités de b_i. Soit $\mathfrak{m}_i$ une surface dont le bord est $b_i \cup d_i$, normale à $\mathbb{RP}_- \cup A$ près de $b_i \cup d_i$ et transverse à $\mathbb{RP}^-$. L'image réciproque μ_i de $\mathfrak{m}_i$ est une membrane pour β_i qui coupe Π_- en

un nombre pair de points (le double de $\#(\mathring{\mathfrak{m}}_i \cap \mathbb{RP}^-)$) . Comme $b_i \cup d_i$ n'a pas nécessairement un voisinage orientable dans $\mathbb{RP}^- \cup A$, considérons l'obstruction $\mathcal{O}$ à étendre le fibré normal à $b_i \cup d_i$ dans $\mathbb{RP}^- \cup A$ en un sous-fibré de rang un du fibré normal à $\mathfrak{m}_i$; elle est paire si et seulement si $b_i \cup d_i$ a un voisinage orientable dans $\mathbb{RP}^- \cup A$. L'obstruction $\widetilde{\mathcal{O}}$ à étendre le fibré normal à β_i dans Π_- en un sous-fibré de rang un du fibré normal à μ_i est $2\mathcal{O}$; elle est congrue à zéro modulo 4 si et seulement si $b_i \cup d_i$ a un voisinage orientable dans $\mathbb{RP}^- \cup A$. Nous avons donc :

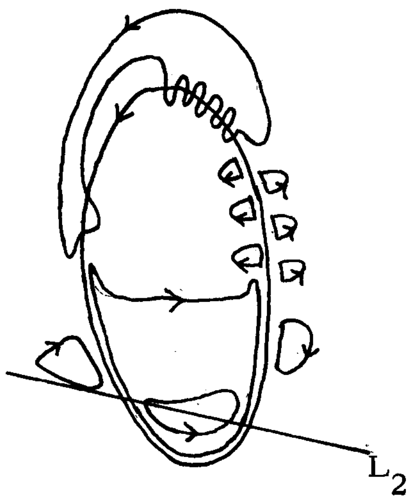
$q(\beta_i) = 0$, si les orientations sont

$q(\beta_i) = 1$, si les orientations sont

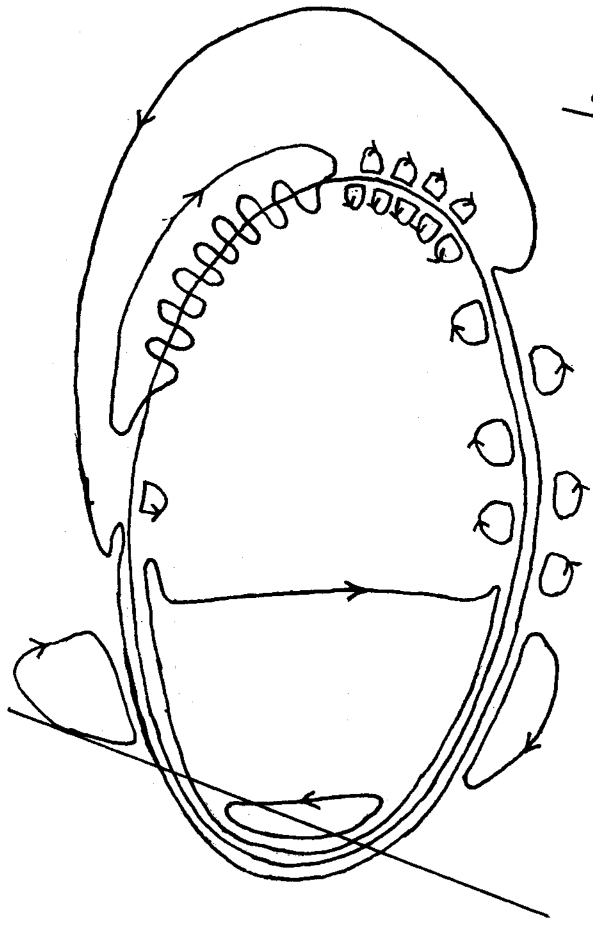




Degré 4

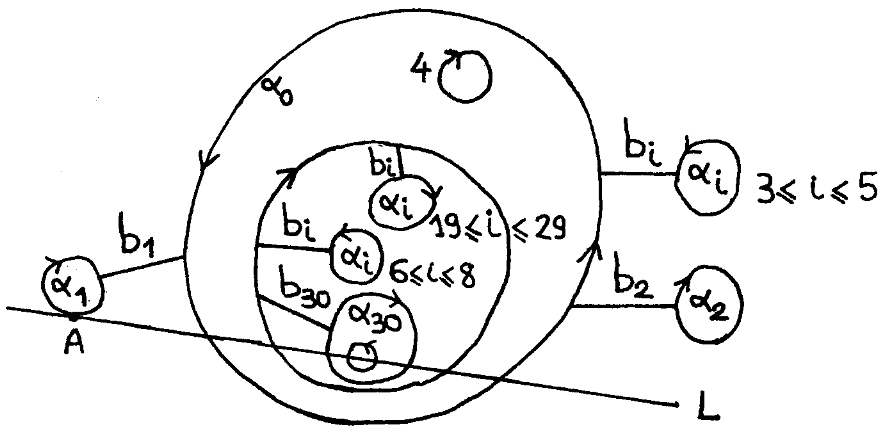


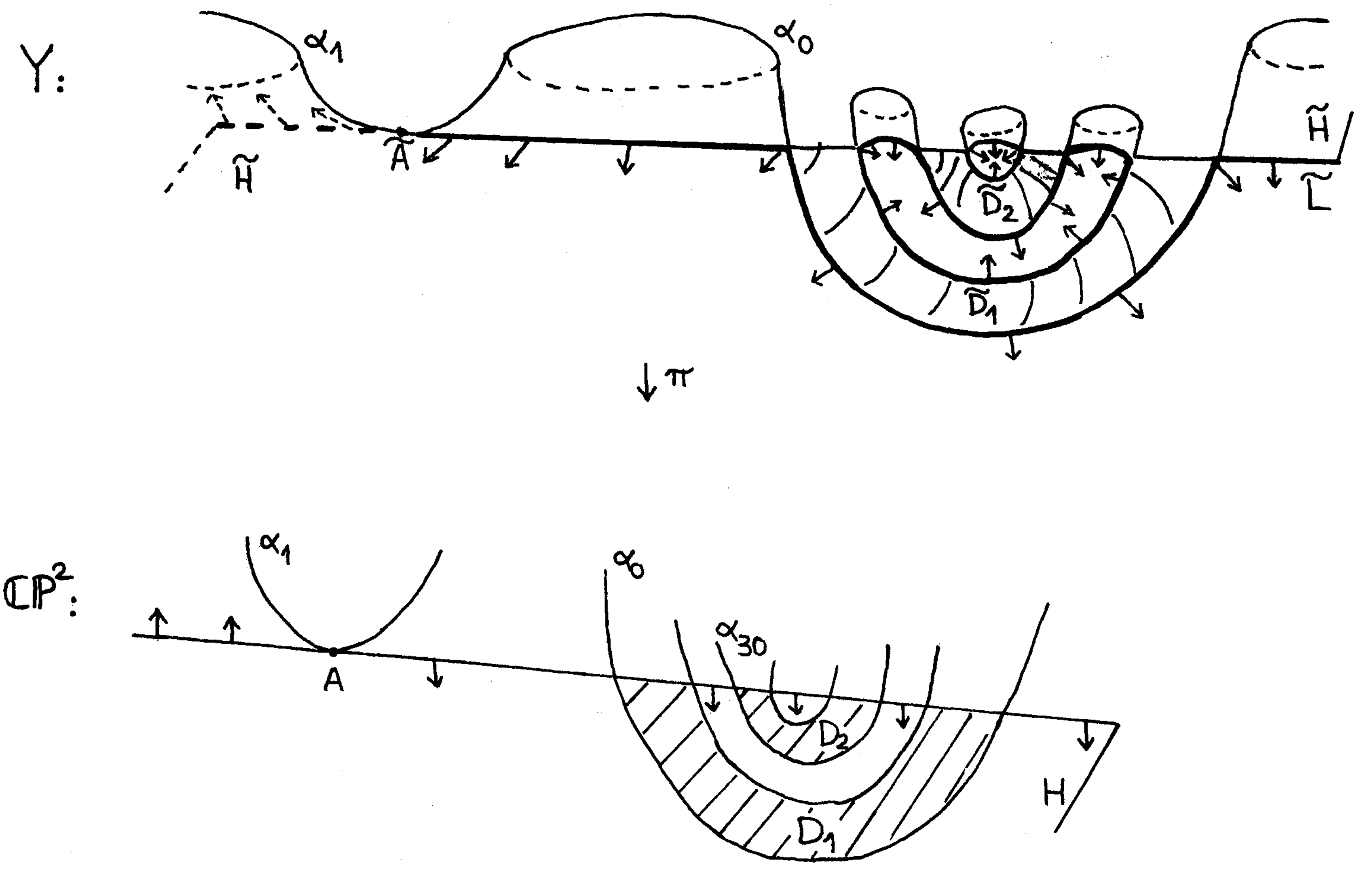
Degré 6



Courbe $5\,\dfrac{\frac{1}{1}\;14}{1}$ de degré 8

La configuration de la M-courbe de degré 10 ainsi obtenue peut être schématisée de la manière suivante (on a dessiné les tangentes L_1 L_2 L_3 dans les étapes intermédiaires pour s'assurer de la position d'une tangente L à l'un des ovales extérieur et ne recoupant la courbe $C_{\mathbb{C}}$ qu'en sa partie réelle) :





Soit H un hémisphère de la tangente L dessinée. Son intérieur ne recoupe pas la courbe complexifiée $C_{\mathbb{C}}$, il se relève donc à Y en $\tilde{H}$; il en est de même des disques D_1 et D_2 en $\tilde{D}_1$ et $\tilde{D}_2$, la surface $\tilde{H} \cup \tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2$ est une membrane pour son bord β_0. Cette membrane ne recoupe pas Π_-, le champ de vecteur normal à L dessiné s'étend en un champ normal à H (penser L comme la droite d'équation $X = 0$ et A comme le point à l'infini de cette droite, ce champ est $(1,0)$) et les obstructions à l'étendre en un champ normal à D_1 et à D_2 sont égales ; on a donc : $q(\beta_0) = 0$.

La partie Π_-^∞ de Π_- au-dessus de la partie non orientable de $\mathbb{R}P^-$ a pour base symplectique $\alpha_0 + \dots + \alpha_5$, $\beta_0 + \beta_1$, $\alpha_1\beta_1, \dots, \alpha_5\beta_5$. On a :

$q(\alpha_0 + \dots + \alpha_5) = 6 + 31 \equiv 1 \bmod 2$, $q(\beta_0 + \beta_1) = q(\beta_0) + q(\beta_1) = 1$,

$q(\alpha_i) = 1$, $1 \leq i \leq 5$, $\qquad q(\beta_1) = q(\beta_2) = 1$

$\qquad q(\beta_i) = 0$, $3 \leq i \leq 5$.

L'invariant de Arf vaut donc 1.

Une base symplectique de $\Pi_- - \Pi_-^\infty$ est $(\alpha_i \beta_i)$, $6 \leq i \leq 30$. On a :

$q(\alpha_i) = 1$, $6 \leq i \leq 29$, $\qquad q(\beta_i) = 0$, $6 \leq i \leq 18$,

$q(\alpha_{30}) = 0$ $\qquad q(\beta_i) = 1$, $19 \leq i \leq 30$.

L'invariant de Arf vaut donc aussi 1.

<u>Remarque</u> : Pour ce calcul, il nous a été essentiel de connaître $q(\beta_0)$ que l'on a pu calculer grâce à la géométrie particulière de la courbe.

Lorsque k est pair, Rohlin considère une droite réelle qu'il déforme en E de manière équivariante (pour la conjugaison complexe) de façon à ce qu'elle ne rencontre pas C. Soit $\tilde{E}$ l'image réciproque de E et Π_+ l'image réciproque de $\mathbb{R}P^+$. Il considère alors la surface caractéristique $F = \tilde{E} \cup \Pi_+$. Nous allons montrer ici que l'invariant de Arf de la forme quadratique q resteinte à $\tilde{E}$ est nul.

$\tilde{E}$ est un revêtement ramifié de $\mathbb{C}P^1$ dont les points de ramification s'échangent par conjugaison. Soit α l'image réciproque d'un segment joignant deux points de ramification conjugués et β une des composantes de l'image réciproque de $\mathbb{R}P^1$. Puisque les deux moitiés de $\tilde{E}$ s'échangent par conjugaison, l'invariant de Arf de la forme quadratique restreinte à $\tilde{E}$ est $q(\alpha)\cdot q(\beta)$. Calculons $q(\alpha)$: en déplaçant la pseudo-droite E jusqu'à ce qu'elle soit tangente à C, on engendre un cycle évanescent pour α, il recoupe Π_+ en un point et,par la théorie de Picard-Lefschetz, l'obstruction à étendre une section est -1 ; donc $q(\alpha) = 0$.

Nous ne savons pas calculer, en général, l'invariant de Arf de la forme q restreinte à Π_+. Bien sûr, les α_i et les β_i forment une base symplectique, mais on ne peut espérer $q(\beta_i) = 0$; cela signifierait que $A \cup \mathbb{R}P^+$ est orientable, ouquel cas on aurait une égalité $p - n = k^2$. L'égalité n'est pas vérifiée par exemple pour les courbes $1\frac{9}{1}$ et $5\frac{5}{1}$ en degré 6, ni pour la courbe $5\frac{\frac{1}{1}\ 14}{1}$ en degré 8, voir p. 15.

V. - LES INEGALITES DE PETROWSKI

<u>THEOREME</u>. Soit C une courbe algébrique plane réelle de degré $2k$ ayant M points doubles ordinaires réels et $2N$ points doubles ordianires complexes. On a alors l'inégalité :

$$|2\chi(\mathbb{R}P^+) - 1 + M| \leq 1 + 3k(k-1) - (M+2N) .$$

<u>COROLLAIRE</u>. Soit C une courbe algébrique plane réelle de degré $2k+1$ qui coupe transversalement la droite de l'infini en M points. On a l'inégalité :

$$|2\chi(\mathbb{R}P^+) - 1 + M| \leq 3k^2 + k .$$

<u>Démonstration du théorème</u>. On éclate tous les points doubles ordinaires pour obtenir une courbe $\tilde{C}$ dans $S = \sigma_{M+2N}\,\mathbb{C}P^2$. Soit $f = 0$ une équation affine de $\tilde{C}$ et $\tilde{C}_\varepsilon$

la courbe lisse d'équation $f = \epsilon$. Soit σ la conjugaison complexe de S . Le quotient S/σ est difféomorphe à la sphère S^4 éclatée N fois . Considérons la surface $F = \widetilde{C}_{\epsilon/\sigma} \cup S_{\mathbb{R}+}$ $(S_{\mathbb{R}^+} = \{x \in S_{\mathbb{R}} \mid f(x) \geq \epsilon\})$. La surface F est nulle en homologie modulo deux dans S/σ , on peut donc considérer X le revêtement double de S ramifié sur X .

La caractéristique d'Euler de X est :

$$\chi(X) = 4 + 2N - \chi(F) = 4 + 2N - \left[\frac{\chi(\widetilde{C}_\epsilon)}{2} + \chi(S_{\mathbb{R}+})\right]$$

$$= 4 + 2N + k(2k-3) - M+2N) - \chi(\mathbb{RP}_+) \quad .$$

La variété X est le quotient par la conjugaison complexe de Y le revêtement double de S ramifié sur $\widetilde{C}_\epsilon$, donc X est simplement connexe, et le second nombre de Betti est :

$$b_2(X) = 2 + 2N + k(2k-3) - (M+2N) - \chi(\mathbb{RP}^+) \quad .$$

La signature de l'involution du revêtement ramifié X est :

$$\frac{F^2}{2} = \frac{\widetilde{C}_\epsilon^{\,2}}{2} - \chi(S_{\mathbb{R}+\epsilon}) = k^2 - (M+2N) - \chi(\mathbb{RP}^+) \quad .$$

De l'inégalité $-\frac{F^2}{2} \leq b_2(M)$, on tire :

$$2\chi(\mathbb{RP}^+) - (1-M) \leq 1 + 3k(k-1) - (M+2N) \quad .$$

On obtient bien sûr aussi l'inégalité :

$$2\chi(\mathbb{RP}^-) - (1-M) \leq 1 + 3k(k-1) - (M+2N) \quad .$$

La conjonction de ces deux inégalités donné l'inégalité de Petrowski puisque

$$1 - M = \chi(S_{\mathbb{R}}) = \chi(S_{\mathbb{R}^+}) + \chi(S_{\mathbb{R}^-}) = \chi(\mathbb{RP}^+) + \chi(\mathbb{RP}^-) \quad .$$

<u>Remarque</u>. Le lecteur curieux établira une inégalité plus fine dans le cas de singularités plus compliquées. Cette formule fait intervenir une résolution tronquée de la singularité : on n'éclate que les points infiniment voisins de multiplicité paire.

REFERENCES

[A'] N. A'CAMPO, Sur la 1ère partie du 16e problème de Hilbert, Séminaire Bourbaki, 31e année, 1978-79, n° 537.

[A] V.I. ARNOLD, The arrangement of the ovals of real plane algebraic curves, involutions of four-dimensional manifolds and the arithmetic of integral quadratic forms, Funkt. Analiz. iego Pril., 5:3 (1971), 1-9 ; traduction angl. Funct. Anal. and its appl. 5 (1972), 169-175.

[GK] D.A. GUDKOV and A.D. KRAKHNOV, Periodicity of the Euler characteristic of real algebraic M-1 varieties, Funkt. Analiz. i ego Pril., Z:2 (1973), 15-19 ; traduction angl. Funct. Anal. and its appl. 7 (1974), 98-102.

[GM] L. GUILLOU et A. MARIN, Une extension d'un théorème de Rohlin sur la signature, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 285 (18 juillet 1977).

[M] N.M. MISHACHEV, Complex orientations of plane M-curves of odd degree, Funkt. Analiz. i ego Pril 9 (1975), 77-78 ; tranduction angl. Funct. Anal. and its Appl. 9 (1975), 342-343.

[R_1] V.A. ROHLIN, Proof of Gudkov's conjecture, Funkt. Analz. i ego Pril. 6 (1971), 62-64 ; tranduction angl. Funct. Anal. and its appl. 6 (1972), 136-138.

[R_2] V.A. ROHLIN, Congruences modulo 16 in Hilbert's sixteenth problem, Funkt. Analiz. i ego Pril. 6 (1971), 58-64 ; part II, ibid. 7 (1973), 91-92. Traduction angl. Funct. Anal. and its appl. 6 (1972), 301-306 ; part II, ibid. 7 (1974), 163-164.

[R_3] V.A. ROHLIN, Complex orientations of real algebraic curves, Funkt. Analiz. i ego Pril. 8 (1974), 71-75 ; traduction angl. Funct. Anal. and its appl. 8 (1974), 331-334.

Université de Paris-Sud
Centre d'Orsay
Bâtiment 425

91405 ORSAY cedex - France