LUCIEN GUILLOU
ALEXIS MARIN

Une extension d'un théorème de Rohlin sur la signature

Thèses d'Orsay, 1979, 13 p
<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1979__2205__A3_0>

UNE EXTENSION D'UN THEOREME DE ROHLIN SUR LA SIGNATURE

Lucien GUILLOU et Alexis MARIN

I. - ENONCE DU RESULTAT

On se place dans la catégorie des variétés différentiables compactes.

Si M^n est une variété close orientée de dimension n, une sous-variété V^{n-2} de dimension $n-2$ sera dite caractéristique si l'élément de $H_{n-2}(M ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ qu'elle représente est duale (par la dualité de Poincaré) à la deuxième classe de Stiefel-Whitney $w_2(M)$. On note $i : V \hookrightarrow M$ l'inclusion de V dans M.

Soit M^4 une variété close orientée de dimension quatre et soit F^2 une surface close (non nécessairement orientable), caractéristique pour M, vérifiant :

$$i_*(H_1(F^2 ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = \{0\} \subset H_1(M ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) .$$

Il existe alors, relativement à la forme d'intersection homologique sur F, une forme quadratique naturelle $q : H_1(F ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ telle que la généralisation suivante de la formule de Rohlin [R_2] ait lieu .

THEOREME. On a la formule : $\sigma(M) - F\cdot F \equiv 2\alpha(M,F) \bmod 16$,

où $F\cdot F$ désigne l'autointersection de la surface F dans M (cf. [W]) , $\sigma(M)$ la signature de la variété orientée M et $\alpha(M,F)$ l'invariant de Brown relatif à la forme quadratique q associée au couple (M,F) (voir [B] et le paragraphe suivant).

Remarque. Si la surface F est orientable, la forme quadratique q est à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \equiv 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, et $\alpha(M,F)$ qui vaut alors 0 ou 4 s'identifie au quadruple de l'invariant de Arf de q : On retrouve la formule connue de Rohlin ([R_2]). Rappelons que le cas $F = \emptyset$ est très célèbre, il date de 1952 et est du aussi à Rohlin ([R_1]) .

II. - LES FORMES QUADRATIQUES SUR LES $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ESPACES VECTORIELS ET L'INVARIANT DE BROWN

(cf. [B], [BLLV] appendices)

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de dimension finie n , muni d'une forme bilinéaire $(x,y) \to x\cdot y$ symétrique, non dégénérée à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

DEFINITION 1. Une forme quadratique sur V à valeurs dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est une application $q : V \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ vérifiant :

$$q(x + y) = q(x) + q(y) + 2\, x \cdot y$$

où $2 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ représente l'unique homomorphisme non nul.

Remarques et exemples.

1) On a $q(0) = q(0 + 0) = q(0) + q(0) + 2\; 0\cdot 0 = q(0) + q(0)$, d'où $q(0) = 0$.

2) Soit $\bar{q} : V \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ une forme quadratique au sens usuel, alors $q = 2\bar{q}$ est une forme quadratique à valeurs dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

3) Sur $V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ il n'y a qu'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée : le produit du corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On a

$$0 = q(1 + 1) = q(1) + q(1) + 2\; 1\cdot 1 = 2\, q(1) + 2 \ , \quad \text{donc} \quad q(1) = \pm 1 \ .$$

Il y a deux formes quadratiques q_+ et q_- sur un espace de dimension un.

DEFINITION 2. Une forme quadratique $q : V \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est neutre s'il existe un sous-espace $H \subset V$ de dimension moitié sur lequel q est nulle (on remarquera que H est égal à son orthogonal pour la forme bilinéaire).

On définit de la manière usuelle la somme orthogonale de deux formes quadratiques ; remarquons que si $V = V_1 \oplus V_2$ est une décomposition orthogonale pour la forme bilinéaire, alors $q = q_{|V_1} \oplus q_{|V_2}$.

En quotientant le semi-groupe des formes quadratiques ainsi obtenu par le semi-groupe des formes neutres, on obtient le groupe de Witt $WQ(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\ ;\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ des formes quadratiques sur les $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ espaces vectoriels à valeurs dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (cf. [BLLV] Appendices).

Soit $q : V \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ une forme quadratique ; pour tout x dans V, on pose $\psi(x) = \exp\left(\frac{i\pi}{2} q(x)\right) = i^{q(x)}$.

DEFINITION 3. L'invariant multiplicatif de Brown de la forme quadratique q est le nombre complexe :

$$\gamma(q) = 2^{-n/2} \sum_{x \in V} \psi(x) \qquad (n = \dim V) .$$

PROPOSITION 1. L'application γ établit un isomorphisme entre le groupe de Witt $WQ(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\ ;\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ et le groupe des racines huitièmes de l'unité.

En notations additives, on écrira :

$$\alpha : WQ(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\ ;\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \quad \text{où} \quad \gamma = \varepsilon \circ \alpha$$

avec $\varepsilon : \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{\approx}$ {racines huitièmes de l'unité} et $\varepsilon(1) = \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Remarque. Si la forme bilinéaire est isotrope, i.e. vérifie $x \cdot x = 0$ pour tout x de V, la forme quadratique q ne prend que des valeurs paires : $q = 2\bar{q}$ (car $0 = q(2x) = q(x) + q(x)$), $\bar{q}$ est une forme quadratique classique, ψ ne prend que les valeurs $+1$ et -1 et l'invariant de Brown γ de q est le classique invariant de Arf de $\bar{q}$ qui vaut $+1$ si la forme représente plus souvent 0 que 1 et -1 dans le cas contraire.

Démonstration de la proposition.

AFFIRMATION 1. $\gamma(q_1 \oplus q_2) = \gamma(q_1) \oplus \gamma(q_2)$.

Démonstration. $\gamma(q_1 \oplus q_2) = 2^{-\frac{n_1+n_2}{2}} \sum_{x+y \in V_1 \oplus V_2} \psi(x+y) = 2^{-\frac{n_1}{2}-\frac{n_2}{2}} \sum_{x \in V_1} \psi(x)\,\psi(y)$

$$= \left[2^{-\frac{n_1}{2}} \sum_{x \in V_1} \psi(x)\right] \times \left[2^{-\frac{n_2}{2}} \sum_{y \in V_2} \psi(y)\right] = \gamma(q_1)\,\gamma(q_2)$$

□

AFFIRMATION 2. Si la forme quadratique q est neutre, $\gamma(q) = 0$.

Démonstration. Soit $H \subset V$ de dimension moitié tel que $q(H) = 0$; soit $V = H \oplus L$ une décomposition en somme directe.

$$\gamma(q) = 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{h+\ell \in V} \psi(h+\ell) = 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{h+\ell \in V} \psi(h)\,\psi(\ell)(-1)^{\ell.h} = 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{\ell \in L} \sum_{h \in H} (-1)^{\ell.h} \psi(\ell)$$

$$= 2^{-\frac{n}{2}} \left[\sum_{\ell \in L-0} \sum_{h \in H} (-1)^{\ell.h} \psi(\ell) + \# H\right] = 2^{-\frac{n}{2}} \times \# H = 1$$

car, pour $\ell \neq 0$, $\ell.h$ prend autant de fois les valeurs 0 et 1 . □

AFFIRMATION 3. Si la forme bilinéaire n'est pas isotrope, V est somme orthogonale d'espaces de dimension un.

Démonstration. Soit $c \in V$ le vecteur caractéristique (tel que, pour tout x dans V, $c.x = x.x$) ; si $\dim V \geq 2$, il existe y distinct de c tel que $y.y = 1$; V se décompose en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\, y \oplus y^{\perp}$ et puisque y est distinct de c , la forme bilinéaire restreinte à l'orthogonal y de y est non isotrope ; on termine par induction sur $\dim V$. □

AFFIRMATION 4. Soit q une forme quadratique à valeurs dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Alors $4q$ est isométrique à $-4q$ (et donc $8q$ est neutre).

Démonstration. Soit $W = V \oplus V \oplus V \oplus V$. Soit $\varphi_i : V \to W$, $i = 1, 2, 3, 4$. $\varphi_1(x) = (0,x,x,x)$; $\varphi_2(x) = (x,0,x,x)$; $\varphi_3(x) = (x,x,0,x)$; $\varphi_4(x) = (x,x,x,0)$. On a $q(\varphi_i(x)) = 3q(x) = -q(x)$ et $\varphi_i(V)$ est orthogonal à $\varphi_j(V)$ pour $i \neq j$ l'isomorphisme cherché est $\bigoplus_{i=1}^{4} \varphi_i$. □

Considérant $q \oplus q_+ \oplus q_-$, l'affirmation 3 et l'exemple 3 nous assurent que $WQ(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} ; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ est cyclique, d'ordre un diviseur de huit par l'affirmation 4. Les affirmations 1 et 2 assurent que γ est un homomorphisme, dans les racines huitièmes de l'unité ; on conclut en vérifiant que $\gamma(q_+) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \exp(i\,\pi/4)$ est primitive. □

Remarque. Le lecteur pourra établir que l'invariant de Brown, d'une forme quadratique q, le rang et l'isotropie ou l'anisotropie de la forme bilinéaire déterminent la classe d'isométrie de la forme quadratique q.

III. - DEFINITION GEOMETRIQUE DE LA FORME QUADRATIQUE : $q : H_1(F ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

On est dans la situation du paragraphe I.

DEFINITION 4. Une membrane $\mathfrak{m}^2$ pour la surface caractéristique F est une surface (non nécessairement orientable), immergée dans M, plongée et normale à F près de son bord $\partial\mathfrak{m}^2$ $(\subset F)$ et dont l'intérieur soit transverse à F.

Le bord d'une membrane $\mathfrak{m}$ consiste en des courbes simples fermées de F ; notons $\mathfrak{G}$ le nombre d'obstruction à étendre le fibré normal à ces courbes dans F

en un sous-fibré de rang un du fibré normal à $\mathfrak{m}$ dans M ; c'est l'entier obtenu en évaluant sur la classe fondamentale de $\mathfrak{m}$ ladite obstruction qui habite $H^2(\mathfrak{m}, \partial\mathfrak{m} ; \pi_1(\mathbb{RP}^1)^t)$ les coefficients étant tordus par l'orientation normale de $\mathfrak{m}$. On pose alors :

$$q'(\mathfrak{m}) = \circledcirc + 2\,\mathfrak{m}\cdot F \pmod 4$$

où $\mathfrak{m}\cdot F$ désigne le nombre de points d'intersection transverse de l'intérieur de $\mathfrak{m}$ avec F .

<u>Remarque</u>. Si les composantes du bord de $\mathfrak{m}$ ont pour voisinage dans F des anneaux, alors $\circledcirc = 2\circledcirc_{\mathbf{v}}$ où $\circledcirc_{\mathbf{v}}$ est le nombre d'obstruction à étendre un champ de vecteurs normaux au bord de la membrane $\mathfrak{m}$ dans F en un champ normal à toute la membrane dans M (le facteur 2 vient de ce que $S^1 \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^1$ est une application de degré 2) .

En particulier, si la surface caractéristique F est orientable, on a toujours : $q'(\mathfrak{m}) = 2\circledcirc_{\mathbf{v}} + 2\,\mathfrak{m}\,.F = 2(\circledcirc_{\mathbf{v}} + \mathfrak{m}\,.F) \bmod 4$ qui habite $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \equiv 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$; on retrouve la définition de Rohlin ([R_2]) .

Des deux lemmes qui suivent, nous apprenons, par le premier appliqué à $(M \times I,\ F \times I)$, que $q'(\mathfrak{m})$ ne dépend que de la classe d'homologie modulo 2 du bord de $\mathfrak{m}$ dans F , ce qui permet de définir une fonction $q : H_1(F ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (puisque $i_*(H_1(F ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = 0$) ; et par le second, que cette fonction est une forme quadratique associée à la forme bilinéaire d'intersection de la surface.

<u>LEMME 1</u>. Supposons que (M^4, F^2) soit bord de (V^5, G^3) , avec V^5 variété compacte orientée de dimension cinq et G^3 sous-variété caractéristique (non nécessairement orientable). Soit $\Delta^2 \subset G^3$ une surface (non nécessairement orientable) telle que $\Delta \cap F = \partial\Delta$ et soit $\mathfrak{m}$ une membrane pour F (dans M) de bord $\partial\mathfrak{m} = \partial\Delta$.

Alors $q'(\mathfrak{m}) = 0$.

LEMME 2. L'application $q : H_1(F ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est quadratique pour la forme bilinéaire d'intersection de la surface F :

$$q(\alpha+\beta) = q(\alpha) + q(\beta) + 2\alpha\cdot\beta \quad .$$

Démonstration du lemme 1.

Par diverses opérations de sommes connexes plongées, on se ramène au cas où M , F et $\partial\Delta$ sont connexes.

Le voisinage du bord de Δ dans F est alors un anneau (*) et si $\mathfrak{G}_v$ désigne le nombre d'obstruction à étendre un champ de vecteur normal à $\mathfrak{m}$ dans M , il suffira d'établir $\mathfrak{G}_v + \mathfrak{m}\cdot F \equiv 0 \bmod 2$.

Désignons par ν et μ les fibrés normaux à G^3 dans V^5 et à Δ^2 dans G^3 . Un voisinage tubulaire de Δ^2 dans (V^5,G^3) est $(W,U) = (E(\nu_{|\Delta^2} \oplus \mu), E(\mu))$. Soit N^4 le bord de la variété $V - \mathring{W}$, alors $H = F - \mathring{W} \cup \partial U = N \cap G$ est une surface caractéristique pour N .

Soient s, s' et t des sections de $\nu_{|\Delta^2}$ et μ en position générale, où $s \mid \partial\Delta^2$ est un collier de $\partial\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{m}$; elles nous permettent de pousser Δ^2 dans ∂W et de former le 2 cycle :

$$\Sigma^2 = (\mathfrak{m} - \mathring{W}) \cup s \oplus t(\Delta^2) \quad (\subset N^4) \quad .$$

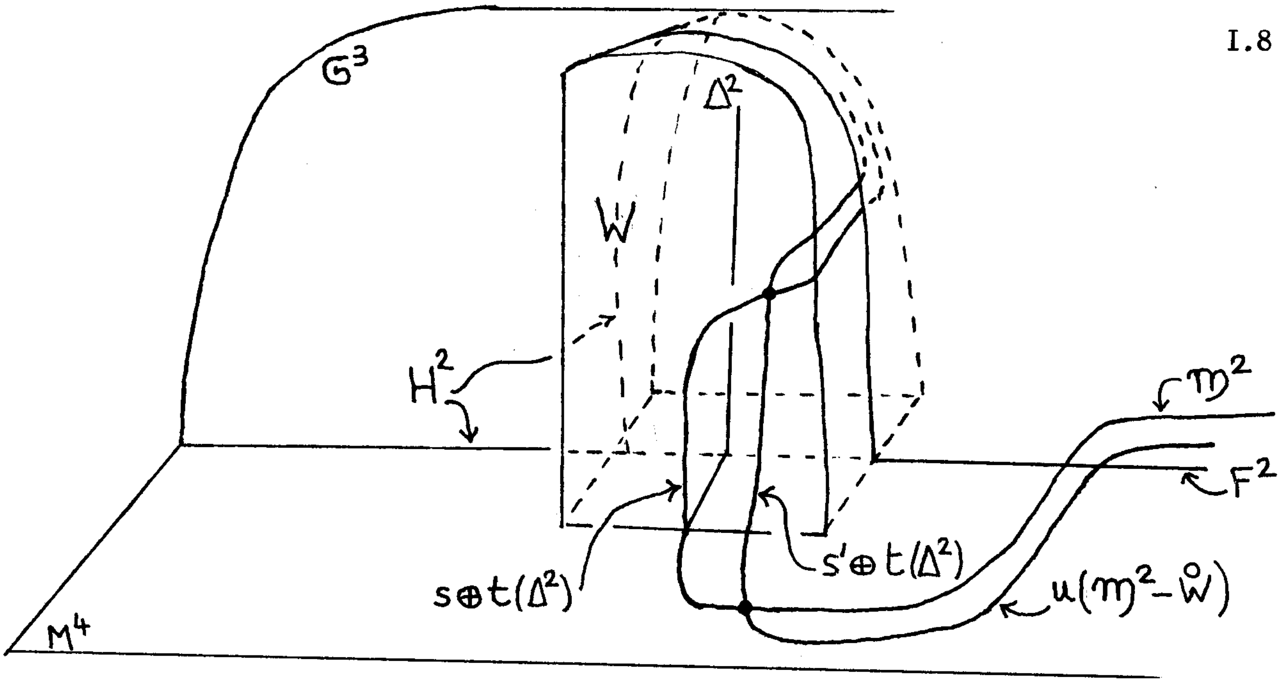
Appliquons-lui la formule de Wu : $\Sigma^2\cdot\Sigma^2 + \Sigma^2.H = 0$.

Soit u une section du fibré normal à $\mathfrak{m}$ coincidant avec s' sur $\partial\mathfrak{m}$.

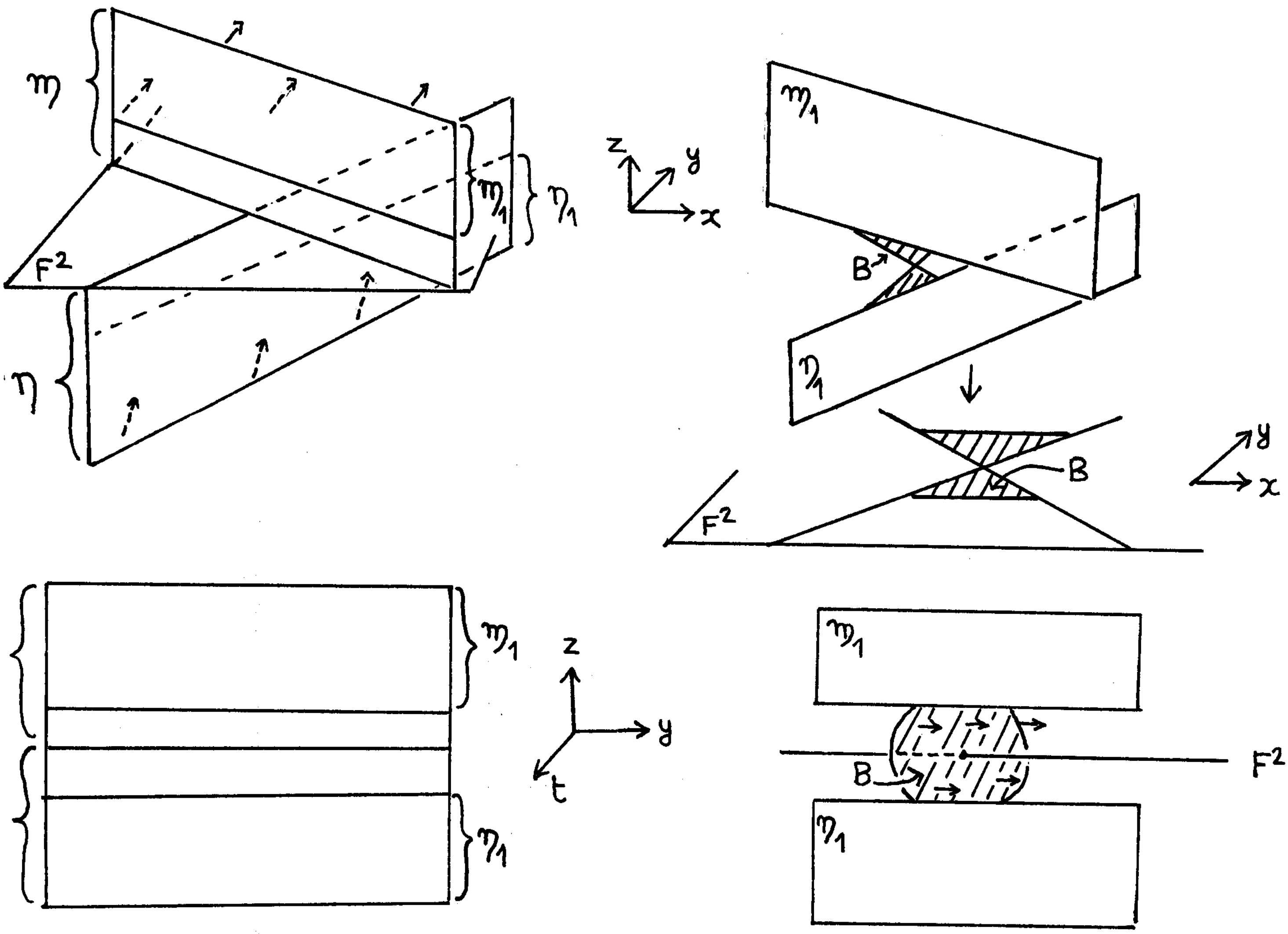
$$\Sigma\,.\,\Sigma = (\mathfrak{m} - \mathring{W} \cup s \oplus t(\Delta^2)) \cdot (u(\mathfrak{m} - \mathring{W}) \cup s' \oplus t(\Delta^2)) = \mathfrak{m}\,.\,u(\mathfrak{m}) + s(\Delta^2)\cdot s'(\Delta^2)$$

$= \mathfrak{G} + s(\Delta^2)\cdot s'(\Delta^2)$ car modulo 2 l'autointersection d'un cycle immergé est égale à la classe d'Euler de son fibré normal.

(*) car l'auto intersection $\partial\Delta$ dans F est bord de l'autointersection de Δ dans G , donc nulle.



LEMME 1



LEMME 2

$$\Sigma \,.\, H = (\mathfrak{m} - \overset{\circ}{W}) \cup s \oplus t(\Delta^2)) \cdot (F - \overset{\circ}{W} \cup \partial U) = \mathfrak{m} \,.\, F + s(\Delta^2) . \Delta^2$$

mais $s(\Delta^2).\Delta^2 = s(\Delta^2).s'(\Delta^2)$, d'où en additionnant :

$$0 = \Sigma \,.\, \Sigma + \Sigma . H = \Theta_V + \mathfrak{m} \cdot F \qquad \square$$

Démonstration du lemme 2.

Soient $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ des membranes pour α et β . Il s'agit de construire une membrane pour $\alpha + \beta$. Si les bords de $\mathfrak{m}$ et de $\mathfrak{n}$ sont disjoints, on a $\alpha \,.\, \beta = 0$ et $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \cup \mathfrak{n}$ est une membrane pour $\alpha + \beta$ pour laquelle $q'(\mathfrak{p}) = q'(\mathfrak{m}) + q'(\mathfrak{n})$.

Si les bords de $\mathfrak{m}$ et de $\mathfrak{n}$ ne sont pas disjoints, nous pouvons supposer qu'ils sont en position générale. Près de chaque point x_0 de $\partial\mathfrak{m} \cap \partial\mathfrak{n}$, soient (x,y,z,t) des coordonnées telles que :

1) x et y sont des coordonnées de F près de x_0 ;

2) $\mathfrak{m}$ est d'équation $x + y = t = 0 \quad z \geq 0$;

$\mathfrak{n}$ est d'équation $x - y = t = 0 \quad z \leq 0$.

Soient $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{n}_1$ les membranes $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ privées du voisinage tubulaire de F de rayon 1 . Soit B la bande paramétrée par :

$$(u,v) \longmapsto (vu, -u, v, u(1-v^2)) \quad , \quad (u,v) \in [-1,1]^2 \quad .$$

Posons $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{m}_1 \cup \mathfrak{n}_1 \cup B$; la membrane $\mathfrak{p}$ est obtenue en prolongeant, jusqu'à F , la surface $\mathfrak{p}_1$ le long de rayons du fibré normal à F . Notons que le champ de vecteur $(0,1,0,0)$ est normal à $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{p}$ et que :

$$\mathfrak{p} \cdot F = \mathfrak{m} \cdot F + \mathfrak{n} \,.\, F + \# (\partial\mathfrak{m} \cap \partial\mathfrak{n})$$

et donc
$$q'(\mathfrak{p}) = q'(\mathfrak{m}) + q'(\mathfrak{n}) + 2\,\alpha . \beta \qquad \square$$

IV. - PREUVE DU THEOREME

On considère ici des couples (M^4,F^2) où M est une variété close orientée de dimension quatre et F est une surface caractéristique.

DEFINITION 5. Deux couples (M,F) et $M',F')$ sont cobordants s'il existe un couple (V^5,G^3) tel que $\partial V^5 = M \cup -M'$; $\partial G^3 = F \cup F'$ où V^5 est une variété compacte orientée de dimension cinq et G^3 une sous-variété caractéristique. Le groupe de cobordisme ainsi obtenu est le groupe de cobordisme caractéristique noté Ω_c^4.

Par des chirurgies d'indice un sur des cercles disjoints de la surface caractéristique F, tout couple (M,F) est cobordant à un couple (M',F) avec $i_*(H_1(F ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = \{0\} \subset H_1(M' ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Si $(M,F) = \partial(V,G)$, la moitié de l'homologie de F est représentée par des bords de surfaces dans G. Du lemme 1, on tire donc le corollaire suivant.

COROLLAIRE. Pour tout (M,F), on peut définir $\alpha(M,F)$ qui ne dépend que de la classe de cobordisme caractéristique de (M,F) et fournit un homomorphisme $\alpha : \Omega_c^4 \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Remarque. La signature σ et l'autointersection de la surface caractéristique $F \cdot F$ définissent deux homomorphismes de Ω_c^4 dans $\mathbb{Z}$. Pour établir que les deux homomorphismes $\sigma - F.F$ et 2α de Ω_c^4 dans $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ sont égaux, il suffit de l'établir sur des générateurs de Ω_c^4.

LES EXEMPLES FONDAMENTAUX

EXEMPLE A. La droite $\mathbb{C}P^1$ est caractéristique dans le plan projectif complexe $\mathbb{C}P^2$; les invariants sont $\sigma(\mathbb{C}P^2) = 1$, $\mathbb{C}P^1.\mathbb{C}P^1 = 1$, $\alpha(\mathbb{C}P^2,\mathbb{C}P^1) = 0$.

EXEMPLE B. Soit $c : \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$ la conjugaison complexe, $\mathbb{C}P^2/c$ est une sphère d'homotopie Σ^4 (elle est simplement connexe car une droite complexe coupe $\mathbb{R}P^2$ transversalement en un point et sa caractéristique d'Euler est $\frac{1}{2}(\chi(\mathbb{C}P^2) + \chi(\mathbb{R}P^2)) = \frac{1}{2}(3 + 1) = 2$). (*)

Le plan projectif réel $\mathbb{R}P^2 \subset \frac{\mathbb{C}P^2}{c}$ est caractéristique (puisque $H_2(\Sigma^4) = 0$). On a $\sigma(\frac{\mathbb{C}P^2}{c}) = 0$, $\mathbb{R}P^2 \underset{\mathbb{C}P^2/c}{\cdot} \mathbb{R}P^2 = 2(\mathbb{R}P^2 \underset{\mathbb{C}P^2}{\cdot} \mathbb{R}P^2) = 2(-\chi(\mathbb{R}P^2) = -2$ et $\alpha(\mathbb{C}P^2/\sigma, \mathbb{R}P^2) = 1$ car $q(\mathbb{R}P^1) = 1$ ce qui se voit en prenant pour membrane une moitié de $\mathbb{C}P^1$, elle ne recoupe pas $\mathbb{R}P^2$. L'obstruction vaut $+1$: considérez une conique réelle proche d'une conique dégénérant en deux droites réelles proches de $\mathbb{R}P^1$; une moitié de cette conique borde le bord du tube normal à $\mathbb{R}P^1$ dans $\mathbb{R}P^2$ et, tout en restant dans un voisinage de la membrane, la coupe en un point avec signe +1 (**)

$\square$

AFFIRMATION 5. Les exemples A et B forment une base de Ω_c^4.

Démonstration. Qu'ils soient indépendants se voit en considérant les homomorphismes signature et autointersection. L'exemple A permet de se ramener au cas de signature nulle ; l'exemple B permet de se ramener au cas de signature et autointersection nulle (l'autointersection de la surface caractéristique est congrue modulo deux au rang et donc à la signature de M, car $W(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ le groupe de Witt des formes bilinéaires symétriques non dégénérées sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). L'affirmation découle alors de la proposition suivante.

PROPOSITION 2. Soit (M^4, F^2) un couple comme au paragraphe 1 tel que $\sigma(M) = F.F = 0$. Alors, (M,F) est nul dans Ω_c^4.

(*) En fait, Σ^4 est difféomorphe à la sphère S^4 : cela peut se voir en considérant une décomposition en anses de CP^2, invariante par la conjugaison complexe, et ayant une seule anse d'indice deux dont l'âme est la moitié de la complexifiée d'une droite réelle.

(**) puisque ce sont des courbes complexes.

Démonstration. Puisque la signature réalise un isomorphisme du groupe de cobordisme Ω^4 sur $\mathbb{Z}$, M est bord d'une variété orientée de dimension cinq V^5 .

Soit t une trivialisation au-dessus du deux squelette de $M^4 - F^2$ du fibré tangent à M dont l'obstruction soit F . Il y a alors dans V un trois cycle $\bar{G}$ de bord F et une trivialisation E au-dessus du deux squelette de $V - \bar{G}$ qui étende t et dont l'obstruction soit $\bar{G}$.

LEMME 3. Soit V une variété à bord de dimension cinq ; soit $\bar{G}$ dans V un trois cycle relatif dont le bord soit une surface d'autointersection nulle du bord de V . Alors $\bar{G}$ est cohomologue modulo le bord à une sous-variété G de V .

Démonstration. Supposons $\bar{G}$ triangulé et que $\bar{G}$ soit une variété près de l'intérieur des i simplexes pour $i > i_0$, c'est certainement vrai pour $i_0 = 2$. Soit $\sigma = \sigma^{i_0}$ un simplexe de $\bar{G}$ de dimension i_0 , le link $L_\sigma^{2-i_0}$ de σ dans $\bar{G}$ est une sous-variété de codimension deux du link de σ dans V^5 qui est une sphère $S_\sigma^{4-i_0}$. Le link $L_\sigma^{2-i_0}$ borde une variété M_σ dans S_σ : pour $i_0 = 2$ parceque $\bar{G}$ est un cycle, sinon le fibré normal E à L_σ dans S_σ a une section non nulle s (trivial si $i_0 = 1$ et si $i_0 = 0$, en ayant bien sûr pris soin de connecter par un arbre tous les sommets de $\bar{G}$, parceque $F.F = 0$). La sous-variété $s(L_\sigma)$ de ∂E représente un élément de $H^1(\partial E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$; considérant la suite exacte de Mayer Vietoris $H^1(E ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus H^1(S - \mathring{E} ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^1(\partial E ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^2(S ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$,

on voit que,quitte à modifier $s(L)$ par un élément de $H^1(E ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, on peut supposer que $s(L)$ provient de $x \in H^1(S - \mathring{E} ; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Représentons x par une application $S - \mathring{E} \to \mathbb{RP}^4$, transverse à $\mathbb{RP}^3$ et coincidant sur le bord avec la construction de Thom du fibré normal à $s(L)$ dans ∂E . On obtient ainsi une sous-variété M_σ de S_σ de bord L_σ . Pour éliminer la singularité de σ_0 , il suffit de remplacer l'étoile de σ dans $\bar{G}$ par le joint de M_σ et de $\dot{\sigma}$ le bord de σ .

Il nous reste cependant à montrer comment changer la classe d'homologie de $s(L)$ par un élément y de $H^1(E\ ;\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. La classe y est représentée par une sous-variété Y de codimension un de L_σ , la restriction à un voisinage de Y du fibré normal à L_σ dans S_σ est isomorphe à $\epsilon \oplus \nu(Y,L_\sigma)$ et on peut supposer que s est la section constante $+1$ du fibré trivial ϵ ; il suffit alors de prendre s' la section qui est égale à s hors de $E\nu(Y,L_\sigma)$, à -1 au-dessus de Y et telle que $p_2 \circ s' : \nu(Y,L\sigma) \to \nu(Y,L\sigma)$ soit l'identité. $\square$

REFERENCES

[BLLV] J. BARGE, J. LANNES, F. LATOUR et P. VOGEL, Λ-sphères, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 7, fasc. 4 (1974), 463-506.

[B] E.H. BROWN Jr., Generalizations of the Kervaire invariant, Ann. of Math. 95 (1972), 368-384.

[R_1] V.A. ROHLIN, Soviet Math. Doklady, 84 (1952), 221-224 (en russe).

[R_2] V.A. ROHLIN, Proof of Gudkov's conjecture, Funkt. Analiz. i ego Pril. 6, (1971), 62-64 (en russe) ; traduction anglaise, Funct. Anal. and its appl., 6 (1972), 136-138.

[W] H. WHITNEY, On the topology of differentiable manifolds, in Lectures on Topology, Univ. of Michigan Press,(1941), 101-141.

Université de Paris-Sud
Centre d'Orsay
Bât. 425
91405 ORSAY cedex - France