

Astérisque

Introduction

Astérisque, tome 363-364 (2014), p. XIII-XIX

http://www.numdam.org/item?id=AST_2014__363-364__R13_0

© Société mathématique de France, 2014, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

INTRODUCTION

Le présent volume rassemble les exposés d'un groupe de travail qui s'est tenu à l'École polytechnique du printemps 2006 au printemps 2008 sur les travaux de Gabber présentés dans [Gabber, 2005a] et [Gabber, 2005b]. Ceux-ci portent sur la cohomologie étale et l'uniformisation des schémas quasi-excellents.

En ce qui concerne la cohomologie étale, un résultat central est le théorème de finitude suivant :

1. Théorème. — *Soient Y un schéma noethérien quasi-excellent (cf. I-2.10), $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini, n un entier inversible sur Y , et F un faisceau constructible de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ -modules sur X . Alors, pour tout q , $R^q f_* F$ est constructible, et il existe un entier N tel que $R^q f_* F = 0$ pour $q \geq N$.*

Rappelons que, sans hypothèse sur Y ni sur n , mais lorsqu'on suppose f propre et de présentation finie, les faisceaux $R^q f_* F$ sont constructibles, et nuls pour $q > 2d$ si d majore la dimension des fibres de f [SGA 4 XIV 1.1]. Si f n'est pas supposé propre, l'hypothèse que n soit inversible sur Y est essentielle : si k est un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et X la droite affine sur $Y = \text{Spec}(k)$, $H^1(X, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ est un \mathbf{F}_p -espace vectoriel de dimension infinie (cf. [SGA 4 XIV 1.3]). Pour Y excellent de caractéristique nulle, 1 est démontré dans l'exposé d'Artin [SGA 4 XIX]. Si S est un schéma noethérien régulier de dimension ≤ 1 (non nécessairement quasi-excellent) et f un morphisme de S -schémas de type fini, la conclusion de 1 est encore vraie, d'après [SGA 4½ [Th. finitude] 1.1] (ce résultat peut d'ailleurs se déduire de 1, cf. exposé XIII).

La démonstration d'Artin dans [SGA 4 XIX] utilise la résolution des singularités de Hironaka pour se ramener au cas où f est l'inclusion du complément d'un diviseur régulier dans un schéma régulier et F un faisceau constant, auquel cas la conclusion découle du théorème de pureté cohomologique absolu établi également dans *loc. cit.*

La démonstration de Gabber de 1 suit la même méthode, mais :

(a) on doit faire appel au théorème de pureté cohomologique absolu établi dans le cas général par Gabber [Fujiwara, 2002],

(b) on ne dispose plus de la résolution des singularités sous la forme de Hironaka ; celle-ci est remplacée par un théorème d'uniformisation locale, dû à Gabber ([Gabber, 2005b]), qui s'énonce ainsi (IX-1.1) :

2. Théorème. — Soient X un schéma noethérien quasi-excellent, Z un fermé rare de X et ℓ un nombre premier inversible sur X . Il existe une famille finie de morphismes $(p_i : X_i \rightarrow X)_{i \in I}$, couvrante pour la topologie des ℓ' -altérations et telle que, pour tout $i \in I$:

- (i) X_i soit régulier et intègre,
- (ii) $p_i^{-1}(Z)$ soit le support d'un diviseur à croisements normaux strict.

La topologie des ℓ' -altérations est une topologie du type de celles considérées par Voevodsky (cf. [Goodwillie & Lichtenbaum, 2001]), pour laquelle les ℓ' -altérations (i. e. les morphismes propres surjectifs génériquement finis de degré résiduel générique premier à ℓ) et les recouvrements étales complètement décomposés (i. e. de Nisnevich) sont des familles couvrantes ; voir II-2.3 pour une définition précise.

La première partie de ce volume est consacrée, après des rappels, dans I, sur les notions de schéma quasi-excellent ou excellent, à la démonstration de 2 et de certains compléments et variantes.

Il y a trois grandes étapes.

(A) *Fibration en courbes.* La question étant locale pour la topologie de Nisnevich, et en particulier pour la topologie de Zariski, on peut supposer X de dimension finie. On raisonne par récurrence sur la dimension d de X . On peut supposer X local hensélien. L'hypothèse de quasi-excellence sur X permet d'appliquer le théorème d'algébrisation de Popescu au complété \widehat{X} de X , et de se ramener, via des techniques d'approximation dues à Gabber, expliquées dans III, au cas où X est local complet de dimension d , et même intègre, normal, avec $d \geq 2$. On dispose alors des classiques théorèmes de structure de Cohen. Tels quels, ils sont toutefois insuffisants. Mais un délicat raffinement, dû à Gabber, démontré dans IV, permet de se ramener, quitte à remplacer X par une extension finie de degré générique premier à ℓ , au cas où X est le complété en un point fermé d'un schéma X' de type fini et de dimension relative 1 sur un schéma local noethérien régulier complet de dimension $d - 1$, et le fermé Z le complété d'un fermé rare Z' de X' . Ce théorème de « fibration », ou « d'algébrisation partielle », est établi dans V. Après quelques nouvelles réductions faciles, on est ramené au cas où X est un schéma normal intègre, propre sur un schéma affine normal intègre excellent Y de dimension $d - 1$, à fibre générique géométriquement intègre, lisse, et de dimension 1, et le fermé Z un diviseur de fibre générique étale.

(B) *de Jong et log régularité.* On peut alors appliquer le théorème de la courbe nodale de de Jong, sous sa forme équivariante, [de Jong, 1997, 2.4] : il existe un groupe fini G et une altération projective G -équivariante du morphisme $f : X \rightarrow Y$ en un morphisme $f' : X' \rightarrow Y'$, qui est une courbe projective nodale G -équivariante, et l'image inverse Z' de Z un diviseur de composantes dominantes étales et transverses au lieu lisse de f' (IX-1.2). Appliquant l'hypothèse de récurrence au quotient de Y' par un ℓ -Sylow de G , et utilisant le lemme d'Abhyankar, on se ramène finalement au cas

où G est un ℓ -groupe, $X = X'/G$, $Y = Y'/G$, Y' contient un fermé (G -équivariant) T' tel que le couple (Y', T') soit *log régulier*, ainsi que le couple $(X', f'^{-1}(T') \cup D)$, où D est un diviseur (G -équivariant) étale sur Y' , avec $Z' \subset f'^{-1}(T') \cup D$ (cf. VI-1.9, VI-2.1).

(C) *Modifications équivariantes*. Le quotient d'un log schéma log régulier par l'action d'un groupe fini n'est pas en général log régulier. En particulier, $X = X'/G$, muni du fermé $(f'^{-1}(T') \cup D)/G$, n'est pas nécessairement log régulier. Si ce couple était log régulier, la désingularisation de Kato-Nizioł des schémas log réguliers ([Kato, 1994], [Nizioł, 2006]), généralisant la classique désingularisation des variétés toriques [Kempf et al., 1973], terminerait la démonstration de 2. Gabber a dégagé des conditions suffisantes assurant que le quotient d'un log schéma log régulier par un groupe fini est encore log régulier. Il s'agit de la notion d'*action très modérée*, étudiée dans VI. Gabber montre qu'il existe une modification projective G -équivariante $p : X'' \rightarrow X'$ et un fermé G -équivariant D'' de X'' contenant l'image inverse de $f'^{-1}(T') \cup D$ tels que le couple (X'', D'') soit log régulier, et l'action de G sur (X'', D'') très modérée. On conclut alors en appliquant la désingularisation de Kato-Nizioł au quotient de (X'', D'') par G . La démonstration de ce théorème de modification est donnée en VIII. Elle s'appuie sur la théorie des désingularisations canoniques en caractéristique nulle (Hironaka, Bierstone-Milman, Villamayor, Temkin).

On établit dans X-1.1 une *variante relative* de ce théorème de modification, due à Gabber, où le log schéma G -équivariant considéré est non seulement log régulier, mais log lisse sur une base log régulière S , avec action triviale de G : on peut construire une modification équivariante respectant la log lissité sur S . On en déduit notamment les raffinements suivants (également dus à Gabber) de théorèmes de de Jong (X-2.1, X-2.4, X-3.5) :

3. Théorème. — (1) Soient X un schéma séparé et de type fini sur un corps k , $Z \subset X$ un fermé rare, ℓ un nombre premier $\neq \text{car}(k)$. Il existe alors une extension finie k' de k de degré premier à ℓ et une ℓ' -altération $h : X' \rightarrow X$ au-dessus de $\text{Spec } k' \rightarrow \text{Spec } k$, avec X' lisse et quasi-projectif sur k' , et $h^{-1}(Z)$ le support d'un diviseur à croisements normaux strict. Si k est parfait, on peut prendre $k' = k$ et choisir h génériquement étale.

(2) Soient S un schéma noethérien séparé, intègre, excellent, régulier, de dimension 1, de point générique η , X un schéma séparé, plat et de type fini sur S , ℓ un nombre premier inversible sur S , $Z \subset X$ un fermé rare. Alors il existe une extension finie η' de η de degré premier à ℓ , et une ℓ' -altération projective $h : \tilde{X} \rightarrow X$ au-dessus de $S' \rightarrow S$, où S' est le normalisé de S dans η' , avec \tilde{X} régulier et quasi-projectif sur S' , un diviseur à croisements normaux strict \tilde{T} sur \tilde{X} , et une partie fermée finie Σ de S' tels que :

(i) en dehors de Σ , le morphisme $\tilde{X} \rightarrow S'$ est lisse et $\tilde{T} \rightarrow S'$ est un diviseur relatif à croisements normaux ;

(ii) localement pour la topologie étale autour de chaque point géométrique x de $\tilde{X}_{s'}$, où s' appartient à Σ , le couple (\tilde{X}, \tilde{T}) est isomorphe au couple formé de

$$X' = S'[t_1, \dots, t_n, u_1^{\pm 1}, \dots, u_s^{\pm 1}] / (t_1^{a_1} \cdots t_r^{a_r} u_1^{b_1} \cdots u_s^{b_s} - \pi),$$

$$T' = V(t_{r+1} \cdots t_m) \subset X'$$

autour du point $(u_i = 1), (t_j = 0)$, avec $1 \leq r \leq m \leq n$, pour des entiers strictement positifs $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s$ tels que $\text{pgcd}(p, a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s) = 1$, p désignant l'exposant caractéristique de s' , et π une uniformisante locale en s' ;

(iii) $h^{-1}(Z)_{\text{réd}}$ est un sous-diviseur de $\tilde{T} \cup \bigcup_{s' \in \Sigma} \tilde{X}_{s'}$.

Diverses généralisations, dues à Temkin, de ce théorème et du théorème d'Abramovich-Karu de réduction semi-stable faible en caractéristique nulle (voir [Abramovich & Karu, 2000]) sont données dans la section 3 de l'exposé X.

Le théorème d'uniformisation 2 a le corollaire suivant, dit théorème d'uniformisation « faible », où n'apparaît plus de nombre premier ℓ :

4. Corollaire. — Soient X un schéma noethérien quasi-excellent, Z un fermé rare de X . Il existe une famille finie de morphismes $(p_i : X_i \rightarrow X)_{i \in I}$, covrante pour la topologie des altérations et telle que, pour tout $i \in I$:

(i) X_i soit régulier et intègre,

(ii) $p_i^{-1}(Z)$ soit le support d'un diviseur à croisements normaux strict.

La topologie des altérations est définie de manière analogue à celle des ℓ' -altérations. Elle est plus fine que la topologie étale, et aucune contrainte n'est imposée sur le degré des extensions résiduelles génériques, cf. II-2.3.3. On peut démontrer 4 indépendamment de 2, en suivant seulement les étapes (A) et (B) décrites plus haut, à l'aide, dans (A), d'une forme faible du théorème de Cohen-Gabber. Le théorème de modification de (C) est inutile, il n'y a pas besoin de faire appel à la résolution canonique des singularités en caractéristique nulle. La résolution des singularités toriques de Kato-Nizioł suffit. Cette démonstration est exposée dans VII.

La démonstration de 1 est donnée dans XIII-3, en application de 2 et du théorème de pureté cohomologique absolu. L'énoncé de 1 comporte deux assertions :

(i) la constructibilité des $R^q f_* F$ pour tout q ,

(ii) l'existence d'un entier N (dépendant de (f, F)) tel que $R^q f_* F = 0$ pour $q \geq N$, autrement dit, le fait que Rf_* envoie $D_c^b(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ dans $D_c^b(Y, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$, l'indice c désignant la sous-catégorie pleine de D^b formée des complexes à cohomologie constructible.

Dans XIII-3, ces deux assertions sont démontrées simultanément. On peut toutefois démontrer (i) en n'invoquant que le théorème d'uniformisation faible 4 (et le

théorème de pureté). Ceci est fait dans XIII-2. L'idée est la suivante. Si, dans 4, les morphismes p_i étaient propres, on pourrait, après réduction au cas où f est une immersion ouverte et F un faisceau constant, se ramener, par descente cohomologique propre, au cas de l'immersion du complément d'un diviseur à croisements normaux strict dans un schéma régulier, justiciable du théorème de pureté. Cependant, les p_i ne sont pas propres en général. Gabber tourne la difficulté à l'aide du théorème de constructibilité générique de Deligne [SGA 4 $\frac{1}{2}$ [Th. finitude] 1.9 (i)] et d'un théorème d'« hyper-changement de base » (XII_A-2.2.5). Ce théorème est déduit dans *loc. cit.* d'un théorème de descente cohomologique « orientée » (XII_A-2.2.3), qui utilise la notion de *produit orienté de topos*, due à Deligne [Laumon, 1983]. Les définitions et propriétés de base sont rappelées dans l'exposé XI. Un résultat clé est un théorème de changement de base pour des « tubes » (XI-2.4). Une démonstration de XII_A-2.2.5 indépendante de la notion de produit orienté, due à W. Zheng, est donnée dans l'exposé XII_B.

D'après des exemples classiques de Nagata, un schéma noethérien quasi-excellent n'est pas nécessairement de dimension finie. Si Y est de dimension finie, alors Rf_* est de dimension cohomologique finie, d'après un théorème de Gabber, présenté dans l'exposé XVIII_A, et par suite (ii) découle de (i). Gabber prouve, plus précisément, que si X est un schéma noethérien, strictement local, de dimension $d > 0$, et ℓ un nombre premier inversible sur X , alors, pour tout ouvert U de X , on a $\text{cd}_\ell(U) \leq 2d - 1$.

L'hypothèse de quasi-excellence dans 1 est essentielle, comme le montre l'exemple donné dans XIX, d'une immersion ouverte $j : U \rightarrow X$ de schémas noethériens, avec 2 inversible sur X , telle que $R^1j_*(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ ne soit pas constructible.

Gabber a démontré des variantes de 1 pour les faisceaux d'ensembles ou de groupes non commutatifs [Gabber, 2005a] :

5. Théorème. — *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini entre schémas noethériens. Alors :*

- (1) *Pour tout faisceau d'ensembles constructible F sur X , f_*F est constructible.*
- (2) *Si Y est quasi-excellent, et si L est un ensemble de nombres premiers inversibles sur Y , pour tout faisceau de groupes constructible et de L -torsion F sur X , R^1f_*F est constructible.*

La démonstration est donnée dans l'exposé XXI. Elle ne fait pas appel aux théorèmes d'uniformisation précédents. Elle utilise, pour le point clé, une technique d'ultraproduits, et un théorème de rigidité pour les coefficients non abéliens, dû également à Gabber, qui est établi dans l'exposé XX. Ce théorème est une variante d'un théorème de Fujiwara-Gabber pour les coefficients abéliens [Fujiwara, 1995, 6.6.4, 7.1.1] (signalée dans *loc. cit.*, 6.6.5). Il s'énonce ainsi :

6. Théorème. — Soient (X, Y) un couple hensélien, où $X = \text{Spec } A$, $Y = V(I)$, l'idéal I étant supposé de type fini, \widehat{X} le complété I -adique de X , U un ouvert de X contenant $X - Y$, et $\widehat{U} = \widehat{X} \times_X U$. Alors, pour tout champ en groupoïdes ind-fini C sur U , la flèche de restriction $\Gamma(U, C) \rightarrow \Gamma(\widehat{U}, C|_{\widehat{U}})$ est une équivalence.

La démonstration donnée dans l'exposé XX est indépendante de [Fujiwara, 1995].

Le reste du volume est consacré à trois autres applications des théorèmes d'uniformisation.

(a) *Lefschetz affine.* Il s'agit de généralisations des théorèmes de [SGA 4 XIV 3.1] (pour les morphismes affines entre schémas de type fini sur un corps) et [SGA 4 XIX 6.1] (pour les morphismes affines de type fini de schémas excellents de caractéristique nulle), ainsi que du théorème de Gabber pour les morphismes affines de schémas de type fini sur un trait [Illusie, 2003]. L'énoncé principal est le suivant (XV-1.1.2) :

7. Théorème. — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme affine de type fini, où Y est un schéma noethérien quasi-excellent, muni d'une fonction de dimension δ_Y , et soit n un entier inversible sur Y . Alors, pour tout faisceau constructible F de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ -modules sur X , et tout entier q , on a :

$$(7.1) \quad \delta_Y(\mathbf{R}^q f_* F) \leq \delta_X(F) - q$$

Une fonction de dimension δ sur un schéma T est une fonction $\delta : T \rightarrow \mathbf{Z}$ telle que $\delta(y) = \delta(x) - 1$ si y est une spécialisation étale immédiate de x . Cette notion est due à Gabber. Elle généralise celle de *dimension rectifiée* introduite dans [SGA 4 XIV]. Elle est définie et étudiée dans l'exposé XIV. Dans (7.1), la fonction δ_X est reliée à δ_Y par $\delta_X(x) = \delta_Y(f(x)) + \text{deg. tr.}(k(x)/k(f(x)))$, et pour un faisceau G sur X (resp. Y) $\delta_X(G)$ (resp. $\delta_Y(G)$) désigne la borne supérieure des $\delta_X(x)$ (resp. $\delta_Y(x)$) pour $G_x \neq 0$. La démonstration de 7 se fait par réduction au théorème de Gabber cité plus haut, pour les schémas de type fini sur un trait, à l'aide du théorème d'uniformisation « faible » 4 et du théorème d'hyper-changement de base (XII_{A,B}). De 7 résulte :

8. Corollaire. — Si X est local noethérien, hensélien, quasi-excellent, et de dimension d , de corps résiduel k , et si U est un ouvert affine de X , alors, pour tout nombre premier ℓ inversible sur X , on a

$$(8.1) \quad \text{cd}_\ell(U) \leq d + \text{cd}_\ell(k).$$

En particulier, si X est intègre, de corps des fractions K , on en déduit $\text{cd}_\ell(K) = d + \text{cd}_\ell(k)$, formule conjecturée dans [SGA 4 x 3.1]. Les valeurs possibles de $\text{cd}_\ell(U)$, pour U ouvert, non nécessairement affine, de X sont étudiées dans XVIII_A et XVIII_B. Gabber donne également des contre-exemples à (8.1) lorsqu'on omet l'hypothèse de quasi-excellence.

(b) *Une nouvelle démonstration de la conjecture de pureté absolue.* La démonstration de cette conjecture qui est donnée dans [Fujiwara, 2002] utilise, dans sa dernière partie, des techniques de K -théorie algébrique (résultats de Thomason). Gabber a annoncé dans [Gabber, 2005b] qu'on peut éviter tout recours à la K -théorie algébrique, en utilisant, à la place, la forme raffinée du théorème de de Jong 3(2). Cette nouvelle démonstration est exposée en détail dans l'exposé XVI. Cet exposé contient en outre une théorie de classes fondamentales généralisées (due à Gabber), utilisée pour construire une théorie de morphismes de Gysin pour les morphismes d'intersection complète lissifiables, généralisant les constructions de [SGA 4 $\frac{1}{2}$ [Cycle]].

(c) *Complexes dualisants.* La notion de complexe dualisant est due à Grothendieck. L'unicité, l'existence et les propriétés générales des complexes dualisants sont étudiées dans [SGA 5 I]. Toutefois, dans *loc. cit.* l'existence n'est établie qu'en caractéristique nulle, ou sous des hypothèses d'existence de résolution des singularités, et de validité du théorème de pureté absolue (conjecturale à l'époque). Dans le cas de schémas de type fini sur un schéma régulier de dimension ≤ 1 , l'existence est prouvée inconditionnellement par Deligne dans [SGA 4 $\frac{1}{2}$ [Dualité]]. Dans le cas général, l'existence, et la théorie de dualité locale qui en résulte, ont été annoncées par Gabber dans [Gabber, 2005b]. L'exposé XVII expose cette théorie en détail. Si X est un schéma noethérien, et $\Lambda = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, où n est un entier inversible sur X , un *complexe dualisant* sur X est un objet de $D_c^b(X, \Lambda)$ tel que le foncteur $D_K = \mathbf{R}\mathbf{Hom}(-, K)$ envoie $D_c^b(X, \Lambda)$ dans $D_c^b(X, \Lambda)$ et que, pour tout $L \in D_c^b(X, \Lambda)$, la flèche de bidualité $L \rightarrow D_K D_K(L)$ soit un isomorphisme. Cette définition diffère légèrement de celle de [SGA 5 I 1.7], voir XVII-0.1. L'unicité, à décalage et torsion près par un Λ -module inversible, est prouvée dans [SGA 5 I 2.1]. Le résultat principal de l'exposé XVII est que, si X est excellent et admet une fonction de dimension, au sens précisé plus haut, alors X admet un complexe dualisant. De plus, ces complexes dualisants ont les propriétés de fonctorialité attendues, et, si X est régulier, le faisceau constant Λ_X est dualisant. Cette dernière assertion était une conjecture dans [SGA 5 I], démontrée dans le cas de caractéristique nulle. Nous renvoyons le lecteur à l'introduction de l'exposé XVII pour des énoncés plus complets, et des indications sur la méthode de démonstration, dont les ingrédients essentiels sont le théorème de finitude 1 et le théorème d'algébrisation partielle de l'exposé V (voir (A) *supra*).

Les résultats présentés dans ce volume et leurs démonstrations sont dus à Ofer Gabber, à quelques exceptions près, précisées à la place appropriée dans les exposés correspondants.

Luc Illusie
Yves Laszlo
Fabrice Orgogozo