Astérisque

LUC ILLUSIE

Log régularité, actions très modérées

Astérisque, tome 363-364 (2014), Séminaire Bourbaki,
exp. nº VI, p. 77-97
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2014__363-364__77_0>

EXPOSÉ VI

LOG RÉGULARITÉ, ACTIONS TRÈS MODÉRÉES

Luc Illusie

1. Log régularité

1.1. — Pour le langage des log schémas nous renvoyons le lecteur à [Kato, 1988], [Nizioł, 2006], [Gabber & Ramero, 2013]. Sauf mention du contraire, les log structures considérées le seront au sens de la topologie étale. Un log schéma **fin** (resp. fs, *i.e.* **fin et saturé**) [Kato, 1988] est un schéma muni d'une log structure admettant localement (pour la topologie étale) une carte sur un monoïde fin (resp. fin et saturé). On note en général M_X le faisceau de monoïdes d'un log schéma X, $\alpha : M_X \to \mathscr{O}_X$ le morphisme structural, et $\overline{M}_X = M_X/\mathscr{O}_X^*$, $\overline{M}_X^{\mathrm{gp}} = M_X^{\mathrm{gp}}/\mathscr{O}_X^*$. Sauf mention du contraire, les log schémas considérés sont supposés localement noethériens.

Dans ce qui suit, X désigne un fs log schéma.

1.2. — Soient $\overline{x}$ un point géométrique de X, d'image $x \in X$, $\mathscr{O}_{X,\overline{x}}$ le localisé strict de X en $\overline{x}$. Notons $I_{X,\overline{x}}$ (ou $I_{\overline{x}}$ s'il n'y a pas de confusion à craindre) l'idéal de $\mathscr{O}_{X,\overline{x}}$ engendré par $\alpha(M_{X,\overline{x}} - \mathscr{O}_{X,\overline{x}}^*)$, $C_{X,\overline{x}}$ le sous-schéma fermé de $X_{(\overline{x})} = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{X,\overline{x}}$ défini par $I_{\overline{x}}$. Le fermé sous-jacent à $C_{X,\overline{x}}$ est la trace sur $X_{(\overline{x})}$ de la strate de X où le rang de $\overline{M}_X^{\mathrm{gp}}$ est égal à $r(x) = \mathrm{rg}(\overline{M}_{X,\overline{x}}^{\mathrm{gp}})$.

On dit que X est **log régulier** en x (ou $\overline{x}$) si $C_{X,\overline{x}}$ est régulier et l'on a

$$\dim(X_{(\overline{x})}) = \dim(C_{X,\overline{x}}) + \mathrm{rang}_{\mathbf{Z}}(\overline{M}_{X,\overline{x}}^{\mathrm{gp}}), \tag{1.2.1}$$

(cette condition ne dépend que de x). On dit que X est **log régulier** si X est log régulier en tout point. La définition analogue pour les log schémas zariskiens est due à Kato [Kato, 1994]. La variante dans le cadre étale a été traitée par Nizioł [Nizioł, 2006]. Voir aussi [Mochizuki, 1999] et [Gabber & Ramero, 2013, 9.5]. Nous rappelons ci-après quelques propriétés de cette notion.

1.3. — Supposons X muni d'une carte $P_X \to M_X$, avec P fin et saturé. Alors, pour tout x, X est log régulier en x si et seulement si X, muni de la log structure Zariski $M_X^{\mathrm{Zar}} := \varepsilon_\star M_X$, où $\varepsilon : X_{\text{ét}} \to X_{\mathrm{Zar}}$, est log régulier en x au sens de Kato [Kato, 1994], [Tsuji, 1997, II 4.6], [Nizioł, 2006, 2.4]. En particulier, si X est log régulier en x, X est log régulier en toute générisation y de X (la stabilité de la log régularité (Zariski) par générisation est énoncée dans [Kato, 1994, 7.1], mais, comme Gabber l'a observé, la démonstration qui est donnée est insuffisante; voir [Gabber & Ramero, 2013, 9.5.47] pour un argument correct).

Si la log structure de X est triviale, X est log régulier si et seulement si X est régulier au sens usuel.

1.4. — Supposons X log régulier. Soit $j : U \hookrightarrow X$ l'inclusion de l'ouvert de trivialité de sa log structure. Alors U est un ouvert dense de X et on a

$$M_X = \mathscr{O}_X \cap j_\star \mathscr{O}_U^*$$

([Nizioł, 2006, 2.6]).

Nous dirons qu'un couple (X, Z) formé d'un schéma X et d'un fermé Z est un couple **log régulier** si, pour la log structure sur X définie par $M_X = \mathscr{O}_X \cap j_\star \mathscr{O}_U^*$, où $j : U \hookrightarrow X$ est l'ouvert complémentaire de Z, X est log régulier et Z est le complément de l'ouvert de trivialité de sa log structure. La log structure précédente sur X sera dite **associée** au couple (X, Z).

1.5. — Supposons X log régulier. Il résulte de 1.6 ci-après (cf. [Kato, 1994, 4.1]) que le schéma sous-jacent à X est Cohen-Macaulay et normal. En particulier, en (1.2.1), on a

$$\operatorname{codim}_{\overline{x}}(C_{X,\overline{x}}, X_{(\overline{x})}) = \operatorname{rang}_{\mathbf{Z}}(\overline{M}^{\mathrm{gp}}_{X,\overline{x}}). \tag{1.5.1}$$

Pour $i \in \mathbf{N}$, soit $X^{(i)}$ l'ensemble des points x de X tels que $r(x) = i$, avec la notation de 1.2. C'est une partie localement fermée, sous-jacente à un sous-schéma régulier de X, de codimension i, dont la trace sur $X_{(\overline{x})}$, en chaque point géométrique $\overline{x}$ localisé en $x \in X^{(i)}$, est $C_{X,\overline{x}}$. On dit que $X^{(i)}$ est la **strate de codimension** i définie par le rang de $\overline{M}^{\mathrm{gp}}$. La stratification par les $X^{(i)}$ est appelée **stratification par le rang de** $\overline{M}^{\mathrm{gp}}$, ou **stratification canonique**. Voici deux exemples.

(i) Si X est un schéma noethérien régulier, muni de la log structure définie par un diviseur à croisements normaux D, $X^{(i)}$ est l'ensemble des points où passent exactement i branches de D, *i.e.* tels que le normalisé de D ait i points au-dessus de x.

(ii) Si X est une variété torique sur un corps k, de tore T, munie de sa log structure canonique, X est un log schéma log régulier, l'ouvert de trivialité de la log structure est T, et $X^{(i)}$ est la réunion des orbites de T de codimension i.

1.6. — Supposons X log régulier en x, image du point géométrique $\overline{x}$, soient $P = \overline{M}_{X,\overline{x}}$, $k = k(\overline{x})$. Notons que P est un monoïde fs **saillant** (*i.e.* tel que $P^* = 0$). Soit $\widehat{X}_{\overline{x}}$ le complété de $X_{(\overline{x})}$ au point fermé. Alors, d'après [Kato, 1994, 3.2], X admet une carte modelée sur P en $\overline{x}$, qui donne lieu à des isomorphismes

(i)

$$\widehat{X}_{\overline{x}} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec} k[[P]][[t_1, \dots, t_n]]$$

si $\mathscr{O}_{X,x}$ est d'égale caractéristique,

(ii)

$$\widehat{X}_{\overline{x}} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec} C(k)[[P]][[t_1, \dots, t_n]]/(f)$$

si $\mathscr{O}_{X,x}$ est d'inégale caractéristique $(0, p)$, où $C(k)$ est un anneau de Cohen pour k, et f est congru à p modulo l'idéal engendré par $P - \{0\}$ et les t_i.

1.7. — Supposons X log régulier. Alors X est régulier en x, image de $\overline{x}$, si et seulement si $\overline{M}_{\overline{x}} \simeq \mathbf{N}^r$ ([Nizioł, 2006, 5.2], voir aussi [Vidal, 2001b, 1.8]). Il en résulte que l'ensemble des points de régularité de X coïncide avec l'ensemble des points de régularité du monoïde $\overline{M}_{\overline{x}}$, et en particulier est ouvert dans X ([Nizioł, 2006, 5.3]). Si X est log régulier et régulier, l'ouvert de trivialité de la log structure est alors le complément d'un diviseur à croisements normaux.

1.8. — Soit $f : X \to Y$ un morphisme de log schémas fs. Si Y est log régulier et f log lisse, X est log régulier.

L'analogue pour les log structures Zariski est [Kato, 1994, 8.2]. La démonstration de *loc. cit.* s'applique, *mutatis mutandis*, dans le cadre étale.

Le corollaire suivant jouera un rôle clé dans l'application des résultats de de Jong à la démonstration du théorème d'uniformisation de Gabber. Un énoncé similaire est donné dans [Mochizuki, 1999, 4.2]. Rappelons que, si S est un schéma, une **courbe nodale** $f : C \to S$ est un morphisme plat, localement de présentation finie, purement de dimension relative 1, dont les fibres géométriques ont pour seules singularités des croisements normaux[i].

1.9. Proposition. — *Soit (Y, T) un couple log régulier (1.4). Soit $f : X \to Y$ une courbe nodale, lisse au-dessus de $Y - T$. Soit D un diviseur effectif sur X, de support contenu dans le lieu de lissité de f, et étale sur Y. Alors le couple $(X, f^{-1}(T) \cup D)$ est log régulier, et pour les log structures associées, f est un morphisme de log schémas et est log lisse.*

[i] On impose souvent aux fibres géométriques d'être connexes. Cette condition supplémentaire est inutile pour l'énoncé qui suit.

La question est locale pour la topologie étale sur X et l'assertion est triviale sur l'ouvert de lissité de f et sur $f^{-1}(Y - T)$. On peut donc supposer $D = \varnothing$. D'après [SGA 7 XV 1.3.2] (voir aussi [de Jong, 1996, 2.23]), on peut supposer que Y est affine, $Y = \operatorname{Spec} R$, et que X est défini par

$$X = \operatorname{Spec} R[u, v]/(uv - h), \tag{1.9.1}$$

où h est une section de $\mathscr{O}_Y$ inversible sur $Y - T$. On peut supposer de plus qu'on dispose d'une carte $c : P \to M_Y$ avec $h = \varepsilon c(a)$, pour $\varepsilon \in R^*$ et $a \in P$. Soit Q le monoïde fs défini par le carré cocartésien

$$\begin{tikzcd} \mathbf{N}^2 \arrow[r] & Q \\ \mathbf{N} \arrow[u] \arrow[r] & \mathbf{Z} \times P \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd} ,$$

où la flèche $\mathbf{N} \to \mathbf{N}^2$ (resp. $\mathbf{N} \to \mathbf{Z} \times P$) est donnée par $1 \mapsto (1, 1)$ (resp. $1 \mapsto (1, a)$). Le carré

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} R[u, v]/(uv - h) \arrow[r, "d"] \arrow[d] & \operatorname{Spec} \mathbf{Z}[Q] \arrow[d, "\operatorname{Spec} \mathbf{Z}[g]"] \\ \operatorname{Spec} R \arrow[r, "c'"] & \operatorname{Spec} \mathbf{Z}[\mathbf{Z} \times P] \end{tikzcd} ,$$

où la flèche c' est donnée par c et $\mathbf{Z} \to R$, $1 \mapsto \varepsilon$, et d par $(1, 0) \mapsto u$, $(0, 1) \mapsto v$ sur $\mathbf{N}^2$ et c' sur $\mathbf{Z} \times P$, est cartésien. Alors d définit une log structure sur X dont l'ouvert de trivialité est $f^{-1}(Y - T)$, et (c', d, g) est une carte de f. Comme g est injectif et $\operatorname{Coker} g^{\mathrm{gp}} \simeq \mathbf{Z}$, f est log lisse. Comme Y est log régulier, X est donc log régulier, et comme l'ouvert de trivialité de la log structure de X est $f^{-1}(Y - T)$, le couple $(X, f^{-1}(T))$ est log régulier.

2. Revêtements Kummer étales

Dans cette section et la suivante, nous aurons à considérer des actions de groupes sur des schémas ou des log schémas : sauf mention du contraire, il s'agira d'actions *à droite*.

2.1. — Rappelons quelques définitions (cf. [Illusie, 2002, 3], [Stix, 2002, 3.1], [Vidal, 2001a]). Un homomorphisme $h : P \to Q$ de monoïdes intègres est dit **de Kummer** si h est injectif et, pour tout $q \in Q$, il existe $n \geq 1$ et $p \in P$ tels que $nq = h(p)$. On dit qu'un morphisme $f : X \to Y$ de fs log schémas est **de Kummer** si, pour tout point géométrique $\overline{x}$ de X d'image $\overline{y} = f(\overline{x})$ dans Y, l'homomorphisme induit $\overline{M}_{\overline{y}} \to \overline{M}_{\overline{x}}$ est de Kummer. On dit qu'un morphisme $f : X \to Y$ est **Kummer**

étale si f est de Kummer et log étale. On dit que f est un **revêtement Kummer étale** si f est de Kummer étale et le morphisme de schémas sous-jacent est fini.

Le **site Kummer étale** d'un fs log schéma X est la catégorie des fs log schémas de Kummer étales au-dessus de X munie de la topologie définie par les familles surjectives de X-morphismes (lesquels sont automatiquement de Kummer étale). Pour X connexe non vide, les revêtements Kummer étales de X forment une catégorie galoisienne, équivalente à la catégorie des représentations d'un groupe profini, le *groupe fondamental logarithmique* de X, $\pi_1^{\log}(X, x)$, où x est un *point géométrique logarithmique* de X, cf. *loc. cit.*

2.2. — Un morphisme $f : X \to Y$ de log schémas fs qui est déduit par changement de base par un morphisme strict $g : Y \to \operatorname{Spec} \mathbf{Z}[P]$ d'un morphisme $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}[h] : \operatorname{Spec} \mathbf{Z}[Q] \to \operatorname{Spec} \mathbf{Z}[P]$, où $h : P \to Q$ est un homomorphisme de Kummer entre monoïdes fs tels que le conoyau de h^{gp} soit annulé par un entier n inversible sur Y, est un revêtement Kummer étale. On dit qu'un tel revêtement est un revêtement Kummer étale **standard**.

Un revêtement Kummer étale standard $f : X \to Y$ comme ci-dessus est **galoisien** dans le sens suivant : le groupe diagonalisable (étale) $G = \operatorname{Hom}(Q^{\mathrm{gp}}/P^{\mathrm{gp}}, \mathbf{G}_{mY})$ opère sur X par automorphismes de Y-log schémas, et le morphisme canonique

$$X \times_Y G \to X \times_Y X, (x, g) \mapsto (x, xg), \tag{2.2.1}$$

où le produit au second membre est pris dans la catégorie des fs log schémas, est un isomorphisme ; le log schéma Y est un quotient faisceautique de X par G dans la catégorie des faisceaux sur le site Kummer étale de Y, et en tant que schéma, un quotient géométrique au sens usuel de X par G : on a

$$\mathscr{O}_Y = (f_\star \mathscr{O}_X)^G \quad ; \quad M_Y = (f_\star M_X)^G. \tag{2.2.2}$$

De plus, le morphisme f est fini, ouvert et surjectif, et le reste après tout changement de base fs $Y' \to Y$. Ces assertions sont un cas particulier de théorèmes de descente de Kato [Kato, 1991, 3.1, 3.4.1, 3.5]. Pour le fait que 2.2.1 soit un isomorphisme, voir [Illusie, 2002, 3.2]. Pour la première formule de 2.2.2, voir [Kato, 1991, 3.4.1] (et [Illusie et al., 2013, 2.1] pour le fait, utilisé dans la démonstration de [Kato, 1991, 3.4.1], que $\mathbf{Z}[P]$ est facteur direct de $\mathbf{Z}[Q]$ comme $\mathbf{Z}[P]$-module). On pourrait aussi invoquer la structure des représentations des groupes diagonalisables et le fait que $Q \cap P^{\mathrm{gp}} = P$. La vérification de la seconde formule est plus délicate. Nous en donnons une démonstration directe dans 2.4.

Tout morphisme de Kummer étale est, localement pour la topologie étale, isomorphe à un revêtement Kummer étale standard (cf. [Stix, 2002, 3.1.4]). Plus précisément, si $f : X \to Y$ est un morphisme de Kummer étale surjectif, avec X (resp. Y)

strictement local de point fermé x (resp. y), on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & \operatorname{Spec} \mathbf{Z}[Q] \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \operatorname{Spec} \mathbf{Z}[h]} \\ Y & \xrightarrow{b} & \operatorname{Spec} \mathbf{Z}[P], \end{array}$$

où a (resp. b) est une carte de X (resp. Y), et $h : P \to Q$ un morphisme de Kummer tel que $\operatorname{Coker} h^{\mathrm{gp}}$ soit annulé par un entier n inversible sur Y. Alors f est un revêtement Kummer étale galoisien de groupe $G = \operatorname{Hom}(\operatorname{Coker} h^{\mathrm{gp}}, \mu_n(k(y)))$.

2.3. — Dans ce cas, l'action de G sur X se décrit simplement. Plus généralement, considérons un revêtement Kummer étale standard $f : X \to Y$, donné par un carré cartésien de schémas

(2.3.1)
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & \operatorname{Spec} \Lambda[Q] \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \operatorname{Spec} \Lambda[h]} \\ Y & \xrightarrow{b} & \operatorname{Spec} \Lambda[P], \end{array}$$

où $\Lambda = \mathbf{Z}[\mu_n][1/n]$, $\mu_n = \mu_n(\mathbf{C})$ (n entier ≥ 1), $h : P \to Q$ est un morphisme de Kummer tel que $\operatorname{Coker} h^{\mathrm{gp}}$ soit annulé par n, et l'on munit X et Y des log structures définies par les flèches horizontales. Soit $C = \operatorname{Coker} h^{\mathrm{gp}}$. La suite exacte

$$0 \to P^{\mathrm{gp}} \to Q^{\mathrm{gp}} \to C \to 0$$

donne, par application du dual de Cartier $D = \operatorname{Hom}(-, \mathbf{G}_m)$, une suite exacte de groupes diagonalisables sur $\operatorname{Spec} \Lambda$,

$$0 \to G \to T_Q \to T_P \to 0,$$

où $G = D(C)$. Posons $Z_P = \operatorname{Spec} \Lambda[P]$, $Z_Q = \operatorname{Spec} \Lambda[Q]$. L'accouplement canonique

(2.3.2)
$$T_P \otimes P^{\mathrm{gp}} \to \mathbf{G}_m$$

définit une famille de caractères

$$(\chi_p : T_P \to \mathbf{G}_m)_{p \in P^{\mathrm{gp}}},$$

qui détermine l'action de T_P sur Z_P par

(2.3.3)
$$g.p = \chi_p(g)p,$$

pour un point g de T_P (à valeurs dans un schéma S), et un point p de Z_P à valeurs dans S. L'action de T_Q sur Z_Q est décrite de façon similaire, et la carte $a : X \to Z_Q$ est équivariante relativement aux actions de G et T_Q sur X et Z_Q respectivement : pour $g \in G$ et $q \in Q$,

(2.3.4)
$$g.a^\star(q) = \chi_q(g)a^\star(q),$$

où $a^\star(q)$ est la section de M_X image inverse de q par a.

2.4. — Déduisons de cette description la seconde formule de (2.2.2). L'argument qui suit est dû à Gabber. On doit vérifier que $M_Y \to (f_\star M_X)^G$ induit un isomorphisme sur les fibres en tout point géométrique de Y, donc on peut supposer Y strictement local de point fermé y. Dans la suite, nous omettrons parfois $h : P \to Q$ de la notation, et noterons encore a (resp. b) l'homomorphisme $Q \to \mathscr{O}(X)$ (resp. $P \to \mathscr{O}(Y)$) déduit de a (resp. b). Quitte à remplacer P par son localisé $P_{(\mathfrak{p})}$ en l'idéal premier $\mathfrak{p}$ complémentaire de la face $b^{-1}(\mathscr{O}^*_{Y,y})$, et Q par $Q \oplus_P P_{(\mathfrak{p})}$, on peut supposer que $P^* = b^{-1}(\mathscr{O}^*_{Y,y})$. Et, pour $q \in Q$, q est inversible si et seulement si $a(q)$ l'est sur un point au-dessus de y (car si tel est le cas, et $n \geq 1$ est tel que $q^n \in P$, on a $a(q^n) = b(q^n) \in \mathscr{O}^*_{Y,y}$ et $q^n \in P^*$). Si x est un point de X au-dessus de y, donc correspondant à un relèvement à Q de $P \to k(y)$, il en résulte, par la formule (2.3.3) (appliquée à l'action de T_Q sur X), que $g \in G$ fixe ce point si et seulement si g est orthogonal à $Q^*/P^* \subset Q^{\mathrm{gp}}/P^{\mathrm{gp}}$ pour l'accouplement $G \otimes Q^{\mathrm{gp}}/P^{\mathrm{gp}} \to \mu_n$ déduit de (2.3.2). L'homomorphisme $P \to Q$ se factorise canoniquement en

$$P \hookrightarrow P' \hookrightarrow Q,$$

où $P' := Q^* \oplus_{P^*} P$. Cette factorisation définit une factorisation de f en

$$X \xrightarrow{u} Y' \xrightarrow{v} Y,$$

où v est un revêtement fini étale usuel, galoisien de groupe H égal au dual de Cartier de Q^*/P^*, et strict en tant que morphisme de log schémas. En particulier, $\mathscr{O}^*_Y \to (v_\star \mathscr{O}^*_{Y'})^H$ et $M_Y \to (v_\star M_{Y'})^H$ sont des isomorphismes. Remplaçant Y par Y' puis par son localisé strict en un point au-dessus de y, on peut donc supposer que $P^* = Q^*$. Il découle de la remarque faite plus haut que X a alors un unique point x au-dessus de y, donc est strictement local, et que le groupe d'inertie en x est G tout entier. Considérons le diagramme commutatif suivant, à lignes exactes, où les flèches verticales sont les flèches canoniques évidentes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{O}^*_{Y,y} \arrow[r] \arrow[d] & M^{\mathrm{gp}}_{Y,y} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{M}^{\mathrm{gp}}_{Y,y} \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (\mathscr{O}^*_{X,x})^G \arrow[r] & (M^{\mathrm{gp}}_{X,x})^G \arrow[r] & (\overline{M}^{\mathrm{gp}}_{X,x})^G \arrow[r, "d"] & \mathrm{H}^1(G, \mathscr{O}^*_{X,x}),
\end{tikzcd} \tag{2.4.1}$$

où d est l'opérateur bord de la suite exacte de cohomologie de G relative à la suite exacte de G-modules

$$0 \to \mathscr{O}^*_{X,x} \to M^{\mathrm{gp}}_{X,x} \to \overline{M}^{\mathrm{gp}}_{X,x} \to 0.$$

D'après la première formule de (2.2.2), la flèche verticale de gauche est un isomorphisme. D'après (2.3.4), G opère trivialement sur $\overline{M}^{\mathrm{gp}}_{X,x}$, donc $(\overline{M}^{\mathrm{gp}}_{X,x})^G = \overline{M}^{\mathrm{gp}}_{X,x}$. Un calcul qui sera fait en 3.5 montre que la flèche naturelle $\mathrm{H}^1(G, \mathscr{O}^*_{X,x}) \to \mathrm{H}^1(G, k(x)^*) = \mathrm{Hom}(G, \mu_n)$ est un isomorphisme, et que, via ces identifications, l'opérateur bord

$$d : \overline{M}^{\mathrm{gp}}_{X,x} (= Q^{\mathrm{gp}}/P^*) \to \mathrm{Hom}(G, \mu_n)$$

est déduit de l'accouplement canonique $G \otimes Q^{\mathrm{gp}}/P^{\mathrm{gp}} \to \mu_n$ (cf. (2.3.2)), qui est un accouplement parfait. Le noyau de d est donc $P^{\mathrm{gp}}/P^* = \overline{M}^{\mathrm{gp}}_{Y,y}$. Il s'ensuit que i induit un isomorphisme sur le noyau de d, et donc que la flèche verticale médiane de (2.4.1) est un isomorphisme. Comme $\overline{M}_{Y,y} = \overline{M}^{\mathrm{gp}}_{Y,y} \cap \overline{M}_{X,x} \subset M^{\mathrm{gp}}_{X,x}$ (f étant de Kummer), si $a \in (M_{X,x})^G$, il existe $b \in M_{Y,y}$ et $u \in \mathscr{O}^*_{X,x}$ tels que $a = ub$, donc $u \in (\mathscr{O}^*_{X,x})^G = \mathscr{O}^*_{Y,y}$, et $a \in M_{Y,y}$, et la flèche $M_{Y,y} \to (f_\star M_{X,x})^G$ est elle aussi un isomorphisme.

2.5. Proposition. — *Considérons un revêtement Kummer étale standard* (2.3.1). *Pour tout point géométrique $\overline{x}$ de X d'image $\overline{y}$ dans Y, le morphisme $G_{\overline{x}}$-équivariant*

$$C_{X,\overline{x}} \to C_{Y,\overline{y}}, \tag{2.5.1}$$

où $G_{\overline{x}}$ est le sous-groupe d'inertie en $\overline{x}$, est un isomorphisme. En particulier, $G_{\overline{x}}$ opère trivialement sur $C_{X,\overline{x}}$.

Procédant comme en 2.4, on peut supposer X (resp. Y) strictement local de point fermé x (resp. y), avec $P^* = b^{-1}(\mathscr{O}^*_{Y,y})$, (resp. $Q^* = a^{-1}(\mathscr{O}^*_{X,x})$), et $P^* \xrightarrow{\sim} Q^*$. Il en résulte que la flèche composée

$$\mathbf{Z}[P^*] \to \mathbf{Z}[P] \to \mathbf{Z}[P]/b^{-1}(\mathscr{O}_{Y,y} - \mathscr{O}^*_{Y,y})$$

(resp.

$$\mathbf{Z}[Q^*] \to \mathbf{Z}[Q] \to \mathbf{Z}[Q]/a^{-1}(\mathscr{O}_{X,x} - \mathscr{O}^*_{X,x}))$$

est un isomorphisme, et que par suite la flèche

$$\varphi : \mathbf{Z}[P]/b^{-1}(\mathscr{O}_{Y,y} - \mathscr{O}^*_{Y,y}) \to \mathbf{Z}[Q]/a^{-1}(\mathscr{O}_{X,x} - \mathscr{O}^*_{X,x})$$

est un isomorphisme. Comme la flèche $\mathscr{O}_{Y,y}/I_{Y,y} \to \mathscr{O}_{X,x}/I_{X,x}$ est donnée par $\mathscr{O}_{Y,y} \otimes_{Z[P]} \varphi$, la projection $C_{X,x} \to C_{Y,y}$ (2.5.1) est donc un isomorphisme.

3. Actions très modérées

3.1. — Soit X un log schéma fs, muni d'une action d'un groupe fini G. On se propose de dégager des conditions suffisantes sur l'action de G pour que, lorsque X est log régulier, le quotient de X par G existe comme log schéma et soit log régulier.

On dit que G **opère modérément sur** X **en un point géométrique** $\overline{x}$ de X localisé en x, si le stabilisateur $G_{\overline{x}}$ de $\overline{x}$ (**groupe d'inertie en** x) est d'ordre premier à la caractéristique de $k(x)$. On dit que G **opère modérément sur** X si G opère modérément en $\overline{x}$ pour tout $\overline{x}$. Ces définitions ne font pas intervenir la log structure de X.

La définition et les résultats qui suivent sont dus à Gabber. On dit que G **opère très modérément sur** X ***en*** $\overline{x}$ si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

(i) G opère modérément en $\overline{x}$;

(ii) G opère trivialement sur $\overline{M}_{X,\overline{x}}$;

(iii) $G_{\overline{x}}$ opère trivialement sur la strate $C_{X,\overline{x}}$ (1.2).

On dit que G **opère très modérément sur** X si G opère très modérément sur X en tout point géométrique.

Dans la situation de (2.3.1), il découle de (2.3.4) et de 2.5 que, pour tout point géométrique $\overline{x}$ de X, $G_{\overline{x}}$ opère trivialement sur $\overline{M}_{\overline{x}}$ et sur la strate $C_{X,\overline{x}}$. Donc G opère très modérément sur X. On va voir qu'en un sens convenable, toute action très modérée génériquement libre sur un log schéma log régulier est localement de ce type. Plus précisément, le résultat principal est le suivant :

3.2. Théorème. — *Soit X un log schéma fs log régulier, muni d'une action d'un groupe fini G. On suppose que G opère de façon admissible sur le schéma sous-jacent à X, librement sur un ouvert dense, et très modérément. Soit $Y = X/G$ le schéma quotient, $f : X \to Y$ la projection. Alors :*

(i) Y est localement noethérien et le morphisme f est fini ;

(ii) l'homomorphisme $f_\star\alpha : (f_\star M_X)^G \to (f_\star \mathscr{O}_X)^G = \mathscr{O}_Y$ est une log structure fs sur Y, qui fait de Y un log schéma log régulier, et $f : X \to Y$ est un revêtement Kummer étale de groupe G. En outre, en tout point géométrique $\overline{x}$ de X, le groupe d'inertie $G_{\overline{x}}$ est abélien.

Rappelons ([SGA 1 V 1]) que dire que G opère de façon admissible sur un schéma (non nécessairement localement noethérien) X signifie que X est réunion d'ouverts affines stables par G, de sorte que le quotient X/G existe comme schéma.

3.3. — La preuve de 3.2 sera donnée en 3.6. Nous établirons d'abord un résultat plus précis que 3.2, à savoir 3.4, de nature locale sur X. Nous aurons besoin pour cela de la notion suivante. Soient n un entier ≥ 1, G un groupe fini, et Q un monoïde fs. Supposons donné un homomorphisme

$$\chi : G^{\mathrm{ab}} \otimes Q^{\mathrm{gp}} \to \mu_n := \mu_n(\mathbf{C}), \quad g \otimes q \mapsto \chi(g,q).$$

Pour $g \in G$ et $q \in Q$, on écrira encore, par abus, $\chi(g,q)$ (ou $\chi_q(g)$) pour $\chi(\overline{g},q)$, où $\overline{g}$ est l'image de g dans G^{ab}. Soit $\Lambda = \mathbf{Z}[\mu_n][1/n]$. On déduit de χ une action de G sur le log schéma $\operatorname{Spec}\Lambda[Q]$, caractérisée par

$$g.q = \chi_q(g)q$$

pour $g \in G$, $q \in Q$.

Soit X un log schéma fs muni d'une action de G. Par une **carte G-équivariante de X modelée sur** (χ, Q), on entend un morphisme strict, G-équivariant

$$c : X \to \operatorname{Spec} \Lambda[Q].$$

Un tel morphisme est donné par un homomorphisme

$$c^\star : Q \to \Gamma(X, M_X)$$

tel que, pour tout $q \in Q$ et tout $g \in G$, on ait $g^\star(c^\star(q)) = \chi(g,q)c^\star(q)$, où $g^\star$ désigne l'endomorphisme de $\Gamma(X, M_X)$ défini par g.

3.4. Proposition. — *Soit X un fs log schéma, muni d'une action d'un groupe fini G, et soit $\overline{x}$ un point géométrique de X localisé en x. On note $H = G_{\overline{x}}$ le groupe d'inertie en x.*

(a) *On suppose que les conditions* (i) *et* (ii) *de 3.1 sont vérifiées en $\overline{x}$. Soit n l'ordre de H. Il existe un voisinage étale affine H-équivariant U de $\overline{x}$ et une carte H-équivariante de U modelée sur (χ, Q), où $Q = \overline{M}_{\overline{x}}$ et $\chi : H^{\mathrm{ab}} \otimes Q^{\mathrm{gp}} \to \mu_n$.*

(b) *On suppose de plus que G agit très modérément en $\overline{x}$,* i.e. *que H agit trivialement sur la strate $C_{X,\overline{x}}$. Alors, il existe un voisinage affine étale H-équivariant U de $\overline{x}$ tel que le schéma quotient $V = U/H$, muni de la log structure $(\pi_\star M_U)^H \to (\pi_\star \mathscr{O}_U)^H = \mathscr{O}_V$, où $\pi : U \to V$ est la projection, soit un fs log schéma, et qu'on ait une V-immersion fermée stricte équivariante, et d'idéal nilpotent, $i : U \hookrightarrow U'$, où $\pi' : U' \to V$ est un revêtement Kummer étale standard de V.*

(c) *Si, sous les hypothèses de (b), X est supposé en outre log régulier en x, alors il existe $\pi : U \to V$ comme en (b) tel que π soit un revêtement Kummer étale standard de V, et V est log régulier en $y = \pi(x)$. Si de plus H opère librement sur un ouvert dense de U, H est abélien, et égal au groupe du revêtement π.*

3.5. — *Preuve de 3.4.*

(a) Observons d'abord que les voisinages affines étales H-stables de $\overline{x}$ forment une famille cofinale de voisinages étales de $\overline{x}$. En effet, soit U_1 un voisinage étale, affine, de $\overline{x}$. Soit $U_2 = \prod_{h \in H} U_1 h$, où $\prod$ désigne un produit fibré sur X. Le schéma U_2 est un voisinage étale quasi-affine H-stable de $\overline{x}$. Si U_3 est un voisinage ouvert affine de l'image x de $\overline{x}$ dans U_3, $U_4 = \bigcap_{h \in H} U_3 h$ est un voisinage affine étale, H-stable, de $\overline{x}$, au-dessus de U. Comme $k(\overline{x})$ contient μ_n, on peut supposer, quitte à remplacer X par un voisinage étale H-stable convenable de $\overline{x}$, que X est au-dessus de $\operatorname{Spec} \Lambda$, où $\Lambda = \mathbf{Z}[\mu_n][1/n]$, avec action triviale de H sur Λ.

Considérons la suite exacte de groupes abéliens

$$0 \to \mathscr{O}^*_{X,\overline{x}} \to M^{\mathrm{gp}}_{X,\overline{x}} \to \overline{M}^{\mathrm{gp}}_{X,\overline{x}} \to 0. \tag{3.5.1}$$

Elle est H-équivariante, et si $Q = \overline{M}_{\overline{x}}$, Q^{gp} est de type fini sans torsion. Choisissons un scindage $s : Q^{\mathrm{gp}} \to M^{\mathrm{gp}}_{X,\overline{x}}$ de (3.5.1) (comme suite exacte de groupes). Comme H

agit trivialement sur Q^{gp}, on a, pour $q \in Q^{\mathrm{gp}}$ et $g \in H$

$$g.s(q) = z(g,q)s(q) \tag{3.5.2}$$

avec $z(g,q) \in \mathscr{O}^*_{X,\overline{x}}$. Pour g_1, g_2 dans H, on a

$$z(g_1g_2,q) = (g_1z(g_2,q)).z(g_2,q),$$

en d'autres termes, $g \mapsto (q \mapsto z(g,q))$ est un 1-cocycle

$$z \in Z^1(H, \mathrm{Hom}(Q^{\mathrm{gp}}, \mathscr{O}^*_{X,\overline{x}})).$$

L'image $[z]$ de z dans $H^1(H, \mathrm{Hom}(Q^{\mathrm{gp}}, \mathscr{O}^*_{X,\overline{x}}))$ est la classe de cohomologie de (3.5.1). Dans le carré commutatif de flèches canoniques

$$\begin{tikzcd}
Z^1(H, \mathrm{Hom}(Q^{\mathrm{gp}}, \mathscr{O}^*_{X,\overline{x}})) \arrow[r] \arrow[d] & Z^1(H, \mathrm{Hom}(Q^{\mathrm{gp}}, k(\overline{x})^*)) \arrow[d] \\
H^1(H, \mathrm{Hom}(Q^{\mathrm{gp}}, \mathscr{O}^*_{X,\overline{x}})) \arrow[r] & H^1(H, \mathrm{Hom}(Q^{\mathrm{gp}}, k(\overline{x})^*)),
\end{tikzcd}$$

la flèche verticale de droite est (trivialement) un isomorphisme. D'autre part, la flèche horizontale inférieure est un isomorphisme, car $(1 + \mathfrak{m}_{X,\overline{x}})^*$ est n-divisible. L'image de z dans $Z^1(H, \mathrm{Hom}(Q^{\mathrm{gp}}, k(\overline{x})^*))$ est un homomorphisme

$$\chi : H \to \mathrm{Hom}(Q^{\mathrm{gp}}, \mu_n),\ g \mapsto (q \mapsto \chi(g,q)).$$

Cet homomorphisme se relève en un élément de $Z^1(H, \mathrm{Hom}(Q^{\mathrm{gp}}, \mathscr{O}^*_{X,\overline{x}}))$, noté encore χ, qui a même classe de cohomologie que z dans $H^1(H, \mathrm{Hom}(Q^{\mathrm{gp}}, \mathscr{O}^*_{X,\overline{x}}))$. Il existe donc $u \in \mathrm{Hom}(Q^{\mathrm{gp}}, \mathscr{O}^*_{X,\overline{x}})$ tel que $z(g,q)/\chi(g,q) = gu(q)/u(q)$. Alors $g.(u(q)^{-1}s(q)) = \chi(g,q)u(q)^{-1}s(q)$. Donc quitte à remplacer s par $(q \mapsto u(q)^{-1}s(q))$, on peut supposer que $z = \chi$, autrement dit z est défini par un homomorphisme (noté encore χ)

$$\chi : H^{\mathrm{ab}} \otimes Q^{\mathrm{gp}} \to \mu_n,\ (h,q) \mapsto \chi(h,q), \tag{3.5.3}$$

i.e. $z(h,q) = \chi(h,q)$ pour tout $h \in H$ et tout $q \in Q$ (avec la notation de 3.3). D'après [Kato, 1988, 2.10], l'homomorphisme $Q \to M_{X,\overline{x}}$ induit par s se prolonge en une carte $a : U \to \mathrm{Spec}\,\Lambda[Q]$ (correspondant à un homomorphisme $a^\star : Q \to \Gamma(U, M_U)$) d'un voisinage étale U de $\overline{x}$. D'après ce qu'on a vu plus haut, on peut supposer U H-stable. D'après (3.5.2), l'homomorphisme $s : Q \to M_{X,\overline{x}}$ est H-équivariant, *i.e.* pour $q \in Q$ et $h \in H$, on a (dans $M_{X,\overline{x}}$)

$$h^\star a^\star(q)_{\overline{x}} = \chi(h,q)a^\star(q)_{\overline{x}}.$$

Pour h et q fixé, on a donc $h^\star a^\star(q) = \chi(h,q)a^\star(q)$ sur un voisinage étale H-stable de $\overline{x}$ au-dessus de U, donc *a fortiori* sur un voisinage ouvert H-stable U' de l'image x de $\overline{x}$ dans U. Comme H est fini et Q de type fini, il existe un voisinage ouvert affine H-stable U'' de x contenu dans U' tel que l'identité précédente soit satisfaite au-dessus de U''. Donc, quitte à remplacer U par un voisinage ouvert affine H-stable plus petit, a est une carte H-équivariante de U modelée sur (χ, Q).

(b) Compte tenu de (a), on peut supposer qu'on dispose d'un voisinage affine étale, H-stable, U de $\overline{x}$, et d'une carte H-équivariante

$$a : U \to \operatorname{Spec} \Lambda[Q]$$

modelée sur (χ, Q). Comme $n = |H|$ est inversible en x, quitte à rétrécir U, on peut supposer de plus que n est inversible sur U. Comme U est affine, le quotient $V = U/H$ existe et est affine. De plus, d'après IV-2.2.3, V est noethérien, et $f : U \to V$ est fini. Soit P' le sous-groupe de Q^{gp} défini par

$$P' = \{q \in Q^{\mathrm{gp}} | \chi(h, q) = 1 \,\text{pour tout}\, h \in H\}.$$

En d'autres termes, P' est défini par la suite exacte

$$0 \to P' \to Q^{\mathrm{gp}} \to \operatorname{Hom}(H^{\mathrm{ab}}, \mu_n),$$

où la seconde flèche est $q \mapsto (h \to \chi(h, q))$. Il est donc d'indice fini dans Q^{gp}, premier à la caractéristique de $k(\overline{x})$, et l'inclusion $Q^{\mathrm{gp}}/P' \hookrightarrow D(H^{\mathrm{ab}})$ (où $D = \operatorname{Hom}(-, \mu_n)$) définit par dualité un épimorphisme

(3.5.4) $$H^{\mathrm{ab}} \twoheadrightarrow D(Q^{\mathrm{gp}}/P').$$

Soit

$$P = P' \cap Q.$$

C'est un sous-monoïde fs de Q, tel que $P^{\mathrm{gp}} = P'$, et $P \to Q$ est de Kummer. Le morphisme $a : U \to \operatorname{Spec} \Lambda[Q]$ de (a) (où $\Lambda = \mathbf{Z}[\mu_n][1/n]$) est équivariant relativement à l'épimorphisme $H \twoheadrightarrow H^{\mathrm{ab}} \twoheadrightarrow D(Q^{\mathrm{gp}}/P')$, donc définit, par passage au quotient, un morphisme $b : V \to \operatorname{Spec} \Lambda[P]$ donnant lieu à un carré commutatif

(3.5.5) $$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\pi"] & \operatorname{Spec} \Lambda[Q] \arrow[d] \\ V \arrow[r, "b"] & \operatorname{Spec} \Lambda[P] \end{tikzcd} ,$$

d'où un triangle commutatif

(3.5.6) $$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & U' \arrow[dl, "\pi'"] \\ V, & \end{tikzcd}$$

où $U' = V \times_{\operatorname{Spec} \Lambda[P]} \operatorname{Spec} \Lambda[Q]$. Si l'on munit V de la log structure (fs) définie par b, π est un morphisme de log schémas, et (3.5.5) en est une carte. Le triangle (3.5.6) est un triangle de log schémas. De plus, π' est un revêtement Kummer étale standard de groupe $D(Q^{\mathrm{gp}}/P^{\mathrm{gp}})$, et i est équivariant relativement à l'épimorphisme $H \twoheadrightarrow H^{\mathrm{ab}} \twoheadrightarrow D(Q^{\mathrm{gp}}/P^{\mathrm{gp}})$ (3.5.4). Comme H agit trivialement sur la strate $C_{X,\overline{x}} = C_{U,\overline{x}} = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{U,\overline{x}}/I_{\overline{x}}$, et que H est d'ordre premier à la caractéristique de $k(\overline{x})$, l'homomorphisme

$$\mathscr{O}_{V,\overline{y}} \, (= \mathscr{O}_{U,\overline{x}}^{H}) \to \mathscr{O}_{U,\overline{x}}/I_{\overline{x}} \, (= (\mathscr{O}_{U,\overline{x}}/I_{\overline{x}})^{H})$$

est surjectif, où $\overline{y} = f(\overline{x})$, donc il en est de même de l'homomorphisme

$$k(\overline{y})[Q] \ = \ k(\overline{x})[Q] \to \mathscr{O}_{U,\overline{x}}/\mathfrak{m}_{V,\overline{y}}\mathscr{O}_{U,\overline{x}}.$$

Par Nakayama, il en résulte que le morphisme i de (3.5.6) induit une immersion fermée en $\overline{x}$, *i.e.* sur les localisés stricts en $\overline{x}$. Quitte à induire (3.5.6) sur un voisinage affine étale convenable de $\overline{y}$ au-dessus de V, on peut donc supposer que i est une immersion fermée. Comme H opère transitivement sur les fibres de π, donc, compte tenu de (3.5.4), également sur celles de π', au-dessus de tout point de V, ces fibres coïncident, et donc U et U' ont mêmes espaces sous-jacents. L'immersion fermée i est donc définie par un idéal nilpotent I de $\mathscr{O}_{U'}$, et est stricte pour les log structures envisagées. Considérons les homomorphismes

$$M_V \to (\pi'_\star M_{U'})^H \to (\pi_\star M_U)^H \tag{3.5.7}$$

définis par (3.5.6). Comme $H \to D(Q^{\mathrm{gp}}/P^{\mathrm{gp}})$ est surjectif, il résulte de (2.4) que la première flèche de (3.5.7) est un isomorphisme. Montrons qu'il en est de même de la seconde. Comme l'immersion i est stricte, on a un diagramme commutatif équivariant, à lignes exactes,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (1+I)^* \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & M_{U'} \arrow[r] \arrow[d] & M_U \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & (1+I)^* \arrow[r] & M_{U'}^{\mathrm{gp}} \arrow[r] & M_U^{\mathrm{gp}} \arrow[r] & 0, \end{tikzcd} \tag{3.5.8}$$

où $(1+I)^* = \operatorname{Ker} \mathscr{O}_{U'}^* \to \mathscr{O}_U^*$. Plus précisément, $M_{U'}$ est un $(1+I)^*$-torseur sur M_U induit par le $(1+I)^*$-torseur $M_{U'}^{\mathrm{gp}}$ sur M_U^{gp}, en particulier, le carré de droite est cartésien. On en déduit un diagramme commutatif où le carré est cartésien et la ligne du bas est exacte :

$$\begin{tikzcd} & & (\pi'_\star M_{U'})^H \arrow[r] \arrow[d] & (\pi_\star M_U)^H \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & (\pi'_\star(1+I)^*)^H \arrow[r] & (\pi'_\star M_{U'}^{\mathrm{gp}})^H \arrow[r] & (\pi_\star M_U^{\mathrm{gp}})^H. \end{tikzcd} \tag{3.5.9}$$

Comme π' est fini, en tout point géométrique $\overline{z}$ de V, on a $H^q(H, \pi'_\star(1+I)^*_{\overline{z}}) = \prod_{\overline{t} \in U_{\overline{z}}} H^q(H, (1+I)^*_{\overline{t}})$, et comme les fibres de $(1+I)^*$ sont n-divisibles, on a $H^q(H, \pi'_\star(1+I)^*) = 0$ pour tout $q > 0$. Par ailleurs, $(\pi'_\star(1+I)^*)^H = 0$ (puisque

$(\pi_\star \mathscr{O}_U)^H = (\pi'_\star \mathscr{O}_{U'})^H$ et donc $(\pi'_\star I)^H = 0$). La flèche $(\pi'_\star M^{\mathrm{gp}}_{U'})^H \to (\pi_\star M^{\mathrm{gp}}_U)^H$ de (3.5.9) est donc un isomorphisme, et le carré de droite étant cartésien, il en est de même de la flèche $(\pi'_\star M_{U'})^H \to (\pi_\star M_U)^H$, comme annoncé, ce qui achève la démonstration de (b).

(c) Dans ce cas, avec les notations de la démonstration de (b), la strate $C_{U,\overline{x}}$ est régulière, et se projette isomorphiquement sur $C_{V,\overline{y}}$. Comme $\mathrm{rg}(\overline{M}^{\mathrm{gp}}_{\overline{x}}) = \mathrm{rg}(\overline{M}^{\mathrm{gp}}_{\overline{y}}) = \mathrm{codim}(C_{V,\overline{y}}, V_{(\overline{y})})$, V est log régulier en $y = \pi(x)$, donc en toute générisation de y (cf. 1.3), donc $V_{(\overline{y})}$ est log régulier . Comme π' est log étale, $U' \times_V V_{(\overline{y})}$ est donc log régulier, en particulier, réduit, et l'immersion i induit un isomorphisme au-dessus de $V_{(\overline{y})}$, et donc déjà au-dessus de $V_{(y)} = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{V,y}$. Quitte à remplacer V par un voisinage ouvert convenable de y, i est donc un isomorphisme, et $\pi : U \to V$ est un revêtement Kummer étale (de groupe $D(P^{\mathrm{gp}}/Q^{\mathrm{gp}})$, quotient de H). Enfin, si H opère librement sur un ouvert dense, prenant un point géométrique t de V tel que H opère librement sur la fibre $V_{\pi(t)}$, on a $t.H = t.D(P^{\mathrm{gp}}/Q^{\mathrm{gp}})$, donc $H = D(P^{\mathrm{gp}}/Q^{\mathrm{gp}})$.

3.6. — *Preuve de 3.2.*

Les assertions de 3.2 découlent du corollaire suivant de 3.4 :

3.7. Corollaire. — *On se place sous les hypothèses de* (3.4) *(c)),* i.e. *X est log régulier en x, l'action de G sur X est très modérée en $\overline{x}$. On suppose de plus que l'action de G sur X est admissible, et libre sur un ouvert dense. On note $f : X \to Y = X/G$ la projection, et x (resp. y) l'image de $\overline{x}$ (resp. $\overline{y} = f(\overline{x})$ dans X (resp. Y). Alors $G_{\overline{x}}$ est abélien, et il existe un voisinage ouvert affine V de y dans Y tel que :*

(i) *le schéma V soit noethérien, et, muni de la log structure $f_\star\alpha : (f_\star M_X)^G|V \to (f_\star \mathscr{O}_X)^G|V = \mathscr{O}_V$, soit un log schéma fs, log régulier en y ;*

(ii) *$f_V : X \times_Y V \to V$ soit un revêtement Kummer étale de V de groupe G.*

Preuve de 3.7. La question est locale sur Y au voisinage de $\overline{y}$. Quitte à remplacer Y par un voisinage étale Y' de $\overline{y}$, et X par $X \times_Y Y'$, on peut supposer que x est un point rationnel de X_y, de stabilisateur H, de sorte que X_y s'identifie à $H\backslash G$ par $x \mapsto xg$. Le morphisme $f : X \to Y$ étant entier, donc fermé, quitte à remplacer Y par un voisinage de y, on peut trouver un voisinage ouvert et fermé U de x, stable par H, dont les translatés par un système de représentants de $H\backslash G$ dans G sont deux à deux disjoints, de sorte que X s'identifie au produit contracté $U \wedge^H G$. Alors $U/H \to X/G$ est un isomorphisme, et en particulier, d'après IV-2.2.3, Y est noethérien, et $f : X \to Y$ est fini. Par l'argument précédent, on se ramène au cas où $G = H$, $X_y = \{x\}$. Comme f est fini, les voisinages étales de $\overline{x}$ images inverses par f de voisinages étales de $\overline{y}$ forment un système cofinal de voisinages étales de $\overline{x}$, et ceux-ci sont H-stables. De plus, pour tout voisinage étale H-stable Z de $\overline{x}$ il existe un voisinage étale V de $\overline{y}$ et un morphisme $h : Z' \to Z$ entre voisinages de $\overline{x}$, où $Z' = f^{-1}(V)$, et, quitte à rétrécir V, on peut imposer à h d'être H-équivariant. La démonstration de (3.4 (c)) montre qu'on peut choisir U de *loc. cit.* de cette forme, *i.e.* $U = f^{-1}(V)$, de sorte que $f = \pi : U \to V = U/H$ est un revêtement Kummer étale standard de V de groupe H, ce qui achève la démonstration.

3.8. Corollaire. — *Sous les hypothèses de 3.4 (b), le sous-groupe* $\operatorname{Ker}(G_{\overline{x}} \to \operatorname{Hom}(\overline{M}_{X,\overline{x}}, k(\overline{x})))$ *agit trivialement sur le log schéma X dans un voisinage ouvert $G_{\overline{x}}$-stable de x.*

En effet, avec les notations de 3.5 (b), on a

$$H = G_{\overline{x}} \twoheadrightarrow H^{\mathrm{ab}} \twoheadrightarrow D(Q^{\mathrm{gp}}/P^{\mathrm{gp}}) = \operatorname{Hom}(Q^{\mathrm{gp}}/P^{\mathrm{gp}}, k(\overline{x})) \hookrightarrow \operatorname{Hom}(\overline{M}_{X,\overline{x}}, k(\overline{x})),$$

donc 3.4 (b) implique qu'il existe un voisinage étale H-stable $u : U \to X$ de $\overline{x}$ tel que $\operatorname{Ker} H \to \operatorname{Hom}(\overline{M}_{X,\overline{x}}, k(\overline{x}))$ opère trivialement sur le log schéma U, et donc *a fortiori* sur le voisinage ouvert (H-stable) $u(U)$ de x.

Signalons également la conséquence suivante de 3.4 (b) :

3.9. Corollaire. — *Plaçons-nous sous les hypothèses de 3.4 (b), et supposons X séparé. Alors G agit très modérément sur X dans un voisinage ouvert G-stable de x.*

Considérons le voisinage étale H-stable $u : U \to X$ de $\overline{x}$ construit dans 3.5 (b). Comme on l'a observé en 3.1, H agit très modérément sur U', donc sur U, et *a fortiori* sur $u(U)$. Admettons provisoirement le lemme suivant :

3.10. Lemme. — *Quitte à remplacer U par un voisinage ouvert H-stable de l'image x' de $\overline{x}$ plus petit, on peut supposer que la propriété suivante est satisfaite :*

($*$) *pour tout point géométrique $\overline{z}$ de U, l'homomorphisme $H_{\overline{z}} \to G_{u(\overline{z})}$ est un isomorphisme.*

Supposons que U possède la propriété ($*$). Alors, comme H opère très modérément sur $u(U)$, G opère très modérément sur $u(U).G$. Il reste donc à prouver 3.10. La propriété ($*$) équivaut à la conjonction de

(i) $u^{-1}(X^g) = \varnothing$ pour $g \in G - H$,

(ii) $u^{-1}(X^g) = U^g$ pour $g \in H$,

où $(-)^g$ désigne un schéma des points fixes de g. Comme X est séparé, X^g est un sous-schéma fermé de X. Si g n'est pas dans H, X^g ne contient pas x, donc, quitte à ôter de U la réunion des $u^{-1}(X^g)$ pour $g \in G - H$, la condition (i) est réalisée. Pour

$g \in H$, U^g est défini par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} U^g & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \Delta \\ u^{-1}(X^g) & \xrightarrow{(1,g)} & U \times_X U, \end{array}$$

où Δ est la diagonale. Comme Δ est ouverte et fermée, U^g est ouvert et fermé dans $u^{-1}(X^g)$. Mais U^g et $u^{-1}(X^g)$ sont des sous-schémas fermés de U contenant x'. Ils coïncident donc dans un voisinage ouvert de x'. Donc quitte à remplacer U par un voisinage ouvert H-stable de x' plus petit, on peut réaliser la condition (ii) pour tout $g \in H$.

4. Points fixes

4.1. — Soit X un schéma noethérien sur lequel opère un groupe fini G. Pour chaque sous-groupe H de G, on note X^H le schéma des points fixes de H. C'est un sous-schéma de X, fermé si X est séparé, représentant le foncteur $S \mapsto X(S)^H$, intersection des graphes des translations $h : X \to X, x \mapsto xh$ pour $h \in H$. Supposons X séparé. En chaque point géométrique $\overline{x}$ de X^H d'image x, le sous-groupe d'inertie $G_{\overline{x}}$ de G contient H, et est égal à H si et seulement si x appartient au sous-schéma (localement fermé)

$$X_H = X^H - \bigcup_{H' \supset H, H' \neq H} X^{H'}.$$

Pour $g \in G$, on a

$$(X^H)g = X^{g^{-1}Hg},$$

et de même

$$(X_H)g = X_{g^{-1}Hg}$$

de sorte que la réunion X^C (resp. X_C) des X^H (resp. X_H) pour H dans une classe de conjugaison C de sous-groupes de G est G-stable. Les X_C, pour C parcourant les classes de conjugaison de sous-groupes de G, forment une stratification de X par des sous-G-schémas, avec la propriété que pour tout point géométrique $\overline{x}$ localisé en X_C, le groupe d'inertie $G_{\overline{x}}$ appartient à C. Nous appellerons cette stratification la **stratification par l'inertie**.

Le but de ce numéro est de donner des exemples d'actions très modérées de groupes finis G sur des log schémas log réguliers et réguliers X, où un raffinement de la stratification par l'inertie est déduite de la stratification canonique d'un diviseur à croisements normaux G-stable.

Le résultat suivant est classique, nous en donnons une démonstration, faute de référence.

4.2. Proposition. — *Soit X un schéma noethérien régulier sur lequel opère un groupe fini G de façon modérée 3.1. Alors le schéma des points fixes X^G est régulier.*

Si y est un point d'un schéma Y, notons $Y_{(y)} = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{Y,y}$. Supposons $X^G \neq \varnothing$. Soit x un point de X^G. Il s'agit de montrer que $(X^G)_{(x)}$ est régulier. Le groupe G est le groupe d'inertie en x : il fixe x et $k(x)$. Il existe un voisinage ouvert affine de x stable par G : si U est un voisinage ouvert affine de x, l'intersection V des Ug pour $g \in G$ est un voisinage ouvert quasi-affine de x stable par G, et si W est un voisinage ouvert affine de x contenu dans V, l'intersection des Vg est un voisinage ouvert affine de x stable par G. Donc G opère sur $X_{(x)}$, trivialement sur $k(x)$, et, si $A = \mathscr{O}_{X,x}$, on a

$$(X^G)_{(x)} = (X_{(x)})^G = \operatorname{Spec} A_G,$$

où A_G est l'algèbre des co-invariants de G dans A, *i.e.*

$$A_G = A/I,$$

où I l'idéal engendré par les $ga - a$, pour g dans G et a dans A. On est donc ramené à supposer $X = X_{(x)}$. Si $Y = X/G = \operatorname{Spec} A^G$, G opère par Y-automorphismes de X. Comme G est d'ordre inversible en x, d'après IV-2.2.3, X est fini sur Y, et Y est local, noethérien, de point fermé y, avec pour corps résiduel $k(y) = k(x)^G = k(x)$. Les morphismes $X^G \hookrightarrow X \twoheadrightarrow Y$ correspondent aux homomorphismes locaux $A^G \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A_G$, qui induisent des isomorphismes sur les corps résiduels. Comme $\widehat{X}^G = \operatorname{Spec} \hat{A}/I\hat{A} = (\hat{X})^G$, on peut supposer X local et complet. Il en est alors de même de Y. En effet, comme il est observé dans la démonstration de IV-2.2.3, pour tout idéal J de B, on a $JA \cap B = J$. En particulier, si $\mathfrak{m}_A$ (resp. $\mathfrak{m}_B$) désigne l'idéal maximal de A (resp. B), on a $\mathfrak{m}_B^n A \cap B = \mathfrak{m}_B^n$, donc $\hat{B} = \varprojlim B/\mathfrak{m}_B^n \to \varprojlim A/\mathfrak{m}_B^n A = A$ est injectif, d'image contenue dans $A^G = B$, donc $B = \hat{B}$. On notera $k = k(x) = k(y)$, et $\mathfrak{m}_A = \mathfrak{m}$.

On va démontrer la proposition en *linéarisant* l'action de G.

Supposons d'abord que A soit d'égale caractéristique. Choisissons une base $t = (t_i)_{1 \leq i \leq r}$ sur k de l'espace cotangent $T = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ et des éléments x_i dans $\mathfrak{m}$ relevant les t_i. Comme B est local noethérien complet, choisissons en outre un corps de représentants, noté encore k, de k dans B. Notons

$$\varphi : k[[T]] \to A$$

l'homomorphisme envoyant t_i sur x_i. L'homomorphisme

$$f : k[[T]] \to A$$

envoyant t sur le système

$$y = \frac{1}{\operatorname{card}(G)} \sum_{g \in G} g\varphi g^{-1} t$$

est G-équivariant. En outre, y est congru à x modulo $\mathfrak{m}^2$, donc est un système régulier de paramètres de A, et donc f est un isomorphisme. Par suite f induit un isomorphisme

$$k[[T]]_G = k[[T_G]] \to A_G,$$

où T_G est l'espace des co-invariants de G sur T, ce qui démontre 4.2 dans ce cas.

Supposons maintenant que A soit de caractéristique mixte $(0, p)$. Soit C un anneau de Cohen pour B, de corps résiduel k, de sorte que B est quotient d'un anneau de séries formelles sur C. Comme G est d'ordre premier à p, il existe un (essentiellement) unique $C[G]$-module V, libre de type fini sur C, relevant T. Soit $t = (t_i)_{1 \leq i \leq r}$ une base de T, $v = (v_i)$ une base de V relevant t. Comme plus haut, choisissons des relèvements x_i dans $\mathfrak{m}$ des t_i, qui forment donc une suite régulière de paramètres dans A. Prolongeons l'homomorphisme $C \to A$ en

$$\varphi : C[[V]] \to A$$

en envoyant v_i sur x_i. L'homomorphisme

$$f : C[[V]] \to A$$

envoyant $v = (v_i)$ sur

$$y = \frac{1}{\operatorname{card}(G)} \sum_{g \in G} g\varphi g^{-1} v$$

est G-équivariant, et y est congru à x modulo $\mathfrak{m}^2$, donc est un système régulier de paramètres de A. L'homomorphisme f est donc surjectif, et son noyau est défini par un élément F congru à p modulo l'idéal engendré par les v_i. Ainsi X est un diviseur régulier G-équivariant dans $X' = \operatorname{Spec} C[[V]]$, d'équation $F = 0$. Observons que le module des coinvariants V_G est libre sur C. En effet, comme l'ordre de G est inversible dans C, V est projectif de type fini sur $C[G]$, et donc, si I_G est l'idéal d'augmentation de $\mathbf{Z}[G]$, $V_G = V/I_G V = V \otimes_{C[G]} C$ est projectif de type fini, donc libre de type fini, sur C (il en est de même d'ailleurs de V^G et l'homomorphisme composé $V^G \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V_G$ est un isomorphisme). L'image de F dans $C[[V_G]]$ est un paramètre régulier, donc, comme $X'^G = \operatorname{Spec} C[[V_G]]$, $X^G = X \times_{X'} X'^G$ est régulier, ce qui achève la démonstration de 4.2.

4.3. Corollaire. — *Soit X un schéma noethérien séparé, régulier, muni d'une action modérée d'un groupe fini G. Alors la stratification de X par l'inertie est formée de schémas réguliers.*

4.4. Remarque. — Pour référence ultérieure, notons le résultat complémentaire suivant : sous les hypothèses de 4.2, pour tout $x \in X^G$, l'homomorphisme canonique

(4.4.1) $$T_x(X^G) \to T_x(X)^G$$

est un isomorphisme, où pour un schéma localement noethérien Y on note $T_y(Y)$ l'espace tangent de Zariski en un point y de Y $(= \mathrm{Hom}_{k(y)}(\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2, k(y)))$. Plus généralement, comme l'observe Gabber, (4.4.1) est un isomorphisme pour un schéma local noethérien $X = \mathrm{Spec}\, A$, de point fermé x, muni d'une action d'un groupe fini G tel que l'homomorphisme $A^G \to A/\mathfrak{m} = k(x)$ soit surjectif. En effet, dans ce cas, si I est l'idéal de A engendré par les $ga - a$ pour $g \in G$ et $a \in A$, de sorte que $X^G = \mathrm{Spec}\, A_G$, où $A_G = A/I$, I est aussi l'idéal de A engendré par les $ga - a$ pour $g \in G$ et $a \in \mathfrak{m}$, autrement dit, $I = I_G\mathfrak{m}$. Notant $T_x^*(-)$ un espace cotangent, dual (à valeurs dans $k(x)$) de $T_x(-)$, l'homomorphisme

$$\mathrm{Hom}(T_x(X)^G, k(x)) = T_x^*(X)_G \to T_x^*(X^G)$$

s'identifie à l'homomorphisme

$$(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)_G = \mathfrak{m}/(I_G\mathfrak{m} + \mathfrak{m}^2) \to \mathfrak{m}/(I + \mathfrak{m}^2)$$

qui est un isomorphisme, puisque $I = I_G\mathfrak{m}$.

4.5. — Sous les hypothèses de 4.3, soit Y un diviseur à croisements normaux strict G-stable, réunion de composantes irréductibles Y_i, $1 \le i \le m$. On munit X de la log structure définie par Y. Rappelons (cf. [de Jong, 1996, 7.1]) qu'on dit que Y est **G-strict** si la condition suivante est réalisée : pour tout i et pour tout $g \in G$, si $Y_i g \cap Y_i \neq \varnothing$, alors $Y_i g = Y_i$. Si Y est G-strict, alors la condition (ii) de 3.1 est vérifiée en chaque point géométrique $\overline{x}$ de X. En effet, si $(D_i)_{1\le i\le r}$ est l'ensemble des branches de Y passant par $\overline{x}$, alors $D_i g = D_i$ pour tout i. Comme $\overline{M}_{\overline{x}}^{\mathrm{gp}} = \bigoplus_{1\le i\le r} \mathbf{Z} e_i$, e_i correspondant à D_i, le groupe d'inertie $G_{\overline{x}}$ opère trivialement sur $\overline{M}_{\overline{x}}^{\mathrm{gp}}$. Rappelons également ([de Jong, 1996, 7.2]) qu'il existe une modification G-équivariante canonique $f : \tilde{X} \to X$ telle que $f^{-1}(Y)_{\mathrm{red}}$ soit G-strict.

4.6. Corollaire. — *Supposons que Y soit G-strict, que G opère de façon modérée, admissible et génériquement libre, et que la stratification de X par les composantes irréductibles des strates de la stratification canonique* (1.5) *soit plus fine que la stratification par l'inertie* (4.1), i.e. *que chacune de ces composantes irréductibles soit contenue dans une strate de la stratification par l'inertie. Alors G opère très modérément sur X (et donc la conclusion de 3.2 s'applique). Le groupe d'inertie est constant le long de chaque composante irréductible c de la strate $X^{(i)}$ (1.5* (i)*), de valeur G_c (le nombre minimum de générateurs de G_c étant, d'après 3.8, au plus égal à i). En particulier, G opère librement sur la strate $X^{(0)} = X - Y$.*

4.7. — *Exemples.*

(a) Soient k un corps algébriquement clos, n un entier ≥ 2 premier à la caractéristique de k, G le groupe $\mu_n = \mu_n(k)$. On fait opérer G sur $X = \mathbf{A}_k^2$ par homothéties $((\lambda, x) \mapsto \lambda x$ pour $\lambda \in G$, $x \in X(k))$. La stratification par l'inertie comporte deux strates, $X - \{0\}$, où G opère librement, et $X^G = \{0\}$. La donnée de deux droites Y_1, Y_2 telles que $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$ définit un diviseur à croisements normaux G-strict $Y = Y_1 \cup Y_2$, et le couple (X, Y) vérifie les conditions de 4.6. Le choix de paramètres t_1, t_2 tels que $Y_i = V(t_i)$ permet de définir une carte équivariante 3.3 $c : \operatorname{Spec} \mathbf{Z}[\mathbf{N}^2] \leftarrow X$, $e_i \mapsto t_i$, associée à l'homomorphisme $\chi : G \otimes \mathbf{Z}^2 \to \mu_n$ tel que $\chi(\lambda \otimes e_i) = \lambda$. Le quotient X/G est le schéma torique $\operatorname{Spec} k[x^n, x^{n-1}y, \ldots, xy^{n-1}, y^n]$.

Plus généralement, soient n un entier ≥ 1, G un groupe abélien d'ordre n, S un schéma noethérien séparé, régulier, au-dessus de $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}[1/n, \mu_n]$, E un $\mathscr{O}_S$-module localement libre de rang fini, muni d'une action linéaire de G, X le fibré vectoriel $V(E) = \operatorname{Spec} \operatorname{Sym}(E)$. Pour chaque caractère $\chi : G \to \mu_n$, notons L_χ le G-$\mathscr{O}_S$-module correspondant. L'homomorphisme canonique G-équivariant

$$\bigoplus_\chi L_\chi \otimes E_\chi \to E,$$

où $E_\chi = \mathscr{H}om_G(L_\chi, E)$ et χ parcourt le groupe des caractères de G, est un isomorphisme. Il définit une décomposition G-équivariante

$$X \xrightarrow{\sim} \bigoplus_\chi X_\chi,$$

où $X_\chi = V(E_\chi)$, muni de l'action de G à travers χ. En particulier, $X^G = X_1$, où $1 : G \to \mu_n$ est le caractère trivial. Supposons S local, $S = \operatorname{Spec} A$. Pour chaque $\chi \in \operatorname{Hom}(G, \mu_n)$, choisissons une base $(t_i)_{i \in I_\chi}$ de E_χ, de sorte que $X_\chi = \operatorname{Spec} A[(t_i)_{i \in I_\chi}]$, avec $gt_i = \chi(g)t_i$ pour $g \in G$, $i \in I_\chi$. Le couple formé de X et du diviseur à croisements normaux (relatifs à S) $Y = \sum_{\chi, i \in I_\chi} Y_i$, où $Y_i = (t_i = 0)$ pour $i \in I_\chi$, vérifie les conditions de 4.6 (et les vérifie d'ailleurs fibre à fibre).

(b) Soient k un corps algébriquement clos d'exposant caractéristique p, n un entier ≥ 2 tel que $(2n, p) = 1$, G le groupe diédral $D_n = \langle s, r : s^2 = 1, r^n = 1, srs = r^{-1} \rangle$. Soit $\zeta \in k$ une racine primitive n-ième de 1. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(E)$ la représentation de degré 2 induite du caractère χ de $\mu_n \subset G$ tel que $\chi(r) = \zeta$: $\rho(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\rho(r) = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$. Soit X le G-schéma $V(E) = \operatorname{Spec} k[u, v]$, $s(u) = v, r(u) = \zeta u$. Pour $0 \leq i \leq n-1$, notons $Z_i \subset X$ la droite $v = \zeta^i u$, et $Z = \bigcup_{0 \leq i \leq n-1} Z_i$. La stratification par l'inertie comporte $n + 2$ strates : $X - Z$, où G opère librement, $Z_i - \{0\}$ $(0 \leq i \leq n-1)$, où le groupe d'inertie est d'ordre 2 (de générateur $r^i s$), et $\{0\} = X^G$.

Pour $n = 2$, $G = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$, Z est un diviseur à croisements normaux G-strict, et le couple (X, Y) vérifie les conditions de 4.6. Pour $n > 2$, Z n'est plus un diviseur à croisements normaux, et l'inertie en $\{0\}$ n'est plus abélienne. Soient $f : X' \to X$

l'éclaté de $\{0\}$ dans X, $E = f^{-1}(0)$ le diviseur exceptionnel, $Z' = \bigcup_{0\leq i\leq n-1} Z'_i$ le transformé strict de Z. Alors G opère de façon naturelle sur X', la projection f est G-équivariante, et $Y' = f^{-1}(Z) = E \cup Z'$ est un diviseur à croisements normaux G-strict. Le couple (X', Y') vérifie les conditions de 4.6. La stratification de X' par l'inertie se compose des strates Z'_i, où l'inertie est un groupe à deux éléments, et de $X' - Z'$, où G opère librement. La stratification canonique associée à Y' la raffine : $X'^{(0)} = X' - Y'$, $X'^{(1)} = Y' - \bigcup_{0\leq i\leq n-1}(E \cap Z'_i)$, $X'^{(2)} = \bigcup_{0\leq i\leq n-1}(E \cap Z'_i)$.

4.8. — La construction précédente, qui rend les inerties abéliennes, se généralise. Soit X un schéma noethérien régulier, séparé, muni d'une action modérée d'un groupe fini G, et soit Y un diviseur à croisements normaux G-strict. Si H est un sous-groupe de G, X^H est régulier (et séparé), donc il en est de même de l'éclaté $X' = \mathrm{\acute{E}cl}_{X^H}(X)$ de X le long de X^H. Le normalisateur $N = N_G(H)$ de H dans G stabilise X^H, donc agit sur X', et le morphisme $f : X' \to X$ est équivariant relativement à $N \to G$. De plus, $f^{-1}(X^H)$ est un diviseur régulier dans X'. Si D est une composante de Y, comme D est H-stable, $D \times_X X^H = D^H$ est régulier, et le transformé strict $\tilde{D} = \mathrm{\acute{E}cl}_{D^H}(D)$ est un diviseur régulier croisant $f^{-1}(X^H)$ transversalement. Il s'ensuit que le transformé total réduit $Y' = f^{-1}(Y)_{\mathrm{red}}$ est un diviseur à croisements normaux N-strict dans X'.

4.9. Proposition. — *Sous les hypothèses de 4.8, soit $\overline{x}$ un point géométrique de X en lequel le groupe d'inertie $G_{\overline{x}}$ n'est pas abélien, et soit H le sous-groupe des commutateurs $(G_{\overline{x}}, G_{\overline{x}})$. Alors $G_{\overline{x}} = N_{G_{\overline{x}}}(H)$ agit sur $X' = \mathrm{\acute{E}cl}_{X^H}(X)$, et en chaque point géométrique $\overline{y}$ de X' au-dessus de $\overline{x}$, le groupe d'inertie $(G_{\overline{x}})_{\overline{y}}$ est strictement plus petit que $G_{\overline{x}}$.*

En effet, le point $\overline{y}$ correspond à une droite L dans $(T_{\overline{x}}/T_{\overline{x}}^H) \otimes_{k(\overline{x})} k(\overline{y})$, où $T_{\overline{x}} = T_{\overline{x}}(X)$. Supposons que $\overline{y}$ soit fixe sous $G_{\overline{x}}$. Alors $G_{\overline{x}}$ agit sur L par un caractère, donc H agit trivialement sur L. Or $(T_{\overline{x}}/T_{\overline{x}}^H)^H = 0$, contradiction. (Noter que cet argument montre en particulier que, si $H \neq \{1\}$ et l'action de G sur X est génériquement libre, X^H est de codimension ≥ 2 dans X en x.)