Astérisque

FABRICE ORGOGOZO

Le théorème de Cohen-Gabber

Astérisque, tome 363-364 (2014), Séminaire Bourbaki,
exp. nº IV, p. 51-68

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2014__363-364__51_0>

EXPOSÉ IV

LE THÉORÈME DE COHEN-GABBER

Fabrice Orgogozo

1. p-bases et différentielles (rappels)

1.1. Définition et caractérisation différentielle

1.1.1. — Pour la commodité du lecteur, et pour fixer les notations, nous rappelons ici quelques résultats bien connus dont nous ferons usage ci-après. Nous conseillons au lecteur de ne s'y reporter qu'en cas de besoin.

1.1.2. Définition. — Soient k un corps de caractéristique $p > 0$, K une extension de k, et $(b_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de K. On dit que les (b_i) constituent une **p-base** de K sur k (resp. sont **p-libres** sur k) si les monômes $\prod_i b_i^{n(i)}$ ($0 \leq n(i) < p$, $(n(i))_{i \in I}$ de support fini) forment une base du $k(K^p)$-espace vectoriel K (resp. sont linéairement indépendants sur $k(K^p)$).

Si $k = \mathbf{F}_p$, on parle alors de p-base **absolue**, ou de p-base s'il n'y a pas d'ambiguïté. Enfin, on appelle parfois **p-monôme** un produit comme ci-dessus. Un lien entre cette notion et la structure des anneaux locaux complets ressort du théorème suivant.

1.1.3. Théorème **([Bourbaki, AC, IX, § 3, n° 3, th. 1 b)]).** — *Soient A un anneau local séparé complet de caractéristique $p > 0$ et $(\beta_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de A dont les classes modulo l'idéal maximal $\mathfrak{m}_A$ forment une p-base du corps résiduel $A/\mathfrak{m}_A$. Il existe alors un unique corps de représentants de A contenant les éléments β_i.*

1.1.4. Remarque. — On peut étendre de façon évidente la notion de p-base au cas d'un anneau quelconque de caractéristique $p > 0$; voir [ÉGA 0_{IV} 21.1-4]. Nous n'en aurons pas besoin.

1.1.5. — On vérifie immédiatement que les $(b_i)_{i\in I}$ forment une p-base de K sur k si et seulement si, pour tout $i \in I$, l'élément b_i n'appartient pas au sous-corps $k(K^p, (b_j)_{j\neq i})$ de K. (Voir p. ex. [ÉGA 0_{IV} 21.4.3].)

1.1.6. — Pour toute extension de corps K/k, nous noterons $d_{K/k}$ la différentielle $K \to \Omega^1_{K/k}$.

1.1.7. Proposition. — *Soient k un corps de caractéristique $p > 0$, et K une extension de k. Une famille $(b_i)_{i\in I}$ d'éléments de K est une p-base de K sur k si et seulement si les différentielles $d_{K/k}(b_i)$ forment une base du K-espace vectoriel $\Omega^1_{K/k}$.*

Démonstration. — Soit $B = (b_i)_{i\in I}$ une p-base de K sur k. Tout morphisme (ensembliste) $\Delta : B \to K$ s'étend de manière unique en une k-dérivation D de K : il suffit de poser $D(b_1^{n_1}\cdots b_r^{n_r}) = \sum_i n_i b_1^{n_1}\cdots b_i^{n_i-1}\cdots b_r^{n_r}\Delta(b_i)$ et de l'étendre par $k(K^p)$-linéarité. Cela est équivalent au fait que les $d_{K/k}(b_i)$ forment une base de $\Omega^1_{K/k}$. Réciproquement, si les $d_{K/k}(b_i)$ forment une base, on observe que les p-monômes sont $k(K^p)$-linéairement indépendants : dans le cas contraire on aurait, pour un indice i convenable, $b_i \in K^p((b_j)_{j\neq i})$, ce qui se traduirait par une relation linéaire entre les différentielles. Soit B' une p-base de K sur k contenant les b_i (*loc. cit.*, 21.4.2) ; d'après l'implication précédente, on a nécessairement $B' = (b_i)_{i\in I}$. □

1.1.8. Corollaire. — *Soient k un corps de caractéristique $p > 0$, et K une extension de k. Un élément x de K appartient à $k(K^p)$ si et seulement si $d_{K/k}(x) = 0$.*

1.1.9. — Rappelons que le p-**rang** d'un corps est le cardinal d'une p-base absolue (bien défini en vertu de ce qui précède). On vérifie immédiatement que ce *cardinal* (fini ou non) est invariant par extension *finie* de corps.

1.2. Stabilisation

***1.2.1. Lemme* (voir p. ex. [ÉGA 0_{IV} 21.8.1]).** — *Soient K un corps, k un sous-corps, $(k_\alpha)_{\alpha\in I}$ ($I \neq \varnothing$) une famille de sous-corps de K telle que $\bigcap_\alpha k_\alpha = k$ et* filtrante décroissante, *c'est-à-dire telle que pour toute paire d'indices α, β, il existe un indice γ tel que $k_\gamma \subset k_\alpha \cap k_\beta$. Soient V un K-espace vectoriel, et (v_i) ($1 \leq i \leq n$) une famille finie de vecteurs de V. Si la famille (v_i) est libre sur k, il existe un indice γ telle qu'elle soit aussi libre sur k_γ.*

1.2.2. Lemme. — *Soient K un corps de caractéristique $p > 0$, k un sous-corps et $(K_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille filtrante décroissante de sous-corps contenants k. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\bigcap_\alpha K_\alpha(K^p) = k(K^p)$;

(ii) *pour tout ensemble fini $\{b_1, \ldots, b_n\} \subset K$, p-libre sur k, il existe un indice α tel qu'il soit p-libre sur K_α ;*

(iii) *il existe une p-base de K sur k telle que tout sous-ensemble fini soit p-libre sur un K_α pour α convenable ;*

(iv) *le morphisme canonique $\Omega^1_{K/k} \to \lim_\alpha \Omega^1_{K/K_\alpha}$ est* injectif.

Démonstration. — (i)$\Rightarrow$(ii) est une conséquence immédiate du lemme précédent.

(ii)$\Rightarrow$(iii) est trivial (toute p-base convient). (iii)$\Rightarrow$(iv) trivial (utiliser 1.1.7). Vérifions (iv)$\Rightarrow$(i). Soit $x \notin k(K^p)$. D'après 1.1.8, $d_{K/k}(x) \neq 0$ de sorte qu'il existe α tel que $d_{K/K_\alpha}(x)$ soit également non nul. D'après *loc. cit.*, cela entraîne que $x \notin K_\alpha(K^p)$. □

On en déduit le lemme suivant, qui est un cas particulier de [ÉGA 0_{IV} 21.8.5].

1.2.3. Lemme. — *Soient K un corps de caractéristique p, k un sous-corps et $(K_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille filtrante décroissante de sous-corps de K contenant k telle que $\bigcap_\alpha K_\alpha(K^p) = k(K^p)$. Pour toute extension finie L de K, on a également $\bigcap_\alpha K_\alpha(L^p) = k(L^p)$.*

Démonstration. — On se ramène immédiatement au cas où L/K est sans sous-extension non triviale. Si L/K est (algébrique) séparable, la conclusion résulte immédiatement de l'existence des isomorphismes canoniques $\Omega^1_{L/k} \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{K/k} \otimes_K L$, $\Omega^1_{L/K_\alpha} \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{K/K_\alpha} \otimes_K L$ et du critère (iv) ci-dessus. Dans le cas contraire, $L = K(a)$, où $b = a^p \in K - K^p$. On distingue naturellement deux cas. Premier cas : $d_{K/k}(b) = 0$, c'est-à-dire $b \in k(K^p)$. Il en résulte que pour toute sous-extension M de L/k, on a l'égalité $M(L^p) = M(K^p, b) = M(K^p)$. Ainsi,

$$\bigcap_\alpha K_\alpha(L^p) = \bigcap_\alpha K_\alpha(K^p) = k(K^p) = k(L^p).$$

Second cas : $d_{K/k}(b) \neq 0$. On peut alors compléter $\{b\}$ en une p-base de K sur k, que l'on note $(b, (b_j)_{j\in J})$. La famille $(a, (b_j)_{j\in J})$ est alors une p-base de L sur k et on vérifie immédiatement le critère (iii) ci-dessus : si $(b, b_1, \dots, b_n)$ est p-libre sur K_α, il en est de même de $(a, b_1, \dots, b_n)$. □

***1.2.4. Proposition* ([Matsumura, 1980b], § 30, lemme 6).** — *Soient K un corps de caractéristique $p > 0$ et (K_α) une famille filtrante décroissante de sous-corps* cofinis — *c'est-à-dire tels que les degrés $[K : K_\alpha]$ soient finis — telle que $\bigcap_\alpha K_\alpha = K^p$. Alors, pour toute extension finie L/K, il existe un indice β tel que pour tout sous-corps cofini $K' \subset K_\beta$ on ait :*

$$\mathrm{rang}_L \Omega^1_{L/K'} = \mathrm{rang}_K \Omega^1_{K/K'}.$$

Démonstration. — Montrons tout d'abord que l'on peut supposer L/K sans sous-extension non triviale. Supposons qu'il existe une sous-K-extension $K \subsetneq M \subsetneq L$, sans quoi il n'y a rien à démontrer. Par récurrence sur $[L : K]$, on peut supposer le lemme établi pour l'extension M/K. Les sous-corps $M_\alpha = K_\alpha(M^p)$ sont cofinis dans M

et, pour α, β et γ comme dans l'énoncé, on a $M_\gamma \subset M_\alpha \cap M_\beta$. En vertu du lemme précédent, appliqué dans le cas particulier où $k = K^p$, on a l'égalité $\bigcap_\alpha M_\alpha = M^p$. D'autre part, les extensions M_α/K_α sont *finies* et, pour tout sous-corps K' de K, on a les égalités $\Omega^1_{M/K'} = \Omega^1_{M/K'(M^p)}$ et $\Omega^1_{L/K'} = \Omega^1_{L/K'(M^p)}$. Ceci nous ramène au cas particulier où $M = K$, puis au cas où L/K est sans sous-extension non triviale.

Si celle-ci est (algébrique) séparable, le théorème est trivial : on a $\Omega^1_{L/K'} \xleftarrow{\sim} \Omega^1_{K/K'} \otimes_K L$ pour tout $K' \subset K$. Sinon, $L = K(a)$, où $a^p = b \in K - K^p$, et, pour chaque $K' \subset K$, le module des différentielles $\Omega^1_{L/K'}$ est naturellement isomorphe à

$$\big(\Omega^1_{K/K'}/Kd_{K/K'}(b)\big)\otimes_K L \oplus Ld_{L/K'}(a).$$

De plus, $d_{K/K^p}(b)$ et $d_{L/L^p}(a)$ sont non nuls car b (resp. a) n'appartient pas à K^p (resp. L^p). Puisque $K^p = \bigcap_\alpha K_\alpha$ (resp. $L^p = \bigcap_\alpha K_\alpha(L^p)$), il existe un β tel que $d_{K/K_\beta}(b) \neq 0$ (resp. $d_{L/K_\beta}(a) \neq 0$). Il résulte de l'isomorphisme ci-dessus que pour chaque $K' \subset K_\beta$, on a l'égalité $\mathrm{rang}_L \Omega^1_{L/K'} = \mathrm{rang}_K \Omega^1_{K/K'}$. $\square$

1.2.5. — Rappelons enfin que si A et B sont deux anneaux linéairement topologisés ([ÉGA 0_{I} 7.1.1]), et $A \to B$ un morphisme *continu*, le B-module $\Omega^1_{B/A}$ est un B-module *topologique*, la topologie étant déduite de celle de $B \otimes_A B$ par restriction et passage au quotient ([ÉGA 0_{IV} 20.4.3]). Le B-module sous-jacent ne dépend pas des topologies de A et B. On note $\widehat{\Omega}^1_{B/A}$ son *séparé complété* ; il est isomorphe à une limite de Ω^1 de morphismes entre anneaux topologiques discrets (*loc. cit.*, § 20.7.14). Pour tout B-module topologique L tel que l'anneau $D_B(L) = B \oplus L$ soit linéairement topologisé(i), le morphisme canonique induit par la dérivation universelle est un *isomorphisme* :

$$\mathrm{Hom.cont}_B(\Omega^1_{B/A}, L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Dér.cont}_A(B, L).^{\text{(ii)}}$$

Si le B-module topologique L est de plus séparé et complet, l'isomorphisme précédent peut se réécrire $\mathrm{Hom.cont}_{\widehat{B}}(\widehat{\Omega}^1_{B/A}, L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Dér.cont}_A(B, L)$. Comme on le constate dans le cas particulier très simple où A est un corps et B un anneau de séries formelles, le B-module $\widehat{\Omega}^1_{B/A}$ a des propriétés de finitude bien plus remarquables que $\Omega^1_{B/A}$ (*loc. cit.*, exemple 20.7.16 et prop. 20.7.15).

(i) Cette hypothèse entraîne que la topologie de L est définie par une famille de sous-B-modules L' tels que L/L' soit annulé par un idéal ouvert de B. Réciproquement, un B-module L muni d'une telle topologie est un B-module topologique (l'action $B \times L \to L$ est continue) et $D_B(L)$ est linéairement topologisé (c'est-à-dire par une famille de sous-B-modules).

(ii) Comme nous l'a signalé O. Gabber, l'isomorphisme précédent — tiré de [ÉGA 0_{IV} 20.4.8 (ii)] — peut être mis en défaut si l'on suppose seulement que L est un B-module topologique.

2. Les théorèmes de Cohen-Gabber en caractéristique > 0

2.1. Le théorème de Cohen-Gabber non équivariant en caractéristique > 0. — Le but de ce paragraphe est de démontrer la variante suivante du théorème de structure des anneaux locaux nœthériens complets [ÉGA 0_{IV} 19.8.8 (ii)], dû à Irving S. Cohen.

***2.1.1. Théorème* (théorème de Cohen-Gabber ; [Gabber, 2005a], lemme 8.1).** — *Soit A un anneau local complet nœthérien* réduit, *d'égale caractéristique $p > 0$, équidimensionnel de dimension d et de corps résiduel k. Il existe un sous-anneau A_0 de A, isomorphe à $k[[t_1, \dots, t_d]]$, tel que A soit fini sur A_0, sans torsion et génériquement étale. De plus, le morphisme $A_0 \to A$ induit un isomorphisme sur les corps résiduels.*

2.1.2. Remarques. — Ce résultat apparaît explicitement comme hypothèse, pour A intègre, dans [ÉGA 0_{IV} 21.9.5]. L'expression « génériquement étale » signifie ici qu'il existe un ouvert dense de $\mathrm{Spec}(A_0)$ au-dessus duquel le morphisme $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(A_0)$ est étale.

2.1.3. — La démonstration du théorème, qui est une adaptation au cas non irréductible de [Gabber, 2005a], occupe le reste de cette section. Nous supposerons par la suite $d > 0$, sans quoi l'énoncé est évident. Dans les alinéas 2.1.4 à 2.1.11, nous allons montrer qu'il existe un corps de représentants κ de A tel que le A-module des formes différentielles complété $\widehat{\Omega}^1_{A/\kappa}$ soit de rang générique égal à d sur chaque composante irréductible. En (2.1.12) nous verrons comment en déduire rapidement le théorème.

2.1.4. — Soit $(b_i)_{i \in E}$ une p-base de $k = A/\mathfrak{m}_A$. Choisissons des relèvements arbitraires β_i des b_i dans A. Rappelons qu'il existe un unique corps de représentants $\kappa \subset A$ contenant les β_i et se surjectant sur k (1.1.3). Changer de corps de représentants revient donc à changer les β_i. Fixons également un système de paramètres $\tau_1, \dots, \tau_d$ de A ; nous ne le changerons qu'à la fin de la démonstration (2.1.12).

2.1.5. — Pour toute partie *finie* $e \subset E$, posons $\kappa_e := \kappa^p(\beta_i,\, i \notin e) \subset \kappa$. Les trois propriétés suivantes sont évidentes :

$$\text{pour toute partie finie } e \subset E, \ [\kappa : \kappa_e] < +\infty,$$
$$\text{pour toutes parties finies } e, e' \subset E, \ \kappa_{e \cup e'} \subset \kappa_e \cap \kappa_{e'},$$
$$\bigcap_{e \subset E} \kappa_e = \kappa^p.$$

2.1.6. — Soient $\mathrm{Spec}(\overline{A})$ une composante irréductible de $\mathrm{Spec}(A)$, munie de la structure réduite, et $\overline{\tau_1}, \dots, \overline{\tau_d}$ les images des τ_i dans $\overline{A}$ par la surjection canonique $A \twoheadrightarrow \overline{A}$.

Considérons le diagramme d'anneaux :

$$\begin{tikzcd}
\kappa_e[[\overline{\tau_1}^p, \dots, \overline{\tau_d}^p]] \arrow[r] \arrow[d] & \kappa[[\overline{\tau_1}, \dots, \overline{\tau_d}]] \arrow[r] \arrow[d] & \overline{A} \arrow[d] \\
L_{\kappa,e} \arrow[r] & L_\kappa \arrow[r] & L
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont les homomorphismes canoniques, et les flèches verticales les inclusions dans les corps de fractions respectifs. Les flèches horizontales sont injectives et correspondent à des morphismes finis. Pour la seconde, cela résulte du fait que le module $\overline{A}$ est *quasi-fini* ([ÉGA 0_{I} 7.4.1]) sur $\kappa[[\overline{\tau_1}, \dots, \overline{\tau_d}]]$ donc de type fini car l'idéal $(\overline{\tau_1}, \dots, \overline{\tau_d})\overline{A}$ est un idéal de définition ([ÉGA 0_{I} 7.4.4]). Enfin, les $\overline{\tau_i}$ sont analytiquement indépendants sur κ : le sous-anneau $\kappa[[\overline{\tau_1}, \dots, \overline{\tau_d}]]$ de $\overline{A}$ est bien un anneau de séries formelles ([ÉGA 0_{IV} 16.3.10]).

On a observé ci-dessus que la famille des $\kappa_e \subset \kappa$, $e \subset E$, satisfait aux hypothèses de la proposition 1.2.4. On vérifie immédiatement qu'il en est de même de la famille des sous-corps $L_{\kappa,e}$ de L_κ ; on a donc l'égalité

(2.1.6.1) $$\mathrm{rang}_L \Omega^1_{L/L_{\kappa,e}} = \mathrm{rang}_{L_\kappa} \Omega^1_{L_\kappa/L_{\kappa,e}},$$

dès que l'ensemble fini e est suffisamment grand.

Posons $R_\kappa = \kappa[[\overline{\tau_1}, \dots, \overline{\tau_d}]]$ et $R_{\kappa,e} = \kappa_e[[\overline{\tau_1}^p, \dots, \overline{\tau_d}^p]]$. Le terme de gauche de (2.1.6.1) est le rang générique du $\overline{A}$-module $\Omega^1_{\overline{A}/R_{\kappa,e}}$, c'est-à-dire le rang de son tensorisé avec L. Remarquons que d'après [ÉGA 0_{IV} 21.9.4], $\Omega^1_{\overline{A}/R_{\kappa,e}}$ s'identifie au $\overline{A}$-module $\widehat{\Omega}^1_{\overline{A}/\kappa_e}$ de formes différentielles complété. Le terme de droite est quant à lui le rang du $R_{\kappa,e}$-module libre $\Omega^1_{R_\kappa/R_{\kappa,e}}$. Ce dernier est égal à $d + \mathrm{rang}_\kappa \Omega^1_{\kappa/\kappa_e} = d + |e|$ (où $|-|$ désigne le cardinal d'un ensemble), de sorte que la formule (2.1.6.1) se réécrit :

(2.1.6.2) $$\mathrm{rang}_{\overline{A}} \widehat{\Omega}^1_{\overline{A}/\kappa_e} = d + |e|.$$

2.1.7. — La proposition suivante va nous permettre de modifier le corps des représentants de façon à pouvoir supposer e vide (de façon équivalente : $\kappa_e = \kappa$).

2.1.8. Proposition. — *Il existe une partie finie e de E et des éléments β'_i, pour $i \in e$, relevant les b_i tels que, pour chaque composante irréductible intègre* $\mathrm{Spec}(\overline{A})$ *de* $\mathrm{Spec}(A)$*, les conditions suivantes soient vérifiées :*

(i) $\mathrm{rang}_{\overline{A}} \widehat{\Omega}^1_{\overline{A}/\kappa_e} = d + |e|$,

(ii) *les images des $d\beta'_i$ dans $\widehat{\Omega}^1_{\overline{A}/\kappa_e} \otimes_{\overline{A}} L$, où $L =$ $\mathrm{Frac}(\overline{A})$, sont L-linéairement indépendantes.*

L'égalité 2.1.6.1 (et donc 2.1.6.2) étant valable, pour chaque composante irréductible, dès que e est suffisamment grand, on peut choisir un tel ensemble qui convient pour chacune d'entre elles. La propriété (i) en découle.

Pour démontrer la propriété (ii), nous utiliserons le lemme élémentaire suivant.

2.1.9. Lemme. — *Soient $\overline{A}$ et L comme ci-dessus. Pour tout idéal non nul I de $\overline{A}$, l'ensemble des $df \otimes_{\overline{A}} L$, pour $f \in I$, est une famille génératrice du L-espace vectoriel $\widehat{\Omega}^1_{\overline{A}/\kappa_e} \otimes_{\overline{A}} L$.*

Démonstration. — Soient $f_0 \in I$ non nul, et $\omega_0 = df_0$. Pour tout $b \in \overline{A}$, $d(bf_0) = b\omega_0 + f_0 db$. La famille des $d(bf_0) \otimes 1$ contient $\omega_0 \otimes 1$; d'après la formule précédente, le L-espace vectoriel qu'elle engendre contient donc les $db \otimes 1$ pour chaque $b \in \overline{A}$. □

Soit $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_c\}$ l'ensemble des idéaux premiers minimaux de A. Pour chaque $j \in \{1, \ldots, c\}$, posons $A_j = A/\mathfrak{p}_j$ et $X_j = \mathrm{Spec}(A_j)$ la composante irréductible intègre de $X = \mathrm{Spec}(A)$ correspondante. Notons pour tous $i \in e$ et $j \in \{1, \ldots, c\}$, $\beta_{i,j}$ l'image dans A_j de $\beta_i \in A$. (Rappelons que les β_i font partie d'une p-base de $\kappa \subset A$.) Nous allons démontrer par récurrence sur j ($0 \leq j \leq c$) qu'il existe des éléments $\{m_{i,j}\}$ dans $\mathfrak{m}_A$, pour $i \in e$, tels que les images des éléments $\beta_i + m_{i,j}$ dans chacun des anneaux $A_1, \ldots, A_j$ aient des différentielles linéairement indépendantes dans chacun des espaces vectoriels $\Omega^1_{A_1/R_{\kappa,e}} \otimes_{A_1} \mathrm{Frac}\, A_1$, …, $\Omega^1_{A_j/R_{\kappa,e}} \otimes_{A_j} \mathrm{Frac}\, A_j$. Pour $j = 0$, cette condition est vide. Supposons l'assertion démontrée pour un $j \leq c-1$ et montrons la pour $j+1$. Quitte à remplacer β_i par $\beta_i + m_{i,j}$, on peut supposer que $m_{i,j} = 0$ pour tout $i \in e$. L'anneau A étant réduit, les $\mathfrak{p}_\alpha$ forment une décomposition primaire *réduite* de (0), de sorte que l'idéal $\mathfrak{q}_j := \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_j$ ($= \mathrm{Ker}(A \to A_1 \times \cdots \times A_j)$) n'est pas contenu dans $\mathfrak{p}_{j+1}$. Si $j > 0$, notons I_{j+1} son image dans $\overline{A} = A_{j+1} (= A/\mathfrak{p}_{j+1})$; c'est un idéal non nul. Si $j = 0$, on considère $\mathfrak{m}_{\overline{A}}$. D'après (i), $\mathrm{rang}_{\overline{A}} \widehat{\Omega}^1_{\overline{A}/\kappa_e} = d + |e| \geq |e|$; d'autre part, la famille $d(I_{j+1})$ est génératrice dans $\widehat{\Omega}^1_{\overline{A}/\kappa_e} \otimes_{\overline{A}} L$ (où $L = \mathrm{Frac}\, \overline{A}$).

2.1.10. Lemme. — *Soient V un espace vectoriel de dimension au moins n, $b_1, \ldots, b_n$ des vecteurs de V et W une famille génératrice. Il existe une famille $w_1, \ldots, w_n$ d'éléments de $W \cup \{0\}$ tels que les $b_i + w_i$ soient linéairement indépendants.*

Démonstration. — Par récurrence immédiate sur n. □

Il existe donc des éléments $m'_{i,j+1} \in I_{j+1}$, $i \in e$, tels que les différentielles des éléments $d((\beta_i \mod \mathfrak{p}_{j+1}) + m'_{i,j+1})$, $i \in e$, soient linéairement indépendantes dans $\widehat{\Omega}^1_{\overline{A}/\kappa_e} \otimes_{\overline{A}} L$.

Relevons les $m'_{i,j+1}$ en des éléments $m_{i,j+1}$ de $\mathfrak{q}_j$ si $j > 0$, ou de $\mathfrak{m}_A$ si $j = 0$. Par construction, ils satisfont la propriété escomptée au cran $j+1$.

2.1.11. — Considérons le sous-corps

$$\kappa' := \kappa^p(\beta_i, i \notin e; \beta'_i, i \in e) = \kappa_e(\beta'_i, i \in e) \subset A,$$

où les β'_i $(i \in e)$ sont comme en 2.1.8. Il s'envoie isomorphiquement sur $k = A/\mathfrak{m}_A$ par réduction : son image contient k^p et les images des β_i $(i \notin e)$, β'_i $(i \in e)$, qui constituent une p-base de k. Des égalités 2.1.6.2 et de la propriété (ii) de 2.1.8, on tire :

$$\mathrm{rang}_{\overline{A}} \widehat{\Omega}^1_{\overline{A}/\kappa'} = d,$$

pour toute composante irréductible intègre $\mathrm{Spec}(\overline{A})$ de X. Par la suite, nous noterons encore κ ce nouveau corps de représentants.

2.1.12. — Le A-module $\widehat{\Omega}^1_{A/\kappa}$ étant de rang générique d sur chaque composante irréductible, on montre en procédant comme précédemment qu'il existe des éléments $f_1, \ldots, f_d$ de A tels que les $d(f_i \bmod \mathfrak{p}_\alpha) \otimes_{A_j} \mathrm{Frac}\, A_j$ forment une base de $\widehat{\Omega}^1_{A_j/\kappa} \otimes_{A_j} \mathrm{Frac}\, A_j$ pour chaque composante irréductible $\mathrm{Spec}(A_j)$ de X. Quitte à les multiplier individuellement par une puissance p-ième d'un élément appartenant à $\mathfrak{m}_A - \bigcup_j \mathfrak{p}_j$, on peut les supposer dans $\mathfrak{m}_A$. Rappelons que l'on a choisi un système de paramètres $\tau_1, \ldots, \tau_d$ dans A, de sorte que le morphisme $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(k[[\tau_1, \ldots, \tau_d]])$ soit fini.

Posons, pour $i \in \{1, \ldots, d\}$,

$$t_i := \tau_i^p (1 + f_i).$$

Soient A_0 le sous-anneau $\kappa[[t_1, \ldots, t_d]]$ de A, $X_0 = \mathrm{Spec}(A_0)$. Le morphisme $X \to X_0$ est fini : cela résulte du fait que les éléments $1 + f_i$ sont des unités de A. Vérifions qu'il est génériquement étale. L'anneau A étant nœthérien complet, le A-module de type fini Ω^1_{A/A_0} est également complet et coïncide donc avec le module des formes différentielles complété $\widehat{\Omega}^1_{A/A_0}$. Les anneaux A_0 et A étant métrisables, et tout sous-A-module de $\widehat{\Omega}^1_{A/\kappa}$ étant fermé, la suite

$$\widehat{\Omega}^1_{A_0/\kappa} \widehat{\otimes}_{A_0} A \to \widehat{\Omega}^1_{A/\kappa} \to \widehat{\Omega}^1_{A/A_0} = \Omega^1_{A/A_0} \to 0$$

est *exacte* ([ÉGA 0_{IV} 20.7.17]). Il résulte de l'hypothèse sur les éléments f_i et de la formule

$$d(t_i) = \tau_i^p df_i$$

qu'au-dessus de chaque point maximal de $X = \mathrm{Spec}(A)$, la première flèche est surjective. On en déduit que le A-module Ω^1_{A/A_0} est génériquement nul. □

2.2. Le théorème de Cohen-Gabber équivariant en caractéristique > 0

2.2.1. — Nous allons démontrer ici une généralisation du théorème 2.1.1 dans le cas d'un anneau non nécessairement équidimensionnel, muni d'une action d'un groupe fini.

2.2.2. *Théorème*. — *Soient A un anneau local nœthérien complet réduit d'égale caractéristique, dimension d, corps résiduel κ et G un groupe fini agissant sur A avec $|G|$*

inversible dans κ. Alors, il existe un morphisme fini génériquement étale, G-équivariant, $\kappa[[t_1, \dots, t_d]] \to A$, où $\kappa \to A$ relève l'identité de κ et G agit trivialement sur les t_i.

Commençons par une proposition.

2.2.3. Proposition. — *Soit A un anneau muni d'une action d'un groupe fini G d'ordre inversible sur A et soit $B = \mathrm{Fix}_G\, A$ le sous-anneau des invariants.*

(i) *L'anneau B est*
   - (a) *nœthérien si A l'est ;*
   - (b) *réduit si A l'est ;*
   - (c) *local d'idéal maximal $\mathfrak{m} \cap B$ si A est local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, de corps résiduel isomorphe au sous-corps $\mathrm{Fix}_G\, A/\mathfrak{m}$ de $\kappa = A/\mathfrak{m}$.*

(ii) *Le morphisme* $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(B) = \mathrm{Spec}(A)/G$ *est*
   - (a) *fini si A est nœthérien ;*
   - (b) *génériquement étale si A est de plus réduit.*

Démonstration. — (i) Notons Tr le morphisme B-linéaire $\mathrm{Tr} : A \to B$, $x \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(x)$, parfois appelé « opérateur de Reynolds ». Pour tout idéal I de B, on a $IA \cap B = I$. En effet, l'inclusion $I \subset IA \cap B$ est triviale et l'inclusion opposée résulte du fait que si $x \in IA \cap B$, sa « trace » $x = \mathrm{Tr}(x)$ appartient, par I-linéarité, à $IB = I$. On en déduit immédiatement l'énoncé (a). L'énoncé (b) est trivial. Si A est local, on a $A - \mathfrak{m} = A^\times$. Il résulte d'une part que G stabilise globalement $\mathfrak{m}$ et d'autre part que $\mathrm{Fix}_G\, A - \mathrm{Fix}_G\, \mathfrak{m} = (\mathrm{Fix}_G\, A)^\times$. Ainsi, B est maximal d'idéal $\mathfrak{n} = \mathrm{Fix}_G\, \mathfrak{m}$. Enfin, le morphisme canonique $B/\mathfrak{n} \to \mathrm{Fix}_G\, \kappa$ déduit de l'inclusion canonique $B/\mathfrak{n} \to \kappa$ est un isomorphisme. En effet, si $a \in A$ est un relèvement arbitraire de $\lambda \in \mathrm{Fix}_G\, \kappa$, l'élément $b = \mathrm{Tr}(a)$ en est un relèvement G-équivariant. Ceci achève la démonstration du (c).

(ii.a) Nous allons montrer que le morphisme entier $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(B)$ est fini par réduction au cas bien connu où A est un corps.

— Réduction au cas réduit. Soient N le nilradical de A et $M = N \cap B$ celui de B. Pour chaque entier $i \in \mathbf{N}$, le A/N-module N^i/N^{i+1} est de type fini, car A est supposé nœthérien, et nul pour $i \gg 0$. Le module $\mathrm{gr}_N(A) = \bigoplus_{n \geq 0} N^i/N^{i+1}$ est donc de type fini sur $\mathrm{gr}^0_N(A) = A/N$. Si ce dernier est de type fini sur $B/M = \mathrm{gr}^0_M(B)$, il en est de même de $\mathrm{gr}_N(A)$ sur $\mathrm{gr}_M(B)$ et finalement ([Bourbaki, **AC**, III, § 2, n° 9, cor. 1]) de A sur B, par complétude de l'anneau nœthérien B pour la topologie M-adique.

— Réduction au cas d'un produit de corps. Supposons A réduit et considérons l'ensemble fini $\{\mathfrak{p}_i\}_{i \in I}$ des idéaux premiers minimaux de A. Pour chaque i, $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i \cap B$ est un idéal premier *minimal* de B. Cela résulte du théorème de Cohen-Seidenberg ([Bourbaki, **AC**, V, § 2, n° 1, th. 1 et cor. 2]) et de la transitivité de l'action de G sur les fibres de $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(B)$ (*op. cit.*, n° 2, th. 2). Soit $K = \mathrm{Frac}\, A$

(resp. $L = \operatorname{Frac} B$) l'anneau total des fractions de A (resp. B) ; c'est un produit de corps dans lequel A (resp. B) s'injecte, isomorphe au semi-localisé de A en les $\{\mathfrak{p}_i\}_{i\in I}$ (resp. $\{\mathfrak{q}_i\}_{i\in I}$). Soit $S = A - \bigcup_i \mathfrak{p}_i$; on a donc $K = S^{-1}A$. D'après (*op. cit.*, § 1, n° 1, prop. 23), on a $\operatorname{Fix}_G(S^{-1}A) = (\operatorname{Fix}_G S)^{-1}B$, de sorte que $\operatorname{Fix}_G K = L$ et $A \otimes_B L \cong K$. Supposons K fini sur L — comme il sera démontré au paragraphe suivant —, de sorte qu'il existe d'après l'isomorphisme précédent un nombre fini n d'éléments $a_1, \dots, a_n$ de A qui engendrent K sur L. Pour conclure, il suffit de vérifier que l'opérateur $\operatorname{Tr} : A \to B$ définit, par composition avec le produit, un accouplement $A \otimes_B A \to B$ qui est non-dégénéré en passant aux anneaux de fractions, c'est-à-dire que si un élément $x \in K$ vérifie $\operatorname{Tr}(K \cdot x) = \{0\}$, alors $x = 0$. En effet, s'il en est ainsi, l'application $A \to B^n$, $a \mapsto \big(\operatorname{Tr}(a_i a)\big)$ est un *plongement* B-linéaire et l'on peut conclure par nœthérianité de B. Le fait que l'accouplement $K \otimes_L K \to L$ soit non-dégénéré résulte du fait que si e est un idempotent correspondant à un facteur $\operatorname{Frac} A/\mathfrak{p}$ de K, l'élément $\operatorname{Tr}(e)$ est égal à $\frac{|H|}{|G|} f$, où H est le stabilisateur de e, et f est l'idempotent de L correspondant au facteur $\operatorname{Frac} B/\mathfrak{q}$, avec $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap A$.

— Réduction au cas d'un corps. Soit donc $A = \prod_i K_i$ un produit fini de corps et posons $X = \operatorname{Spec}(A) = \coprod_i \eta_i$. Si $X = X_1 \amalg X_2$, où X_1 et X_2 sont G-stables, $X/G = (X_1/G) \amalg (X_2/G)$ de sorte que l'on se ramène immédiatement au cas où X/G est connexe, c'est-à-dire où l'action de G est *transitive.* Pour tout i, notons G_i le groupe de décomposition correspondant. D'après le cas classique (cas d'un corps), $\eta_i \to \eta_i/G_i$ est fini étale. Il en résulte que le morphisme $X \to \coprod \eta_i/G_i$ est fini. Enfin, puisque pour tout i, $\eta_i/G_i \xrightarrow{\sim} X/G$ (*loc. cit.*, § 2, n° 2, prop. 4), le résultat (ii.a) en découle.

L'énoncé (ii.b) est désormais évident. □

2.2.4. — Soient A et G comme dans l'énoncé du théorème 2.2.2. Il résulte de la proposition précédente que l'on a l'égalité $\dim(B) = \dim(A) < +\infty$, où l'on note $B = \operatorname{Fix}_G A$. Nous noterons d leur dimension commune. Soit B/I le quotient maximal d-équidimensionnel de B. D'après le théorème de Cohen-Gabber 2.1.1, il existe un corps de représentants $\lambda \hookrightarrow B/I$ et un système de paramètres $t_1, \dots, t_d$ de B/I tel que $\lambda[[t_1, \dots, t_d]] \to B/I$ soit fini, génériquement étale. On peut relever l'inclusion $\lambda \hookrightarrow B/I$ en une inclusion $\lambda \hookrightarrow B$: cela résulte par exemple, en caractéristique résiduelle positive (seul cas non trivial), de la correspondance entre sous-corps de représentants et relèvements d'une p-base donnée du corps résiduel. Enfin, on peut relever le système de paramètres de B/I en un système de paramètres de B : cela résulte, par dévissage, du lemme suivant.

2.2.5. *Lemme.* — *Soient $A \twoheadrightarrow B$ une surjection d'anneaux locaux nœthériens et $b \in \mathfrak{m}_B$ un élément* sécant *pour B, c'est-à-dire tel que* $\dim(B/b) = \dim(B) - 1$. *Il existe un relèvement de b dans A sécant pour A.*

Pour des généralités sur les suites sécantes, voir par exemple *op. cit.*, chap. VIII, § 3, n° 2.

Démonstration. — On se ramène immédiatement au cas où $B = A/(f)$, $f \in A$. Soit $a \in A$ un relèvement arbitraire de b ; par hypothèse, on a $\dim(A/(f,a)) = \dim(B) - 1$. Si $\dim(B) = \dim(A) - 1$, on a nécessairement $\dim(A/a) = \dim(A) - 1$ car la dimension chute d'au plus un par équation. Dans le cas contraire, f appartient à la réunion $\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$, où les $\mathfrak{p}_i$ sont les idéaux premiers de A de cohauteur $\dim(A)$. Supposons que $f \in \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$, et seulement ces idéaux-ci. La conclusion ne peut être mise en défaut que si $a + (f) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$, c'est-à-dire si tous les relèvements de b sont non sécants. Pour chaque $i \leq r$, on a $a \notin \mathfrak{p}_i$ car f appartenant à $\mathfrak{p}_i$, on aurait $\dim(A/(f,a)) = \dim(A)$. Il en résulte notamment que $r \neq n$. Il suffit donc de montrer que l'hypothèse $a + (f) \subset \bigcup_{i=r+1}^{n} \mathfrak{p}_i$ est absurde. On aurait en effet $a + f^m = a + f \cdot f^{m-1} \in \bigcup_{i=r+1}^{n} \mathfrak{p}_i$ pour tout m et finalement $f^m(1 - f^{m-m'}) \in \mathfrak{p}_i$ pour deux entiers $m > m'$ et un indice $r + 1 \leq i \leq n$. On en tire immédiatement $f \in \mathfrak{p}_i$, ce qui est contraire à l'hypothèse. □

2.2.6. — L'extension κ/λ étant étale, car $\lambda = \mathrm{Fix}_G \, \kappa$, le morphisme $\kappa \to A/\mathfrak{m}$ se relève *uniquement* en un λ-homomorphisme $k \to A$; ce morphisme est G-équivariant. Le morphisme A/B étant fini, génériquement étale, ceci achève la démonstration du théorème 2.2.2.

3. Autour du théorème de Epp

3.1. Énoncé (rappel)

3.1.1. — Si X est un schéma *réduit* n'ayant qu'un nombre fini de composantes irréductibles, nous noterons X^{nor} son normalisé ([ÉGA II 6.3.6–8]).

***3.1.2. Théorème* (Helmut Epp, [Epp, 1973], théorème 1.9).** — *Soit $T \to S$ un morphisme local dominant de traits complets, de caractéristique résiduelle $p > 0$. Notons κ_S et κ_T leurs corps résiduels respectifs. Supposons κ_S* parfait *et le sous-corps parfait maximal de κ_T* algébrique *sur κ_S. Il existe une extension finie de traits $S' \to S$ telle que le produit fibré réduit normalisé*

$$T' := {(T \times_S S')_{\text{réd}}}^{\mathrm{nor}}$$

ait une fibre spéciale réduite *au-dessus de S'.*

3.1.3. Remarque. — En caractéristique mixte, le produit fibré $T \times_S S'$ est réduit. En effet, le morphisme $T' \to S'$ (obtenu par changement de base d'un plat) est plat, et S' est intègre si bien que l'anneau des fonctions de T' s'injecte dans l'anneau des fonctions de sa fibre générique. Il suffit donc de prouver que cette dernière est réduite. Or, en caractéristique nulle, toute extension de corps est séparable. On vérifie également sans difficulté que la conclusion du théorème est encore valable si l'on suppose seulement S complet, mais pas nécessairement T (cf. *loc. cit.*, § 2).

3.2. Sorites

3.2.1. — Nous dirons qu'une extension de corps K/k d'exposant caractéristique $p \geq 1$ a la **propriété de Epp** si tout élément du sous-corps parfait maximal $K^{p^\infty} := \bigcap_{n\geq 0} K^{p^n}$ de K est algébrique séparable sur k. Pour k parfait, c'est l'hypothèse faite sur κ_T/κ_S dans 3.1.2. Dans ce court paragraphe, on rappelle quelques résultats élémentaires de stabilité pour cette notion. Commençons par un lemme.

3.2.2. Lemme. — *Pour tout corps K d'exposant caractéristique $p > 1$, on a, dans une clôture séparable $K^{\text{sép}}$ de K,*

$$(K^{p^\infty})^{\text{sép}} = (K^{\text{sép}})^{p^\infty}.$$

Démonstration. — L'inclusion $(K^{p^\infty})^{\text{sép}} \subset (K^{\text{sép}})^{p^\infty}$ est évidente : K^{p^∞} est parfait donc toute extension algébrique, en particulier sa clôture séparable $(K^{p^\infty})^{\text{sép}}$, l'est également. Comme cette dernière est contenue dans $K^{\text{sép}}$, elle est également contenue dans son plus grand sous-corps parfait $(K^{\text{sép}})^{p^\infty}$.

Réciproquement, considérons $x \in (K^{\text{sép}})^{p^\infty}$, et notons, pour chaque entier $n \geq 0$, x_n sa racine p^n-ième dans $K^{\text{sép}}$ et f_n son polynôme minimal (*unitaire*). Compte tenu d'une part de l'expression de f_n en fonction des polynômes symétriques en les conjugués galoisiens de x_n et d'autre part de l'injectivité et de l'additivité de l'élévation à la puissance p^n-ième, on a l'égalité $f_0 = f_n^{(p^n)}$, où $f_n^{(p^n)}$ est le polynôme obtenu à partir de f_n en élevant les coefficients à la puissance p^n-ième. Il en résulte que les coefficients du polynôme minimal f_0 de x appartiennent à K^{p^∞}. □

***3.2.3. Proposition* (Voir [Epp, 1973], § 0.4).** — *Soit k un corps d'exposant caractéristique p.*

(i) *Soient L/K et K/k ayant la propriété de Epp. Alors, L/k a la propriété de Epp.*
(ii) *Toute extension finie de k a la propriété de Epp.*
(iii) *Si $p > 1$, pour tout entier naturel d, l'extension* $(\mathrm{Frac}\ k[[x_1, \dots, x_d]])/k$ *a la propriété de Epp.*
(iv) *Si $p > 1$, pour toute inclusion $k \subset A$, où A est un anneau local complet noethérien intègre, induisant un isomorphisme sur les corps résiduels, l'extension* $(\mathrm{Frac}\ A)/k$ *a la propriété de Epp.*

Démonstration. — Supposons immédiatement $p > 1$ sans quoi (i) et (ii) sont triviaux.

(i) Par hypothèse on a dans une clôture séparable de L l'inclusion $L^{p^\infty} \subset K^{\text{sép}}$. Comme le corps L^{p^∞} est *parfait*, on en déduit que $L^{p^\infty} \subset (K^{\text{sép}})^{p^\infty} = (K^{p^\infty})^{\text{sép}} \subset k^{\text{sép}}$, où l'égalité résulte du lemme précédent.

(ii) Toute extension étale a tautologiquement la propriété de Epp. D'après (i), il reste à considérer le cas d'une extension radicielle K/k. Si elle est de hauteur $\leq r$, on a $K^{p^r} \subset k$ et en particulier $K^{p^\infty} \subset k \subset k^{\text{sép}}$.

(iii) Soit $A = k[[x_1, \ldots, x_d]]$ et K son corps des fractions. Montrons que $K^{p^\infty} = k^{p^\infty}$. Comme K est contenu dans $k((x_1, \ldots, x_{d-1}))((x_d))$, on se ramène par récurrence au cas où $d = 1$. Tout élément non nul de $k((t))^{p^\infty}$ a une valuation infiniment p-divisible donc nulle, de sorte que $k((t))^{p^\infty} - \{0\}$ est contenu dans $k[[t]]^\times$ et finalement dans k^{p^∞} par un calcul immédiat.

(iv) Cela résulte des observations précédentes et du théorème de structure de Cohen. □

4. Le théorème de Cohen-Gabber en caractéristique mixte

4.1. Anneaux de Cohen et lissité formelle (rappels)

4.1.1. — Pour la commodité du lecteur, nous énonçons quelques résultats, principalement dus à Cohen. Pour les démonstrations, nous renvoyons à [Bourbaki, **AC**, IX, § 2] et [ÉGA 0_{IV} § 19].

***4.1.2. Définition* ([ÉGA 0_{IV} 19.3.1]).** — Soit A un anneau topologique[(iii)]. Une A-algèbre topologique B est dite **formellement lisse** si pour toute A-algèbre topologique *discrète* C, et tout idéal *nilpotent* I de C, tout A-morphisme continu $u : B \to C/I$ se factorise en $B \xrightarrow{v} C \overset{\phi}{\twoheadrightarrow} C/I$, où v est un A-morphisme continu et ϕ l'homomorphisme canonique.

On dit aussi que $A \to B$ est un **morphisme formellement lisse**. La proposition suivante énonce une propriété de relèvement un peu plus générale que celle de la définition.

***4.1.3. Proposition* (*loc. cit.*, 19.6.1).** — *Soient A un anneau topologique, et B un A-algèbre formellement lisse. Soient C une A-algèbre topologique, I un idéal de C vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *C est métrisable et complet ;*

(ii) *I est fermé et la suite $(I^n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers zéro.*

[(iii)] Ici, et ci-dessous, on suit la convention [ÉGA 0_{IV} 19.0.3] : les anneaux sont supposés *linéairement* topologisés.

Alors, tout A-morphisme continu $u : B \to C/I$ se factorise en $B \xrightarrow{v} C \twoheadrightarrow C/I$, où v est un A-morphisme continu.

Les deux théorèmes suivants donnent deux critères importants de lissité formelle.

***4.1.4. Théorème* (*loc. cit.*, 19.6.1).** — *Une extension de corps munis de la topologie discrète est formellement lisse si et seulement si l'extension est* séparable.

***4.1.5. Théorème* (*loc. cit.*, 19.7.1).** — *Soient A, B deux anneaux locaux nœthériens, $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ leurs idéaux maximaux respectifs et $k = A/\mathfrak{m}$ le corps résiduel de A. Munissons A et B respectivement des topologies $\mathfrak{m}$-adique et $\mathfrak{n}$-adique. Soit $\phi : A \to B$ un morphisme* local, *et posons $B_0 = B \otimes_A k$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *B est une A-algèbre formellement lisse ;*

(ii) *B est un A-module plat, et B_0 munie de la topologie quotient est une k-algèbre formellement lisse.*

Le théorème suivant, joint au précédent, est à la base de la démonstration de l'existence des anneaux de Cohen définis ci-après.

Dans les énoncés qui suivent, les anneaux locaux sont munis de la topologie de l'idéal maximal.

***4.1.6. Théorème* (*loc. cit.*, 19.7.2).** — *Soient A un anneau local nœthérien, I un idéal strict, $A_0 = A/I$, B_0 un anneau local nœthérien complet, $A_0 \to B_0$ un morphisme local formellement lisse. Il existe alors un anneau local nœthérien complet B, un morphisme local $A \to B$ faisant de B un A-module* plat, *et un A_0-isomorphisme $u : B \otimes_A A_0 \xrightarrow{\sim} B_0$.*

***4.1.7. Définition* (*loc. cit.*, 19.8.4 et 5).** — On appelle **anneau de Cohen** un anneau qui est soit un corps de caractéristique nulle, soit un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel de caractéristique $p > 0$ et d'idéal maximal engendré par p.

***4.1.8. Théorème* (Cohen, *loc. cit.*, 19.8.6 et 21.5.3).** — (i) *Soient W un anneau de Cohen de corps résiduel K, C un anneau local nœthérien complet, et I un idéal strict de C. Alors, tout morphisme local $u : W \to C/I$ se factorise en $W \xrightarrow{v} C \to C/I$, où v est local. De plus, la factorisation est* unique *si et seulement si $\Omega^1_K = 0$ ou $I = 0$.*

(ii) *Soit K un* corps. *Il existe un anneau de Cohen W de corps résiduel isomorphe à K. Si W' est un second anneau de Cohen, de corps résiduel K', tout isomorphisme $u : K \xrightarrow{\sim} K'$ provient par passage au quotient d'un isomorphisme $v : W \xrightarrow{\sim} W'$.*

4.1.9. — Rappelons que l'hypothèse $\Omega^1_K = 0$ est équivalente au fait que K est *parfait* s'il est de caractéristique > 0 ou bien est une extension algébrique de $\mathbf{Q}$ s'il est de caractéristique nulle.

Signalons que si K est *parfait* de caractéristique $p > 0$, le morphisme v de (ii) est *unique*. Dans ce cas, W est d'ailleurs isomorphe à l'anneau des vecteurs de Witt sur K.

4.2. Le théorème de Cohen-Gabber en caractéristique mixte

4.2.1. — Soit A un anneau local nœthérien complet de caractéristique résiduelle $p > 0$. Le schéma $X = \mathrm{Spec}(A)$ est de manière unique un $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}_p)$-schéma. Notons X_p le sous-schéma fermé de X, fibre au-dessus du point fermé de $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}_p)$. Nous dirons qu'un ouvert $U \subset X$ est p-**dense** si $U \cap X_p$ est dense dans X_p.

4.2.2. Théorème. — *Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma local nœthérien complet normal de corps résiduel k, de dimension $d \geq 2$ et de point générique de caractéristique nulle. Il existe un morphisme fini surjectif $X' \to X$, où X' est normal intègre de corps résiduel k', et un morphisme fini surjectif $X' \to \mathrm{Spec}(V[[t_1, \dots, t_{d-1}]])$, où V est un anneau de valuation discrète de corps résiduel k',* étale *au-dessus d'un ouvert p-dense du but.*

La suite de ce paragraphe est consacrée à la démonstration du théorème précédent.

4.2.3. — Soit X comme dans l'énoncé. Considérons le sous-corps parfait maximal $k_0 = k^{p^\infty}$ du corps résiduel k de $A = \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ et notons $W_0 = W(k_0)$ l'anneau des vecteurs de Witt correspondant. Il résulte du théorème de Cohen qu'il existe un unique morphisme $X \to S_0 = \mathrm{Spec}(W_0)$ qui étende le morphisme $\mathrm{Spec}(k) \to \mathrm{Spec}(k_0)$ entre les points fermés (4.1.8, (i)).

Pour tout point maximal $\mathfrak{p}$ de la fibre spéciale X_p de ce morphisme, l'anneau de valuation discrète $A_{\mathfrak{p}}$ a pour corps résiduel Frac $A/\mathfrak{p}$, où l'anneau $A/\mathfrak{p}$ est local nœthérien complet intègre de corps résiduel k. D'après 3.2.3 (i) & (iv), l'extension $\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})/k_0$ a la propriété de Epp. De tels idéaux $\mathfrak{p}$ étant en nombre fini et la conclusion du théorème de Epp (3.1.2), (3.1.3) étant stable par changement de base fini car c'est un résultat de lissité formelle, il existe donc un changement de base fini $S'_0 = \mathrm{Spec}(W'_0) \to S_0$ tel que la fibre spéciale du produit fibré normalisé $X'_0 := (X \times_{S_0} S'_0)^{\mathrm{nor}} = \mathrm{Spec}(A'_0)$ soit réduite en ses points maximaux. (On utilise le fait que les points maximaux de la fibre spéciale de $X'_0 \to S'_0$ se trouvent au-dessus des points maximaux de la fibre spéciale de $X \to S_0$; cf. p. ex. [ÉGA 0_{IV} 16.1.6].)

D'après le lemme suivant, la fibre spéciale du morphisme $X'_0 \to S'_0$ est alors réduite.

4.2.4. Lemme. — *Soit X un schéma nœthérien normal. Tout diviseur de Cartier effectif génériquement réduit est réduit.*

Démonstration. — On peut supposer X affine et le diviseur de Cartier effectif défini par une fonction $f \in A = \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$. Soient $a \in A$ et $n \geq 1$ tels que $a^n \in (f)$; on souhaite montrer que $a \in (f)$. L'anneau $A/(f)$ étant génériquement réduit, l'élément a/f de Frac A appartient à $A_{\mathfrak{p}}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 contenant f. Il en est évidemment de même pour $f \notin \mathfrak{p}$. L'anneau A étant normal, $\bigcap_{\mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}} = A$ où $\mathfrak{p}$ parcourt les idéaux de hauteur 1 (voir [Bourbaki, **AC**, VII, § 1, n° 6, th. 4]) de sorte que $a/f \in A$. □

4.2.5. — Notons k'_0 le corps résiduel de W'_0, ϖ' une uniformisante de W'_0, et considérons une composante connexe $X' = \mathrm{Spec}(A')$ de X'_0 ; c'est un schéma fini surjectif au-dessus de X. Soit k' son corps résiduel. L'inclusion $k'_0 \hookrightarrow k'$ déduite du morphisme $X' \to S'_0$ est formellement lisse, car k'_0 est parfait, donc se relève d'après 4.1.5 et 4.1.6 en un morphisme *formellement lisse* $W'_0 \to V$ où V est un anneau local complet nœthérien. Cet anneau est un anneau de valuation discrète. L'anneau A'/ϖ' étant *réduit*, équidimensionnel de dimension $d-1$, de corps résiduel k', il existe d'après le théorème de Cohen-Gabber (2.1.1), un relèvement k'_0-linéaire $k' \hookrightarrow A'/\varpi'$ et des éléments $x_1, \ldots, x_{d-1}$ dans l'idéal maximal de A'/ϖ' tels que le morphisme induit $k'[[t_1, \ldots, t_{d-1}]] \to A'/\varpi'$, envoyant l'indéterminée t_i sur x_i, soit fini, *génériquement étale* en haut et en bas.

Par lissité formelle de $W'_0 \to V$, le morphisme composé $V \to k' \to A'/\varpi'$ se relève en un W'_0-morphisme $V \to A'$. En relevant les x_i dans A', nous obtenons un morphisme $V[[t_1, \ldots, t_{d-1}]] \to A'$, fini injectif (cf. p. ex. [ÉGA 0_{IV} 19.8.8 (démonstration)]), *étale* au-dessus du point générique de la fibre spéciale. □

4.3. Le théorème de Cohen-Gabber premier à ℓ en caractéristique mixte

4.3.1. Théorème. — *Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma local nœthérien complet normal de dimension $d \geq 2$, de corps résiduel k de caractéristique $p > 0$ et de point générique de caractéristique nulle. Soit ℓ un nombre premier différent de p. Il existe alors :*

(i) *un schéma local nœthérien intègre normal Y muni d'une action d'un ℓ-groupe fini H et un morphisme fini surjectif H-équivariant $Y \to X$ tel que le quotient Y/H soit de degré (générique) premier à ℓ sur X ;*

(ii) *un anneau de valuation discrète complet V de même corps résiduel k' que Y, de caractéristique mixte, muni d'une action de H compatible avec son action sur k' ;*

(iii) *un morphisme local $Y \to Y' = \mathrm{Spec}(V[[t_1, \ldots, t_{d-1}]])$ qui soit fini, étale au-dessus d'un ouvert p-dense de Y', et H-équivariant avec action triviale de H sur les t_i.*

Ces morphismes sont représentés dans le diagramme ci-dessous, où toutes les flèches sont des morphismes finis surjectifs.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(V[[t_1,\ldots,t_{d-1}]]) = Y' & Y \arrow[l, "p\text{-génériquement étale}"'] \arrow[r] \arrow[d] & Y/H \arrow[dl, "\text{degré premier à } \ell"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

4.3.2. Remarque. — Observons que les conditions (i)–(iii) sur les morphismes $Y \to X$ et $Y \to Y'$ n'entraînent pas que le schéma Y/H soit étale au-dessus d'un ouvert p-dense de $\mathrm{Spec}(\mathrm{Fix}_H(V)[[t_1,\ldots,t_{d-1}]]) = Y'/H$. Voici un exemple, dû à Takeshi Saitô. Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, W l'anneau des vecteurs de Witt sur k, ℓ un nombre premier différent de p, $A = W[[x,y]]/(x^\ell y - p)$. Soient $W' = W[\pi]/(\pi^\ell - p)$ et B le normalisé de $A \otimes_W W'$, W'-isomorphe à $W'[[x,z]]/(xz - \pi)$. Le groupe $H = \mu_\ell(k)$ agit sur B, via son action sur W' : $\zeta \cdot x = x$ et $\zeta \cdot z = \zeta z$. Le morphisme $Y = \mathrm{Spec}(B) \to X = \mathrm{Spec}(A)$ défini par $x \mapsto x$ et $y \mapsto z^\ell$ satisfait les propriétés du théorème car $Y/H \xrightarrow{\sim} X$ et $Y \to Y' = \mathrm{Spec}(W'[[t]])$, $t \mapsto x + z^\ell$, est p-génériquement étale. Cependant, Y/H a une fibre spéciale isomorphe au schéma non réduit $\mathrm{Spec}\big(k[[x,y]]/(x^\ell \cdot y)\big)$. Elle n'est donc pas étale au-dessus d'un ouvert dense de la fibre spéciale de Y'.

La suite de ce paragraphe est consacrée à la démonstration du théorème précédent. Notons que si la fibre spéciale X_p de X sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}_p)$ est réduite, ce théorème — comme le précédent — résulte simplement du théorème 2.2.2, dans le cas particulier où le groupe G est trivial : on peut prendre $Y = X$ et H trivial.

4.3.3. — Considérons à nouveau le sous-corps parfait maximal k_0 du corps résiduel k de A et $W_0 = W(k_0) \hookrightarrow A$ l'unique morphisme relevant l'inclusion $k_0 \hookrightarrow k$. Soit W_0^ν la clôture intégrale de W_0 dans A.

4.3.4. Lemme. — *L'extension W_0^ν/W_0 est* finie, *totalement ramifiée.*

Démonstration. — Soit W'/W_0 une extension finie de traits, où W' est contenu dans A. Le corps résiduel de W' est une extension finie de k_0 ; c'est donc un corps parfait, contenu dans k et contenant k_0. Il est donc égal à k_0 : l'extension est totalement ramifiée. Le degré de l'extension W'/W_0 est par conséquent égal à son indice de ramification, qui est *majoré* par l'entier N tel que p appartienne à $\mathfrak{m}_A^N - \mathfrak{m}_A^{N+1}$. Si W'' est tel que le degré de l'extension $\mathrm{Frac}(W'')/\mathrm{Frac}(W_0)$ soit maximal, on a nécessairement $W' \subset W''$, comme on le voit immédiatement en considérant la sous-extension composée, dans $\mathrm{Frac}(A)$, des corps des fractions. Ainsi, $W_0^\nu = W''$ est fini sur W_0. $\square$

4.3.5. — D'après le théorème de Epp (3.1.2), il existe une extension finie d'anneaux de valuation discrète $W_0^\nu \to W_0'$, que l'on peut supposer génériquement galoisienne de groupe un groupe fini G, telle que la fibre spéciale sur W_0' de la normalisation A' de $A \otimes_{W_0^\nu} W_0'$ soit *réduite*. Observons que l'anneau W_0^ν étant intégralement clos dans A, l'anneau A' est local. Notons k_0^ν (resp. k_0') le corps résiduel de W_0^ν (resp. W_0') et k' le corps résiduel de A'. Choisissons des anneaux de Cohen $I(k')$ et $I(\mathrm{Fix}_G\, k')$ relatifs aux corps k' et $\mathrm{Fix}_G\, k'$. Il existe un morphisme $I(\mathrm{Fix}_G\, k') \to I(\mathrm{Fix}_G\, k')$ relevant l'inclusion. Ce morphisme étant fini étale entre anneaux locaux complets donc henséliens, l'action du quotient $\mathrm{Gal}(k'/\mathrm{Fix}_G\, k')$ de G sur k' se relève en une action $I(\mathrm{Fix}_G\, k')$-linéaire sur $I(k')$ (cf. p. ex. [Serre, 1968, III, § 5, th. 3]). Le corps k_0' étant parfait, il existe d'après le théorème 4.1.8 un morphisme *G-équivariant* $W(k_0') \to I(k')$. Soient enfin $V = W_0' \otimes_{W(k_0')} I(k')$, ϖ une uniformisante de W_0', $\overline{A'} = A'/\varpi A'$ et H un ℓ-Sylow de G. D'après le théorème 2.2.2, il existe un morphisme *fini, génériquement étale, H-équivariant,* $\phi : k'[[t_1, \dots, t_{d-1}]] \to \overline{A'}$, où les t_i s'envoient dans $\mathrm{Fix}_H\, \overline{A'}$. Le morphisme $\mathrm{Fix}_H\, A' \to \mathrm{Fix}_H\, \overline{A'}$ étant surjectif — comme cela se voit en utilisant la trace — on peut relever les images des t_i en des x_i' dans $\mathrm{Fix}_H\, A'$. De plus, par lissité formelle de V/W_0' (pour les topologie p-adiques), on peut relever $k' \to \overline{A'}$ en un W_0'-morphisme $\psi : V \to A'$: cela résulte par exemple de [ÉGA 0_{IV} 19.3.10]. En procédant cran par cran, et en considérant des isobarycentres dans les espaces affines définis par le lemme bien connu suivant, on constate qu'il existe même un tel relèvement qui est *H-invariant.*

4.3.6. Lemme. — *Soient $A \to B$ un morphisme d'anneaux et $C \twoheadrightarrow C'$ une surjection de A-algèbres, de noyau $\mathscr{N}$ de carré nul. Alors, l'ensemble des relèvements A-linéaires d'un morphisme $B \to C'$ à C est soit vide soit un torseur sous* $\mathrm{Dér}_A(B, \mathscr{N})$*. Le premier cas ne se produit pas si $A \to B$ est* formellement lisse*.*

4.3.7. — Le X-schéma $Y = \mathrm{Spec}(A')$ est bien fini p-génériquement étale sur $Y' = \mathrm{Spec}(V[[t_1, \dots, t_{d-1}]])$ si l'on envoie V dans A' par ψ comme ci-dessus et les variables t_i sur les x_i'. Par construction Y est, génériquement sur X, galoisien de groupe G ; son quotient Y/H est donc génériquement de degré premier à ℓ sur X. Ceci achève la démonstration du théorème.