YVES LASZLO
ALBAN MOREAU

Rigidité

Astérisque, tome 363-364 (2014), Séminaire Bourbaki, exp. nº XX, p. 491-528

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2014__363-364__491_0>

EXPOSÉ XX

RIGIDITÉ

Yves Laszlo et Alban Moreau

1. Introduction

Le but de cet exposé est de démontrer les deux résultats techniques 2.1.1 (comparaison des torseurs sur l'ouvert complémentaire $\operatorname{Spec} A - V(I)$ défini par un couple hensélien non nécessairement noethérien et l'ouvert correspondant de $\operatorname{Spec} \widehat{A}$ où A désigne le complété I-adique de A) et 5.3.1 (rigidité de la ramification). Ils permettront dans l'exposé suivant de montrer l'énoncé de finitude suivant (XXI-1.4) :

Théorème. — *Soit A un anneau strictement local de dimension 2. On suppose que A est normal, excellent, et on note $X' = \operatorname{Spec}(A) - \{\mathfrak{m}_A\}$ son spectre épointé. Alors, pour tout groupe fini G, l'ensemble $\mathrm{H}^1(X', G)$ est fini.*

Ce résultat est la clef pour démontrer le résultat de finitude général suivant (XXI-1.2) :

Théorème. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme de type fini entre schémas quasi-excellents. Soit $\mathbb{L}$ un ensemble de nombres premiers inversibles sur X. Pour tout faisceau constructible de groupes F sur $Y_{\text{ét}}$ de $\mathbb{L}$-torsion, le faisceau $\mathrm{R}^1 f_\star(F)$ sur $X_{\text{ét}}$ est constructible.*

Par des techniques d'ultrafiltres, chères aux théoriciens des modèles, on est ramené à étudier des revêtements étales de spectres épointés d'anneaux *non noethériens*, ce qui explique qu'on soit contraint de démontrer les énoncés techniques hors de tout cadre noethérien.

Remarque. — Soit X un schéma. On considérera des champs en groupoïdes $\mathscr{C}$ sur $X_{\text{ét}}$ (on dira simplement champs). En général, la catégorie fibrée $\mathscr{C}$ n'est pas scindée de sorte que si x, y sont deux objets de $\mathscr{C}(S)$ où $S \to X$ est étale, il faut quelques précautions pour parler du faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}(x, y)$ sur $S_{\text{ét}}$. Précisément, suivant [Giraud, 1971, I.2.6.3.1], on considère l'équivalence de catégories fibrées $\mathscr{C} \to \mathfrak{L}\mathscr{C}$ entre $\mathscr{C}$ et la catégorie libre $\mathfrak{L}\mathscr{C}$ engendrée par $\mathscr{C}$, catégorie libre qui elle est scindée. On définit alors

$$\underline{\mathrm{Hom}}(x, y)(S') = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{L}\mathscr{C}(S')}(\mathfrak{L}x', \mathfrak{L}y')$$

où $\mathfrak{L}x', \mathfrak{L}y'$ sont les images inverses par le morphisme étale $S' \to S$ de $\mathfrak{L}x, \mathfrak{L}y$ dans $\mathfrak{L}\mathscr{C}(S')$. Bien entendu ([Giraud, 1971, I.2.6.3.2 (1)]), $\mathfrak{L}$ induit une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}(S)}(x, y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(S, \underline{\mathrm{Hom}}(x, y)).$$

Ces remarques justifient qu'on puisse si besoin supposer sans dommage que les champs que l'on considérera sont scindés.

2. Lemme de rigidité

Soit (A, I) un couple hensélien (V-1.2.1 ou [ÉGA IV$_4$ 18.5.5]) non nécessairement noethérien, *avec I de type fini*[(i)]. Soit U un ouvert de $X = \mathrm{Spec}(A)$ contenant $\mathrm{Spec}(A) - V(I)$. On note $\widehat{A}$ le complété[(ii)] I-adique de A et $\widehat{U}$ l'image inverse de U par le morphisme de complétion $\pi : \widehat{X} = \mathrm{Spec}(\widehat{A}) \to X$. On suppose pour simplifier U quasi-compact (cf. 2.1.4).

2.1. Énoncés. — Rappelons [SGA 4 IX 1.5] qu'un faisceau de groupes $\mathscr{F}$ sur X est ind-fini si pour tout ouvert étale $u : U \to X$ avec U quasi-compact, le groupe $\mathscr{F}(u)$ est limite inductives filtrante de ses sous-groupes finis. On dit alors qu'un champ en groupoïdes $\mathscr{C}$ sur X est ind-fini si pour tout ouvert étale $u : U \to X$ avec U quasi-compact et tout $x_u \in \mathscr{C}(u)$, le faisceau en groupes $\pi_1(\mathscr{C}, x_u) = \mathsf{Aut}_{\mathscr{C}}(x_u)$ est ind-fini.

Le but de cette section est de démontrer le théorème de rigidité suivant.

***2.1.1. Théorème* (Théorème de rigidité de Gabber).** — *Soit $\mathscr{F}$ un faisceau d'ensembles sur $U_{\text{ét}}$. Alors on a*

i) *la flèche naturelle* $\mathrm{H}^0(U, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^0(\widehat{U}, \pi^\star \mathscr{F})$ *est bijective ;*
ii) *si $\mathscr{F}$ est de plus un faisceau en groupes ind-fini, la flèche naturelle* $\mathrm{H}^1(U, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^1(\widehat{U}, \pi^\star \mathscr{F})$ *est bijective.*

(i) Cette hypothèse sera utilisée pour comparer les gradués I-adiques de A et de son complété $\widehat{A}$ ([Bourbaki, **AC**, III, § 2, n° 12])
(ii) On dira simplement complété pour séparé complété.

Les deux énoncés du théorème précédent sont conséquence du théorème suivant, apparemment plus fort, forme champêtre du théorème de rigidité [iii].

***2.1.2. Théorème* (Théorème de rigidité de Gabber, forme champêtre).** — *Soit $\mathscr{C}$ un champ en groupoïdes ind-fini sur $U_{\text{ét}}$. Alors, la flèche naturelle $\gamma(\mathscr{C}) : \Gamma(U,\mathscr{C}) \to \Gamma(\widehat{U},\pi^\star\mathscr{C})$ est une équivalence.*

2.1.3. Remarque. — En fait, le théorème de rigidité 2.1.1 est *a priori* équivalent à la version champêtre 2.1.2. C'est ce qui ressort par exemple de l'énoncé 6.3.2. Mais, formellement, on n'a pas besoin de démontrer cela à ce stade.

2.1.4. Remarque. — Les résultats précédents sont également valables lorsque U n'est pas nécessairement quasi-compact. Cela résulte du fait que la catégorie des sections d'un champ sur U est équivalente à la 2-limite projective des sections sur les ouverts quasi-compacts de U contenant $\mathrm{Spec}(A) - V(I)$. L'hypothèse de quasi-compacité est utilisée dans un argument d'éclatement ci-dessous (cf. 2.4.2).

2.2. Réduction au cas constant. — Le résultat est le suivant

2.2.1. Proposition. — *Supposons que pour tout U comme plus haut,*

i) *pour tout ensemble fini F, la flèche $\mathrm{H}^0(U,F) \to \mathrm{H}^0(\widehat{U},F)$ est bijective. Alors, 2.1.1* i) *est vrai, c'est-à-dire le théorème de rigidité 2.1.2 est vrai pour les champs discrets.*

ii) *pour tout groupe fini G, la flèche $\mathrm{Tors}(U,G) \to \mathrm{Tors}(\widehat{U},G)$ est une équivalence et 2.1.1* i) *est vrai. Alors le théorème de rigidité 2.1.2 est vrai.*

Démonstration. — D'après [SGA 4 XII prop. 6.5], il suffit pour prouver 2.1.1 i) (resp. 2.1.2) de prouver que pour tout $U' \to U$ fini et tout ensemble fini F (resp. groupe fini G), la flèche

$$\mathrm{H}^0(U',F) \to \mathrm{H}^0(\widehat{U'},F) \text{ (resp. } \mathrm{Tors}(U',G) \to \mathrm{Tors}(\widehat{U'},G)) \tag{2.2.1.1}$$

est bijective (resp. une équivalence) où $\widehat{U'} = \widehat{U} \times_U U'$.

2.2.2. Lemme. — *Il existe un schéma affine* $\mathrm{Spec}(B)$ *et un diagramme cartésien*

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{Spec}(B) \arrow[d] \\ U \arrow[r] & \mathrm{Spec}(A) \end{tikzcd}$$

[iii] Les champs (ind-finis) en groupoïdes discrets s'identifient aux faisceaux d'ensembles : on dira parfois un *champ discret*.

où B est fini sur A. Le morphisme $U' \to \mathrm{Spec}(B)$ s'identifie à l'immersion ouverte $U_B \hookrightarrow \mathrm{Spec}(B)$. De plus, U_B contient $\mathrm{Spec}(B) - V(IB)$.

Démonstration. — Comme $U' \to U$ est fini, il est projectif ([ÉGA II 6.1.11]). Comme U est quasi-compact, l'immersion ouverte $U \hookrightarrow X$ est quasi-affine ([ÉGA II 5.1.1]), donc quasi-projective de sorte que le composé $f : U' \to U \to X$ est quasi-projectif ([ÉGA II 5.3.4]). Comme $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine, $\mathscr{O}_X$ est certainement ample (cf. la définition ou [ÉGA II 5.1.2]). Les hypothèses du théorème principal de Zariski ([ÉGA IV$_3$ 8.12.8]) sont donc vérifiées. Il existe donc $X' \to X$ fini de sorte que f se factorise en $U' \hookrightarrow X' \to X$ où $U' \hookrightarrow X'$ immersion ouverte et $X' \to X$ fini. L'adhérence schématique de U' dans X' est fermée dans X' : elle s'écrit donc $\mathrm{Spec}(B)$ où B est fini sur A. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r] \arrow[dr] & U_B \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{Spec}(B) \arrow[d] \\ & U \arrow[r, hook] & \mathrm{Spec}(A) \end{tikzcd}$$

où les flèches non horizontales sont finies. La flèche $U' \to U_B$ est donc propre. Comme c'est aussi une immersion ouverte d'image dense, c'est un isomorphisme. L'ouvert U contenant $\mathrm{Spec}(A) - V(I)$, on déduit que $U' = U_B$ contient $\mathrm{Spec}(B) - V(IB) = (\mathrm{Spec}(A) - V(I))_B$. □

D'après le lemme, la flèche (2.2.1.1) s'identifie à

(2.2.2.1) $$\mathrm{H}^0(U_B, F) \to \mathrm{H}^0(\widehat{U}_B, F) \text{ (resp. } \mathrm{Tors}(U_B, G) \to \mathrm{Tors}(\widehat{U}_B, G))$$

(où $?_B$ est l'extension des scalaires du A-schéma ? à $\mathrm{Spec}(B)$). Il s'agit donc de montrer que (2.2.2.1) est bijectif (resp. une équivalence).

Par définition, on a

$$\widehat{U}_B = \pi_C^{-1}(U)$$

où π_C est la projection naturelle

$$\pi_C : \mathrm{Spec}(C) \to \mathrm{Spec}(A), \text{ avec } C = \widehat{A} \otimes_A B.$$

Dans le cas noethérien, C est le complété IB-adique $\widehat{B}$ de B ce qui prouve la proposition dans ce cas – appliquer l'hypothèse 2.2.1 i) à $\mathscr{F}$ constant de valeur F sur U_B. Dans le cas général, la flèche $C \to \widehat{B}$ n'est pas en général un isomorphisme.

2.2.3. Lemme. — *Avec les notations précédentes, on a*

i) *Soit (A_n, I_n) un système projectif de couples henséliens. Le couple $(A_\infty, I_\infty) = (\varprojlim A_n, \varprojlim I_n)$ est hensélien.*
ii) *Le complété I-adique $\hat{A}$ de A est $\hat{I}$-hensélien.*
iii) *Les couples (B, IB) et (C, IC) sont henséliens et ont même complété I-adique.*

Démonstration. — Soit P un polynôme de $A_\infty[x]$ et $\bar{a} \in A_\infty/I_\infty$ une racine simple (c'est-à-dire telle que $P'(\bar{a})$ inversible dans A_∞/I_∞). L'image $\bar{a}_n$ de $\bar{a}$ dans A_n/I_n est une racine simple de P. Elle se relève donc de façon unique en une racine $a_n \in A_n$ de P d'après le lemme de Hensel. Comme I_{n+1} s'envoie dans I_n, par unicité des relèvements, l'image de a_{n+1} dans A_n est égale à a_n de sorte que la suite $a = (a_n) \in A_\infty$ est le relèvement cherché de $\bar{a}$ ce qui prouve i) d'après [Crépeaux, 1967, Prop. 1].

Puisque $A \to A/I^n$ est notoirement entier, les couples $(A/I^n, IA/I^n)$ sont henséliens de sorte que ii) découle de i).

Par associativité du produit tensoriel, le morphisme naturel $B/I^nB \to C/I^nC$ s'identifie à la tensorisation par B du morphisme naturel $A/I^nA \to \widehat{A}/I^n\widehat{A}$. Comme ce dernier est un isomorphisme ([Bourbaki, **AC**, III, § 2, n° 12, prop. 15 et cor. 2]), B et C ont même complété I-adique. iii) suit alors de ii) car un couple fini sur un hensélien est hensélien. □

On a donc $\widehat{(U_B)} = \widehat{(U_C)}$. D'après le lemme précédent, sous les hypothèses de 2.2.1 i) (resp. ii)), la flèche naturelle

$$\mathrm{H}^0(U_B, F) \to \mathrm{H}^0(\widehat{(U_B)}, F) = \mathrm{H}^0(\widehat{(U_C)}, F) \leftarrow \mathrm{H}^0(U_C, F) = \mathrm{H}^0(\widehat{U}_B, F)$$

(resp.

$$\mathrm{Tors}(U_B, G) \to \mathrm{Tors}(\widehat{(U_B)}, G) = \mathrm{Tors}(\widehat{(U_C)}, G) \leftarrow \mathrm{Tors}(U_C, G) = \mathrm{Tors}(\widehat{U}_B, G))$$

est alors une bijection (resp. équivalence), ce qu'on voulait. □

2.3. Réduction au cas strictement hensélien. — Résumons les notations dans le diagramme cartésien suivant

$$\begin{tikzcd} \widehat{U} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, hook, "\widehat{\jmath}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U \arrow[d, hook, "j"] \\ \widehat{X} \arrow[r, "\pi"] & X \end{tikzcd}$$

avec U quasi-compact contenant $\mathrm{Spec}(A) - V(I)$. Montrons le résultat suivant.

2.3.1. Proposition. — *Supposons que pour tout U comme plus haut,*

i) *pour tout ensemble fini F, la flèche $\mathrm{H}^0(U, F) \to \mathrm{H}^0(\widehat{U}, F)$ est bijective si A est de plus strictement local. Alors, 2.1.1* i) *est vrai (que A soit strictement local ou non).*

ii) *pour tout groupe fini G, la flèche $\mathrm{Tors}(U, G) \to \mathrm{Tors}(\widehat{U}, G)$ est une équivalence si A est de plus strictement hensélien et 2.1.1* i) *est vrai. Alors, 2.1.2 est vrai (que A soit strictement local ou non).*

Démonstration. — Commençons par un lemme.

2.3.2. Lemme. — *Supposons que pour tout U comme plus haut,*

i) *pour tout ensemble fini F, la flèche* $\mathrm{H}^0(U,F) \to \mathrm{H}^0(\widehat{U},F)$ *est bijective si A est de plus strictement local. Alors, la flèche de changement de base*

$$\gamma : \pi^\star j_\star F \to \widehat{j}_\star \pi^\star F = \widehat{j}_\star F$$

est un isomorphisme (que A soit strictement local ou non).

ii) *pour tout groupe fini G, la flèche* $\mathrm{Tors}(U,G) \to \mathrm{Tors}(\widehat{U},G)$ *est une équivalence si A est de plus strictement hensélien et 2.1.1* i) *est vrai. Alors, la flèche de changement de base*

$$\gamma : \pi^\star j_\star \underline{\mathrm{Tors}}(U,G) \to \widehat{j}_\star \pi^\star \underline{\mathrm{Tors}}(U,G) = \widehat{j}_\star \underline{\mathrm{Tors}}(\widehat{U},G),$$

où l'égalité résulte de [Giraud, 1971, III.2.1.5.7], *est une équivalence (que A soit strictement local ou non).*

Démonstration. — Les formules $j^\star j_\star = \mathrm{Id}$ et $\widehat{j}^\star \widehat{j}_\star = \mathrm{Id}$ assurent qu'on a

$$\widehat{j}^\star \pi^\star j_\star = \pi^\star j^\star j_\star = \pi^\star = \widehat{j}^\star \widehat{j}_\star \pi^\star$$

de sorte que l'image inverse sur $\widehat{U}$ de la flèche de changement de base

$$\pi^\star j_\star \mathscr{C} \to \widehat{j}_\star \pi^\star \mathscr{C} \tag{2.3.2.1}$$

est une équivalence pour tout champ en groupoïdes $\mathscr{C}$.

Soit $\hat{x}$ un point géométrique de $\widehat{X}$ d'image le point géométrique $x = \pi \circ \hat{x}$ de X et montrons que la fibre de la flèche de changement de base (2.3.2.1) en $\hat{x}$ est une équivalence. D'après ce qui précède, on peut supposer $\hat{x} \notin \widehat{U}$. En particulier, $x \in V(I)$.

Soit A^{hs} (resp. $X_{(x)}$) l'hensélisé strict de A (resp. X) en x et $\widehat{A}^{\mathrm{hs}}$ (resp. $\widehat{X}_{(\hat{x})}$) celui de $\widehat{A}$ (resp. $\widehat{X}$) en $\hat{x}$. On a un diagramme commutatif où les flèches sont les flèches de fonctorialité, complétion ou stricte hensélisation

$$\begin{array}{ccccc}
\widehat{\widehat{X}_{(\hat{x})}} & \longrightarrow & \widehat{X}_{(\hat{x})} & \longrightarrow & \widehat{X} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\widehat{X}_{(\hat{x})} & \longrightarrow & X_{(x)} & \longrightarrow & X.
\end{array}$$

On note alors

$$\begin{array}{ccccc}
\widehat{\widehat{U}_{(\hat{x})}} & \longrightarrow & \widehat{U}_{(\hat{x})} & \longrightarrow & \widehat{U} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\widehat{U}_{(\hat{x})} & \longrightarrow & U_{(x)} & \longrightarrow & U
\end{array}$$

l'image inverse du diagramme par l'immersion ouverte $U \to X$. En particulier, $U_{(x)}$ (resp. $\widehat{U}_{(\hat{x})}$) désigne l'image inverse de l'hensélisé strict $X_{(x)}$ (resp. $\widehat{X}_{(\hat{x})}$) de X (resp.

$\widehat{X}$) en x (resp. $\hat{x}$) par j (resp. $\widehat{j}$). Comme U est quasi-compact, il en est de même des ouverts $U_{(x)}, \widehat{U}_{(\hat{x})}$ de $X_{(x)}, \widehat{X}_{(\hat{x})}$.

Les morphismes $j, \widehat{j}$ étant cohérents, dans le cas i), la fibre $\gamma_{\hat{x}}$ s'identifie à la flèche naturelle

$$\mathrm{H}^0(U_{(x)}, F) \to \mathrm{H}^0(\widehat{U}_{(\hat{x})}, F)$$

tandis que dans le cas ii) elle s'identifie à

$$\mathrm{Tors}(U_{(x)}, G) \to \mathrm{Tors}(\widehat{U}_{(\hat{x})}, G).$$

On déduit que les flèches naturelles

$$\mathrm{H}^0(U_{(x)}, F) \to \mathrm{H}^0(\widehat{U_{(x)}}, F) \text{ et } \mathrm{H}^0(\widehat{U}_{(\hat{x})}, F) \to \mathrm{H}^0(\widehat{\widehat{U}_{(\hat{x})}}, F)$$

sont bijectives dans le cas i) et que les flèches

$$\mathrm{Tors}(U_{(x)}, G) \to \mathrm{Tors}(\widehat{U_{(x)}}, G) \text{ et } \mathrm{Tors}(\widehat{U}_{(\hat{x})}, G) \to \mathrm{Tors}(\widehat{\widehat{U}_{(\hat{x})}}, G)$$

sont des équivalences dans le cas ii). Il suffit donc de voir que la flèche naturelle

$$\widehat{\widehat{U}_{(\hat{x})}} \to \widehat{U_{(x)}} \tag{2.3.2.2}$$

est un isomorphisme, ou encore que

$$A^{\mathrm{hs}} \text{ et } \widehat{A}^{\mathrm{hs}} \text{ ont même } I\text{-complété.}$$

Puisque l'anneau local A^{hs} est hensélien, il est a fortiori I-hensélien (V-1.2.1). Utilisant (2.2.3), on constate que le I-complété $\widehat{A^{\mathrm{hs}}}$ est hensélien. Comme son corps résiduel est celui de A^{hs}, il est strictement hensélien. La flèche $\widehat{A} \to \widehat{A^{\mathrm{hs}}}$ induit donc une flèche $\widehat{A}^{\mathrm{hs}} \to \widehat{A^{\mathrm{hs}}}$ et donc, par I-complétion, une flèche

$$\widehat{\widehat{A}^{\mathrm{hs}}} \to \widehat{A^{\mathrm{hs}}}. \tag{$*$}$$

Par ailleurs, la flèche de complétion $A \to \widehat{A}$ induit par hensélisation stricte puis complétion une flèche

$$\widehat{A^{\mathrm{hs}}} \to \widehat{\widehat{A}^{\mathrm{hs}}}. \tag{$**$}$$

Les flèches $(*)$ et $(**)$ sont inverses l'une de l'autre, d'où le lemme. □

On a le diagramme commutatif à carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
\widehat{U} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, hook, "\widehat{j}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U \arrow[d, hook, "j"] \\
\widehat{X} \arrow[r, "\pi"] & X \\
X_I = \mathrm{Spec}(A/I). \arrow[u, hook] \arrow[ur, hook]
\end{tikzcd}$$

Comme on l'a observé, les paires (A, I) et $(\widehat{A}, I\widehat{A})$ sont henséliennes. La flèche $\mathrm{H}^0(\widehat{X}, \mathscr{C}) \to \mathrm{H}^0(X_I, \mathscr{C}_{|X_I})$ est donc une équivalence pour tout champ ind-fini $\mathscr{C}$ sur $X_{\text{ét}}$ d'après [Gabber, 1994, théorème 1'].

On déduit d'une part

$$\mathrm{H}^0(U, F) = \mathrm{H}^0(X, j_\star F) = \mathrm{H}^0(X_I, (j_\star F)_{|X_I})$$

et, d'autre part

$$\mathrm{H}^0(\widehat{U}, F) = \mathrm{H}^0(\widehat{X}, \widehat{j}_\star F) \overset{2.3.2}{=} \mathrm{H}^0(\widehat{X}, \pi^\star j_\star F) = \mathrm{H}^0(X_I, (\pi^\star j_\star F)_{|X_I})$$

ce dernier n'étant autre que $\mathrm{H}^0(X_I, (j_\star F)_{|X_I})$ (bien entendu l'isomorphisme induit

$$\mathrm{H}^0(U, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(\widehat{U}, F)$$

est la restriction).

De même, on a

$$\mathrm{H}^0(U, \underline{\mathrm{Tors}}(U, G)) = \mathrm{H}^0(X, j_\star \underline{\mathrm{Tors}}(U, G)) = \mathrm{H}^0(X_I, j_\star \underline{\mathrm{Tors}}(U, G)_{|X_I})$$

et, d'autre part

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^0(\widehat{U}, \underline{\mathrm{Tors}}(\widehat{U}, G)) &= \mathrm{H}^0(\widehat{X}, \widehat{j}_\star \underline{\mathrm{Tors}}(\widehat{U}, G)) \\ &\overset{2.3.2}{=} \mathrm{H}^0(\widehat{X}, \pi^\star j_\star \underline{\mathrm{Tors}}(U, G)) \\ &= \mathrm{H}^0(X_I, \pi^\star j_\star \underline{\mathrm{Tors}}(U, G)_{|X_I}) \end{aligned}$$

ce dernier n'étant autre que $\mathrm{H}^0(X_I, j_\star \underline{\mathrm{Tors}}(U, G)_{|X_I}))$, l'équivalence induisant bien entendu

$$\mathrm{H}^0(U, \underline{\mathrm{Tors}}(U, G)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(\widehat{U}, \underline{\mathrm{Tors}}(\widehat{U}, G)).$$

Reste à invoquer 2.2.1. □

2.4. Fin de la preuve de 2.1.2. — D'après 2.3.1, pour prouver 2.1.2, il suffit de prouver l'énoncé suivant

2.4.1. Proposition. — *Supposons A strictement hensélien (et $I \subset \mathrm{rad}(A)$) et soit U comme plus haut.*

i) *pour tout ensemble fini F, la flèche $\mathrm{H}^0(U, F) \to \mathrm{H}^0(\widehat{U}, F)$ est bijective.*
ii) *pour tout groupe fini G, la flèche $\mathrm{Tors}(U, G) \to \mathrm{Tors}(\widehat{U}, G)$ est une équivalence.*

La formule $\pi^\star \underline{\mathrm{Tors}}(U, G) = \underline{\mathrm{Tors}}(\widehat{U}, G)$ ([Giraud, 1971], III.2.1.5.7) permet de récrire 2.4.1 sous la forme suivante

2.4.2. Proposition. — *Supposons A strictement hensélien (et $I \subset \mathrm{rad}(A)$) et soit U comme plus haut. Désignons par $\mathscr{C}$ le champ discret F_U ou bien $\underline{\mathrm{Tors}}(U, G)$. Alors, la flèche $\mathrm{H}^0(U, \mathscr{C}) \to \mathrm{H}^0(\widehat{U}, \pi^\star \mathscr{C})$ est une équivalence.*

Démonstration. — On va se ramener par éclatement au cas ou l'idéal J définissant le complémentaire de U est principal .

Pour tout idéal $\tilde{I}$ d'un anneau $\tilde{A}$, on note

$$\text{Écl}_{\tilde{I}}(\tilde{A}) = \text{Proj}(\bigoplus_{n\geq 0} \tilde{I}^n)$$

l'éclatement de $\tilde{I}$ dans $\text{Spec}(\tilde{A})$. Si $\tilde{I}$ est de type fini, le morphisme structural e : $\text{Écl}_{\tilde{I}}(\tilde{A}) \to \text{Spec}(\tilde{A})$ est projectif, en particulier propre.

On suppose donc A strictement hensélien de corps résiduel k et $\mathscr{F} = F_U$ comme plus haut. On a déjà observé que $\widehat{A}$ était aussi strictement hensélien. Il suit en particulier que l'ensemble des sections globales de tout faisceau étale sur X ou $\widehat{X}$ s'identifie à sa fibre spéciale, ce qu'on utilisera sans plus de précaution.

Comme U est quasi-compact, il existe un idéal J de type fini tel que $U = \text{Spec}(A) - V(J)$. Comme U contient $\text{Spec}\, A - V(I)$ et que I est de type fini, on peut supposer $I \subset J$. Soit

$$Y = \text{Écl}_J(A) \text{ et } Y' = \text{Écl}_J(\widehat{A}).$$

(On aurait dû écrire $\text{Écl}_{J\widehat{A}}(\widehat{A})$ pour $\text{Écl}_J(\widehat{A})$). Pour des raisons de cohérences, on notera simplement X' le schéma $\widehat{X} = \text{Spec}(\widehat{A})$ (resp. U' sa restriction $\widehat{U} = \pi^{-1}(U)$ à U).

2.4.3. Sous-lemme. — *Soient n, m des entiers ≥ 0. Le morphisme de complétion définit des isomorphismes*

$$A/I^mJ^n \simeq \widehat{A}/I^mJ^n\widehat{A} \text{ et } A/J^n \simeq \widehat{A}/J^n\widehat{A}$$

induisant un isomorphisme

$$J^n/I^mJ^n \simeq J^n\widehat{A}/I^mJ^n\widehat{A}.$$

Démonstration. — Comme I est de type fini, le morphisme de complétion induit des isomorphismes

$$A/I^{m+n} \simeq \widehat{A}/I^{m+n}\widehat{A} \text{ et } A/I^n \simeq \widehat{A}/I^n\widehat{A}$$

d'après [Bourbaki, **AC**, III, § 2, n° 12, cor. 2 de la prop. 16]. Mais comme J contient I, on a

$$I^{m+n} \subset I^mJ^n \text{ et } I^n \subset J^n,$$

de sorte que les changements de base

$$A/I^{m+n} \to A/I^mJ^n \text{ et } A/I^n \to A/J^n$$

donnent alors des isomorphismes

$$A/I^mJ^n \simeq \widehat{A}/I^mJ^n\widehat{A} \text{ et } A/J^n \simeq \widehat{A}/J^n\widehat{A}$$

qui donnent 2.4.3. □

La flèche naturelle $Y' \to Y$ est donc un isomorphisme au-dessus de $\mathrm{Spec}(A/I) \subset X$ car elle est induite par le morphisme gradué

$$\bigoplus J^n/IJ^n \to J^n\widehat{A}/IJ^n\widehat{A}$$

qui est un isomorphisme. On identifiera ces restrictions par la suite. En particulier, le morphisme $p_s : Y_s' \to Y_s$ entre fibres spéciales (c'est-à-dire au-dessus du point fermé de $s \in \mathrm{Spec}(A/I) \subset X$) est un isomorphisme grâce auquel nous les identifierons. Regardons le solide commutatif

$$\begin{tikzcd}
\widehat{U} = U' \arrow[r, hook, "j'"] \arrow[dd, "p"] & Y' \arrow[dd, "p"] \arrow[drr, "e"] \arrow[dd, phantom, shift left=4ex, "\square"] & Y_s \arrow[l, hook', "i'"'] \arrow[dd, equal] \arrow[drr] & & \\
& & & \widehat{X} = X' \arrow[dd, "\pi"] & \mathrm{Spec}(k) \arrow[l, hook'] \arrow[dd, equal] \\
U \arrow[r, hook, "j"] & Y \arrow[drr, "e"] & Y_s \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[drr] & & \\
& & & X & \mathrm{Spec}(k). \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

Admettons pour un temps le résultat suivant.

2.4.4. Lemme. — *Soit $\mathscr{C} = F_U$ (resp. $\mathscr{C} = \underline{\mathrm{Tors}}(U, G)$). Alors, la flèche de changement de base $\gamma : p^\star j_\star \mathscr{C} \to j'_\star p^\star \mathscr{C}$ est bijective (resp. une équivalence).*

Déduisons alors l'équivalence cherchée

$$\mathrm{H}^0(U, \mathscr{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(U', \mathscr{C}) = \mathrm{H}^0(U', p^\star \mathscr{C})$$

grâce au théorème de changement de base propre d'Artin-Grothendieck ([Giraud, 1971] dans le cas noethérien et théorème 7.1 dans le cas général) appliqué aux faces inférieure et supérieure du diagramme précédent. On a en effet un diagramme essentiellement commutatif où toutes les flèches sont les flèches naturelles (obtenues par adjonction)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^0(U, \mathscr{C}) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\alpha"] & \mathrm{H}^0(Y, j_\star \mathscr{C}) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"] & \mathrm{H}^0(Y_s, i^\star j_\star \mathscr{C}) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathrm{H}^0(Y_s, i'^\star p^\star j_\star \mathscr{C}) \arrow[dl, "c"] \\
\mathrm{H}^0(U', p^\star \mathscr{C}) \arrow[r, equal] & \mathrm{H}^0(Y', j'_\star p^\star \mathscr{C}) \arrow[r, "d"] & \mathrm{H}^0(Y_s, i'^\star j'_\star p^\star \mathscr{C}). &
\end{tikzcd}$$

Les flèches b, d sont bijectives (resp. des équivalences) grâce au théorème de changement de base propre (7.1) tandis que c est une bijection (resp. une équivalence) grâce à (2.4.4). Il suit que a et α sont des bijections (resp. des équivalences).

Preuve du lemme 2.4.4. — Soit x' un point géométrique de Y' d'image x dans Y. On peut supposer $x' \in V(J\mathscr{O}_{Y'})$. Soit B l'hensélisé (strict) de Y en x' et B' celui de Y' en x. On doit étudier la flèche

$$(\star). \qquad \mathrm{H}^0(\mathrm{Spec}(B) - V(JB), \mathscr{C}) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{Spec}(B') - V(JB'), \mathscr{C})$$

Observons que par définition de l'éclatement, JB (resp. JB') est un idéal principal engendré par un élément non diviseur de zéro et non inversible $t \in B$ (resp. $t' \in B'$) (équation locale du diviseur exceptionnel). Par ailleurs, les couples (B, JB) et (B', JB') sont henséliens car B, B' sont locaux henséliens (exercice). Les isomorphismes

$$J^n A / J^{n+m} A \xrightarrow{\sim} J^n \widehat{A} / J^{n+m} \widehat{A}, n, m \geq 0$$

assurent que B et B' ont même complété J-adique $\widehat{B} = \widehat{B'}$.

On utilise alors les généralisations des résultats d'Elkik [Elkik, 1973] — et donc de Ferrand-Raynaud pour le π_0 — au cas principal non noethérien de [Gabber & Ramero, 2003]. Précisément, le théorème 5.4.37 *loc. cit.* appliqué au $B[t^{-1}]$-groupoïde discret $F_B = \mathrm{Spec}(B[t^{-1}]) \times F$ assure qu'on a

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{Spec}(B[t^{-1}]), F) = \pi_0(F_B) = \pi_0(F_{\widehat{B}}) = \mathrm{H}^0(\mathrm{Spec}(\widehat{B}[t^{-1}]), F)$$

et de même en remplaçant B, t par B', t'. Comme B et B' ont même complété J-adique, on a donc

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{Spec}(B[t^{-1}]), F) = \mathrm{H}^0(\mathrm{Spec}(B'[t'^{-1}]), F),$$

ce qu'on voulait. Dans le cas $\mathscr{C} = \underline{\mathrm{Tors}}(U, G)$, on déduit du cas discret que $(*)$ est pleinement fidèle. Soit alors $\widehat{P}$ un revêtement galoisien de groupe G sur $\widehat{U} = \mathrm{Spec}(\widehat{B}) - V(J\widehat{B})$. D'après le théorème 5.4.53 de [Gabber & Ramero, 2003], il provient d'un (unique) revêtement P de U. La pleine fidélité de $(\star)$ assure que le groupe d'automorphismes de P est G. Dire que P est galoisien de groupe G, c'est dire que la flèche canonique

$$\phi : P \times G \to P \times_U P$$

est un isomorphisme. On peut voir cette flèche comme un morphisme de revêtements étales de U. Après image inverse sur $\widehat{U}$, elle s'identifie à la flèche analogue

$$\widehat{P} \times G \to \widehat{P} \times_{\widehat{U}} \widehat{P}$$

qui est un isomorphisme (de revêtements étales de $\widehat{P}$ donc de revêtements étales de $\widehat{U}$) par hypothèse. La pleine fidélité de $(\star)$ assure que ϕ est un isomorphisme de sorte que P est bien galoisien de groupe G. On a donc obtenu que le foncteur naturel entre les catégories de G-revêtements galoisiens sur U et $\widehat{U}$ sont équivalentes. Il en est donc de même pour le foncteur les catégories de G-revêtements galoisiens sur U' et $\widehat{U'}$. On conclut en se souvenant de l'égalité $\widehat{U} = \widehat{U'}$. □

2.4.5. Remarque. — Le théorème 2.1.2 entraîne immédiatement que la flèche de changement de base

$$\pi^\star j_\star \mathscr{C} \to \widehat{j}_\star \pi^\star \mathscr{C}$$

est une équivalence. En effet, on l'a déjà vu sur $\widehat{U}$ (2.3.2.1). Si $\hat{x} \notin \widehat{U}$, on a déjà observé dans la preuve de 2.3.2 que $U_{(x)}$ et $\widehat{U}_{(\hat{x})}$ avaient même complété I-adique de sorte que deux applications de 2.1.2 assurent que la fibre de

$$\pi^\star j_\star \mathscr{C} \to \widehat{j}_\star \pi^\star \mathscr{C}$$

en $\hat{x}$ est une équivalence.

3. Rigidité de la ramification

3.1. La condition c_2. — Rappelons ([ÉGA IV$_4$ 18.6.7]) que l'hensélisé A^{h} d'un anneau semi-local A est le produit des hensélisés des localisés de A en ses idéaux maximaux. Pour tout anneau noethérien, on note A^{nor} son normalisé, à savoir la clôture intégrale de A dans l'anneau total $K(A)$ des fractions de $A_{\text{réd}}$. Puisque $K(A)$ est le produit des $K(A/\mathfrak{p})$ où $\mathfrak{p}$ décrit les points maximaux de $\mathrm{Spec}(A)$, le normalisé de A est le produit des normalisés des $A/\mathfrak{p}$. Si A^{nor} n'est en général pas noethérien ([Nagata, 1962, exemple 5 de l'appendice]), ses fibres réduites sur A sont finies ([Nagata, 1962, V.33.10]). En particulier, si A est local noethérien, A^{nor} est semi-local de sorte que son hensélisé est bien défini. On a alors (comparer avec [Nagata, 1962, 43.20 et exercice 43.21])

3.2. Lemme. — *Soit A un anneau local noethérien.*
- — *La flèche canonique $A^{\mathrm{h}} \to (A^{\mathrm{nor}})^{\mathrm{h}}$ induit un isomorphisme $(A^{\mathrm{h}})^{\mathrm{nor}} \xrightarrow{\sim} (A^{\mathrm{nor}})^{\mathrm{h}}$.*
- — *Cette bijection induit une bijection canonique $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}^\star$ entre les points maximaux $\mathfrak{p}$ de $\mathrm{Spec}(A^{\mathrm{h}})$ et les points fermés $\mathfrak{p}^\star$ de $\mathrm{Spec}(A^{\mathrm{nor}})$ de telle sorte que les anneaux intègres $(A^{\mathrm{h}}/\mathfrak{p})^{\mathrm{nor}}$ et $(A^{\mathrm{nor}}_{\mathfrak{p}^\star})^{\mathrm{h}}$ sont (canoniquement) isomorphes.*

Démonstration. — D'après [ÉGA IV$_4$ 18.6.8], le morphisme canonique $A^{\mathrm{nor}} \otimes_A A^{\mathrm{h}} \to (A^{\mathrm{nor}})^{\mathrm{h}}$ est un isomorphisme. Le morphisme canonique $A \to A^{\mathrm{h}}$ étant ind-étale, il est normal. D'après [ÉGA IV$_2$ 6.14.4], le morphisme canonique $A^{\mathrm{h}} \to A^{\mathrm{nor}} \otimes_A A^{\mathrm{h}}$ identifie $A^{\mathrm{nor}} \otimes_A A^{\mathrm{h}}$ à la fermeture intégrale de A^{h} dans $A^{\mathrm{h}} \otimes_A K(A)$. Si maintenant, $A \to B$ est étale, la fibre au point maximal $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ s'identifie à $\mathrm{Spec}(K(B))$. En passant à la limite, on déduit l'égalité $A^{\mathrm{h}} \otimes_A K(A) = K(A^{\mathrm{h}})$ de sorte que $A^{\mathrm{nor}} \otimes_A A^{\mathrm{h}}$ s'identifie à la fermeture intégrale de A^{h} dans $A^{\mathrm{h}} \otimes_A K(A) = K(A^{\mathrm{h}})$ et donc $(A^{\mathrm{h}})^{\mathrm{nor}} \xrightarrow{\sim} A^{\mathrm{nor}} \otimes_A A^{\mathrm{h}}$. La composition

$$(A^{\mathrm{h}})^{\mathrm{nor}} \xrightarrow{\sim} A^{\mathrm{nor}} \otimes_A A^{\mathrm{h}} \xrightarrow{\sim} (A^{\mathrm{nor}})^{\mathrm{h}}$$

est l'isomorphisme annoncé. Pour le second point, on observe d'une part que le spectre du normalisé de A^{h} est la somme disjointe des normalisés de ses composantes irréductibles

$$\operatorname{Spec}((A^{\mathrm{h}})^{\mathrm{nor}}) = \coprod_{\mathfrak{p}\text{ point maximal}} \operatorname{Spec}((A^{\mathrm{h}}/\mathfrak{p})^{\mathrm{nor}}), \tag{3.2.1}$$

chaque fermé $\operatorname{Spec}((A^{\mathrm{h}}/\mathfrak{p})^{\mathrm{nor}})$ étant intègre (puisque local et normal) de sorte que 3.2.1 est une la décomposition en composantes irréductibles de $\operatorname{Spec}((A^{\mathrm{h}})^{\mathrm{nor}})$. D'autre part, par définition de l'hensélisé d'un anneau semi-local, on a

$$\operatorname{Spec}((A^{\mathrm{nor}})^{\mathrm{h}}) = \coprod_{\mathfrak{p}^\star\text{ point fermé}} \operatorname{Spec}((A^{\mathrm{nor}}_{\mathfrak{p}^\star})^{\mathrm{h}}). \tag{3.2.2}$$

Or, $(A^{\mathrm{nor}}_{\mathfrak{p}^\star})^{\mathrm{h}}$ est local et normal (comme $A^{\mathrm{nor}}_{\mathfrak{p}^\star}$), donc intègre, prouvant que 3.2.2 est la décomposition en composantes irréductibles de $\operatorname{Spec}((A^{\mathrm{nor}})^{\mathrm{h}})$. Le lemme suit. □

3.3. Proposition. — *Soit Z un sous-schéma fermé d'un schéma noethérien X. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Soit $p : X^{\mathrm{nor}} \to X$ le morphisme de normalisation. Alors, $p^{-1}(Z)$ est de codimension ≥ 2 dans X^{nor}.*

(ii) *Pour tout $z \in Z$, toutes les composantes irréductibles de $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}^{\mathrm{h}}_{X,z})$ sont de dimension ≥ 2.*

($\mathrm{ii}_{\mathrm{bis}}$) *Pour tout $z \in Z$, toutes les composantes irréductibles de $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}^{\mathrm{hs}}_{X,z})$ sont de dimension ≥ 2.*

(iii) *Pour tout $z \in Z$, toutes les composantes irréductibles de $\operatorname{Spec}(\widehat{\mathscr{O}_{X,z}})$ sont de dimension ≥ 2.*

Démonstration. — Notons $A = \mathscr{O}_{X,z}$ pour $z \in Z$. Notons d'abord que le morphisme $A^{\mathrm{h}} \to A^{\mathrm{hs}}$ est injectif, entier et fidèlement plat. Ceci prouve que le morphisme $h : \operatorname{Spec}(A^{\mathrm{hs}}) \to \operatorname{Spec}(A)$ vérifie $\dim(\overline{h(x)}) = \dim(\overline{x})$ et induit une surjection au niveau des points maximaux, ce qui prouve l'équivalence de (ii) et ($\mathrm{ii}_{\mathrm{bis}}$).

Un anneau intègre et son normalisé ainsi qu'un anneau local et son hensélisé, ont même dimension. Conservant les notations de 3.2, on a donc

$$\dim A^{\mathrm{h}}/\mathfrak{p} = \dim A^{\mathrm{nor}}_{\mathfrak{p}^\star}.$$

Or, dire $\operatorname{codim} p^{-1}(Z) \geq 2$, c'est dire $\dim A^{\mathrm{nor}}_{\mathfrak{p}^\star} \geq 2$ lorsque $\mathfrak{p}^\star$ décrit les points fermés de

$$\operatorname{Spec}(A^{\mathrm{nor}}) = p^{-1}(\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{X,z}))$$

lorsque z décrit Z. Ceci revient donc à dire que toutes les composantes irréductibles $\operatorname{Spec}(A^{\mathrm{h}}/\mathfrak{p})$ de $\operatorname{Spec}(A^{\mathrm{h}})$ sont de dimension ≥ 2 prouvant l'équivalence de (i) et (ii).

Pour montrer l'équivalence de (i) et (iii), on peut supposer que $X = \operatorname{Spec}(A)$ est local hensélien et que Z est réduit à son point fermé.

Prouvons d'abord que (iii) implique (ii). Soit Y une composante irréductible de X. Le morphisme de complétion $c : \widehat{X} \to X$ étant fidèlement plat, $\widehat{Y} = c^{-1}(Y)$ est une réunion de composantes irréductibles de $\widehat{X}$ de sorte qu'on a $\dim(\widehat{Y}) \geq 2$. Comme Y est local noethérien, on a $\dim(Y) = \dim(\widehat{Y}) \geq 2$.

Prouvons la réciproque. Quitte à se restreindre à une composante irréductible (réduite), on peut supposer X intègre de dimension ≥ 2. Soit $\hat{x}$ (resp. x) le point fermé de $\widehat{X}$ (resp. X) (ce n'est pas une composante irréductible de $\widehat{X}$ qui est de dimension ≥ 2). Si une des composantes de $\widehat{X}$ était de dimension ≤ 1, elle serait de dimension 1 (car $\{\hat{x}\}$ n'est pas une composante) et donc son point générique serait un point isolé de $\widehat{X} - \{\hat{x}\}$ de sorte que $\widehat{X} - \{\hat{x}\}$ serait disconnexe (étant de dimension ≥ 2). Or, d'après [Ferrand & Raynaud, 1970, corollaire 4.4], la flèche

$$\pi_0(\widehat{X} - \{\hat{x}\}) = \pi_0(c^{-1}(X - \{x\})) \to \pi_0(X - \{x\})$$

est bijective. Or, comme X est intègre de dimension ≥ 2, l'ouvert $X - \{x\}$ est intègre donc connexe. □

3.4. Définition. — Avec les notations de 3.3, si Z vérifie les conditions équivalentes de 3.3, on dit que Z est c_2 dans X.

3.5. Remarque. — Si X est intègre et excellent, Z est c_2 si et seulement si $X - Z$ contient tous les points de codimension ≤ 1. En effet, comme le morphisme de normalisation est fini et X universellement caténaire, on a $\dim \mathscr{O}_{X^{\mathrm{nor}}, z^{\mathrm{nor}}} = \dim \mathscr{O}_{X, p(z^{\mathrm{nor}})}$ pour tout $z^{\mathrm{nor}} \in p^{-1}(Z)$ (cf. [ÉGA IV$_2$ 5.6.10]).

3.6. Proposition. — *Soit $f : X' \to X$ un morphisme plat de schémas noethériens et Z un fermé de X. Alors, si Z est c_2 dans X, son image inverse $Z' = f^{-1}(Z)$ est c_2 dans X'. En particulier, la condition c_2 est invariante par localisation Zariski ou étale.*

Démonstration. — Soit $z' \in Z'$ d'image $z = f(z') \in Z$. On suppose donc (3.3) que toutes les composantes de $A = \widehat{\mathscr{O}_{X,z}}$ sont de dimension ≥ 2 et on veut prouver que toutes les composantes de $B = \widehat{\mathscr{O}_{X',z'}}$ sont de dimension ≥ 2. On peut donc supposer que f est morphisme local de schémas noethériens, locaux et complets. Comme f est plat, toute composante de X' domine une composante X_0 de X et est une composante de $f^{-1}(X_0)$. On peut donc supposer X intègre de dimension > 1, de point fermé z. D'après [SGA 2 VIII 2.3], le A-module $\mathscr{O}(X - z)$ est de type fini. Comme B est plat sur A, on déduit que $B \otimes_A \mathscr{O}(X - z) = \mathscr{O}(X' - f^{-1}(z))$ est de type fini sur B. Comme B est noethérien, le sous B-module $\mathscr{O}(X' - z')$ de $\mathscr{O}(X' - f^{-1}(z))$ est de type fini. Supposons qu'une composante de X' soit de dimension 1. Soit η le point générique d'une telle composante et définissons alors X'_0 comme l'adhérence schématique $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X',\eta})$ dans X'. Le complémentaire $X'_0 - z'$ serait alors réduit à η qui serait isolé dans $X' - z'$.

Ainsi $\mathscr{O}(X'_0 - z')$ serait un sous B-module de $\mathscr{O}(X' - z')$, donc de type fini (B est noethérien). A fortiori, $\mathscr{O}(X'_0 - z')$ serait de type fini comme $\mathscr{O}(X'_0)$-module, ce qui contredit [SGA 2 VIII 2.3] puisque X'_0 est de dimension 1. □

4. Théorème de rigidité de la ramification I : forme faible

Nous allons commencer par démontrer une variante du changement de base lisse qui est cruciale dans la preuve du théorème de rigidité 4.2.1.

4.1. Variante du théorème de changement de base lisse. — Soit G un groupe fini. On va démontrer une variante du théorème de changement de base lisse [SGA 4 XVI 1.2] pour les faisceaux de G-torseurs sans hypothèse sur le cardinal de G, mais en se restreignant au cas d'immersions ouvertes (pour une preuve un peu différente, voir [Gabber & Ramero, 2013, 10.2.2]).

4.1.1. Théorème. — *Considérons un diagramme cartésien*

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, hook, "j'"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X' \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, hook, "j"] & X \end{tikzcd}$$

Supposons X excellent normal, $p : X' \to X$ lisse et $j : U \to X$ immersion ouverte telle que U contient tous les points de codimension ≤ 1. Alors, le morphisme de changement de base $\Phi : p^\star j_\star \underline{\mathrm{Tors}}(U,G) \to j'_\star \underline{\mathrm{Tors}}(U',G)$ est une équivalence.

Démonstration. — D'après le théorème de changement de base lisse pour les faisceaux d'ensembles [SGA 4 XVI 1.2], Φ est pleinement fidèle. Il suffit de prouver l'essentielle surjectivité. Soit x' un point géométrique de X' d'image $x = p(x')$. Passant aux fibres, on est ramené à prouver que la flèche d'image inverse des torseurs

$$(*) \qquad \mathrm{H}^1(U_{(x)}, G) \to \mathrm{H}^1(U'_{(x')}, G)$$

est bijective, avec de plus x' *fermé* dans sa fibre [SGA 4 VIII 3.13 b)]. La stricte hensélisation préserve la normalité et la codimension (platitude). Les propriétés de permanence des anneaux excellents (cf. I-8) assurent donc qu'on peut supposer $X = \mathrm{Spec}(A), X' = \mathrm{Spec}(A')$ avec $A = \mathscr{O}^{\mathrm{hs}}_{X,x}, A' = \mathscr{O}^{\mathrm{hs}}_{X',x'}$ strictement locaux, normaux et excellents.

Il se peut que l'extension résiduelle $k(x')/k(x)$ soit purement inséparable. Comme dans la preuve du théorème d'acyclicité locale usuelle ([SGA 4 XV 2.1]), pour se ramener au cas séparable, donc au degré 1, on considère une extension finie $A \subset B$ telle que l'extension résiduelle contienne $k(x')/k(x)$ (on peut par exemple considérer un *gonflement* de A'/A au sens de Bourbaki). On peut supposer B intègre et normal et considérer alors

$$\pi : Y = \operatorname{Spec}(B) \to X = \operatorname{Spec}(A)$$

ainsi que $Y' = Y \times_X X'$ et V l'image inverse de U dans Y. Le couple (Y, V) vérifie les mêmes propiétés que (X, U). Le morphisme tautologique $\underline{\mathrm{Tors}}(U, G) \to \pi_* \underline{\mathrm{Tors}}(\pi^{-1}(U), G)$ est fidèle. On peut alors invoquer 6.2.1 pour ramener la preuve de $(*)$ à l'énoncé analogue sur (Y, V), autrement dit on peut supposer $k(x) = k(x')$.

Comme p est lisse, le choix de coordonnées locales $t_1, \ldots, t_n$ de X' en x' définit un A-isomorphisme $A\{t_1, \ldots, t_n\} \xrightarrow{\sim} A'$ où comme d'habitude $A\{t_1, \ldots, t_n\}$ désigne l'hensélisé strict de $A[t_1, \ldots, t_n]$ à l'origine. Une récurrence évidente permet de supposer $n = 1$. On s'est ramené à la situation

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, hook] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X' \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, hook, "j"] \arrow[u, bend left, "\sigma"] & X \arrow[u, bend right, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

avec A strictement local, normal et excellent et σ la section de p définie par l'immersion fermée d'équation $t = 0$. Comme X, X' sont locaux et normaux, ils sont intègres. Les ouverts non vides de X, X' sont donc intègres et donc connexes. Le composé

$$\pi_1(U) \xrightarrow{\sigma_\star} \pi_1(U') \xrightarrow{p_\star} \pi_1(U)$$

étant l'identité, il suffit de prouver que $\sigma_\star$ est surjectif. Soit alors V' un revêtement étale connexe de U'. On doit prouver que sa restriction $V \to U$ au fermé $U \xhookrightarrow{\sigma} U'$ d'équation $t = 0$ est connexe.

Comme X' est excellent, la clôture intégrale Y' de X' dans V' est finie sur X', normale et intègre (comme X'). Comme X' est hensélien, il en de même de Y' qui est donc une union disjointe de ses composants locaux. Comme Y' est intègre, Y' est local. Soit $D \subset Y'$ le diviseur de Cartier d'équation $t = 0$: D est connexe, puisque fermé dans un schéma local.

On a donc un diagramme commutatif à carrés cartésiens et où les flèches verticales sont finies (et dominantes).

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y' \arrow[d] & D \arrow[l, hook'] \arrow[d] & V \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\ U' \arrow[r, hook] & X' & X \arrow[l, hook', "\sigma"'] & U. \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

Soit x' un point de $D - V$, d'image x dans $X - U$. Comme $D \to X$ est fini, on a $\dim \overline{\{x'\}} = \dim \overline{\{x\}}$ et $\dim(D) = \dim(X)$. Comme X, D sont caténaires (ils sont même excellents) et D équidimensionnel, on en déduit l'égalité $\dim \mathscr{O}_{D,x'} = \dim \mathscr{O}_{X,x}$ ce qui assure que l'ouvert V dans D contient tous les points de codimension 1 dans

D (de même que U contient tous les points de codimension 1 dans X). D'après le lemme XXI-4.2.1 appliqué au diviseur de Cartier connexe du schéma normal, excellent Y', le schéma V est connexe. □

4.2. Énoncé et réductions

***4.2.1. Théorème* (Rigidité de la ramification).** — *Soient X, X' des schémas noethériens, $Z \subset X$ un sous-schéma fermé, $U \overset{\tilde{j}}{\hookrightarrow} X$ l'ouvert complémentaire et $X' \xrightarrow{\pi} X$ un morphisme plat. Notons $U' \overset{\tilde{j}'}{\hookrightarrow} X'$ l'immersion ouverte $U' = \pi^{-1}(U) \hookrightarrow X'$. On suppose que π est régulier au-dessus de Z. Soit $\mathscr{C}$ un champ en groupoïdes sur $U_{\text{ét}}$. Alors, la flèche de changement de base*

$$\phi(\mathscr{C}) : \pi^\star \tilde{j}_\star \mathscr{C} \to \tilde{j}'_\star \pi^\star \mathscr{C}$$

est une équivalence dans les deux cas suivants :

(i) *$\mathscr{C}$ est discret (c'est-à-dire $\mathscr{C}$ équivalent à un faisceau d'ensembles).*

(ii) *Z est c_2 et $\mathscr{C} = \underline{\mathrm{Tors}}(U, G)$ avec G un groupe (ordinaire) fini.*

En considérant les fibres, on peut supposer que π est un morphisme local de schémas strictement locaux (la condition c_2 ne dépendant que des hensélisés stricts aux points de Z).

Soient x, x' les points fermés respectifs de X, X'. Par récurrence sur la dimension de X', on peut supposer que $\phi(\mathscr{C})_{\bar{y}'}$ est une équivalence en tout point géométrique $\bar{y}'$ de $X' - \{x'\}$ et il suffit de prouver que $\phi(\mathscr{C})_{x'}$ est une équivalence. On peut de plus supposer $x \in Z$ (sinon $U = X$ et c'est terminé). Par hypothèse, la fibre spéciale $F = \pi^{-1}(x)$ de π est géométriquement régulière.

On a un diagramme commutatif à « carrés » cartésiens (avec des notations un peu abusives)

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r] \arrow[d, hook, "j'"'] \arrow[dd, bend right=60, "\tilde{j}'"'] & U \arrow[d, hook, "j"] \arrow[dd, bend left=60, "\tilde{j}"] \\ X' - F \arrow[r] \arrow[d, hook] & X - \{x\} \arrow[d, hook] \\ X' \arrow[r, "\pi"] & X. \end{tikzcd}$$

Par hypothèse de récurrence, la flèche de changement de base associée au carré supérieur est une équivalence de sorte qu'on a une équivalence $\pi^\star j_\star \mathscr{C} \xrightarrow{\sim} j'_\star \pi^\star \mathscr{C}$ sur $X' - F$. Comme X, X' sont strictement henséliens, la flèche de changement de base $\phi(j_\star \mathscr{C})_{x'}$

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^0(X, \tilde{j}_\star \mathscr{C}) &= \mathrm{H}^0(X - \{x\}, j_\star \mathscr{C}) \\ &\xrightarrow{\pi^\star} \mathrm{H}^0(X' - F, \pi^\star j_\star \mathscr{C}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \mathrm{H}^0(X' - F, j'_\star \pi^\star \mathscr{C}) \\ &= \mathrm{H}^0(X', \tilde{j}'_\star \pi^\star \mathscr{C}) \end{aligned}$$

s'identifie à la flèche d'image inverse

$$\pi^\star : \ \mathrm{H}^0(X - \{x\}, j_\star \mathscr{C}) \to \mathrm{H}^0(X' - F, \pi^\star j_\star \mathscr{C}). \tag{4.2.1.1}$$

Notons $\widehat{X}$ le *schéma* complété de X le long de son point fermé et $\widehat{X'}$ le complété de X' le long de F. Pour tout S-espace $\mathscr{E}$ sur $S_{\text{ét}}$ avec $S = X, X'$, on note $\widehat{\mathscr{E}}$ son image inverse sur $\widehat{S}$. On a un diagramme *commutatif*

$$\begin{tikzcd} \widehat{X'} \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[d, "\hat{\pi}"] & X' \arrow[d, "\pi"] \\ \widehat{X} \arrow[r, "\gamma"] & X \end{tikzcd}$$

où γ, γ' sont les morphismes de complétion, donc sont plats, et $\hat{\pi}$ est plat comme π est un morphisme local de schémas noethériens. Sa fibre spéciale est encore F de sorte qu'elle est géométriquement régulière. Ainsi, $\hat{\pi}$ est formellement lisse ([ÉGA IV$_4$ 19.7.1]) et donc régulier ([André, 1974]) puisque $\widehat{X}$ est local noethérien complet donc excellent. D'après 3.6, $\widehat{Z} = \widehat{X} - \widehat{U}$ est encore c_2 (dans le cas (ii)). D'après le théorème de rigidité de Gabber (2.1.2) appliqué aux paires henséliennes (X, x) et (X', F), il suffit, pour prouver que le foncteur 4.2.1.1 est une équivalence, de prouver que le foncteur

$$\hat{\pi}^\star : \ \mathrm{H}^0(\widehat{X} - \{x\}, \widehat{j_\star \mathscr{C}}) \to \mathrm{H}^0(\widehat{X'} - F, \hat{\pi}^\star \widehat{j_\star \mathscr{C}}) \tag{4.2.1.2}$$

est une équivalence.

Si $\mathscr{C}$ est un faisceau d'ensembles, on procède comme dans (XIV-2.5.3) pour montrer la bijectivité de (4.2.1.2) et achever la preuve du théorème 4.2.1 dans le cas discret.

Dans le cas (ii), montrons un lemme.

4.2.2. Lemme. — *On peut supposer que π est un morphisme essentiellement lisse de schémas strictement locaux et excellents.*

Démonstration. — Mais le morphisme de changement de base

$$\iota : \ \gamma^\star j_\star \mathscr{C} = \widehat{j_\star \mathscr{C}} \to \widehat{j}_\star \gamma^\star \mathscr{C} = \widehat{j}_\star \widehat{\mathscr{C}}$$

est fidèle. En effet, en considérant les faisceaux de morphismes, il suffit démonter que le morphisme de changement de base

$$\gamma^\star j_\star \mathscr{F} \to \widehat{j}_\star \gamma^\star \mathscr{F}$$

est injectif pour tout faisceau d'ensembles sur U. La fibre de ce morphisme en un point géométrique $\hat{\xi}$ de $\hat{X}$ d'image ξ dans X s'identifie au morphisme d'image inverse

$$\Gamma : \mathrm{H}^0(U \times_X X_{(\xi)}, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^0(\hat{U} \times_{\hat{X}} \hat{X}_{(\hat{\xi})}, \gamma_\xi^\star \mathscr{F})$$

par le morphisme canonique

$$\gamma_\xi : \hat{U} \times_{\hat{X}} \hat{X}_{(\hat{\xi})} \to U \times_X X_{(\xi)}.$$

Mais la platitude de γ assure que γ_ξ est surjectif et donc Γ injectif.

D'autre part

$$\widehat{\mathscr{C}} = \underline{\mathrm{Tors}}(\widehat{U}, G)$$

d'après [Giraud, 1971, III.2.1.5.7]. Dans le cas (ii), pour prouver que (4.2.1.1) est une équivalence, on peut donc supposer d'après (6.2.1) que X est complet, donc excellent et π un morphisme local régulier.

D'après le théorème de Popescu ([Swan, 1998]), le morphisme régulier π est limite projective filtrante de morphismes locaux essentiellement lisses $\pi_i : X'_i \to X$. Notons que les X'_i sont strictement locaux et excellents comme X. Comme les X'_i sont cohérents, le foncteur section globale commute à la limite projective au sens de [SGA 4 VII 5.7] de sorte qu'il suffit de prouver le théorème pour les π_i. □

4.3. Preuve de 4.2.1. — On suppose donc que π est un morphisme local essentiellement lisse de schémas excellents et $\mathscr{C} = \underline{\mathrm{Tors}}(U, G)$. On doit prouver pour conclure la preuve du théorème 4.2.1 la variante suivante du théorème de changement de base lisse de Gabber (4.1.1).

4.3.1. Proposition. — *Considérons un diagramme cartésien*

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, hook, "j'"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X' \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[r, hook, "j"] & X \end{tikzcd}$$

où π est un morphisme local essentiellement lisse de schémas excellents strictement locaux. On suppose que le fermé complémentaire $Z = X - U$ est non vide et c_2 (c'est-à-dire sous ces hypothèses, que U contient les points de codimension 1 (3.5)*). Alors, le morphisme*

$$\pi^\star : \mathrm{H}^0(X - \{x\}, j_\star \underline{\mathrm{Tors}}(U, G)) \to \mathrm{H}^0(X' - \pi^{-1}\{x\}, \pi^\star j_\star \underline{\mathrm{Tors}}(U, G))$$

est une équivalence, où x est le point fermé de X.

Démonstration. — Le morphisme de normalisation $p : X^{\mathrm{nor}} \to X$ étant entier, son image est fermée. Comme p est (ensemblistement) dominant, p est surjectif. Comme p est surjectif, le foncteur

$$j_\star \,\underline{\mathrm{Tors}}(U,G) \to j_\star p_\star p^\star \,\underline{\mathrm{Tors}}(U,G) \overset{\text{[Giraud, 1971, III.2.1.5.7]}}{=} p_\star j^{\mathrm{nor}}_\star \,\underline{\mathrm{Tors}}(U^{\mathrm{nor}},G)$$

est fidèle[(iv)]. D'après 6.2.1 et le théorème 4.2.1 (i), il suffit de prouver que la flèche

(4.3.1.1)
$$\pi^\star : \mathrm{H}^0(X-\{x\}, p_\star j^{\mathrm{nor}}_\star \,\underline{\mathrm{Tors}}(U^{\mathrm{nor}},G)) \to \mathrm{H}^0(X'-\pi^{-1}\{x\}, \pi^\star p_\star j^{\mathrm{nor}}_\star \,\underline{\mathrm{Tors}}(U^{\mathrm{nor}},G))$$

est une équivalence.

Considérons le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} X'^{\mathrm{nor}} \arrow[r, "\pi^{\mathrm{nor}}"] \arrow[d, "p'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X^{\mathrm{nor}} \arrow[d, "p"] \\ X' \arrow[r, "\pi"] & X. \end{tikzcd}$$

Comme p est fini (donc propre), on a $\pi^\star p_\star = p'_\star \pi^{\mathrm{nor}\star}$ de sorte que (4.3.1.1) s'identifie à la flèche d'image inverse

$$(4.3.1.2)\quad \pi^{\mathrm{nor}\star} : \mathrm{H}^0(X^{\mathrm{nor}}-\{x\}^{\mathrm{nor}}, j^{\mathrm{nor}}_\star \,\underline{\mathrm{Tors}}(U^{\mathrm{nor}},G)) \\ \to \mathrm{H}^0(X'^{\mathrm{nor}}-(\pi^{\mathrm{nor}})^{-1}\{x\}^{\mathrm{nor}}, \pi^{\mathrm{nor}\star} j^{\mathrm{nor}}_\star \,\underline{\mathrm{Tors}}(U^{\mathrm{nor}},G)).$$

Notons que, la condition c_2 ne dépendant que du normalisé, le complémentaire Z^{nor} de U^{nor} est encore c_2 dans X^{nor}, et U^{nor} contient tous les points de codimension 1. D'après le théorème de changement de base lisse de Gabber 4.1.1, la flèche de changement de base

$$\pi^{\mathrm{nor}\star} j^{\mathrm{nor}}_\star \,\underline{\mathrm{Tors}}(U^{\mathrm{nor}},G) \to j'^{\mathrm{nor}}_\star \,\underline{\mathrm{Tors}}(U'^{\mathrm{nor}},G)$$

est une équivalence de sorte que (4.3.1.2) s'identifie à l'image inverse

$$\pi^{\mathrm{nor}\star} : \ \mathrm{Tors}(U^{\mathrm{nor}},G) \to \mathrm{Tors}(U'^{\mathrm{nor}},G).$$

Il suffit alors de constater que la preuve du théorème 4.3.1 assure que $\pi^{\mathrm{nor}\star}$ est une équivalence. □

4.4. Comparaison à la complétion : cas des coefficients abéliens dans le cas non nécessairement nœthérien

Le paragraphe suivant est une *esquisse* de démonstration de l'analogue du théorème 4.2.1 pour les coefficients abéliens. Le cas des schémas nœthériens est traité dans [Fujiwara, 1995]. Nous reproduisons ici fidèlement une lettre d'Ofer Gabber aux éditeurs (20 juin 2012).

(iv) On note $\mathscr{E} \mapsto \mathscr{E}^{\mathrm{nor}}$ le foncteur d'image inverse par p.

Let $(A, I) \to (A', I')$ be a map of henselian pairs with I finitely generated, $I' = IA'$, $\widehat{A} \xrightarrow{\sim} \widehat{A'}$ (I-adic completions). $X = \operatorname{Spec}(A)$, $X' = \operatorname{Spec}(A')$, $\pi : X' \to X$, $U = X - V(I)$, $U' = X' - V(I')$, $j : U \to X$, $j' : U' \to X'$.

CTC : For every torsion abelian sheaf F on U, the base change arrow $\pi^\star \mathrm{R}^q j_\star F \to \mathrm{R}^q j'_\star \pi^\star F$ is an isomorphism for all q.

Analogue of 4.2.1 (notations as there) : If F is a sheaf of $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$-modules on U where $n > 0$ is invertible on X, then $\pi^\star \mathrm{R}^q j_\star F \to \mathrm{R}^q j'_\star \pi^\star F$ are isomorphisms.

This is reduced to CTC by the same argument.

Sketch of proof of CTC using Zariski-Riemann spaces : For comparing stalks we may assume A, A' strictly henselian and I a proper ideal, and we want

$$(*) \qquad \mathrm{H}^q(U, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(U', F).$$

We call a finitely generated ideal $J \subset A$ containing a power of I *admissible*. We consider the admissible blow-ups $\mathrm{Bl}_J(X)$ which form a cofiltered category using X-scheme morphisms. In general there can be more than one X-morphism between two admissible blow-ups but if we restrict ourselves to J's with $V(J) = V(I)$ (set theoretically) (so that U is schematically dense in the blow-up), there is at most one. Define $J \leq J'$ iff there is an X-morphism $\mathrm{Bl}_{J'}(X) \to \mathrm{Bl}_J(X)$. This is a filtered preorder. When $V(J) \subset V(J')$, $J \leq J'$ is equivalent to the condition that for some $n > 0$ and ideal K, $J'^n = JK$. Thus we have an isomorphism of the preordered set of admissible J's of full support in A and the corresponding set for A'. Let $ZRS_I(X) = \varprojlim \mathrm{Bl}_J(X)$ (a locally ringed space). For the closed point s of X we can consider the special fiber $ZRS_I(X)_s$ and its étale topos, which for our purposes may be defined as the projective limit of the étale topoi $(\mathrm{Bl}_J(X)_s)_{\text{ét}}$ as in [*SGA 4*]. It has enough points by Deligne's theorem. The points are given by "geometric points" of $ZRS_I(X)_s$ (*i.e.* a point and a choice of a separable closure of the residue field). For every admissible J we have

$$j_J : U \hookrightarrow \mathrm{Bl}_J(X)$$

giving a spectral sequence (using proper base change)

$$(**) \qquad \mathrm{H}^p(\mathrm{Bl}_J(X)_s, \mathrm{R}^q j_{J\star} F) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(U, F).$$

We pass to the limit using the general theory of [SGA 4 VI]. We get a spectral sequence $(**)_{\lim}$ involving cohomology on $(ZRS_J(X)_s)_{\text{ét}}$. Since the latter topos is the same for X', to show $(*)$ we use the morphism of the limit spectral sequence to reduce to stalks of the limits of the $\mathrm{R}^q j_{J\star}$ sheaves.

Using the study in [Fujiwara, 1995] of the local rings of ZRS's and their henselizations, one reduces $(*)$ to the case of local rings at geometric points of the special fibers of ZRS's. Thus we are reduced to the case A, A' are henselian and I-valuative. Say $I = (\varphi)$. Then $A[\varphi^{-1}]$ is a henselian local ring with maximal ideal corresponding to

$P = \bigcap I^n$, and A/P is a henselian valuation ring whose valuation topology is the φ-adic one. In this case to prove $(*)$ one reduces to the corresponding statement for $\operatorname{Frac}(A/P) \to \operatorname{Frac}(A'/P')$. In fact for $K \to K'$ a dense embedding of henselian valued fields, if we choose separable closures K_{sep}, K'_{sep} and a map between them we have $\operatorname{Gal}(K'_{\mathrm{sep}}/K') \xrightarrow{\sim} \operatorname{Gal}(K_{\mathrm{sep}}/K)$, using forms of Krasner's lemma (cf. [Bourbaki, **AC**, VI, § 8, exercices 12, 14 a]).

Note: For admissible J, $\mathrm{Bl}_J(X') \to \mathrm{Bl}_J(X)$ gives an isomorphism on I-adic completions (as in the discussion in the proof of 2.4.4) as for every m the map

$$\bigoplus_n J^n \to \bigoplus_n J^n A'$$

is an isomorphism mod I^m.

5. Rigidité de la ramification II : forme forte

5.1. Générisations étales immédiates. — On note $X_{(x)}, X^{\mathrm{h}}_{(x)}$ et $\widehat{X}_{(x)}$ les localisés, hensélisés et complétés respectivement de X en x. On note $\overline{\{y\}}$ l'adhérence de y dans X munie de sa structure réduite. L'hensélisation et la complétion commutent aux immersions fermées de sorte que $\overline{\{y\}}^{\mathrm{h}}, \widehat{\overline{\{y\}}}$ respectivement coïncident avec l'image inverse de $\overline{\{y\}}$ par les morphismes d'hensélisation, complétion respectivement. Rappelons (XIV-2.1.2) qu'une générisation $y \in X$ d'un point x d'un schéma X est une *générisation étale immédiate* de x si l'hensélisé strict en $\bar{x}$ de l'adhérence de y a une composante irréductible de dimension 1.

5.1.1. Lemme. — *Soit y une générisation de x. Notons $c : \widehat{X}_{(x)} \to X_{(x)}$ le morphisme de complétion. Alors, y est une générisation étale immédiate de x si et seulement si l'un des points maximaux de $c^{-1}(y)$ est une générisation étale immédiate du point fermé de $\widehat{X}_{(x)}$.*

Démonstration. — Notons pour simplifier $Y = \overline{\{y\}}$. Observons d'abord qu'un des trois schémas $Y_{(x)}, Y^{\mathrm{h}}_{(x)}$ et $\widehat{Y}_{(x)}$ possède un point maximal de dimension nulle si et seulement si chacun est réduit (ensemblistement) à son point fermé. On peut donc exclure ce cas. Le morphisme $Y_{(\bar{x})} \to Y^{\mathrm{h}}_{(x)}$ est fidèlement plat et entier. Donc, l'hensélisé strict possède un point maximal de dimension 1[(v)] si et seulement si l'hensélisé $Y^{\mathrm{h}}_{(x)}$ possède un point maximal de dimension 1. D'après (3.3), $Y^{\mathrm{h}}_{(x)}$ possède un point maximal de dimension 1 si et seulement si $\widehat{Y}_{(x)}$ possède un point maximal de dimension 1. Par platitude de $\widehat{Y}_{(x)} \to Y$, il s'envoie nécessairement sur y, le point générique de Y. □

(v) On devrait plutôt dire point maximal dont l'adhérence est de dimension 1.

On peut caractériser agréablement les générisations étales immédiates.

5.1.2. Lemme. — *Soit $f : X_{(\bar{x})} \to X_{(x)}$ le morphisme d'hensélisation strict. Les générisations étales immédiates de x sont les images $y = f(y')$ des $y' \in X_{(\bar{x})}$ tels que $\dim \overline{\{y'\}} = 1$.*

Démonstration. — Soit $y' \in X_{(\bar{x})}$ tel que $\dim \overline{\{y'\}} = 1$. L'image $y = f(y')$ est une générisation stricte de x (car par exemple les fibres de f sont discrètes). Pour cette même raison, $\overline{\{y'\}}$ est une composante de $f^{-1}(\overline{\{y\}}) = \overline{\{y\}}_{(\bar{x})}$. Inversement, si y est une générisation étale immédiate de x, le point générique y' d'une composante de dimension 1 de $\overline{\{y\}}_{(\bar{x})}$ s'envoie sur y (platitude de f) et son adhérence est de dimension 1. □

5.1.3. Exemple. — Prenons l'exemple du pincement de [ÉGA IV$_2$ 5.6.11]. En conservant les notations de *loc. cit.*, l'anneau pincé C est local noethérien de dimension 2 et son normalisé a deux idéaux maximaux de hauteur $1, 2$ respectivement. D'après 3.2, l'hensélisé de C a deux composantes irréductibles de dimension 1 et 2 de points génériques c, c'. Comme dans la preuve de XIV-2.1.9, ceci assure l'existence de $\bar{c}$ (au-dessus de c) dans l'hensélisé strict de C dont l'adhérence est de dimension 1 et donc que le point générique de $\mathrm{Spec}(C)$ est une générisation étale immédiate de son point fermé.

5.2. Couples associés et condition $(*)$. — Commençons par une définition.

5.2.1. Définition. — Soit x un point d'un schéma X. Choisissons une clôture séparable de $k(x)$ définissant un point géométrique $\bar{x}$ de X.

(i) Soit G un schéma en groupes sur X. On définit les sections locales de G à support dans $\bar{x}$ par la formule

$$\mathrm{H}^0_{\bar{x}}(G) = \mathrm{Ker}(\mathrm{H}^0(X_{(\bar{x})}, G) \to \mathrm{H}^0(X_{(\bar{x})} - \{\bar{x}\}, G)).$$

(ii) Soit $\mathscr{C}$ un champ (en groupoïdes) sur $X_{\text{ét}}$ et p un nombre premier. On dit que (x, p) est **associé** de $\mathscr{C}$ et on écrit $(x, p) \in \mathrm{Ass}(\mathscr{C})$ s'il existe $\sigma \in \mathscr{C}_{\bar{x}}$ tel que $\mathrm{H}^0_{\bar{x}}(\underline{\mathsf{Aut}}(\sigma))$ ait de la p-torsion.

(iii) Soit $\mathscr{C}$ un champ ind-fini (en groupoïdes) sur un ouvert U de X. On dit que $\mathscr{C}$ vérifie la condition $(*)$ si pour tout $x \in X - U$ de caractéristique $p > 0$, il n'existe pas de générisation étale immédiate y de x telle que $(y, p) \in \mathrm{Ass}(\mathscr{C})$.

Remarquons que la condition (x, p) associé ne dépend pas du choix de la clôture séparable de $k(x)$.

5.2.2. Exemple. — Supposons X normal et G groupe fini. Soit U un ouvert de X. Alors, (x, p) est associé de $\mathscr{C} = \underline{\mathrm{Tors}}(U, G)$ si et seulement si $p \mid \mathrm{card}(G)$ et x est un point maximal de U. En effet, l'unique objet de $\mathscr{C}_{\bar{x}}$ est le torseur trivial σ et $\underline{\mathsf{Aut}}(\sigma) = G$. Or, $X_{(\bar{x})} - \{\bar{x}\}$ est connexe (resp. vide) si x est non maximal (resp.

maximal). Ainsi, on a $\mathrm{H}^0_{\bar{x}}(\underline{\mathsf{Aut}}(\sigma)) = \{1\}$ (resp. $\mathrm{H}^0_{\bar{x}}(\underline{\mathsf{Aut}}(\sigma)) = G$). On déduit que $\mathscr{C}$ vérifie $(*)$ si et seulement si U contient tous les points de codimension 1 dont la caractéristique divise l'ordre de G.

5.2.3. Lemme. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme plat de schémas noethériens, $x \in X$ d'image $y = f(x)$ dans Y et $\mathscr{C}$ un champ en groupoïdes sur Y. Alors, $(x,p) \in \mathrm{Ass}(f^\star\mathscr{C})$ si et seulement si $(y,p) \in \mathrm{Ass}(\mathscr{C})$ et $x \in \mathrm{Max}(f^{-1}(y))$.*

Démonstration. — Choisissons un point géométrique $\bar{x}$ au-dessus de x, qui définit $\bar{y}$ au-dessus de y.

Supposons $(x,p) \in \mathrm{Ass}(f^\star\mathscr{C})$. Comme la flèche $(f^\star\mathscr{C})_{\bar{x}} \to \mathscr{C}_{\bar{y}}$ est une équivalence, il existe $\sigma \in \mathscr{C}_{\bar{y}}$ et $g \in \mathsf{Aut}(\sigma)$ tel que $f^\star g$ est d'ordre de p et de support $\{\bar{x}\}$. Notons F l'hensélisé strict de $f^{-1}(y)$ en $\bar{x}$. C'est aussi la fibre de l'hensélisé $\varphi : X_{(\bar{x})} \to Y_{(\bar{y})}$ de f au-dessus de $\bar{y}$. Si F n'était pas réduit à $\bar{x}$, un des points de F ne serait pas dans le support de $f^\star g$ de sorte que $f^\star g$ serait l'identité en ce point. Mais $f^\star g$ est constant sur $F = \varphi^{-1}(\bar{y})$ de sorte que $f^\star g$ serait l'identité également en $\bar{x} \in F$, ce qui n'est pas. Donc, F est réduit à $\bar{x}$ de sorte que $\dim \mathscr{O}_{f^{-1}(y),x} = 0$ (puisqu'un anneau local a même dimension que son hensélisé strict) et $x \in \mathrm{Max}(f^{-1}(y))$. De plus, g est trivial sur $\varphi(X_{(\bar{x})} - \{\bar{x}\}) = Y_{(\bar{y})} - \{\bar{y}\}$ (fidèle platitude de φ) ce qui assure $(y,p) \in \mathrm{Ass}(\mathscr{C})$.

Inversement, supposons $(y,p) \in \mathrm{Ass}(\mathscr{C})$ et $x \in \mathrm{Max}(f^{-1}(y))$. On a donc un automorphisme g d'ordre p de $\sigma \in \mathscr{C}_{\bar{y}}$ de support $\{\bar{y}\}$. Le support de $\varphi^\star g$ est la fibre $\varphi^{-1}(\bar{y}) = f^{-1}(y)_{(\bar{x})}$. Comme x est maximal dans $f^{-1}(y)$, on déduit (dimension) que le schéma local $\varphi^{-1}(\bar{y})$ est de dimension nulle donc réduit à $\bar{x}$, ce qu'on voulait. □

5.2.4. Corollaire. — *Soit (X,x) un schéma local noethérien hensélien, $U = X - \{x\}$ l'ouvert complémentaire du point fermé et $c : \widehat{X} \to X$ le morphisme de complétion. Alors, le champ en groupoïdes $\mathscr{C}$ sur U vérifie $(*)$ si et seulement si $\widehat{\mathscr{C}} = c^\star\mathscr{C}$ vérifie $(*)$.*

Démonstration. — On note encore x le point fermé de $\widehat{X}$ et on choisit un point géométrique $\bar{x}$ au-dessus de x.

Supposons que $\widehat{\mathscr{C}}$ vérifie $(*)$. Soit $(y, p = \mathrm{car}(x)) \in \mathrm{Ass}(\mathscr{C})$ et notons Y l'adhérence de y dans X. Il s'agit de montrer que toutes les composantes de $Y_{(\bar{x})}$ sont de dimension ≥ 2, ou encore (3.3) que toutes les composantes de Y sont de dimension ≥ 2. Mais c'est bien le cas car, d'après le lemme 5.2.3, on a $(\hat{y}, p) \in \mathrm{Ass}(\widehat{\mathscr{C}})$ pour tout point maximal $\hat{y}$ de $\widehat{Y}$.

Inversement, supposons que $\mathscr{C}$ vérifie $(*)$. Soit donc $(\hat{y}, p = \mathrm{car}(x)) \in \mathrm{Ass}(\widehat{\mathscr{C}})$ et soit $y = c(\hat{y})$. D'après le lemme 5.2.3, $(y,p) \in \mathrm{Ass}(\mathscr{C})$ et $\hat{y}$ est maximal dans $c^{-1}(y) = \widehat{Y}$ où $Y = \overline{\{y\}}$. Alors, toutes les composantes de $Y_{(\bar{x})}$ (donc de $\widehat{Y}$ d'après (3.3)) sont de dimension > 1. En particulier, $\dim \overline{\{\hat{y}\}} > 1$, ce qu'on voulait. □

5.3. Le théorème de rigidité de la ramification

***5.3.1. Théorème* (Rigidité de la ramification II).** — *Soit $\pi : X' \to X$ un morphisme plat de schémas noethériens, régulier au-dessus d'un sous-schéma fermé $Z \subset X$. Soit $j : U = X - Z \hookrightarrow X$ l'immersion ouverte du complémentaire de Z et $\mathscr{C}$ un champ ind-fini sur U vérifiant la condition $(*)$. Alors, la flèche de changement de base $\pi^\star j_\star \mathscr{C} \to j'_\star \pi'^\star \mathscr{C}$ est une équivalence.*

Démonstration. — D'après le théorème de rigidité de la ramification I (4.2.1), le théorème est vrai dans le cas discret de sorte que $\pi^\star j_\star \mathscr{C} \to j'_\star \pi'^\star \mathscr{C}$ est toujours pleinement fidèle. Comme dans la preuve de 4.2.1, on peut supposer X, X' strictement locaux de point fermés x, x' et π morphisme local. Par récurrence sur la dimension de X, on peut supposer que le changement de base par π est une équivalence pour l'immersion $U \hookrightarrow X - \{x\}$ de sorte qu'on peut supposer $U = X - \{x\}$. Comme dans la preuve de 4.2.1 et en utilisant l'invariance par complétion de la condition $(*)$ (5.2.4), on peut supposer de plus X complet et π morphisme essentiellement lisse et local et il s'agit de démontrer que la flèche

$$\pi^\star : \mathrm{H}^0(X - \{x\}, \mathscr{C}) \to \mathrm{H}^0(X' - \pi^{-1}\{x\}, \mathscr{C}')$$

est essentiellement surjective.

Soit donc σ' un objet de $\mathrm{H}^0(X' - \pi^{-1}\{x\}, \mathscr{C}')$. La condition $(*)$ étant stable par passage aux sous-gerbes (maximales), on peut comme dans la preuve de 6.2.2 en considérant la sous-gerbe maximale de $\mathscr{C}'$ engendrée par σ', supposer de plus que $\mathscr{C}$ est une gerbe. Comme $\mathscr{C}$ est ind-finie, on peut supposer que $\mathscr{C}$ est *constructible* (8.3.3).

Pour tout point maximal $y \in U$, notons i_y le morphisme canonique

$$i_y : \mathrm{Spec}(k(y)) \to U = X - \{x\}.$$

La catégorie fibre de $i_{y\star} i_y^\star \mathscr{C}$ sur un ouvert étale $V \to U$ s'identifie aux sections rationnelles de $\mathscr{C}$ définies au voisinage des points maximaux de V au-dessus de y. Soit

$$\Psi : \mathscr{C} \to \mathscr{D} := \prod_{y \in \mathrm{Max}(U)} i_{y\star} i_y^\star \mathscr{C}$$

le morphisme déduit des morphismes d'adjonction.

Pour toute section $\tau \in \mathrm{H}^0(U, \mathscr{D})$ (vu comme un morphisme de U-espaces $\tau : U \to \mathscr{D}$), le champ des relèvements $K(\tau) = U \times_{\mathscr{D}} \mathscr{C}$ associé est un champ en groupoïdes. Le morphisme canonique

$$K(\tau) \to \mathscr{C}$$

est fidèle ([Giraud, 1971, IV.2.5.2]). Comme $\mathscr{C}$ est constructible et vérifie $(*)$, il en est de même des sous-gerbes maximales de $K(\tau)$.

Il suffit alors (exercice) de vérifier que la flèche de changement de base est essentiellement surjective pour

1) les gerbes $\mathscr{G} = i_{y\star} i_y^\star \mathscr{C}$;
2) les sous-gerbes maximales du champ des relèvements $K(\tau) = U \times_{\mathscr{D}} \mathscr{C}$ associée à $\tau \in \mathrm{H}^0(U, \mathscr{D})$.

5.3.2. Premier cas : changement de base pour $\mathscr{G} = i_{y\star} i_y^\star \mathscr{C}$. — Supposons donc $\mathscr{G} = i_{y\star} i_y^\star \mathscr{C}$. Quitte à changer X, U en $\overline{\{y\}}, U \cap \overline{\{y\}}$, on peut supposer que X est irréductible de point générique y.

Si la dimension de X est 1, on a $U = \{y\}$ et $\mathscr{G}_{\bar{y}} = \underline{\mathrm{Tors}}(\mathrm{Spec}(\overline{k(y)}), G)$ avec $p = \mathrm{car}(y)$ ne divisant pas l'ordre de G (cf. l'argument dans l'exemple 5.2.2). On invoque alors le changement de base par un morphisme lisse usuel ([Giraud, 1971, VII.2.1.2]).

On suppose donc que la dimension de X est > 1.

Choisissons une clôture séparable $k(y) \hookrightarrow k_y$ et notons $j_y : \mathrm{Spec}(k_y) \to U$ est le morphisme canonique. On a

$$j_y^\star \mathscr{C} = \underline{\mathrm{Tors}}(\mathrm{Spec}(k_y), G)$$

où G est un groupe fini constant. Comme

$$i_{y\star} i_y^\star \mathscr{C} \to j_{y\star} j_y^\star \mathscr{C}$$

est fidèle, on peut (6.2.1) remplacer $\mathscr{G}$ par $j_{y\star} j_y^\star \mathscr{C} = j_{y\star} \underline{\mathrm{Tors}}(\mathrm{Spec}(k_y), G)$.

5.3.3. Lemme. — *On a* $\mathrm{R}^1 j_{y\star} G = \{*\}$ *et* $j_{y\star} \underline{\mathrm{Tors}}(\mathrm{Spec}(k_y), G) = \underline{\mathrm{Tors}}(U, j_{y\star} G)$.

Démonstration. — La seconde égalité découle de la première et de la formule ([Giraud, 1971, V.3.1.5])

$$\pi_0(j_{y\star} \underline{\mathrm{Tors}}(\mathrm{Spec}(k_y), G)) = \mathrm{R}^1 j_{y\star} G.$$

Soit $\tilde{A}$ l'hensélisé strict de $X = \mathrm{Spec}(A)$ en un point géométrique $\bar{\xi}$ de X. C'est une limite inductive filtrante d'algèbres A_i de type fini qui sont génériquement étales. On déduit que $j_y^{-1}(\mathrm{Spec}(\tilde{A}))$ est le spectre de la limite inductive filtrante des algèbres étales $B_i = k_y \otimes_{k(y)} A_i$ qui sont donc scindées puisque k_y est séparablement clos. Ainsi, les schémas considérés étant cohérents, on a

$$(\mathrm{R}^1 j_{y\star} G)_{\bar{\xi}} = \mathrm{H}^1(j_y^{-1}(\mathrm{Spec}(\tilde{A})), G) = \varinjlim \mathrm{H}^1(\mathrm{Spec}(B_i), G) = \{*\}. \qquad \square$$

En terme de module galoisien, $j_{y\star} G$ est l'induite (continue) $\mathrm{Hom}_c(\Gamma, G)$ où Γ est le groupe profini $\mathrm{Gal}(k_y/k(y))$. En écrivant $\Gamma = \mathrm{colim}\, \mathrm{Gal}(K_\alpha/k(y))$ où $(K_\alpha/k(y))_\alpha$ est le système inductif des sous-extensions galoisiennes finies de $k_y/k(y)$, on trouve

$$j_{y\star} G = \lim j_{\alpha\star} G$$

où $j_\alpha : \mathrm{Spec}(K_\alpha) \to \mathrm{Spec}(k(y)) \to U$ est le morphisme canonique. Comme U, U' sont noethériens donc cohérents, on a

$$\mathrm{H}^0(U, \underline{\mathrm{Tors}}(U, \operatorname{colim} j_{\alpha\star} G)) = \operatorname{colim} \mathrm{H}^0(U, \underline{\mathrm{Tors}}(U, j_{\alpha\star} G))$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^0(U', \pi'^\star\, \underline{\mathrm{Tors}}(U, \operatorname{colim} j_{\alpha\star} G)) &= \mathrm{H}^0(U', \underline{\mathrm{Tors}}(U', \pi'^\star \operatorname{colim} j_{\alpha\star} G)) \\ &= \operatorname{colim} \mathrm{H}^0(U, \underline{\mathrm{Tors}}(U', \pi'^\star j_{\alpha\star} G))\end{aligned}$$

de sorte qu'on est réduit pour le cas 1) à étudier le changement de base pour la gerbe $\mathscr{G}_\alpha = \underline{\mathrm{Tors}}(U, j_{\alpha\star} G)$.

Soit $p : W \to X$ la normalisation de X dans $\mathrm{Spec}(K_\alpha) \to X$: c'est un morphisme fini (car X est excellent) et surjectif de sorte que W est semi-local et hensélien (comme X). On déduit que W est la réunion disjointe de ses hensélisés aux points fermés. Comme W est intègre, W est strictement local : on note w son point fermé w. De plus, W est normal, donc géométriquement unibranche de sorte que $j_{\alpha\star} G = p_\star G_{|W-w}$. Comme $\mathrm{R}^1 p_\star G$ est trivial (p est fini), on déduit l'égalité

$$\mathscr{G}_\alpha = p_\star\, \underline{\mathrm{Tors}}(W - \{w\}, G)$$

comme dans la preuve du lemme 6.3.3 *infra.*

En utilisant le changement de base propre pour p, on est ramené à prouver que la flèche

$$\mathrm{Tors}(W - \{w\}, G) \to \mathrm{Tors}(W' - \pi^{-1}\{w\}, G)$$

est une équivalence.

Rappelons qu'on a supposé que la dimension de X (ou W, c'est la même chose) est > 1. Dans ce cas, $\{w\}$ est c_2 dans W et on invoque la variante du théorème de changement de base lisse de Gabber (4.3.1).

5.3.4. Deuxième cas : changement de base pour une sous-gerbe maximale K du champ des relèvements $K = K(\tau)$. — La gerbe K vérifie $(*)$ comme $K(\tau)$. Comme $\Psi_{\bar{y}}$ est une équivalence pour tout point maximal $y \in U$, on déduit que $K(\tau)_{\bar{y}}$ est ponctuel et donc que $K_{\bar{y}}$ est la gerbe triviale en tous ces points. Par hypothèse de récurrence, il suffit pour achever la preuve de prouver le lemme suivant.

5.3.5. Lemme. — *Il existe une immersion fermée $i : F \to X$ nulle part dense telle que $K = i_\star i^\star K$.*

Démonstration. — Il suffit de prouver que pour tout y maximal, il existe un ouvert de Zariski contenant y sur lequel K est triviale. Par construction, il existe un voisinage étale $V \to U$ de y et $\sigma \in K(V)$. Comme $\underline{\mathsf{Aut}}(\sigma)$ est un faisceau constructible de $V_{\text{ét}}$, l'isomorphisme

$$\{\mathrm{Id}\}_{\bar{y}} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathsf{Aut}}(\sigma)_{\bar{y}}$$

provient d'un isomorphisme

$$\{\mathrm{Id}\}_W \xrightarrow{\sim} \underline{\mathsf{Aut}}(\sigma)_W$$

sur un voisinage étale $W \to V \to U$ de y. Quitte à localiser, on peut supposer que $W \to U$ est un revêtement galoisien de son image. La section σ descend sur U et n'a pas d'automorphisme par construction. Ainsi, la restriction à U de K est une gerbe neutre avec groupe d'automorphisme triviale, donc est triviale. □

6. Appendice 1 : sorites champêtres

6.1. — Dans la situation du théorème 2.1.2, on sait déjà (2.1.1 i)) que le foncteur $\mathrm{H}^0(U, \mathscr{C}) \to \mathrm{H}^0(\widehat{U}, \pi^\star \mathscr{C})$ est pleinement fidèle que $\mathscr{C}$ soit ind-fini ou non.

Soit $\mathscr{C}$ un champ ind-fini sur $Y_{\text{ét}}$. On cherche des conditions assurant que l'hypothèse

6.1.1. Hypothèse. — Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. On suppose que pour tout faisceau d'ensembles $\mathscr{F}$ sur $Y_{\text{ét}}$, la flèche $\mathrm{H}^0(Y, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^0(X, f^\star \mathscr{F})$ est bijective.

entraîne que la conclusion

6.1.2. Conclusion. — La flèche $\phi : \mathrm{H}^0(Y, \mathscr{C}) \to \mathrm{H}^0(X, f^\star \mathscr{C})$ est une équivalence de catégories.

est vraie, autrement dit assurant que l'assertion

6.1.3. Assertion. — On a l'implication 6.1.1 ⇒ 6.1.2.

est vraie. On sait déjà que 6.1.1 entraîne que ϕ est pleinement fidèle (cf. 2.1).

6.2. Premières réductions. — Commençons par un lemme formel :

6.2.1. Lemme. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas et $\mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2$ un morphisme de champs sur Y qu'on suppose fidèle. Si 6.1.3 est vraie pour $\mathscr{C}_2$, alors 6.1.3 est vraie pour $\mathscr{C}_1$.*

Démonstration. — On a déjà observé (2.1) que ϕ est pleinement fidèle. Soit donc

$$c_1^X \in \mathrm{H}^0(X, f^\star \mathscr{C}_1) = \mathrm{Hom}_X(X, f^\star \mathscr{C}_1)$$

dont on cherche un antécédent dans $\mathrm{H}^0(Y, \mathscr{C}_1)$. Son image

$$c_2^X \in \mathrm{H}^0(X, f^\star \mathscr{C}_2)$$

a un antécédent (à isomorphisme près)

$$c_2^Y \in \mathrm{H}^0(Y, \mathscr{C}_2).$$

Le couple $(c_1^X, c_2^X = f^\star c_2^Y)$ définit une section du champ des relèvements

$$K(f^\star c_2^X) = X \times_{f^\star \mathscr{C}_1} f^\star \mathscr{C}_2.$$

Mais (associativité du produit fibré) $K(f^\star c_2^Y)$ s'identifie à

$$f^\star K(c_2^Y) = f^\star(Y \times_{\mathscr{C}_1} \mathscr{C}_2).$$

Or, $K(c_2^Y)$ est un faisceau d'ensembles car $\mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2$ est fidèle. Donc, $(c_1^X, c_2^X = f^\star c_2^Y) \in \mathrm{H}^0(X, f^\star K(c_2^Y))$ a un unique antécédent de la forme (c_1^Y, c_2^Y) et c_1^Y est bien l'antécédent cherché. $\square$

6.2.2. Lemme. — *Si 6.1.3 est vrai pour toute gerbe (resp. toute gerbe ind-finie), alors 6.1.3 est vrai pour tout champ (resp. tout champ ind-fini).*

Démonstration. — Soit $t \in \mathrm{H}^0(X, f^\star\mathscr{C})$ et $\gamma_t \subset f^\star\mathscr{C}$ la sous-gerbe maximale engendrée par t dans $f^\star\mathscr{C}$ ([Giraud, 1971, III.2.1.3.2])[(vi)]. Ceci définit une section $\tau \in \pi_0(f^\star\mathscr{C})$ du faisceau d'ensembles $\pi_0(f^\star\mathscr{C})$ des sous-gerbes maximales de $f^\star\mathscr{C}$ (*loc. cit.*, 2.1.4). D'après *loc. cit.*, 2.1.5, la flèche naturelle

$$\pi_0(f^\star\mathscr{C}) \to f^\star\pi_0(\mathscr{C})$$

est bijective. Mais, par hypothèse, la flèche

$$\mathrm{H}^0(Y, \pi_0(\mathscr{C})) \to \mathrm{H}^0(X, f^\star\pi_0(\mathscr{C})) = \mathrm{H}^0(X, \pi_0(f^\star\mathscr{C}))$$

est bijective de sorte qu'il existe une (unique) sous-gerbe (maximale) $\gamma \subset \mathscr{C}$ telle que $f^\star\gamma = \gamma_t$, qui sera ind-finie si $\mathscr{C}$ l'est. L'image dans $\mathrm{H}^0(Y, \mathscr{C})$ de l'antécédent de $t \in \mathrm{H}^0(X, f^\star\gamma)$ dans $\mathrm{H}^0(Y, \gamma)$ est l'antécédent cherché. $\square$

6.3. Réduction au cas d'un champ de torseurs sous un groupe fini constant. — Admettons pour un instant le résultat suivant, généralisation au cas des champs de la résolution flasque de Godement.

***6.3.1. Lemme* (Lemme d'effacement).** — *Soit γ une gerbe ind-finie sur un schéma cohérent X. Il existe un faisceau de groupes ind-fini $\mathscr{G}$ sur X et un foncteur fidèle $\gamma \hookrightarrow \underline{\mathrm{Tors}}(X, \mathscr{G})$.*

On peut alors prouver le critère suivant :

6.3.2. Proposition. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas cohérents. On suppose que pour tout faisceau d'ensembles $\mathscr{F}$ sur Y, la flèche $\mathrm{H}^0(Y, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^0(X, f^\star\mathscr{F})$ est bijective* (6.1.1). *On suppose en outre que pour tout morphisme fini $p : Y' \to Y$ induisant $f' : X' = X \times_Y Y' \to Y'$ et tout groupe fini constant G, la flèche* $\mathrm{Tors}(Y', G) \to \mathrm{Tors}(X', G)$ *est une équivalence. Alors, pour tout champ ind-fini $\mathscr{C}$ sur Y, la flèche $\mathrm{H}^0(Y, \mathscr{C}) \to \mathrm{H}^0(X, f^\star\mathscr{C})$ est une équivalence.*

(vi) Dans *loc. cit.*, $\pi_0(\mathscr{C})$ est noté $\mathrm{Ger}(\mathscr{C})$, qui n'est pas actuellement la notation standard.

Démonstration. — Seule l'essentielle surjectivité pose problème. Les lemmes d'effacement, 6.2.1 et 6.2.2 permettent de supposer que $\mathscr{C} = \underline{\mathrm{Tors}}(Y, \mathscr{G})$ où $\mathscr{G}$ est un groupe ind-fini sur Y. Comme X, Y sont cohérents, la cohomologie non abélienne commute aux limites inductives filtrantes [SGA 4 VII rem. 5.14]. Comme $\mathscr{G}$ est ind-fini, il est limite inductive filtrante de faisceaux de groupes constructibles [SGA 4 IX 2.7.2] : on peut donc supposer $\mathscr{G}$ constructible. Puisque Y est cohérent, il existe (*loc. cit.*, 2.14) une famille finie de morphismes finis $p_i : Y_i \to Y$ et des groupes finis constants G_i tels que $\mathscr{G}$ se plonge dans le produit $\prod p_{i\star}G_i$. On a donc un morphisme fidèle

$$\underline{\mathrm{Tors}}(Y, \mathscr{G}) \hookrightarrow \underline{\mathrm{Tors}}(Y, \prod p_{i\star}G_i) = \prod \underline{\mathrm{Tors}}(Y, p_{i\star}G_i)$$

grâce à [Giraud, 1971, III.2.4.4].

Utilisant à nouveau 6.2.1, on peut supposer

$$\mathscr{C} = \underline{\mathrm{Tors}}(Y, p_\star G)$$

avec G groupe fini constant et $p : Y' \to Y$ fini.

6.3.3. Lemme. — *On a* $\underline{\mathrm{Tors}}(Y, p_\star G) = p_\star \underline{\mathrm{Tors}}(Y', G)$.

Démonstration. — Comme p est fini, $\mathrm{R}^1 p_\star G$ est trivial. Mais $\pi_0(p_\star \underline{\mathrm{Tors}}(Y', G)) = \mathrm{R}^1 p_\star G$ ([Giraud, 1971, V.3.1.9.1]) de sorte que $p_\star \underline{\mathrm{Tors}}(Y', G)$ est une gerbe, visiblement neutre et vaut donc nécessairement $\underline{\mathrm{Tors}}(Y, p_\star G)$. □

Le théorème de changement de base propre pour les faisceaux (trivial dans ce cas) assure qu'on a $f^\star p_\star G = p'_\star f'^\star G = p'_\star G$. La flèche

$$\mathrm{H}^0(Y, p_\star \underline{\mathrm{Tors}}(Y', G)) \to \mathrm{H}^0(X, f^\star p_\star \underline{\mathrm{Tors}}(Y', G))$$

s'identifie alors à la flèche naturelle

$$\begin{aligned} \mathrm{Tors}(Y', G) &= \mathrm{H}^0(Y, p_\star \underline{\mathrm{Tors}}(Y', G)) \\ &\to \mathrm{H}^0(X, f^\star p_\star \underline{\mathrm{Tors}}(Y', G)) \\ &= \mathrm{H}^0(X, \underline{\mathrm{Tors}}(X, f^\star p_\star G)) \ \text{(d'après 6.3.3 et [Giraud, 1971, III.2.1.5.7])} \\ &= \mathrm{H}^0(X, \underline{\mathrm{Tors}}(X, p'_\star G)) \\ &= \mathrm{H}^0(X, p'_\star \underline{\mathrm{Tors}}(X', G)) \\ &= \mathrm{H}^0(X', \underline{\mathrm{Tors}}(X', G)) \\ &= \mathrm{Tors}(X', G) \end{aligned}$$

qui est bijective par hypothèse. □

6.4. Preuve du lemme d'effacement. — Soit X un schéma cohérent.

6.4.1. Lemme. — *Il existe un schéma affine X', un morphisme quasi-compact et surjectif $f : X' \to X$ tel que pour tout $x' \in X'$, le corps résiduel $k(x')$ est la clôture algébrique du corps résiduel $k(f(x))$.*

Démonstration. — Comme X est quasi-compact, on peut recouvrir X par un nombre fini d'ouverts affines X_i. Le morphisme $X_i \to X$ est surjectif et quasi-compact (X est quasi-séparé). Comme toutes les extensions résiduelles sont des isomorphismes, on peut donc supposer $X = \mathrm{Spec}(A)$ affine quitte à changer X en $\coprod X_i$.

6.4.2. Sous-lemme. — *Soient I l'ensemble des polynômes unitaires (non constants) de $A[X]$ et*

$$T'(A) = A[X_P, P \in I]/(P(X_P))$$

et

$$f : X' = \mathrm{Spec}\, T'(A) \to X = \mathrm{Spec}\, A.$$

Le morphisme f est surjectif et, pour tout $\xi \in X'$, le corps résiduel $k(\xi)$ est la clôture algébrique de $k(f(\xi))$.

Démonstration. — Soit $x \in X$ et $\overline{k(x)}$ une clôture algébrique de $k(x)$. La fibre schématique $f^{-1}(x)$ est le spectre de

$$B = k(x)[X_P, P \in I]/(\tilde{P}(X_P))$$

où $\tilde{P}$ désigne l'image de $P \in I$ par le morphisme de localisation des coefficients

$$A[X] \to k(x)[X].$$

Le choix de racines $x_P \in \overline{k(x)}$ pour tous les polynômes P de I définit un point de $f^{-1}(x)$ assurant la surjectivité de f.

Soit alors $\xi \in f^{-1}(x)$: c'est un point fermé car f est entier et $k(\xi)$ est algébrique sur $k(x)$. Soit Q un polynôme unitaire de $k(x)$ de degré $d > 0$. Il existe $a \in A$ d'image $a(x)$ non nulle dans $k(x)$, un polynôme unitaire $P \in I$ et un entier $n > 0$ tel que

$$a^{nd} Q(X) = P(a^n X).$$

On déduit que l'image X_P/a^n dans $k(\xi)$ est une racine de Q. Comme $k(\xi)$ est algébrique sur $k(x)$, ceci assure que $k(\xi)$ est une clôture algébrique de $k(x)$. (C'est un exercice (facile) de théorie de Galois ou [Bourbaki, **A**, V, § 10, exercice 20].) □

Comme f est quasi-compact puisqu'affine, le lemme est prouvé. □

Dans un second temps, rappelons la construction de la topologie constructible sur X (cf. [ÉGA IV_1 1.9.13]).

6.4.3. Remarque. — Pour notre propos, on ne l'utilisera en fait que pour le schéma affine X'.

On construit l'espace topologique X^{cons} dont l'ensemble sous-jacent coïncide avec l'ensemble sous-jacent $|X|$ de X mais dont les ouverts (resp. fermés) sont les parties ind (resp. pro)-constructibles, à savoir les réunions (resp. intersections) de parties constructibles. Comme X est cohérent, X est un espace topologique compact, totalement discontinu ([ÉGA IV$_1$ 1.9.15]). De plus, la cohérence de X entraîne que les parties constructibles sont alors les réunions finies d'intersection $U \cap (X - V)$ avec U, V ouverts quasi-compacts ([ÉGA III$_1$ 9.1.3] et [ÉGA IV$_1$ 1.2.7]). Le complémentaire de $U \cap (X - V)$ étant $(X - U) \cup V$, il est donc également ouvert dans X^{cons} de sorte que X admet une base d'ouverts compacts.

L'identité de $|X|$ induit une application continue $X^{\text{cons}} \to X$ puisqu'un fermé est pro-constructible. Si $X = \operatorname{Spec}(A)$ est affine, X^{cons} est naturellement homéomorphe au spectre d'une certaine A-algèbre $T(A)$ pour un certain endo-foncteur T de la catégorie des anneaux ([Olivier, 1968], proposition 5). Cet homéomorphisme est compatible à la localisation de sorte que ces structures schématiques se recollent munissant X^{cons} d'une structure naturelle de X-schéma relativement affine compatible avec l'application continue (identique !) $X^{\text{cons}} \to X$. Si $x \in |X|$, on a $\mathcal{O}_{X^{\text{cons}},x} = k(x)$.

On définit alors

$$f : X^c \to X$$

comme le composé

$$f : X^c = (X')^{\text{cons}} \to X' \to X.$$

Par construction, X^c est compact -en particulier cohérent- (réduit), totalement discontinu et admet une base de voisinages ouverts-compacts (qui sont donc ouverts-fermés puisque X^c est compact donc topologiquement séparé). Ses corps résiduels sont algébriquement clos et f est quasi-compact[(vii)] et surjective (comme composé de morphismes quasi-compacts) .

Rappelons que le faisceau vide sur un espace topologique est le faisceau associé au préfaisceau de valeur constante $\varnothing$. L'ensemble de ses sections sur tout ouvert non vide est $\varnothing$ et est réduit à un point sur l'ouvert vide.

6.4.4. Lemme. — *Tout morphisme étale $f : Y \to X^c$ est Zariski localement trivial. En particulier, le morphisme canonique de topos $(\varepsilon^{-1}, \varepsilon_\star) : X^c_{\text{ét}} \to X^c_{\text{Zar}}$ est une équivalence. Tout faisceau sur X^c ayant des sections localement a des sections globales. De plus, tout torseur sur X^c est trivial et toute gerbe est neutre.*

(vii) On appliquera ici cette construction à un ouvert (quasi-compact) d'un schéma affine, donc à un schéma séparé de sorte que f sera même affine dans ce cas.

Démonstration. — Soit $y \in Y$ d'image $x \in X^c$. Comme f est quasi-fini et $k(x)$ algébriquement clos, l'inclusion $k(x) \hookrightarrow k(y)$ est une égalité. Le morphisme composé

$$\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x) = \mathrm{Spec}(k(x)) = \mathrm{Spec}(k(y)) \to Y$$

se prolonge au voisinage de x en une section locale de f ce qui prouve le premier point.

Soit $\mathscr{F}$ un faisceau (Zariski ou étale, c'est la même chose) sur X^c. Comme X^c est compact, on peut trouver un recouvrement fini par des ouverts compacts U_i sur lesquels $\mathscr{F}$ a une section. On montre par récurrence sur le nombre d'ouverts qu'on peut raffiner ce recouvrement en un recouvrement fini V_j par des ouverts compacts disjoints. Comme pour tout j il existe i tel que $V_j \subset U_i$, le faisceau $\mathscr{F}$ a des sections locales sur chaque V_j. Ces ouverts étant disjoints, ces sections se recollent en une section globale. Le reste suit car tout torseur (resp. toute gerbe) sur X^c a des sections localement. □

La preuve du lemme d'effacement est alors facile. Soit γ une gerbe ind-finie sur X. Le foncteur d'adjonction

$$\gamma \to f_\star f^\star \gamma$$

est fidèle car f est surjectif. La gerbe $f^\star\gamma$ ([Giraud, 1971, III.2.1.5.6]) est neutre et ind-finie (6.4.4) de sorte qu'elle est équivalente à $\underline{\mathrm{Tors}}(X^c, \mathscr{G}^c)$ pour faisceau de groupes ind-fini $\mathscr{G}^c$ convenable. Par ailleurs, comme on a déjà vu ([Giraud, 1971, V.3.1.9.1]), le faisceau des sous-gerbes maximales $\pi_0(f_\star \underline{\mathrm{Tors}}(X^c, \mathscr{G}^c))$ s'identifie à $\mathrm{R}^1 f_\star \mathscr{G}^c$.

6.4.5. Lemme. — *Le faisceau $\mathrm{R}^1 f_\star \mathscr{G}^c$ est trivial (constant ponctuel).*

Démonstration. — Soit $U \to X$ un morphisme étale avec U quasi-compact et quasi-séparé. Comme dans la preuve de 6.4.4, $X_U^c \to X^c$ est étale et donc un isomorphisme local pour la topologie de Zariski car les corps résiduels de X^c sont algébriquement clos. On en déduit que les topos étale et Zariski de X_U^c sont équivalents. Tout $\mathscr{G}^c$-torseur étale sur X_U^c provient donc d'un torseur Zariski. Comme $X_U^c \to X^c$ est un isomorphisme local, X_U^c a une base d'ouverts-fermés et donc est séparé. Comme X_U^c est quasi-compact (puisque f est quasi-compact et U quasi-compact comme X), l'espace topologique sous-jacent de X_U^c est de plus compact. On déduit comme dans 6.4.4 que tout torseur sur X_U^c est trivial $\mathrm{H}^1(X_U^c, \mathscr{G}^c) = \{*\}$. En passant à la limite (on n'utilise pas ici la cohérence de f), on trouve que les fibres de $\mathrm{R}^1 f_\star \mathscr{G}_c$ sont triviales. □

D'après le lemme, $\pi_0(f_\star \underline{\mathrm{Tors}}(X^c, G^c))$ est le faisceau ponctuel ce qui assure que $f_\star \underline{\mathrm{Tors}}(X^c, G^c)$ est une gerbe. Comme elle a une section, elle est neutre de groupe $G = f_\star G^c$ et s'identifie donc à $\underline{\mathrm{Tors}}(X, G)$. Mais f est quasi-compact de sorte que G est ind-fini comme G^c [SGA 4 IX 1.6]. La preuve du lemme d'effacement est complète.

7. Appendice 2 : théorème de changement de base propre d'Artin-Grothendieck pour les champs ind-finis sur des schémas non noethériens

On va prouver l'énoncé suivant

7.1. Théorème. — *Considérons un diagramme cartésien*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

avec f propre. Alors, pour tout champ ind-fini $\mathscr{C}$ sur X, la flèche de changement de base $g^\star f_\star \mathscr{C} \to f'_\star g'^\star \mathscr{C}$ est une équivalence.

Notons que ce théorème est connu dans le cas discret [SGA 4 XII 5.1] ainsi que dans le cas où Y est localement noethérien ([Giraud, 1971, VII.2.2.2]). La preuve qui suit est une adaptation de la preuve de ce dernier énoncé.

Démonstration. — D'après [Giraud, 1971, VII.2.2.5], il suffit de prouver l'énoncé suivant : soit X propre sur S local hensélien et $i : X_0 \hookrightarrow X$ l'immersion de la fibre fermée. Alors, pour tout champ ind-fini $\mathscr{C}$ sur X, la flèche

$$\gamma : \mathrm{H}^0(X, \mathscr{C}) \to \mathrm{H}^0(X_0, i^\star \mathscr{C})$$

est une équivalence. Notons que X/S étant propre, il est cohérent donc X est cohérent comme S [SGA 4 VI 2.5]. Ainsi, i est un morphisme cohérent de schémas cohérents. Si $\mathscr{C}$ est discret, le théorème est une conséquence immédiate du théorème de changement de base propre pour les faisceaux d'ensembles [SGA 4 XII 5.1 (i)]. On en déduit que γ est pleinement fidèle. D'après 6.3.2, il suffit de montrer que pour tout morphisme fini $X' \to X$ (induisant une immersion fermée $X'_0 \hookrightarrow X'$) et tout groupe fini G, la flèche

$$\gamma : \mathrm{Tors}(X', G) \to \mathrm{Tors}(X'_0, G) \tag{7.1.1}$$

est une équivalence (et en fait est essentiellement surjective puisqu'on sait déjà qu'elle est pleinement fidèle). On applique alors [SGA 4 XII 5.5 (ii)] au morphisme propre $X' \to S$ pour conclure. □

8. Appendice 3 : sorites sur les gerbes

On montre que toute gerbe ind-finie sur X noethérien est limite inductive filtrante de ses sous-gerbes constructibles (comparer avec [ÉGA IV$_3$ IX. 2.2 et 2.9]).

8.1. Image d'un morphisme de champs

8.1.1. — Soit $\varphi : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ un morphisme (cartésien) de champs sur $X_{\text{ét}}$. On définit l'image $\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(\mathscr{C})$ comme la catégorie ayant pour objets ceux de $\mathscr{C}$ et telles que $\mathrm{Hom}_{\varphi(\mathscr{C})}(g_1, g_2) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(\varphi(g_1), \varphi(g_2))$, la structure de catégorie fibrée étant déduites des structures (compatibles) de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Notons que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est naturellement équivalente à la sous-catégorie pleine $\mathscr{C}'_\varphi$ de $\mathscr{C}'$ dont les objets sont les images des objets de $\mathscr{C}$. On identifiera $\varphi(\mathscr{C})$ et $\mathscr{C}'_\varphi$. On notera $\widetilde{\mathrm{Im}}(\varphi)$ le champ associé au préchamp $\mathrm{Im}(\varphi)$. C'est la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}'_\varphi$ des objets localement isomorphes à l'image d'éléments de $\mathscr{C}$.

8.1.2. Lemme. — *Soit $\bar{x}$ un point géométrique de X et $f : W \to X$ un morphisme de schémas. Alors,*

- *la flèche naturelle $\mathrm{Im}(\varphi)_{\bar{x}} \to \mathrm{Im}(\varphi_{\bar{x}})$ est une équivalence ;*
- *on a une équivalence de champs, définie à isomorphisme unique près, $f^\star \widetilde{\mathrm{Im}}(\varphi) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{Im}}(f^\star \varphi)$.*

Démonstration. — Les objets de $\mathrm{Im}(\varphi)_{\bar{x}}$ et $\mathrm{Im}(\varphi_{\bar{x}})$ coïncident avec ceux de $\mathscr{C}_{\bar{x}}$ et la flèche naturelle est simplement l'identité. Construisons l'inverse de la flèche. Soit alors $a, b \in \mathscr{C}'_{\bar{x}}$ et $\psi \in \mathrm{Hom}(\varphi(a), \varphi(b))$ qui provient de $\Psi_S \in \mathrm{Hom}_S(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$. Mais Ψ_S peut être vu comme une flèche de $\mathrm{Im}(\varphi)(S)$: on prend son germe en $\bar{x}$ pour définir l'inverse (qui ne dépend pas des choix). On vérifie que ceci définit l'inverse cherché.

Passons au second point et définissons la flèche. Par adjonction, on doit définir une flèche (cartésienne)

$$\widetilde{\mathrm{Im}}(\varphi) \to f_\star \widetilde{\mathrm{Im}}(f^\star \varphi). \tag{8.1.2.1}$$

D'après la 2-propriété universelle du champ associé, il suffit de définir un morphisme cartésien de préchamps

$$\mathrm{Im}(\varphi) \to f_\star \mathrm{Im}(f^\star \varphi).$$

Soit $S \to X$ étale. Les objets du membre de gauche sont les objets de $\mathscr{C}(S)$ tandis que ceux de droites sont ceux de $(f^\star \mathscr{C})(f^{-1}(S)) = f_\star f^\star \mathscr{C}(S)$. La flèche d'adjonction $\mathscr{C} \to f_\star f^\star \mathscr{C}$ permet alors de définir la flèche $x \mapsto f^\star(x)$ cherchée au niveau des objets. Soient alors x, y des objets de $\mathscr{C}(S)$ et

$$g \in \mathrm{Hom}_S(\varphi(x), \varphi(y)) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Im}(\varphi)(S)}(x, y)$$

C'est donc une section sur S de $\underline{\mathrm{Hom}}(\varphi(x), \varphi(y))$ qui fournit (par image inverse) une section sur $f^{-1}(S)$ de $\underline{\mathrm{Hom}}(f^\star \varphi(x), f^\star \varphi(y))$ [Giraud, 1971, II.3.2.8.1 (4)], donc une flèche de

$$\mathrm{Hom}_{f^{-1}(S)}(f^\star \varphi(x), f^\star \varphi(y)) = \mathrm{Hom}_{f^{-1}(S)}((\varphi(f^\star x), \varphi(f^\star y)) = \mathrm{Hom}_{f_\star \mathrm{Im}(f^\star \varphi)(S)}(x, y).$$

Le foncteur ainsi défini est visiblement cartésien (comme φ). Le premier point assure que les fibres de ce foncteur, et donc également celles du foncteur correspondant (8.1.2.1), sont des équivalences, ce qui achève de prouver le lemme. □

8.2. Groupoïdes libres

8.2.1. — Soit $\Gamma = E \overset{s}{\underset{b}{\rightrightarrows}} V$ un graphe orienté (E est l'ensemble des arêtes, V l'ensemble des sommets, b, s les applications « but, source »). On associe (voir [Berger, 1995]) le groupoïde libre $L(\Gamma)$ qu'on peut décrire comme suit. Soit $E^{\pm}$ l'ensemble $E^{\pm} = \{e^{\pm}, e \in E\}$ union disjointe de deux copies de E : ses objets sont les sommets et les morphismes entre $v, v' \in V$ sont les mots (réduits), éventuellement vides,

$$e_1^{\pm} \cdots e_n^{\pm} \text{ avec } s(e_i^{\pm}) = b(e_{i+1}^{\pm})(i = 1, \dots, n-1), s(e_n^{\pm}) = v, b(e_1^{\pm}) = v'.$$

8.2.2. Remarque. — Il est bien connu que $L(\Gamma)$ est le groupoïde fondamental $\Pi_1(\Gamma_{\mathbf{R}})$ de la réalisation géométrique $\Gamma_{\mathbf{R}}$ de Γ.

8.2.3. — Par construction, les foncteurs de $L(\Gamma)$ dans un groupoïde G s'identifient naturellement aux familles

$$(g_v) \in \mathsf{Ob}(G)^V, (\gamma_e) \in \mathrm{Fl}(G)^E \text{ telles que } \gamma_e \in \mathrm{Hom}_G(g_{s(e)}, g_{b(e)}).$$

Si on préfère, L est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli Groupoïdes → Graphes.

8.2.4. — La construction se globalise de la manière suivante. Considérons un diagramme de X-schémas étales

$$\begin{tikzcd} \Gamma_X : E \arrow[rr, shift left, "s"] \arrow[rr, shift right, "b"'] \arrow[dr] & & V \arrow[dl] \\ & X. & \end{tikzcd}$$

Par fonctorialité de la construction L, on définit une catégorie fibrée (scindée) en groupoïdes $L(\Gamma_X)$ sur $X_{\text{ét}}$ par la formule $S \mapsto L(\Gamma_X(S))$. Par construction, les fibres de $L(\Gamma_X)$ sont non vides si et seulement si $V \to X$ est surjectif. Les sections locales sont localement isomorphes si et seulement si pour tout point géométrique $\bar{x} \to X$, le graphe $E_{\bar{x}} \rightrightarrows V_{\bar{x}}$ est connexe et non vide. Par construction, on dispose de deux sections tautologiques

$$g \in \mathsf{Ob}L(\Gamma_X)(V), \gamma \in \mathrm{Hom}_{L(\Gamma_X)(E)}(s^{\star}g, b^{\star}g)$$

définies par l'identité de V et de E respectivement. Soit $\mathscr{G}$ un groupoïde sur $X_{\text{ét}}$. On a alors la propriété d'adjonction suivante : la flèche qui à un foncteur *cartésien*

$$\varphi : L(\Gamma_X) \to \mathscr{G}$$

associe

$$\varphi(g) \in \mathscr{G}(V), \varphi(\gamma) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}(E)}(s^\star\varphi(g), b^\star\varphi(g))$$

est une équivalence.

8.3. Constructibilité de sous-gerbes. — Considérons un hyperrecouvrement[(viii)] de X, à savoir un diagramme de X-schémas étales (de type fini)

$$H_X : \begin{tikzcd} E \arrow[rr, shift left, "s"] \arrow[rr, shift right, "b"'] \arrow[dr] & & V \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

où les flèches $V \to X$ et $(s, b) : E \to V \times_X V$ sont surjectives. Pour tout point géométrique $\bar{x} \to X$, le graphe $H_{\bar{x}}$ est connexe de sorte que $L(H_X)$ est une gerbe. Soit

$$\tilde{g} \in \mathscr{G}(V), \tilde{\gamma} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}(E)}(s^\star\tilde{g}, b^\star\tilde{g})$$

définissant un morphisme cartésien $\varphi : L(H_X) \to \mathscr{G}$.

8.3.1. Définition. — Une gerbe $\mathscr{G}$ sur $X_{\text{ét}}$ est dite **constructible** si pour tout ouvert étale $S \to X$, toute section locale $\sigma \in \mathscr{G}(S)$, le faisceau en groupes $\underline{\mathrm{Aut}}(\sigma)$ sur $S_{\text{ét}}$ est constructible.

8.3.2. Lemme. — *Avec les notations précédentes, supposons $\mathscr{G}$ ind-finie. Alors, l'image $I = \widetilde{\mathrm{Im}}(\varphi)$ est constructible.*

Démonstration. — Comme la formation de l'image et de L commutent à l'image inverse, on peut procéder par récurrence noethérienne. Il suffit donc de prouver que I est constructible sur un ouvert non vide de X supposé intègre. La constructibilité se testant après n'importe quel changement de base surjectif localement de présentation finie,[SGA 4 IX 2.8], on peut supposer que V, E sont des *revêtements* étales de X complètement décomposés, autrement dit que H_X est un graphe constant fini Γ.

Soit alors $\sigma \in I(S)$. Comme Γ est constant, σ est localement isomorphe à $n = \mathrm{card}(V)$ sections $\sigma_i \in \mathscr{G}(X)$ deux à deux isomorphes. En particulier, chaque faisceau $\underline{\mathrm{Aut}}(\sigma_i)$ est engendré par un nombre fini de sections provenant d'une famille génératrice finie de $\pi_1(\Gamma_{\mathbf{R}}, i)$ et est contenu dans un faisceau ind-fini de groupes. Ceci assure sa constructibilité (cf. la preuve de [SGA 4 IX 2.9 (iii)]). □

(viii) La terminologie est abusive : manque la section diagonale $V \to E$ pour avoir un hyperrecouvrement (tronqué).

8.3.3. Proposition. — *Soit $\pi : X \to Y$ un morphisme de schémas noethériens, $\mathscr{G}$ une gerbe ind-finie sur $Y_{\text{ét}}$ et $\sigma \in \mathrm{H}^0(X, \pi^\star\mathscr{G})$. Il existe une sous-gerbe constructible $\mathscr{G}_1$ de $\mathscr{G}$ telle que $\sigma \in \mathrm{H}^0(X, \pi^\star\mathscr{G}_1) \subset \mathrm{H}^0(X, \pi^\star\mathscr{G})$*[ix].

Démonstration. — La formule $(\pi^\star\mathscr{G})_{\bar{x}} = \mathscr{G}_{\pi(\bar{x})}$ assure que localement σ est isomorphe à l'image inverse d'une section locale de $\mathscr{G}$. Comme Y est quasi-compact, on peut trouver $V \to Y$ étale (surjectif de type fini) et $\tau \in \mathscr{G}(V)$ telles que $\pi^\star\tau$ et σ sont localement isomorphes (pour la topologie étale) sur $X_V := X \times_Y V$ où l'on a encore noté π la seconde projection $X_V \to V$. Choisissons donc

$$e : X' \to X_V$$

étale (surjectif de type fini) et un isomorphisme

$$e^*\pi^*\tau \xrightarrow{\sim} e^*p^*\sigma \tag{8.3.3.1}$$

où p désigne la première projection $X_V \to X$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X' \times_X X' & \xrightarrow{h} & V \times_Y V \\ {\scriptstyle pr_1}\downarrow\downarrow{\scriptstyle pr_2} & & {\scriptstyle pr_1}\downarrow\downarrow{\scriptstyle pr_2} \\ X' & \xrightarrow{\pi\circ e} & V. \end{array}$$

Par définition, $p \circ e \circ pr_1 = p \circ e \circ pr_2$ de sorte que (8.3.3.1) définit un isomorphisme

$$h^*pr_1^*\tau = pr_1^*e^*\pi^*\tau \xrightarrow{\sim} pr_2^*e^*\pi^*\tau = h^*pr_2^*\tau \tag{8.3.3.2}$$

et donc ([Giraud, 1971, II.3.2.8]) une section globale du faisceau $h^* \underline{\mathbf{Isom}}(pr_1^*\tau, pr_2^*\tau)$. Comme précédemment, il existe alors $(s, b) : E \to V \times_Y V$ étale (surjectif de type fini) et un isomorphisme $\gamma : s^\star\tau \to b^\star\tau$ induisant (8.3.3.2) localement sur $X' \times_X X'$. On vérifie alors que l'image

$$\mathscr{G}_1 = \widetilde{\mathrm{Im}}(L(V, E) \xrightarrow{(\tau,\gamma)} \mathscr{G})$$

du morphisme d'adjonction défini par τ et γ (cf. paragraphe précédent) convient. □

8.3.4. Remarque. — On contourne ici l'absence de sorites sur les limites inductives. L'énoncé devrait être en deux parties : d'abord qu'une gerbe ind-finie sur un schéma noethérien est limite inductive filtrante de ses sous-gerbes constructibles, ce qui est pour l'essentiel le contenu du lemme précédent, ensuite que sur un schéma cohérent, le foncteur sections globales commute aux limites inductives filtrantes.

[ix] Plus précisément, σ est dans l'image essentielle de $\mathrm{H}^0(X, \pi^\star\mathscr{G}_1)$ dans $\mathrm{H}^0(X, \pi^\star\mathscr{G})$.