Astérisque

YVES LASZLO

Un contre-exemple

Astérisque, tome 363-364 (2014), Séminaire Bourbaki,
exp. n° XIX, p. 481-490
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2014__363-364__481_0>

EXPOSÉ XIX

UN CONTRE-EXEMPLE

Yves Laszlo

1. Introduction

L'exposé est destiné à construire, suivant Gabber ([Gabber, 2001]), un exemple d'immersion ouverte $j : U \to X$ de schémas noethériens telle que $\mathrm{R}^1 j_\star \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ne soit pas constructible. Ceci montre que l'hypothèse de quasi-excellence du théorème de constructibilité de Gabber (XIII-1.1.1) est indispensable. D'un point de vue géométrique, la construction est intéressante : U est le complémentaire d'un diviseur D dans une surface régulière X mais possède une infinité de points doubles ordinaires ; en particulier, son lieu régulier n'est pas ouvert ce qui lui interdit d'être quasi-excellent. Ce diviseur est un exemple de diviseur dans une surface régulière localement à croisements normaux (au sens de de Jong) mais pas globalement (5.5).

2. La construction

Si K est un corps et $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, on note $K\{\underline{x}\}$ le hensélisé à l'origine de l'anneau de polynômes $K[\underline{x}]$. On choisit un corps parfait infini k, au plus dénombrable tel que k^*/k^{*2} est infini. Par exemple, on peut prendre pour k un corps de nombres.

2.1. Remarque. — Pour toute extension finie L/k, le groupe L^*/L^{*2} est infini. En effet, d'après la théorie de Kummer, le noyau de

$$k^*/k^{*2} \to L^*/L^{*2}$$

paramètre les extensions quadratiques intermédiaires de L/k qui sont en nombre fini car L/k est séparable.

On note $\bar{k}$ une clôture algébrique de k. Dans la suite, on note $\Lambda = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

On commence par regarder le plan $\mathbf{A}^2 = \mathrm{Spec}(k[x,y])$ privé des courbes irréductibles ne coupant pas la droite $\Delta = \mathrm{Spec}(k[x])$ d'équation $y = 0$. Ces courbes sont exactement les courbes irréductibles d'équation $u(1 + yg(x,y)), u \in k^*$. On pose donc

$$A_0 = (1 + yk[x,y])^{-1}k[x,y].$$

Le morphisme de localisation $k[x,y] \to A_0$ identifie $\mathrm{Spec}(A_0)$ au sous-ensemble du plan $\mathbf{A}^2 = \mathrm{Spec}(k[x,y])$ cherché. Les points de $\mathrm{Spec}(A_0)$ sont de trois sortes

— Le point générique de $\mathbf{A}^2$;
— Les points génériques des courbes irréductibles du plan qui rencontrent Δ ;
— Les points de $\mathrm{Spec}(A_0)$ fermés dans $\mathbf{A}^2$ (qui sont les points fermés de Δ comme on va le voir).

Notons qu'un point générique d'une courbe C qui coupe Δ se spécialise dans $\mathrm{Spec}(A_0)$ sur n'importe quel point fermé de $C \cap \Delta$ et donc n'est pas fermé dans $\mathrm{Spec}(A_0)$.

Par ailleurs, un point de $\mathrm{Specmax}(A_0)$ est donc défini par $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{k}$. Si $\bar{y}$ est non nul, étant algébrique sur k, son inverse est dans $k[\bar{y}]$ ce qui entraîne $(\bar{x}, \bar{y}) \notin \mathrm{Spec}(A_0)(\bar{k})$. L'immersion fermée

$$\mathrm{Spec}(k[x]) = \mathrm{Spec}(A_0/yA_0) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A_0)$$

induit donc un homéomorphisme $\mathrm{Specmax}(k[x]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Specmax}(A_0)$.

Si $\xi \in \mathrm{Specmax}(A_0)$, on note $\pi_\xi \in k[x]$ le générateur unitaire des polynômes nuls en ξ et on choisit une racine de π_ξ dans $\bar{k}$ définissant un point géométrique $\bar{\xi}$ au-dessus de ξ. On le voit comme un élément de A_0 via le plongement tautologique $k[x] \hookrightarrow A_0$. Le couple (π_ξ, y) est un système de coordonnées locales de A_0 en ξ, *i.e.* on a un isomorphisme[(i)]

$$k(\xi)\{\pi_\xi, y\} \xrightarrow{\sim} A^{\mathrm{h}}_{0,\xi}. \tag{2.1.1}$$

Comme k est dénombrable, $\mathrm{Specmax}(k[x])$ est dénombrable. On note $[i], i \geq 0$ la suite de ses points qu'on peut voir aussi comme la suite des idéaux maximaux de A_0. On note alors $P(i)$ l'image de $P \in k[X]$ dans $k([i])$.

Commençons par un lemme type Bertini élémentaire.

2.2. Lemme. — *Soit $P, Q \in k[X]$. Supposons $P' \neq 0$ ou $Q' \neq 0$ et* $\mathrm{PGCD}(P,Q) = 1$. *Alors, pour tout $t \in k$ sauf un nombre fini $P + tQ$ est séparable.*

Démonstration. — Puisque $\mathrm{PGCD}(P,Q) = 1$, le système linéaire (P,Q) est sans point base et définit un morphisme

$$\mathbf{A}^1_k \xrightarrow{(P:Q)} \mathbf{P}^1_k.$$

(i) On devrait plutôt dire que le morphisme $k[X,Y]_{(0,0)} \to A_{0,\xi}$ qui envoie X sur π_ξ et Y sur y induit un unique isomorphisme $k(\xi)\{\pi_\xi, y\} \xrightarrow{\sim} A^{\mathrm{h}}_{0,\xi}$.

Le point $(T:1) \in \mathbf{P}^1_k(k(T))$ est générique de sorte que la fibre géométrique

$$F_\eta \subset \mathbf{A}^1_{\overline{k(T)}}$$

a pour équation

$$P(X) - TQ(X) = 0.$$

Le polynôme en T

$$P(X) - TQ(X)$$

est primitif ($\mathrm{PGCD}(P,Q) = 1$) et de degré 1. Il est donc irréductible dans $k[X,T] = k[T][X]$ et donc dans $k(T)[X]$. Par ailleurs, $P'(X) - TQ'(\mathrm{X})$ n'est pas nul. Sinon, P' serait nul et donc Q' aussi, ce qui n'est pas. Donc, le polynôme irréductible $P(X) - TQ(X) \in k(T)[X]$ est premier avec sa dérivée ce qui assure la lissité de F_η. On conclut grâce au théorème de lissité générique. □

2.3. Lemme. — *Il existe des suites $\xi_n \in \mathrm{Specmax}(k[X])$, $g_n \in k[X]$ telles que*

(i) *les g_n sont deux à deux premiers entre eux ;*
(ii) *ξ_n zéro de multiplicité 2 de g_n ;*
(iii) *les autres zéros de g_n sont simples ;*
(iv) *pour tout $i \leq n$, $g_n(i) \neq 0$ et*

$$(g_n(i) \bmod k([i])^{*2}) \notin \mathbf{F}_2\langle (g_j(i) \bmod k([i])^{*2}), j < n \mid g_j(i) \neq 0 \rangle \subset k([i])^*/k([i])^{*2}.$$

Démonstration. — Supposons les $\xi_i,\ g_i, i < n$ construits (condition vide si $n = 0$). Choisissons $\xi_n \in \mathrm{Specmax}(k[X])$ différent des zéros de $g_m, m < n$ et des $[i], i \leq n$.

Pour tout $i \leq n$, choisissons un polynôme P_i tel que

$$P_i(i) \neq 0 \text{ et } (P_i(i) \bmod k([i])^{*2}) \notin \mathbf{F}_2\langle g_j(i) \mid g_j(i) \neq 0, j < n\rangle$$

ce qui est possible d'après (2.1). Posons $P_i = 1$ si $i > n$. Soit $V \subset \mathrm{Specmax}(k[X])$ l'ensemble des zéros des $g_m, m < n$.

Choisissons alors $\tilde{g}_n$ tel que

$$\tilde{g}_n \equiv \pi^2_{\xi_n} \bmod \pi^3_{\xi_n} \text{ et } \tilde{g}_n \equiv P_i \bmod [i] \text{ si } i \leq n \text{ ou si } [i] \in V.$$

Par construction, $(\tilde{g}_n, \xi_n)$ satisfait toutes les propriétés requises sauf la troisième. Soit

$$P = \tilde{g}_n \pi^{-2}_{\xi_n} \text{ et } Q = \pi_{\xi_n} \prod_{j<n} \tilde{g}_j \prod_{j \leq n} \pi_{[j]}.$$

Comme Q s'annule à l'ordre 1 en ξ_n, sa dérivée n'est pas identiquement nulle de sorte que (2.2) on peut choisir $t \in k$ tel que

$$P + tQ$$

soit séparable. Par construction,

$$(g_n = \pi^2_{\xi_n}(P + tQ),\ \xi_n)$$

satisfait les propriétés requises dans le lemme. □

On définit alors

$$A_{n+1} = A_n[z_n]/(z_n^2 - y - g_n) \text{ et } A = \operatorname{colim} A_n.$$

Soit $n \in \mathbf{N}$.

Par construction, $\mathrm{Spec}(A_n)$ est un schéma régulier intègre de dimension 2 fini au-dessus de $\mathrm{Spec}(A_0)$. Comme l'extension d'anneaux intègres $A_n \hookrightarrow A$ est entière, on peut choisir un point géométrique $\overline{\xi_{n,\infty}}$ de $\mathrm{Spec}(A)$ au dessus de ξ_n. Il définit donc des points géométriques $\overline{\xi_n}$ au-dessus de ξ_n.

Par construction, l'inclusion $A_{n+1} \hookrightarrow A$ définit un isomorphisme (cf. la note i)

$$\bar{k}\{\pi_{\xi_n}, y, z_n\}/(z_n^2 - y - g_n) \xrightarrow{\sim} A^{\mathrm{hs}}_{\overline{\xi_{n,\infty}}}$$

compatible à (2.1.1), *i.e.* tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\bar{k}\{\pi_{\xi_n}, y, z_n\}/(z_n^2 - y - g_n) \arrow[r, "\sim"] & A^{\mathrm{hs}}_{\overline{\xi_{n,\infty}}} \\
\bar{k}\{\pi_{\xi_n}, y\} \arrow[r, "\sim"] \arrow[u] & A^{\mathrm{hs}}_{0,\overline{\xi_n}} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

commute (rappelons que l'hensélisation stricte commute aux limites inductives filtrantes, cf. [ÉGA IV$_4$ 18.8.18]).

2.4. Lemme. — *Le diviseur $D = V(y)$ de la surface* $\mathrm{Spec}(A)$ *est intègre.*

Démonstration. — Montrons que c'est déjà vrai des diviseurs D_n de $\mathrm{Spec}(A_n)$. La fibre de $D_n \to \Delta$ au-dessus de $[0]$ est définie par les équations

$$z_i^2 = g_i(0),\ i \le n$$

dans $\mathbf{A}^n_{k[0]}$. C'est le spectre d'un corps car les $g_i(0), i \le n$ sont non nuls et linéairement indépendants $\bmod k([0])^{*2}$ ce qui permet d'invoquer la théorie de Kummer. Si maintenant on avait deux composantes dans D_n, elles se projetteraient sur Δ (propreté et platitude) et donc la fibre au-dessus de $[0]$ ne serait pas réduite. □

Avec ces préparatifs, on peut énoncer le résultat principal.

2.5. Proposition. — *Soit j l'immersion ouverte* $\mathrm{Spec}(A[1/y]) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ *et η le point générique de $D = V(y)$.*

(i) *A est noethérien.*

(ii) *Pour tout n, la dimension (sur Λ) de $(\mathrm{R}^1 j_\star \Lambda)_{\overline{\xi_{n,\infty}}}$ est 2, alors que la dimension de $(\mathrm{R}^1 j_\star \Lambda)_{\bar{\eta}}$ est 1.*

(iii) *En particulier, $\mathrm{R}^1 j_\star \Lambda$ n'est pas constructible.*

2.6. Remarque. — Notons que le diviseur (intègre donc) $D = V(y)$ de la surface régulière $\mathrm{Spec}(A)$ admet chaque $\xi_{n,\infty}$ comme point double (ordinaire). Il n'est donc pas quasi-excellent puisque son lieu régulier (ou normal, c'est la même chose ici) n'est pas ouvert. On obtient alors un contre-exemple à la constructibilité avec un schéma ambiant régulier (mais certes pas excellent) !

Le point (iii) découle immédiatement des points (i) et (ii). Le reste de l'exposé est destiné à prouver les points (i) et (ii), seuls points restant à montrer.

3. Noethérianité de A

On va adapter (cf. proposition 3.4) à la situation (en l'utilisant) le critère usuel de noethérianité des limites inductives que l'on rappelle :

***3.1. Théorème* ([ÉGA 0_{III} 10.3.1.3]).** — *Soit $(A_i, \mathfrak{m}_i)$ un système inductif filtrant d'anneaux locaux noethériens. On suppose que tous les A_i sont noethériens et que les morphismes de transitions sont locaux et plats. Alors, si pour tout $i \leq j$, on a $\mathfrak{m}_i A_j = \mathfrak{m}_j$, alors* $\mathrm{colim}\, A_i$ *est noethérien.*

On utilisera sans le rappeler ensuite le critère de noethérianité de Cohen ([Nagata, 1962, 3.4]) :

***3.2. Proposition* (Cohen).** — *Un anneau est noethérien si et seulement si tout idéal premier est de type fini.*

Soit $A_i, i \geq 0$ un système inductif d'anneaux et $A_\infty = \mathrm{colim}\, A_i$. On suppose

— les morphismes $A_i \to A_{i+1}$ sont finis et injectifs ;

— chaque A_i est noethérien (ou, ce qui revient au même, que A_0 est noethérien).

En particulier, $\mathrm{Spec}(A_{i+1}) \to \mathrm{Spec}(A_i)$ est fini et surjectif et $\mathrm{Spec}(A_\infty) \to \mathrm{Spec}(A_i)$ est entier et surjectif pour tout i ce qu'on utilisera sans plus de précaution. Leurs fibres sont de dimension nulle. Pour $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A_0)$, on note $\tilde{\star}_{\mathfrak{p}}$ la propriété

Propriété $\tilde{\star}_{\mathfrak{p}}$: Il existe i tel que pour tout $j \geq i$ et tout $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A_j)$ au-dessus de $\mathfrak{p}$, l'idéal $\mathfrak{q}A_\infty$ est premier.

3.3. Proposition. — *A_∞ est noethérien si et seulement si tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A_0 vérifie la propriété $\tilde{\star}_{\mathfrak{p}}$.*

Démonstration. — On note $f : \mathrm{Spec}(A_\infty) \to \mathrm{Spec}(A_0)$. *Suffisance.* Soit $\mathfrak{q}_\infty \in \mathrm{Spec}(A_\infty)$ et $\mathfrak{p}$ son image dans $\mathrm{Spec}(A_0)$. Montrons que $\mathfrak{q}_\infty$ est de type fini. Choisissons i comme dans $\tilde{\star}_{\mathfrak{p}}$ et soit $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_\infty \cap A_i$. On a d'une part $\mathfrak{q}A_\infty \subset \mathfrak{q}_\infty$ et, d'autre part

$$\mathfrak{q}_\infty \cap A_i \subset \mathfrak{q}A_\infty \subset \mathfrak{q}_\infty$$

ce qui assure l'égalité $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_\infty \cap A_0 = \mathfrak{q}A_\infty \cap A_0$ de sorte que $\mathfrak{q}A_\infty$ se spécialise sur $\mathfrak{q}_\infty$ dans $f^{-1}(\mathfrak{p})$ qui est de dimension 0. On a donc $\mathfrak{q}_\infty = \mathfrak{q}A_\infty$ ce qui prouve que $\mathfrak{q}_\infty$ est de type fini comme $\mathfrak{q}$ et on invoque 3.2.

Nécessité. Supposons A_∞ noethérien et soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A_0)$. La fibre

$$f^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathrm{Spec}(A_\infty \otimes_{A_0} \kappa(\mathfrak{p}))$$

est noethérienne de dimension nulle, donc de cardinal fini. Comme A_∞ est noethérien, on peut donc supposer que tous les idéaux premiers de $f^{-1}(\mathfrak{p})$ sont engendrés par des éléments de A_i pour i convenable. Soit alors $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A_j), j \geq i$ au-dessus de $\mathfrak{p}$. Soit $\mathfrak{q}' \in \mathrm{Spec}(A_\infty)$ au-dessus de $\mathfrak{q}$. Comme $\mathfrak{q}'$ est engendré par $\mathfrak{q}' \cap A_i$, il l'est par $\mathfrak{q}' \cap A_j = \mathfrak{q}$, de sorte que $\mathfrak{q}A_\infty = \mathfrak{q}'$ qui est donc premier. □

3.4. Proposition. — *On garde les hypothèses et les notations de 3.3. Si de plus les extensions A_{i+1}/A_i sont* plates, *A_∞ est noethérien si et seulement si tout idéal* maximal *$\mathfrak{m}$ de A_0 vérifie la propriété $\tilde{\star}_\mathfrak{m}$.*

Démonstration. — La nécessité découle de 3.3. Il suffit donc de prouver la suffisance. Supposons donc que tout idéal *maximal* $\mathfrak{m}$ de A_0 vérifie la propriété $\tilde{\star}_\mathfrak{m}$. Soit alors $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A_0)$ et montrons que $\mathfrak{p}$ vérifie $\tilde{\star}_\mathfrak{p}$.

3.5. Lemme. — *Sous les conditions de la proposition, la propriété $\tilde{\star}_\mathfrak{p}$ est équivalente à la propriété*

Propriété $\star_\mathfrak{p}$: Il existe i tel que pour tout $l \geq j \geq i$ et tout $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A_j)$ au-dessus de $\mathfrak{p}$, l'idéal $\mathfrak{q}A_l$ est premier.

Démonstration. — Supposons $\star_\mathfrak{p}$ vérifiée. Soit alors $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A_j)$ au-dessus de $\mathfrak{p}$. On déduit déjà $1 \notin \mathfrak{q}A_\infty$. De plus, si $xy \in \mathfrak{q}A_\infty$, il existe $l \geq j$, tel que $x, y \in A_l$. Quitte à choisir l plus grand, on peut également supposer $xy \in \mathfrak{q}A_l$ et donc par exemple $x \in \mathfrak{q}A_l \subset \mathfrak{q}A_\infty$. On a donc $\star_\mathfrak{p} \Rightarrow \tilde{\star}_\mathfrak{p}$ (sans hypothèse de platitude). L'autre implication découle directement de l'égalité $\mathfrak{q}A_\infty \cap A_l = \mathfrak{q}A_l$ (fidèle platitude). □

La clef est de constater que la condition $\star_\mathfrak{p}$ ne dépend que des fibres schématiques de $f_i : \mathrm{Spec}(A_i) \to \mathrm{Spec}(A_0)$ et donc est *invariante par localisation*, ce qui va permettre de se ramener au cas local pour appliquer (3.1). Précisons.

3.6. Lemme. — *Soit* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A_0)$. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

— *La propriété $\star_\mathfrak{p}$ est satisfaite.*

— *Il existe i tel que pour tout $l \geq j \geq i$ le morphisme induit*

$$\phi : f_l^{-1}(\mathfrak{p}) \to f_j^{-1}(\mathfrak{p})$$

entre les fibres schématiques soit bijectif à fibres réduites.

Démonstration. — Supposons $\star_{\mathfrak{p}}$ vérifiée et choisissons $i \leq j \leq l$ comme dans $\star_{\mathfrak{p}}$. Soit $\mathfrak{q} \in f_j^{-1}(\mathfrak{p})$ et posons $A = A_j/\mathfrak{q}$ et $B = A_l/\mathfrak{q}A_l$. La fibre schématique $\phi^{-1}(\mathfrak{q})$ est le $k(\mathfrak{q}) = \mathrm{Frac}(A)$-schéma $\mathrm{Spec}(B \otimes_A \mathrm{Frac}(A))$. Comme $\mathfrak{q}A_l$ est premier, B est intègre et donc $B \otimes_A \mathrm{Frac}(A)$ également (la tensorisation par $\mathrm{Frac}(A)$ est une localisation). Comme A_l/A_j est finie, l'extension B/A est finie de sorte que $B \otimes_A \mathrm{Frac}(A)$ est à la fois de dimension finie sur $\mathrm{Frac}(A)$ et intègre, donc c'est un corps, ce qui entraîne la seconde condition.

Inversement, supposons que $\phi^{-1}(\mathfrak{q})$ soit le spectre d'un corps. Autrement dit, on suppose que $B \otimes_A \mathrm{Frac}(A)$ est intègre et on veut montrer que B est intègre. Mais on a

3.7. Sous-lemme. — *Soient $\phi : A \to B$ un morphisme plat d'anneaux . Supposons A intègre. Alors, B est intègre si et seulement si la fibre générique $B \otimes_A \mathrm{Frac}(A)$ est intègre.*

Démonstration. — En tensorisant l'inclusion $A \hookrightarrow \mathrm{Frac}(A)$ par B, on obtient (platitude) que le morphisme tautologique

$$B \to B \otimes_A \mathrm{Frac}(A) = (A - \{0\})^{-1}B$$

est injectif.

Supposons B intègre. Comme B est non nul, il en est de même de $(A - \{0\})^{-1}B$. De plus, si, avec des notations évidentes, $b/ab'/a' = 0$ dans $(A - \{0\})^{-1}B$, il existe $\alpha \in A - \{0\}$ tel que $\alpha bb' = 0$ (dans B). Donc, αb ou b' est nul, et donc $b/1$ ou $b'/1$ est nul dans $(A - \{0\})^{-1}B$.

Inversement, si $B \otimes_A \mathrm{Frac}(A)$ est intègre, il en est de même de B en tant que sous-anneau. $\square$

Terminons la preuve de la proposition 3.4 en se ramenant donc au cas local. Choisissons $\mathfrak{m}$ maximal dans A_0 contenant $\mathfrak{p}$. D'après (3.5), $\mathfrak{m}$ vérifie la propriété $\star_{\mathfrak{m}}$. Choisissons alors i comme dans $\star_{\mathfrak{m}}$. Soit $\mathfrak{m}_i \in \mathrm{Specmax}(A_i)$ au-dessus de $\mathfrak{m}$ ($\mathrm{Spec}(A_i) \to \mathrm{Spec}(A_0)$ fini et surjectif).

Par construction, l'idéal $\mathfrak{m}_i A_j$ est premier pour tout $j \geq i$. Mais on a $\mathfrak{m}_i A_j \cap A_i = \mathfrak{m}_i$ (A_j/A_i est fidèlement plate) de sorte que $\mathfrak{m}_i A_j$ est maximal (A_j/A_i est finie) et définit par localisation l'idéal maximal de $A_{j,\mathfrak{m}_i}$. On a donc $A_{j,\mathfrak{m}_i} = A_{j,\mathfrak{m}_i A_j}$ de sorte qu'on peut appliquer (3.4) et en déduire que

$$A_{\mathfrak{m}_i} = \mathrm{colim}_{j \geq i} A_{j,\mathfrak{m}_i}$$

est un anneau noethérien. Autrement dit, les localisés $A_{\mathfrak{m}_i}$ de $A_{\mathfrak{m}}$ en $\mathfrak{m}_i \in \mathrm{Specmax}(A_{i,\mathfrak{m}})$ sont noethériens. Mais $A_{i,\mathfrak{m}}$ est semi local (car fini sur $A_{0,\mathfrak{m}}$ qui est local) donc $A_{\mathfrak{m}}$ est noethérien (exercice). Posons alors

$$A'_j = A_{j,\mathfrak{m}} \text{ et } \mathfrak{p}' = \mathfrak{p}A_{0,\mathfrak{m}}$$

D'après (3.3), (3.5) et (3.6), quitte à changer i, pour tout $l \geq j \geq i$, le morphisme entre les fibres schématiques $\phi' : f_l^{-1}(\mathfrak{p}') \to f_j^{-1}(\mathfrak{p}')$ est bijectif à fibres réduites. Comme Φ' s'identifie à Φ, d'après (3.3), (3.5) et (3.6) on déduit que A est noethérien, ce qui termine la preuve de 3.4. □

Dans la situation de la proposition 2.5, les idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ de A_0 vérifient $\star_{\mathfrak{m}}$ par construction (c'est là où sert pleinement la condition d'indépendance linéaire des $g_n(i) \bmod k([i])^{*2}$) ce qui termine la preuve du point i de *loc. cit.*

4. Étude des points doubles

Reste à prouver le point *ii* de la proposition 2.5.

La restriction de l'immersion fermée $D = V(y) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ à $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_\eta)$ étant une immersion d'un diviseur régulier dans une schéma régulier, le théorème de pureté (XVI-3.1.4) assure que la dimension de $(\mathrm{R}^1 j_\star \Lambda)_{\bar{\eta}}$ est 1.

Pour alléger les notations, on pose $x = \pi_{\xi_n}, z_n = z, g = g_n$ et $R = \bar{k}\{x, y, z\}/(z^2 - y - g)$ et on rappelle l'écriture

$$g = x^2 u(x)$$

où $u(x) \in \bar{k}\{x\}$ qu'on peut supposer vérifier $u(0) = 1$. Il existe une unique racine carrée $\sqrt{u(x)} \in \bar{k}\{x\}$ de $u(x)$ telle que $\sqrt{u(x)}(0) = 1$ qui définit une coordonnée locale $X = x\sqrt{u(x)}$ de $\bar{k}\{x\}$ (rappelons que la caractéristique de k est différente de 2.). Dans ces nouvelles coordonnées X, y, z de $\bar{k}\{x, y, z\}$, on a

$$z^2 - y - g = z^2 - y - X^2$$

et on invoque de nouveau (XVI-3.1.4) pour conclure[(ii)]. Ceci termine la preuve de la proposition 2.5.

5. D est localement mais pas globalement un diviseur à croisements normaux

Commençons par une définition. Dans cette section D désigne un diviseur effectif d'un schéma régulier X et $j : U = X - D \hookrightarrow X$ l'immersion ouverte du complémentaire.

5.1. Définition. — On conserve les notations précédentes.

(ii) On peut éviter si on veut le recours au théorème général de pureté en utilisant la suite exacte de Kummer pour se restreindre à calculer le $\mathrm{H}^1(-, \Lambda)$ du complémentaire d'un diviseur à croisements normaux strict dans le spectre d'un anneau local régulier.

— On dit que D est **localement un diviseur à croisements normaux** (en abrégé, *localement dcn*) si pour tout $x \in D$, le localisé de Zariski $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{D,x})$ est un diviseur à croisements normaux de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X,x})$.

— Supposons D localement dcn. On note $\varepsilon(x)$, $x \in D$ le nombre de branches analytiques de l'hensélisé strict $D_{(\bar{x})}$ où $\bar{x}$ est un point géométrique au-dessus de x et $\zeta(x)$ son nombre de composantes irréductibles. La fonction $\varepsilon : x \mapsto \varepsilon(x)$ (resp. $\zeta : x \mapsto \zeta(x)$) est appelée fonction de comptage analytique (resp. fonction de comptage Zariski).

Avec les notations précédentes, si $\bar{x}$ est un point géométrique au-dessus de $x \in D$ avec D localement à croisements normaux, l'hensélisé strict $D_{(\bar{x})}$ est un diviseur à croisements normaux strict de $X_{(\bar{x})}$. On a alors la caractérisation suivante :

5.2. Lemme. — *Avec les notations précédentes, supposons de plus que D est localement dcn et $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ avec ℓ un nombre premier inversible sur X. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes.*

— $\mathrm{R}^1 j_\star \Lambda$ *est constructible ;*

— $\mathrm{R}^p j_\star \Lambda$ *est constructible pour tout p ;*

— *la fonction de comptage analytique ε est constructible.*

Démonstration. — D'après le théorème de pureté (XVI-3.1.4), la fibre $(\mathrm{R}j_\star\Lambda)_{\bar{x}}$ est l'algèbre extérieure sur

$$(\mathrm{R}^1 j_\star \Lambda)_{\bar{x}} = \Lambda^{\varepsilon(x)}.$$

Le lemme en découle immédiatement grâce à la caractérisation des faisceaux constructibles à fibres finies ([SGA 4 IX prop. 2.13 (iii)]). □

L'intérêt de ce lemme réside dans la proposition suivante.

5.3. Proposition. — *Avec les notations précédentes, supposons de plus que D est localement dcn. Alors, ε est constructible si et seulement si D est un diviseur à croisements normaux.*

Démonstration. — La constructibilité de ε si D est à croisements normaux découle directement des définitions (cf. [de Jong, 1996]) . Supposons donc ε constructible et montrons que D est à croisements normaux. Soit $\bar{x}$ un point géométrique au-dessus de $x \in D$. Puisque $D_{(\bar{x})}$ est un diviseur à croisements normaux strict, il existe un voisinage étale $\pi : X' \to X$ de $\bar{x}$ dans X, tel que le diviseur $D' = \pi^{-1}(D)$ est la somme de diviseurs D'_i qui sont réguliers en x' (image de $\bar{x}$ dans X') et qui se coupent transversalement en x'. La fonction de comptage analytique ε' de D' est la somme des fonctions de comptage analytiques ε'_i. Comme ε' ne dépend que de l'hensélisé strict, on a donc

$$\varepsilon' = \varepsilon \circ \pi = \sum \varepsilon'_i.$$

En particulier, ε' est constructible comme ε. La fonction de comptage Zariski ζ' de D' certainement constructible de sorte que la différence $\varepsilon' - \zeta'$ l'est aussi. Par hypothèse, $\varepsilon' - \zeta'$ s'annule sur $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_{X',x'}$, donc sur l'ensemble des générisations de x'. Comme elle est constructible, elle est nulle sur un voisinage ouvert U' (Zariski) de x'. Comme $\varepsilon'_i \geq \zeta'_i$, on a $\varepsilon'_i = \zeta'_i$ sur U' de sorte que, quitte à restreindre U', chaque diviseur D_i est régulier sur U'. En se restreignant au localisé strict de chaque point de U', sur lequel on sait que D' est un diviseur à croisements normaux, on obtient que les D_i se coupent transversalement de sorte que la restriction de D' à U' est un diviseur à croisements normaux strict. □

5.4. Remarque. — L'argument précédent appliqué à ζ assure que si le localisé Zariski de D en tout point est un diviseur à croisements normaux strict alors D est un diviseur à croisements normaux strict.

Avec les notations de la proposition 2.5, on a donc obtenu le résultat suivant.

5.5. Corollaire. — *Le diviseur D de la surface régulière* $\operatorname{Spec} A$ *est localement à croisements normaux mais pas globalement.*