LUC ILLUSIE
YVES LASZLO

Approximation

Astérisque, tome 363-364 (2014), Séminaire Bourbaki,
exp. nº III, p. 37-49
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2014__363-364__37_0>

EXPOSÉ III

APPROXIMATION

Luc Illusie et Yves Laszlo

1. Introduction

On montre ici comment ramener la preuve du théorème d'uniformisation (6.1) au cas local, noethérien complet (6.2). On utilise pour cela le théorème de Popescu (qui implique que les anneaux locaux noethériens, henséliens et excellents vérifient la propriété d'approximation d'Artin, cf. I-10.3) et des méthodes d'approximations de complexes de longueur 2 adaptées de [Conrad & de Jong, 2002] (cf. section 4).

L'exposé oral donné par Alban Moreau utilisait des résultats (dus à Ofer Gabber) d'approximations de complexes plus forts que ceux utilisés ici (4.5). Une version écrite de son exposé a été très utile pour la rédaction de ce texte : nous l'en remercions. Nous remercions également Fabrice Orgogozo de nous avoir signalé que l'énoncé [Conrad & de Jong, 2002, 3.1] suffisait pour les applications en vue.

2. Modèles et approximations à la Artin-Popescu

Soit A un anneau local noethérien, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, $\hat{A}$ son complété. On suppose A excellent et hensélien. Soit $\pi : \hat{S} = \operatorname{Spec}(\hat{A}) \to S = \operatorname{Spec}(A)$ le morphisme canonique. Pour tout $n \geq 0$, on note

$$i_n : S_n \hookrightarrow \hat{S}$$

l'immersion fermée définie par l'idéal $\hat{\mathfrak{m}}^{n+1} = \mathfrak{m}^{n+1}\hat{A}$ de $\hat{A}$. Le composé

$$\pi i_n : S_n \to \hat{S} \to S$$

est l'immersion fermée $S_n \hookrightarrow S$ définie par l'idéal $\mathfrak{m}^{n+1}$.

2.1. Définition. — Soient $g : \hat{S} \to T$ et $f : S \to T$ des morphismes de schémas et $n \in \mathbf{N}$. On dira que f et g sont $(n+1)$-**proches** si leurs restrictions $f\pi i_n$ et gi_n à S_n coïncident.

Si X est un $\hat{S}$-schéma, on note X_n le S_n-schéma $X \times_{\hat{S}} S_n \to S_n$.

Écrivons $\hat{A}$ comme limite inductive suivant un ensemble ordonné filtrant E de A-algèbres de type fini A_α. On a des diagrammes commutatifs

(2.1.1)
$$\begin{tikzcd} & S_\alpha = \mathrm{Spec}(A_\alpha) \arrow[d, "t_\alpha"] \\ \hat{S} \arrow[ur, "s_\alpha"] \arrow[r, "\pi"'] & S \end{tikzcd}$$

avec t_α de type fini et un isomorphisme $\hat{S} = \varprojlim S_\alpha$ [ÉGA IV$_3$ 8.2.3].

2.2. Définition. — Soit X un $\hat{S}$-schéma de type fini et $h : X \to Y$ un morphisme de $\hat{S}$-schémas de type fini.

(i) Un **modèle** de X sur S_α est un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_\alpha \arrow[d, "f_\alpha"] \\ \hat{S} \arrow[r] & S_\alpha \end{tikzcd}$$

où X_α est de type fini sur S_α.

(ii) Un **modèle** de h sur S_α est un S_α-morphisme $h_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ de S_α-schémas de type fini, muni d'un isomorphisme $h \xrightarrow{\sim} (h_\alpha)_{\hat{S}}$.

Des modèles de X sur S_α existent pourvu que α soit assez grand [ÉGA IV$_3$ 8.8.3]. De plus, si X_α, X_β sont des modèles de X sur S_α, S_β, il existe $\gamma \geq \alpha, \beta$ et un S_γ-isomorphisme

$$X_\alpha \times_{S_\alpha} S_\gamma \xrightarrow{\sim} X_\beta \times_{S_\beta} S_\gamma$$

(*loc. cit.*). De même, des modèles h_α de $h : X \to Y$ sur S_α existent pourvu que α soit assez grand et les images inverses de tels modèles h_α, h_β sur S_γ sont S_γ-isomorphes pour $\gamma \geq \alpha, \beta$ assez grand.

Si T est un S-schéma et B une A-algèbre, on note $T(B) = \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Spec}(B), T)$ l'ensemble des S-points de T à valeurs dans B. D'après le théorème de Popescu [Popescu, 1986, 1.3], comme A est excellent et hensélien, il vérifie la propriété d'approximation d'Artin, cf. I-10.3. Donc, comme $S_\alpha \to S$ est de type fini, $S_\alpha(A)$ est dense dans $S_\alpha(\hat{A})$ (pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique). Il existe donc, pour tout $n > 0$ une section $u : S \to S_\alpha$ de t_α qui est n-proche de $s_\alpha : \hat{S} \to S_\alpha$. On définit alors X_u par le diagramme cartésien

(2.2.1)
$$\begin{tikzcd} X_u \arrow[r] \arrow[d, "f_u"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_\alpha \arrow[d, "f_\alpha"] \\ S \arrow[r, "u"] & S_\alpha \end{tikzcd}$$

Comme u est n-proche de s_α, on a par définition l'égalité

$$u\pi i_n = s_\alpha i_n$$

de sorte la restriction de $X_u \to S$ à S_n s'identifie à $X_n \to S_n$, autrement dit on a un carré cartésien

(2.2.2)
$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_u \arrow[d, "f_u"] \\ S_n \arrow[r, "i_n"] & S \end{tikzcd}$$

De même, si X, Y sont de type fini sur $\hat{S}$ et h_α est un modèle de $h \in \mathrm{Hom}_{\hat{S}}(X, Y)$ sur S_α, l'image inverse $h_u : X_u \to Y_u$ est un S-morphisme induisant la restriction $h_n : X_n \to Y_n$ de h au dessus de S_n.

3. Approximations et topologie des altérations

Commençons par un rappel (cf. exposé II) sur la topologie des altérations. Soit T un schéma noethérien. La catégorie alt/T est la sous-catégorie pleine de la catégorie des T-schémas dont les objets sont les T-schémas réduits de type fini X, dont tout point maximal s'envoie sur un point maximal de T avec extension résiduelle finie. Notons que les morphismes de alt/T envoient point maximal sur point maximal. On définit deux topologies sur alt/T.

(i) La *topologie des altérations* est la moins fine pour laquelle les familles suivantes sont couvrantes
  (a) les recouvrements ouverts de Zariski ;
  (b) les morphismes propres et surjectifs .

  Une famille couvrante pour la topologie des altérations sera dite alt-couvrante.

(ii) Soit ℓ un nombre premier. La *topologie des ℓ'-altérations* sur alt/T est la moins fine pour laquelle les familles suivantes sont couvrantes
  (a) les recouvrements étales de Nisnevich ;
  (b) les morphismes propres surjectifs $X' \to X$ tels que pour tout point maximal η de X, il existe un point maximal η' de X' au dessus de η avec ℓ ne divisant pas $\deg(k(\eta')/k(\eta))$.

Une famille couvrante pour la topologie des ℓ'-altérations sera dite $\mathrm{alt}_{\ell'}$-couvrante.

Pour tout T-schéma X de type fini, on note X_{md} le sous-schéma fermé réduit de X réunion des composantes irréductibles qui dominent une composante irréductible de T.

3.1. Proposition. — *On reprend les notations de 2 : soit A un anneau local noethérien, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, $\hat{A}$ son complété. On suppose A excellent et hensélien. Soit $\pi : \hat{S} = \mathrm{Spec}(\hat{A}) \to S = \mathrm{Spec}(A)$ le morphisme canonique. Soit $X \to \hat{S}$ un objet non vide de $\mathrm{alt}/\hat{S}$. Supposons de plus S intègre. Choisissons un modèle X_β de X sur S_β, pour un indice $\beta \in E$ (cf. 2.2), et pour $\alpha \geq \beta$ notons X_α le modèle qui s'en déduit par changement de base.*

(i) *Alors, il existe $\alpha_0 \in E, \alpha_0 \geq \beta$, et un entier $n_0 > 0$ tels que pour tout $\alpha \geq \alpha_0$, tout entier $n \geq n_0$, toute section $u : S \to S_\alpha$ de t_α qui est n-proche de $s_\alpha : \hat{S} \to S_\alpha$, X_u (2.2.1) est à fibre générique finie et le morphisme composé $(X_u)_{\mathrm{md}} \to X_u \to S$ est un objet non vide de alt/S.*

(ii) *Supposons $X \to \hat{S}$ alt-couvrant. Alors, il existe $\alpha_0 \in E, \alpha_0 \geq \beta$, et un entier $n_0 > 0$ tels que pour tout $\alpha \geq \alpha_0$, tout entier $n \geq n_0$, toute section $u : S \to S_\alpha$ de t_α qui est n-proche de $s_\alpha : \hat{S} \to S_\alpha$, le morphisme composé $(X_u)_{\mathrm{md}} \to X_u \to S$ est alt-couvrant.*

(iii) *Supposons $X \to \hat{S}$ $\mathrm{alt}_{\ell'}$-couvrant. Alors, il existe $\alpha_0 \in E, \alpha_0 \geq \beta$, et un entier $n_0 > 0$ tels que pour tout $\alpha \geq \alpha_0$, tout entier $n \geq n_0$, toute section $u : S \to S_\alpha$ de t_α qui est n-proche de $s_\alpha : \hat{S} \to S_\alpha$, le morphisme composé $(X_u)_{\mathrm{md}} \to X_u \to S$ est $\mathrm{alt}_{\ell'}$-couvrant.*

Démonstration. — Observons d'abord que, S étant hensélien et excellent, $\hat{S}$ est intègre, cf. I-6.3.

Prouvons (i). Comme $X \to \hat{S}$ est génériquement fini, il existe $a \in \hat{A} - \{0\}$ tel que X soit fini, surjectif et libre de rang $d > 0$ au dessus de l'ouvert non vide $\widehat{S} - V(a)$. On peut choisir α_0 assez grand de sorte que

— a provienne de $a_\alpha \in A_\alpha - \{0\}$ pour $\alpha \geq \alpha_0$;

— $X_\alpha \to S_\alpha$ soit fini, surjectif ([ÉGA IV$_3$ 8.10.5]) et libre de rang d sur $S_\alpha - V(a_\alpha)$ (utiliser [ÉGA IV$_3$ 8.5.2]).

Choisissons alors un entier n tel que $a \notin \hat{\mathfrak{m}}^{n+1}$. Pour tout $\alpha \geq \alpha_0, m \geq n$, toute section u qui est m-proche de t_α,, on a

$$u^\star(a_\alpha) \notin \mathfrak{m}^{n+1}$$

et donc $u^\star(a_\alpha)$ est non nul. Ceci assure que X_u est fini, surjectif et libre de rang d au dessus de l'ouvert non vide $S - V(u^\star(a_\alpha))$ image réciproque de $S_\alpha - V(a_\alpha)$ par u. Le premier point en découle.

Prouvons (iii) [La preuve de (ii) est en tout point similaire]. On suppose donc que $X \to \hat{S}$ est $\mathrm{alt}_{\ell'}$-couvrant. On sait (II-3.2.1) que $X \to \hat{S}$ est dominé dans $\mathrm{alt}/\hat{S}$ par un recouvrement standard

$$Y \to X' \to \hat{S}$$

avec

— $Y \to X'$ Nisnevich couvrant
— $X' \to \hat{S}$ propre et surjectif dont la restriction à chaque composante irréductible est dominante et génériquement finie, le degré générique de l'une d'elles étant premier à ℓ.

Quitte à remplacer le schéma réduit X' par une composante convenable et Y par le $\mathrm{alt}_{\ell'}$-recouvrement Nisnevich induit, on peut supposer X' *intègre* de degré générique $\deg(X'/\hat{S}) = \delta$ premier à ℓ.

Soit η le point générique de S. La construction $X \mapsto X_{\mathrm{md}}$ est fonctorielle pour la sous-catégorie pleine des S-schémas X à fibre générique finie. Or, d'après (i), pour $\alpha_0 \geq \beta$ assez grand et des choix de modèles $Y_{\alpha_0} \to X'_{\alpha_0} \to S_{\alpha_0}$, $Y_{\alpha_0} \to X_{\alpha_0} \to S_{\alpha_0}$ et de section u de t_α $(\alpha \geq \alpha_0)$ convenables, on sait que Y_u, X'_u et X_u sont à fibre générique finie. On a donc une factorisation

$$\begin{tikzcd} (Y_u)_{\mathrm{md}} \arrow[r] \arrow[d] & (X_u)_{\mathrm{md}} \arrow[d] \\ (X'_u)_{\mathrm{md}} \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Or, toujours d'après (i), on peut en outre supposer que $(Y_u)_{\mathrm{md}}$, $(X'_u)_{\mathrm{md}}$ et $(X_u)_r$ sont des objets de alt/S. Pour conclure que $(X_u)_{\mathrm{md}} \to S$ est $\mathrm{alt}_{\ell'}$-couvrant, il suffit de prouver que pour u convenable $(Y_u)_{\mathrm{md}} \to S$ est $\mathrm{alt}_{\ell'}$-couvrant.

Tenant compte des propriétés de permanence usuelles des modèles [ÉGA IV_3 8.8.3 et 8.10.5], la preuve de (i) assure que pour des modèles et u convenables le morphisme $X'_u \to S$ est propre et surjectif et que sa fibre générique est de degré premier à ℓ. Ceci assure que la restriction de $X'_u \to S$ à au moins une des composantes réduites de X'_u dominant S est de degré premier à ℓ. Ainsi, $(X'_u)_{\mathrm{md}} \to S$ est bien $\mathrm{alt}_{\ell'}$-couvrant.

La propriété d'être un recouvrement Nisnevich (resp. propre et surjectif) étant stable par changement de base, reste à prouver le lemme suivant.

3.1.1. Lemme. — *Il existe $\alpha_0 \geq \beta$ tel que pour tout $\alpha \geq \alpha_0$, le modèle $Y_\alpha \to X'_\alpha \to S_\alpha$ de $Y \to X' \to \hat{S}$ (déduit de $Y_{\alpha_0} \to X'_{\alpha_0} \to S_{\alpha_0}$) ait la propriété que $Y_\alpha \to X'_\alpha$ est Nisnevich couvrant.*

Démonstration. — Dire que le morphisme $Y \to X'$ est Nisnevich couvrant, c'est dire qu'il est lisse, quasi-fini et qu'on a une stratification

$$\varnothing = X'_0 \subset X'_1 \cdots \subset X'_n = X'$$

avec X'_i fermé de X' et Y/X' a une section au dessus de $X'_{i+1} - X'_i$. La conclusion découle immédiatement de cette remarque et des propriétés de permanence usuelles des modèles [ÉGA IV$_3$ 8.8.3 et 8.10.5] et [ÉGA IV$_4$ 17.7.8]. □

Le but de ce qui suit est d'améliorer les résultats topologiques de la proposition 3.1 en montrant que des épaississements convenables des cônes normaux des fibres spéciales de X (resp. X_u) dans X (resp. X_u) sont isomorphes. Ceci permettra de prouver des énoncés de stabilité de propriétés dans le passage de X à X_u, en l'occurrence la dimension et la régularité (corollaire 5.4).

4. Gradués supérieurs et approximations de complexes

Soient I un idéal d'un topos annelé $(\mathscr{X}, \mathscr{O})$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}$-module de $\mathscr{X}$ et a un entier ≥ 1. On pose $I^n = \mathscr{O}$ si $n \leq 0$. On définit le module $\mathbf{Z}$-gradué

$$\mathrm{gr}_a(\mathscr{F}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} I^n \mathscr{F} / I^{n+a} \mathscr{F}$$

qui est donc la somme

$$\mathrm{gr}_a(\mathscr{F}) = \mathscr{F}/I\mathscr{F} \oplus \cdots \oplus \mathscr{F}/I^a F \oplus I\mathscr{F}/I^{a+1}\mathscr{F} \oplus I^2\mathscr{F}/I^{a+2}\mathscr{F} \oplus \cdots$$

concentrée en degrés $\geq -(a-1)$. C'est un $\mathscr{O}/I^a$-module ; de plus, le produit

$$I^n \otimes I^m \to I^{n+m}$$

induit une structure de $\mathscr{O}/I^a$-algèbre $\mathbf{Z}$-graduée sur $\mathrm{gr}_a(\mathscr{O})$ et $\mathrm{gr}_a(\mathscr{F})$ est un $\mathrm{gr}_a(\mathscr{O})$-module $\mathbf{Z}$-gradué.

On s'intéresse ici au cas où $\mathscr{X}$ est le topos de Zariski d'un S-schéma X annelé par son faisceau structural $\mathscr{O}$ et $I = \mathfrak{m}\mathscr{O}$.

4.1. Remarque. — Le morphisme surjectif tautologique $\mathrm{gr}_a(\mathscr{O}) \to \mathrm{gr}_1(\mathscr{O})$ a pour noyau $J = I \cdot \mathrm{gr}_a(\mathscr{O})$. On a donc $J^a = 0$ (puisque J est un $\mathscr{O}_{X_{a-1}}$-module) de sorte que $C_a(X) = \mathrm{Spec}(\mathrm{gr}_a(\mathscr{O}))$ est un épaississement d'ordre $a-1$ du cône normal $\mathrm{Spec}(\mathrm{gr}_1(\mathscr{O}))$.

4.2. Définition. — Soient X, Y des S-schémas (resp. des $\hat{S}$-schémas). Un **a-isomorphisme** $X \xrightarrow{\sim}_a Y$ est la donnée d'un S-isomorphisme $\phi : X_{a-1} \xrightarrow{\sim} Y_{a-1}$ et d'un isomorphisme de $\mathrm{gr}_a(A)$-algèbres graduées $\phi^{-1}\mathrm{gr}_a(\mathscr{O}_Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_a(\mathscr{O}_X)$. On dit dans ce cas que X, Y sont *a-proches.*

On identifiera alors leurs fibres spéciales X_0, Y_0 grâce à l'isomorphisme $X_{a-1} \xrightarrow{\sim} Y_{a-1}$.

4.3. — On adapte ici le théorème 3.2 de [Conrad & de Jong, 2002] (et le lemme clef 3.1 de *loc. cit.*). Commençons par une définition. Soient B un anneau noethérien et I un idéal de B.

4.4. Définition. — Soit $f : M \to N$ un morphisme de B-modules de type fini. Un entier $c \geq 0$ est une **constante d'Artin-Rees** de f si pour tout $n \geq c$ on a

$$I^n N \cap \mathrm{Im}(f) \subset I^{n-c}\mathrm{Im}(f).$$

Le lemme d'Artin-Rees assure l'existence d'une constante d'Artin-Rees.

4.5. Proposition. — *Soient $(L^\bullet, d_L^\bullet), (M^\bullet, d_M^\bullet)$ des complexes de B-modules libres de type fini concentrés en degré $[-2,0]$ avec $L^i = M^i$ pour tout i. Soit c une constante d'Artin-Rees pour d_L^{-2} et d_L^{-1} et n un entier $\geq c$. Supposons $\mathrm{H}^{-1}(L^\bullet) = 0$ et*

$$d_L^\bullet = d_M^\bullet \mod I^{n+1}.$$

Alors :

(i) *c est une constante d'Artin-Rees pour d_M^{-1} ;*
(ii) *si I est contenu dans le radical de A*[(i)]*, $\mathrm{H}^{-1}(M^\bullet) = 0$;*
(iii) *L'identité de $L^0 = M^0$ induit un isomorphisme de $\mathrm{gr}_{n+1-c}(B)$-modules*

$$\mathrm{gr}_{n+1-c}(\mathrm{H}^0(L^\bullet)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_{n+1-c}(\mathrm{H}^0(M^\bullet));$$

(iv) *De plus, si $L^0 = M^0 = B$, l'isomorphisme précédent est un isomorphisme de $\mathrm{gr}_{n+1-c}(B)$-algèbres, autrement dit les algèbres $\mathrm{H}^0(L^\bullet)$ et $\mathrm{H}^0(M^\bullet)$ sont $(n+1-c)$-isomorphes.*

Démonstration. — Les deux premiers points sont prouvés dans le lemme 3.1 de *loc. cit.* Le dernier est trivial. Reste le point (iii).

Pour $n = c$, c'est le théorème 3.2 de *loc. cit.* dont on ne fait qu'adapter la preuve dans le cas $n > c$. Soit $m \in \mathbf{Z}$. On écrit d_L, d_M pour d_L^{-1}, d_M^{-1}. Pour $\delta = d_L, d_M$, on a

$$\mathrm{gr}^m_{n+1-c}(\mathrm{Coker}(\delta)) = I^m L^0 / (I^{m+n+1-c} L^0 + I^m L^0 \cap \mathrm{Im}(\delta))$$

de sorte qu'il s'agit de montrer l'égalité

$$I^{m+n+1-c} L^0 + I^m L^0 \cap \mathrm{Im}(d_L) = I^{m+n+1-c} L^0 + I^m L^0 \cap \mathrm{Im}(d_M)$$

pour tout $m \in \mathbf{Z}$. Soit $x \in L^{-1}$ tel que $d_L(x) \in I^m L^0$.

Supposons $m \leq c$. Comme

$$d_L(x) - d_M(x) \in I^{n+1} L^0 \text{ et } m \leq c \leq n,$$

(i) Cette hypothèse manque dans le lemme 3.1 de *loc. cit.*

on a $d_L(x) - d_M(x) \in I^m L^0$ de sorte que

$$d_M(x) = d_L(x) + d_M(x) - d_L(x) \in I^m L^0 \cap \operatorname{Im}(d_M).$$

Comme $n+1 \geq m+n+1-c$, on a également

$$d_L(x) - d_M(x) \in I^{n+1}L^0 \subset I^{m+n+1-c}L^0$$

de sorte que

$$d_L(x) = d_L(x) - d_M(x) + d_M(x) \in I^{m+n+1-c}L^0 + I^m L^0 \cap \operatorname{Im}(d_M)$$

et donc

$$I^{m+n+1-c}L^0 + I^m L^0 \cap \operatorname{Im}(d_L) \subset I^{m+n+1-c}L^0 + I^m L^0 \cap \operatorname{Im}(d_M).$$

Par symétrie des rôles de d_L et d_M, on a l'égalité cherchée dans ce cas.

Si $m > c$, le calcul est analogue. On a (4.4)

$$I^m L^0 \cap \operatorname{Im}(d_L) \subset I^{m-c} d_L(L^{-1})$$

de sorte que

$$d_L(x) = d_L(x') \text{ avec } x' \in I^{m-c}L^{-1}.$$

Comme $d_L - d_M = 0 \mod I^{n+1}$, la matrice de $d_L - d_M$ est à coefficients dans I^{n+1} de sorte que

$$d_L - d_M \in I^{n+1}\operatorname{Hom}_B(L^{-2}, L^{-1}).$$

On a donc

$$d_L(x') - d_M(x') \in I^{n+1}I^{m-c}L^0 = I^{n+1+m-c}L^0.$$

Comme

$$d_M(x') = d_L(x') + d_M(x') - d_L(x') = d_L(x) + d_M(x') - d_L(x'),$$

on a d'une part

$$d_M(x') \in (I^m L^0 + I^{n+1+m-c}L_0) \cap \operatorname{Im}(d_M) \subset I^m L^0 \cap \operatorname{Im}(d_M),$$

car $n \geq c$, et, d'autre part,

$$d_L(x) = d_L(x') - d_M(x') + d_M(x') \in I^{m+n+1-c}L^0 + I^m L^0 \cap \operatorname{Im}(d_M).$$

On conclut comme plus haut par symétrie. □

5. Modèles et a-isomorphismes

***5.1. Théorème* (Approximation).** — *Soit A un anneau local noethérien, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, $\hat{A}$ son complété. On suppose A excellent et hensélien. Soit $\pi : \hat{S} = \mathrm{Spec}(\hat{A}) \to S = \mathrm{Spec}(A)$ le morphisme canonique. Soit X de type fini sur $\hat{S}$. On se donne de plus $\alpha_0 \in E$ et un modèle (cf. 2.2) X_{α_0} de X sur S_{α_0}. Pour tout $\alpha \geq \alpha_0$ on note $X_\alpha = X_\alpha \times_{S_{\alpha_0}} S_\alpha$ le modèle de X sur S_α déduit par changement de base. Il existe $\alpha_1 \geq \alpha_0$ et des entiers $n_0 \geq c > 0$ tels que pour tout $n \geq n_0, \alpha \geq \alpha_1$ et toute section u de t_α qui est $(n+1)$-proche de s_α, il existe un unique $(n+1-c)$-isomorphisme $X \xrightarrow{\sim}_{n+1-c} X_u$ au dessus de l'isomorphisme $X_{n-c} \to (X_u)_{n-c}$ déduit de (2.2.2).*

5.2. Définition. — Dans les conditions précédentes, on dit que (X_α, α, u) (ou, si aucune conclusion n'est à craindre, X_u) est une **approximation** de X sur S (à l'ordre $n-c$).

L'assertion « Il existe α_0, un entier n_0 tels que pour tout $n \geq n_0, \alpha \geq \alpha_0$ et toute section u de t_α qui est $(n+1)$-proche de s_α, X_u vérifie la propriété P » pourra parfois être condensée en « Toute approximation X_u assez fine de X vérifie la propriété P ». On emploiera une terminologie analogue pour les approximations de $\hat{S}$-morphismes.

Démonstration. — Deux $(n+1-c)$-isomorphismes diffèrent par un automorphisme

$$\iota : \mathrm{gr}_{n+1-c}(\mathscr{O}_X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_{n+1-c}(\mathscr{O}_X)$$

de $\mathscr{O}_{X_{n-c}}$-algèbres graduées. Il est en particulier $\mathscr{O}_S$-linéaire. Comme $\mathrm{gr}_{n+1-c}(\mathscr{O}_X)$ est engendré sur $\mathrm{gr}_a(\mathscr{O}_S)$ par $\mathscr{O}_{X_{n-c}}$, l'automorphisme ι est l'identité. D'où l'unicité.

On peut donc supposer X affine. Comme X est de type fini sur $\hat{S}$, X se plonge dans l'espace affine

$$\mathbf{A}^m_{\hat{S}} = \mathrm{Spec}(\hat{A}[t])$$

de coordonnées $t = (t_1, \ldots, t_m)$ comme le sous-schéma fermé d'idéal

$$J = \langle \tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_N \rangle$$

où $\tilde{P}_i \in B = \hat{A}[t]$. Choisissons une résolution partielle du B-module $C = B/J$ par des B-modules libres de type fini

$$B^a \xrightarrow{\tilde{R}} B^b \xrightarrow{\tilde{P}=(\tilde{P}_i)} B \to C \to 0 \tag{5.2.1}$$

où $\tilde{R}$ est une matrice à coefficients dans B.

Pour α_0 assez grand, $\tilde{P}$ et $\tilde{R}$ proviennent de matrices $P_{\alpha_0}, R_{\alpha_0}$ à coefficients dans

$$B_{\alpha_0} = A_{\alpha_0}[t] \text{ telles que } PR = 0$$

de sorte que le fermé F de $\mathbf{A}^m_{A_{\alpha_0}}$ d'équations $P_{\alpha_0,1} = \cdots = P_{\alpha_0,N} = 0$ est un modèle de X sur S_{α_0}. Comme rappelé dans la section 2, quitte à changer α_0 en un indice plus grand, on peut supposer qu'on a $F = X_{\alpha_0}$. Pour $\alpha \geq \alpha_0$, note P_α, R_α les matrices à coefficients dans B_α déduites de $P_{\alpha_0}, \mathrm{R}_{\alpha_0}$ par le morphisme

$$B_{\alpha_0} = A_{\alpha_0}[t] \to B_\alpha = A_\alpha[t].$$

Pour tout $\alpha \geq \alpha_0$, les matrices à coefficients dans B déduites de $P_\alpha, \mathrm{R}_\alpha$ par le morphisme

$$B_{\alpha_0} = A_{\alpha_0}[t] \to B = \hat{A}[t]$$

sont les mêmes : on les note P, R.

On s'est ramené, pour $\alpha \geq \alpha_0$, au cas où

$$X_\alpha = \mathrm{Spec}(C_\alpha) \text{ avec } C_\alpha = B_\alpha/(P_\alpha).$$

On dispose donc d'une part d'un complexe (en degrés [-2,0]) de B_α-modules libres

$$L_\alpha = (B_\alpha^a \xrightarrow{R_\alpha} B_\alpha^b \xrightarrow{P_\alpha = (P_{i,\alpha})} B_\alpha)$$

avec $\mathrm{H}^0(L_\alpha) = C_\alpha$. Le complexe de B-modules libres de rang fini

$$L = B \otimes_{B_\alpha} L_\alpha = (B^a \xrightarrow{R} B^b \xrightarrow{P = 1 \otimes P_\alpha} B)$$

est acyclique en degré -1 par construction.

5.3. Remarque. — *A priori,* L_α n'a pas de raison d'être acyclique en degré -1, même pour α grand.

D'autre part, la section u de t_α est définie par un morphisme de A-algèbres

$$u^\star : A_\alpha \to A$$

de sorte que

$$u^\star \mod \mathfrak{m}^{n+1} = s_\alpha^\star \mod \hat{\mathfrak{m}}^{n+1},$$

où $s_\alpha^\star : A_\alpha \to \hat{A}$ est défini par $s_\alpha : \hat{S} \to S_\alpha$ (2.1.1). Par action sur les coefficients des polynômes, on obtient un morphisme d'anneau

$$\bar{u} : B_\alpha = A_\alpha[t] \to A[t] \to \hat{A}[t] = B$$

d'où un complexe

$$M = (B^a \xrightarrow{\bar{u}(R)} B^b \xrightarrow{\bar{u}(P)} B)$$

Par construction, on a

$$L/\mathfrak{m}^{n+1}L = M/\mathfrak{m}^{n+1}M.$$

On choisit alors une constante d'Artin-Rees c pour $B^b \xrightarrow{P} B$ et on invoque la proposition 4.5 pour conclure. □

5.4. Corollaire. — *Soient X, Y des S-schémas noethériens qui sont a-proches. Soit $x \in X_0 = Y_0$.*

(i) *Si $a \geq 1$, les dimensions de X et Y en x sont les mêmes.*

(ii) *Si $a \geq 2$ et X est régulier en x, alors Y est régulier en x.*

(iii) *Supposons $X \to \hat{S}$ de type fini et X régulier. Soit X_β un modèle de X sur S_β, et pour $\alpha \geq \beta$, notons X_α le modèle sur S_α déduit par changement de base. Alors, il existe $\alpha_0 \in E, \alpha_0 \geq \beta$, et un entier $n_0 > 0$ tels que pour tout $\alpha \geq \alpha_0$, tout entier $n \geq n_0$, toute section u de t_α qui est n-proche de $s_\alpha : \hat{S} \to S_\alpha$, le schéma X_u déduit de X_α soit régulier dans un voisinage ouvert de la fibre spéciale.*

Démonstration. — Par hypothèses, les cônes normaux de X_0, Y_0 dans X, Y sont S-isomorphes. Comme la dimension de X en x est égale à celle de son cône normal [Matsumura, 1989, 15.9], le premier point en découle.

Supposons maintenant que X, Y soient 2-proches. D'après (i), on sait que X et Y ont même dimension en x. Comme X, Y sont 2-proches, X_1 et Y_1 sont isomorphes. Puisque l'espace tangent de Zariski à X en un point de X_0 ne dépend que de X_1, les $k(x)$-espaces vectoriels cotangents de Zariski en x à X et Y sont isomorphes, d'où ii).

Pour le dernier point, il suffit d'invoquer les deux premiers et le théorème 5.1 pour conclure qu'une approximation assez fine est régulière au voisinage de la fibre spéciale. Comme X_u est excellent (puisque de type fini sur S excellent), son lieu régulier R est ouvert de sorte que R est un voisinage ouvert régulier de la fibre spéciale. □

5.5. Remarque. — O. Gabber sait généraliser la proposition 4.5 au cas où les complexes envisagés sont seulement de type fini sur un anneau noethérien pour obtenir les proximités de la cohomologie également en degré -2 (et pas seulement en degré $0, -1$). Il peut plus précisément montrer des énoncés de proximité pour les images, noyaux des différentielles[ii]. Gabber en déduit de nombreux énoncés de permanence par approximation analogues au corollaire 5.4 . Notamment, si X, Y sont a-proches pour a assez grand, alors X réduit (resp. normal) le long de X_0 entraîne Y réduit (resp. normal) le long de Y_0. Cependant, plusieurs questions naturelles restent en suspens comme par exemple la permanence des propriétés S_n, R_n.

6. Réduction au cas local noethérien complet

Rappelons l'énoncé du théorème d'uniformisation (Intro.-2, II-4.3.2).

***6.1. Théorème* (Uniformisation).** — *Soient T un schéma noethérien quasi-excellent et Z un fermé rare de T. Soit ℓ un nombre premier inversible sur T. Il existe une famille finie de morphismes $(X_i \to T)_{i \in I}$ telle que pour tout $i \in I$ on ait*

(i) *La famille finie de morphismes $(X_i \to T)_{i \in I}$ est* alt*-couvrante (resp.* $\mathrm{alt}_{\ell'}$*-couvrante) ;*

[ii] La preuve de cette généralisation a été exposée par A. Moreau lors du séminaire oral.

(ii) *X_i est régulier et intègre ;*
(iii) *l'image inverse de Z dans X_i est vide ou le support d'un diviseur à croisements normaux strict.*

Nous allons montrer l'énoncé de réduction suivant.

6.2. Proposition. — *Si* (6.1) *est vrai pour tout T noethérien, local, complet, alors* (6.1) *est vrai.*

Démonstration. — On peut d'abord supposer T local, excellent et hensélien (rappelons (I-6.3) qu'un schéma local, hensélien et quasi-excellent est excellent). Voir II-4.3.3 pour cette réduction.

Supposons donc T local, noethérien, hensélien, excellent.

Quitte à remplacer T par la somme disjointe de ses composantes réduites, on se ramène au cas où T est de plus intègre.

On peut supposer de plus $T = \mathrm{Spec}(A)$ normal intègre. En effet, comme A est excellent, le morphisme de normalisation est fini de degré générique 1, donc est alt-couvrant (resp. $\mathrm{alt}_{\ell'}$-couvrant). Comme A est local intègre et hensélien, A est unibranche de sorte que le normalisé de A est local, donc intègre, et est noethérien hensélien puisque fini sur A.

Comme A est excellent, la normalisation commute à la complétion (I-6.2) de sorte que $\hat{A}$ est dès lors normal comme A, donc également intègre puisque normal et local.

On peut donc supposer T local intègre, normal, hensélien et excellent.

Comme $\hat{T}$ est plat sur T, l'image inverse $\hat{Z}$ de Z est encore un fermé rare de $\hat{T}$. Choisissons une uniformisation

$$(\tilde{X}_i \to \hat{T})_{i \in I'}$$

de $(\hat{T}, \hat{Z})$ comme dans 6.1. D'après 3.1, 5.1 et 5.4, on peut trouver $\alpha_0 \in E$ et un entier $n_0 \geq 1$ tels que, pour tout $\alpha \geq \alpha_0$, tout $n \geq n_0$ et u n-proche de s_α, on dispose de modèles $(\tilde{X}_i)_\alpha$ des $\tilde{X}_i$ sur T_α et de n-isomorphismes $\tilde{X}_i \to_n (\tilde{X}_i)_u$ tels que

a) chaque T-schéma $(\tilde{X}_i)_u$ est régulier le long de sa fibre spéciale $(\tilde{X}_i)_0$, donc au voisinage (le lieu régulier étant ouvert puisque les schémas considérés sont excellents).

b) la famille $((\tilde{X}_i)_u)_{\mathrm{md}}$ est alt-couvrante (resp. $\mathrm{alt}_{\ell'}$-couvrante).

D'après a), $(\tilde{X}_i)_u$ est régulier au voisinage de la fibre spéciale et y est la réunion disjointe de ses composantes connexes qui sont intègres. Notons que, pour α et $n \geq n_0$ donnés, comme le noyau de $A_\alpha/\mathfrak{m}^n A_\alpha \to A/\mathfrak{m}^n A$ est de type fini, il existe $\beta \geq \alpha$ tel que $A_\alpha/\mathfrak{m}^n A_\alpha \to A_\beta/\mathfrak{m}^n A_\beta$ se factorise par $A/\mathfrak{m}^n A$, et donc toute section de t_β donne une section de t_α qui est n-proche de s_α. Ainsi, quitte à accroître α_0 et n_0 (ou seulement α_0), on peut supposer que $(\tilde{X}_i)_u = ((\tilde{X}_i)_u)_{\mathrm{md}}$ dans un voisinage de la fibre spéciale. C'est en effet une conséquence de la préservation de la dimension (5.4) (i)). Pour le voir, choisissons, comme dans la démonstration de 3.1, un élément non nul a

de $\widehat{A}$ tel que $\tilde{X}_i - V(a)$ soit fini et plat sur $\widehat{T} - V(a)$. On peut supposer qu'il en est de même pour $(\tilde{X}_i)_u - V(a')$ au-dessus de $T - V(a')$, où $a' = u^*(a_\alpha)$. On peut supposer qu'en chaque point x de la fibre spéciale les anneaux locaux de X_i et de $(\tilde{X}_i)_u$ ont la même dimension d, et de même pour $V(a)$ et $V(a')$. Comme $X_i - V(a)$ est dense dans X_i, la dimension de l'anneau local de $V(a)$ en x est $< d$, donc il en est de même pour $V(a') \subset (\tilde{X}_i)_u$. Comme $\mathscr{O}_{(\tilde{X}_i)_u,x}$ est régulier, la composante irréductible de $(\tilde{X}_i)_u$ passant par x est donc dominante.

Ainsi, au voisinage de la fibre spéciale, $(\tilde{X}_i)_u$ est schématiquement la réunion disjointe de composantes dominant T. Comme un voisinage ouvert assez petit de la fibre spéciale $(\tilde{X}_i)_0$ dans $(\tilde{X}_i)_u$ est alt-couvrant (resp. $\mathrm{alt}_{\ell'}$-couvrant) (II-4.1.1), la famille $(X_i \to T)_{i\in I}$ des composantes connexes de voisinages convenables des $(\tilde{X}_i)_0$ dans $(\tilde{X}_i)_u, i \in I'$ vérifie les conditions (i) et (ii).

Soit D' l'image inverse de $\hat{Z}$ dans $\tilde{X} = \coprod_{i\in I'} \tilde{X}_i$ qu'on peut supposer non vide. Par hypothèse, $D = D'_{\text{réd}}$ est un diviseur à croisements normaux strict, c'est-à-dire $D = \sum_{j\in J} D_j$ avec

$$D_K = \bigcap_{j\in K} D_j$$

régulier de codimension $\mathrm{card}(K)$ pour toute partie $K \subset J$. Quitte à augmenter α, on peut supposer que les D_j ont des modèles sur T_α, ces modèles induisant des modèles des D_K. Comme u est une section de t_α, le schéma D_u réunion schématique des $(D_i)_u$ est, topologiquement, l'image inverse de Z dans X_u. D'après 5.4, on peut supposer que chaque $(D_u)_K$ est régulier partout de codimension $\mathrm{card}(K)$ le long de la fibre spéciale, de sorte que D_u est un diviseur à croisements normaux strict le long de la fibre spéciale. Les lieux réguliers de $(D_u)_K$ et X_u étant ouverts, on peut supposer que D_u est un diviseur à croisements normaux strict au voisinage de la fibre spéciale (excellence de X_u). □