Astérisque

JOËL RIOU

Classes de Chern, morphismes de Gysin, pureté absolue

Astérisque, tome 363-364 (2014), Séminaire Bourbaki,
exp. nº XVI, p. 301-349

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2014__363-364__301_0>

EXPOSÉ XVI

CLASSES DE CHERN, MORPHISMES DE GYSIN, PURETÉ ABSOLUE

Joël Riou

Dans ces notes, on présente la nouvelle démonstration par Ofer Gabber du théorème de pureté cohomologique absolue, annoncée dans [Gabber, 2005b]. La section 1 rappelle la construction des classes de Chern en cohomologie étale. Celles-ci servent dans la section 2 qui consiste en la construction et l'étude des propriétés des morphismes de Gysin associés aux morphismes d'intersection complète lissifiables. Dans la section 3, ces morphismes de Gysin sont utilisés pour donner une formulation précise du théorème de pureté absolue (théorème 3.1.1). La démonstration du théorème de pureté (différente de celle rédigée dans [Fujiwara, 2002]) s'appuie notamment sur les résultats de géométrie logarithmique établis dans les exposés VI, VIII et X. On s'est efforcé de faire attention aux signes dans les calculs cohomologiques : les conventions utilisées et quelques remarques les concernant sont détaillées dans la section 4.

Dans tout cet exposé, on fixe un entier naturel $n \geq 1$. Tous les schémas seront supposés être des schémas sur Spec $\left(\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]\right)$. On note Λ le faisceau d'anneaux constant de valeur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $\Lambda(1)$ le faisceau des racines n-ièmes de l'unité (pour la topologie étale) et $\Lambda(r)$ ses puissances tensorielles, auxquelles on peut donner un sens pour tout $r \in \mathbf{Z}$.

1. Classes de Chern

Dans cette section, on rappelle la construction des classes de Chern des fibrés vectoriels sur des schémas généraux à valeurs dans la cohomologie étale. On s'appuie sur le calcul de la cohomologie étale des fibrés projectifs de [SGA 5 VII 2] et sur la méthode de [Grothendieck, 1958a]. Les démonstrations sont parfois différentes de celles de [SGA 5 VII 3] : on s'est efforcé de donner une présentation aussi « économique » que possible.

À la différence de l'exposé oral qui utilisait un langage géométrique, dans ces notes, un fibré vectoriel est un Module $\mathscr{E}$ localement libre de rang fini et le fibré projectif de $\mathscr{E}$ est le fibré des hyperplans défini dans [ÉGA II 4.1.1] : $\mathbf{P}(\mathscr{E}) = \mathrm{Proj}(\mathbf{S}^\star\mathscr{E})$ où $\mathbf{S}^\star\mathscr{E}$ est l'Algèbre symétrique de $\mathscr{E}$.

1.1. Définition. — Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma. Soit $\mathscr{L}$ un fibré en droites sur X. En faisant agir les fonctions inversibles par multiplication sur les sections inversibles de $\mathscr{L}$, on munit le faisceau des sections inversibles de $\mathscr{L}$ d'une structure de torseur sous le schéma en groupes $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$. La classe d'isomorphisme de $\mathscr{L}$ définit donc un élément dans $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$. On note $c_1(\mathscr{L}) \in \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X, \Lambda(1))$ l'image de cet élément par le morphisme de bord $\delta\colon \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \to \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X, \Lambda(1))$ déduit de la suite exacte courte de Kummer[(i)] :

$$0 \to \Lambda(1) \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \xrightarrow{[n]} \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \to 0.$$

Si $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ sont deux fibrés en droites sur X, on a la relation d'additivité[(ii)] :

$$c_1(\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}') = c_1(\mathscr{L}) + c_1(\mathscr{L}') \in \mathrm{H}^2(X, \Lambda(1)).$$

Notons que les classes de Chern de fibrés en droites résident dans les degrés pairs de la cohomologie étale, elles commutent donc avec toutes les classes de cohomologie. Notons aussi que si $f\colon Y \to X$ est un morphisme et $\mathscr{L}$ un fibré en droites sur X, alors $f^\star(c_1(\mathscr{L})) = c_1(f^\star\mathscr{L})$.

***1.2. Théorème* (Formule du fibré projectif).** — *Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma. Soit $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel de rang constant r sur X. On note $\pi\colon \mathbf{P}(\mathscr{E}) \to X$ le fibré projectif de $\mathscr{E}$. On pose $\xi = c_1(\mathscr{O}(1)) \in \mathrm{H}^2(\mathbf{P}(\mathscr{E}), \Lambda(1))$*[(iii)]. *Alors, les puissances $\xi^i \in \mathrm{H}^{2i}(\mathbf{P}(\mathscr{E}), \Lambda(i))$ de ξ définissent un isomorphisme dans $\mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$:*

$$(1, \xi, \ldots, \xi^{r-1})\colon \bigoplus_{i=0}^{r-1} \Lambda(-i)[-2i] \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\pi_\star\Lambda$$

D'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre, on peut supposer que X est le spectre d'un corps algébriquement clos k. On se ramène ainsi au calcul de l'algèbre de cohomologie étale des espaces projectifs sur k, cf. [SGA 5 VII 2].

1.3. Théorème. — *Il existe une unique manière de définir, pour tout $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma X et tout fibré vectoriel $\mathscr{E}$, des éléments $c_i(\mathscr{E}) \in \mathrm{H}^{2i}_{\text{ét}}(X, \Lambda(i))$ pour tout $i \in \mathbf{N}$ appelés*

(i) Les conventions de signes utilisées dans cet exposé sont précisées dans la section 4 (voir notamment 4.3 pour la classe de cohomologie associée à un torseur et 4.2 pour le morphisme δ).

(ii) Il existe des théories cohomologiques « orientées » pour lesquelles cette propriété de la première classe de Chern n'est pas satisfaite, cf. [Morel & Levine, 2001].

(iii) Le faisceau $\mathscr{O}(1)$ est le faisceau fondamental sur $\mathbf{P}(\mathscr{E})$: c'est le quotient inversible de $\pi^\star\mathscr{E}$ par l'hyperplan universel.

classes de Chern de sorte que si l'on définit la série formelle $c_t(\mathscr{E}) = \sum_{i\geq 0} c_i(\mathscr{E})t^i$, *on ait les propriétés suivantes :*

- *la série formelle* $c_t(\mathscr{E})$ *ne dépend que de la classe d'isomorphisme du fibré vectoriel* $\mathscr{E}$ *sur le* $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$*-schéma* X *;*
- *si* $f\colon Y \to X$ *est un morphisme de* $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$*-schémas et* $\mathscr{E}$ *un fibré vectoriel sur* X, *alors* $f^\star(c_t(\mathscr{E})) = c_t(f^\star\mathscr{E})$ *;*
- *si* $0 \to \mathscr{E}' \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}'' \to 0$ *est une suite exacte courte de fibrés vectoriels sur un* $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$*-schéma* X, *on a la relation de Cartan-Whitney :*
$$c_t(\mathscr{E}) = c_t(\mathscr{E}')c_t(\mathscr{E}'') \ ;$$
- *si* $\mathscr{L}$ *est un fibré en droites sur un* $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$*-schéma* X, *la classe* $c_1(\mathscr{L})$ *est celle de la définition 1.1 et*
$$c_t(\mathscr{L}) = 1 + c_1(\mathscr{L})t.$$

On a alors les relations $c_0(\mathscr{E}) = 1$ *et* $c_i(\mathscr{E}) = 0$ *pour* $i > \operatorname{rang} \mathscr{E}$ *pour tout fibré vectoriel* $\mathscr{E}$ *sur un* $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$*-schéma* X.

La démonstration utilise plusieurs constructions géométriques :

***1.4. Proposition* (Principe de scindage I).** — *Soit* X *un* $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$*-schéma. Soit* $\mathscr{E}$ *un fibré vectoriel de rang* r. *On note* $\pi\colon \mathbf{Drap}(\mathscr{E}) \to X$ *le fibré des drapeaux complets de* $\mathscr{E}$. *Les propriétés suivantes sont satisfaites :*

- *le fibré vectoriel* $\pi^\star\mathscr{E}$ *admet une filtration (canonique)* $0 = \mathscr{M}_0 \subset \mathscr{M}_1 \subset \cdots \subset \mathscr{M}_r = \pi^\star\mathscr{E}$ *par des fibrés vectoriels de sorte que pour tout entier* $1 \leq i \leq r$, *le quotient* $\mathscr{L}_i = \mathscr{M}_i/\mathscr{M}_{i-1}$ *soit un fibré en droites ;*
- *le morphisme canonique* $\Lambda \to \mathrm{R}\pi_\star\Lambda$ *est un monomorphisme scindé dans* $\mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

La seule propriété non triviale réside dans le fait que $\Lambda \to \mathrm{R}\pi_\star\Lambda$ soit un monomorphisme scindé. En remarquant que la projection $\mathbf{Drap}(\mathscr{E}) \to X$ peut s'écrire comme un composé de r projections de fibrés projectifs, ceci se déduit de la formule du fibré projectif (théorème 1.2)[(iv)].

***1.5. Proposition* (Principe de scindage II).** — *Soit* X *un* $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$*-schéma. Soit* $(E) : 0 \to \mathscr{E}' \to \mathscr{E} \xrightarrow{p} \mathscr{E}'' \to 0$ *une suite exacte courte de fibrés vectoriels sur* X. *On note* $\mathbf{Sect}(E)$ *le* X*-schéma défini par le fait que pour tout* X*-schéma* $f\colon Y \to X$, *l'ensemble des* X*-morphismes* $Y \to \mathbf{Sect}(E)$ *s'identifie naturellement à l'ensemble des sections de la surjection de fibrés vectoriels* $f^\star(p)\colon f^\star\mathscr{E} \to f^\star\mathscr{E}''$ *sur* Y[(v)]. *Le* Y*-schéma* $\mathbf{Sect}(E)$

(iv) Plus précisément, Grothendieck a montré (cf. [Grothendieck, 1958b], ou [SGA 6 VI 4.6] pour le même argument dans le cas de la K-théorie algébrique) que la théorie des classes de Chern permettait de calculer l'algèbre de cohomologie des fibrés de drapeaux, fussent-ils incomplets.

(v) Je remercie Dennis Eriksson de m'avoir signalé cette construction.

est naturellement muni d'une structure de torseur sous le Y-schéma en groupes vectoriel d'homomorphismes $\mathbf{Hom}(\mathscr{E}'', \mathscr{E}')$. *Notons* $\pi\colon \mathbf{Sect}(E) \to X$ *la projection. Les propriétés suivantes sont satisfaites :*

— *l'image inverse par* $\pi\colon \mathbf{Sect}(E) \to X$ *de la suite exacte de fibrés vectoriels* (E) *est (canoniquement) scindée ;*
— *le morphisme canonique* $\Lambda \to \mathrm{R}\pi_\star\Lambda$ *est un isomorphisme dans* $\mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

L'existence de $\mathbf{Sect}(E)$ est évidente, la question étant de nature locale sur X. Localement pour la topologie de Zariski sur X, la projection π est la projection depuis un espace affine, l'isomorphisme $\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\pi_\star\Lambda$ résulte alors de l'invariance par homotopie de la cohomologie étale pour les $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas [SGA 4 XV 2.2].

Démontrons le théorème 1.3. Grâce aux propositions 1.4 et 1.5, l'unicité est évidente. Il s'agit donc de construire une théorie des classes de Chern satisfaisant les propriétés demandées. Soit $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel (que l'on peut supposer de rang constant r) sur un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma X. On considère le fibré projectif $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ sur X. On note $\xi = c_1(\mathscr{O}(1))$. D'après la formule du fibré projectif (théorème 1.2), il existe d'uniques éléments, notés $c_i(\mathscr{E}) \in \mathrm{H}^{2i}(X, \Lambda(i))$ pour $1 \leq i \leq r$ tels que l'on ait la relation

$$\xi^r - c_1(\mathscr{E})\xi^{r-1} + c_2(\mathscr{E})\xi^{r-2} + \cdots + (-1)^r c_r(\mathscr{E}) = 0 \in \mathrm{H}^{2r}(\mathbf{P}(\mathscr{E}), \Lambda(r)).$$

On pose $c_0(\mathscr{E}) = 1$ et $c_i(\mathscr{E}) = 0$ pour $i > r$. Dans le cas où $\mathscr{E}$ est un fibré en droites, $\mathbf{P}(\mathscr{E}) \simeq X$ et $\mathscr{O}(1) \simeq \mathscr{E}$, ce qui montre que cette définition étend la précédente pour les fibrés en droites. La seule propriété non évidente est la formule de Cartan-Whitney. Par principe de scindage (propositions 1.4 et 1.5), il suffit d'établir la formule suivante :

1.6. Lemme. — *Soit X un* $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$*-schéma. Soit* $(\mathscr{L}_i)_{1\leq i\leq r}$ *une famille finie de fibrés en droites sur X, soit* $\mathscr{E} = \bigoplus_{1\leq i\leq r} \mathscr{L}_i$ *leur somme directe. Dans* $\mathrm{H}^{2r}(\mathbf{P}(\mathscr{E}), \Lambda(r))$, *on a la relation :*

$$\prod_{i=1}^{r}(\xi - c_1(\mathscr{L}_i)) = 0$$

où $\xi = c_1(\mathscr{O}(1))$. *Autrement dit,*

$$c_t(\mathscr{E}) = \prod_{i=1}^{r} c_t(\mathscr{L}_i).$$

L'argument qui suit est inspiré de [Panin & Smyrnov, 2003]. Pour $1 \leq i \leq r$, on note $H_i \simeq \mathbf{P}(\mathscr{E}/\mathscr{L}_i)$ l'hyperplan projectif de $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ défini par l'inclusion $\mathscr{L}_i \to \mathscr{E}$. Notons $\pi\colon \mathbf{P}(\mathscr{E}) \to X$ la projection. Le morphisme canonique $\pi^\star\mathscr{L}_i \to \mathscr{O}(1)$ induit un isomorphisme sur l'ouvert complémentaire de H_i dans $\mathbf{P}(\mathscr{E})$. On en déduit que l'élément $\xi - c_1(\mathscr{L}_i)$ de $\mathrm{H}^2(X, \Lambda(1))$ peut être relevé en un élément x_i du groupe de cohomologie à supports $\mathrm{H}^2_{H_i}(X, \Lambda(1))$ (vi). Le produit des éléments x_i vit naturellement dans le groupe de cohomologie à support $\mathrm{H}^{2r}_{\bigcap_{1\leq i\leq r} H_i}(\mathbf{P}(E), \Lambda(i))$ qui est nul puisque l'intersection de ces r hyperplans est vide ; on en déduit la formule voulue par oubli du support.

1.7. Proposition. — *Soit $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel sur un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma X. Pour tout entier naturel i, on a l'égalité :*

$$c_i(\mathscr{E}^\vee) = (-1)^i c_i(\mathscr{E}) \ ;$$

autrement dit, on a une formule de changement de variables :

$$c_t(\mathscr{E}^\vee) = c_{-t}(\mathscr{E}).$$

Grâce à la relation de Cartan-Whitney et au principe de scindage, on peut se ramener au cas où $\mathscr{E}$ est un fibré en droites. Cela résulte alors du fait que $c_1\colon \operatorname{Pic}(X) \to \mathrm{H}^2(X, \Lambda(1))$ soit un homomorphisme de groupes.

2. Morphismes de Gysin

Étant donné un morphisme d'intersection complète $X \xrightarrow{f} S$ entre $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas vérifiant certaines hypothèses techniques, on va construire un morphisme de Gysin $\mathrm{Cl}_f\colon \Lambda \to f^?\Lambda$ où $f^? = f^!(-d)[-2d]$ (d est la dimension relative virtuelle de f). Ces morphismes de Gysin seront compatibles à la composition des morphismes d'intersection complète.

L'essentiel de cette section est consacrée à la construction de ces morphismes de Gysin dans le cas des immersions régulières. Le morphisme trace permettra de faire la construction dans le cas des morphismes lisses. Ces deux définitions se recolleront pour donner la définition 2.5.11 dans le cas général et le théorème 2.5.12 établira la compatibilité à la composition de ces morphismes de Gysin.

2.1. Première classe de Chern d'un pseudo-diviseur. — Soit $\mathscr{L}$ un fibré en droites sur un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma X, Z un fermé de X et U l'ouvert complémentaire. On suppose donnée une section inversible $s\colon \mathscr{O}_U \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}_{|U}$. Au couple $(\mathscr{L}, s)$ est canoniquement associée une classe $c_1(\mathscr{L}, s) \in \mathrm{H}^2_Z(X, \Lambda(1))$ induisant $c_1(\mathscr{L}) \in \mathrm{H}^2(X, \Lambda(1))$ par oubli du support (construire un élément de $\mathrm{H}^1_Z(X, \mathbf{G}_\mathrm{m})$ et utiliser la suite exacte de Kummer).

La classe $c_1(\mathscr{L}, s)$ correspond à un morphisme $\Lambda_Z = \Lambda_X/\Lambda_U \to \Lambda_X(1)\,[2]$ dans $\mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. En « composant » un tel morphisme avec une classe de cohomologie de Z représentée par un morphisme $\Lambda_Z \to \Lambda_Z(q)\,[p]$ (cf. 4.5.3), il vient que $c_1(\mathscr{L}, s)$ induit des morphismes de Gysin

$$\mathrm{Gys}_{(\mathscr{L},s)}\colon \mathrm{H}^p(Z, \Lambda(q)) \to \mathrm{H}^{p+2}_Z(X, \Lambda(q+1)).$$

(vi) Pour le moment, peu importe de fixer un relèvement canonique.

2.1.1. Définition. — Si $Z \to X$ est une immersion régulière de codimension 1 définie par un Idéal (inversible) $\mathscr{I}$, on pose $\mathrm{Gys}_{Z\subset X} = -\mathrm{Gys}_{(\mathscr{I},1_{X-Z})} = \mathrm{Gys}_{-(\mathscr{I},1_{X-Z})}$.

On a noté ici $-(\mathscr{I}, 1_{X-Z})$ l'opposé du pseudo-diviseur $(\mathscr{I}, 1_{X-Z})$, cf. [Fulton, 1998, § 2.2]. *Via* les identifications usuelles, $-(\mathscr{I}, 1_{X-Z})$ correspond au diviseur effectif Z.

2.2. Classes fondamentales généralisées. — Pour étudier la compatibilité à la composition des classes fondamentales définies dans [Fujiwara, 2002, § 1] dans le cas des immersions régulières (cf. [SGA 6 VII 1.4]), Ofer Gabber définit une classe fondamentale généralisée pour une immersion fermée $Y \to X$ définie par un Idéal de type fini $\mathscr{I}$. Cette construction n'est plus limitée aux immersions régulières et est compatible aux changements de bases arbitraires, mais elle dépend d'une donnée supplémentaire, à savoir celle d'un fibré vectoriel sur Y se surjectant sur le faisceau conormal $\mathscr{N}_{X/Y} = \mathscr{I}/\mathscr{I}^2$.

2.2.1. Éclatement modifié. — Soit $Y \to X$ une immersion fermée entre $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas définie par un Idéal de type fini $\mathscr{I}$. On note U l'ouvert complémentaire. Soit $\mathscr{E} \to \mathscr{N}_{X/Y}$ un épimorphisme de Modules sur Y où $\mathscr{E}$ est un Module localement libre de rang fini. On définit une $\mathscr{O}_X$-Algèbre graduée quasi-cohérente $\mathscr{A}_\star$ par produit fibré de façon à avoir un carré cartésien de $\mathscr{O}_X$-Modules, pour tout entier naturel n :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{A}_n & \longrightarrow & \mathscr{I}^n \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathbf{S}^n\mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{I}^n/\mathscr{I}^{n+1} \end{array}$$

où l'algèbre symétrique $\mathbf{S}^\star\mathscr{E}$ est prise sur le faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_X/\mathscr{I}$.

2.2.1.1. Définition. — On pose $\mathrm{\acute{E}cl}_{Y,\mathscr{E}}(X) = \mathrm{Proj}(\mathscr{A}_\star)$ et on note $\pi\colon \mathrm{\acute{E}cl}_{Y,\mathscr{E}}(X) \to X$ la projection.

2.2.1.2. Remarque. — Si $Y \to X$ est une immersion fermée régulière et que $\mathscr{E} \to \mathscr{N}_{X/Y}$ est un isomorphisme, $\mathrm{\acute{E}cl}_{Y,\mathscr{E}}(X)$ s'identifie à l'éclaté de Y dans X. C'est ce cas particulier que l'on généralise ici en vue d'obtenir une construction compatible aux changements de base.

2.2.1.3. Proposition. — *L'Algèbre $\mathscr{A}_0$ est isomorphe à $\mathscr{O}_X$, les Modules $\mathscr{A}_n$ sont de type fini, l'Algèbre graduée $\mathscr{A}_\star$ est engendrée par $\mathscr{A}_1$ et on a un isomorphisme canonique de $\mathscr{O}_Y$-Algèbres graduées $\mathscr{A}_\star \otimes_{\mathscr{O}_X} (\mathscr{O}_X/\mathscr{I}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}^\star\mathscr{E}$.*

L'assertion concernant $\mathscr{A}_0$ est tautologique. Soit n un entier naturel. Comme $\mathscr{I}^n \to \mathscr{I}^n/\mathscr{I}^{n+1}$ est un épimorphisme, la projection $\mathscr{A}_n \to \mathbf{S}^n\mathscr{E}$ est aussi un épimorphisme et si on note $\mathscr{K}_n$ son noyau, on a un isomorphisme $\mathscr{K}_n \xrightarrow{\sim} \mathscr{I}^{n+1}$. Par dévissage, il en résulte que $\mathscr{A}_n$ est un Module de type fini.

Puisque $\mathbf{S}^n\mathscr{E}$ est un $\mathscr{O}_X/\mathscr{I}$-Module, $\mathscr{K}_n$ contient $\mathscr{I}\cdot\mathscr{A}_n$. Comme $\mathscr{E}\to\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ est un épimorphisme, le morphisme $\mathbf{S}^n\mathscr{E}\to\mathscr{I}^n/\mathscr{I}^{n+1}$ est aussi un épimorphisme, ce qui implique que la projection $\mathscr{A}_n\to\mathscr{I}^n$ est un épimorphisme. Le morphisme induit $\mathscr{I}\cdot\mathscr{A}_n\to\mathscr{I}\cdot\mathscr{I}^n=\mathscr{I}^{n+1}\simeq\mathscr{K}_n$ est donc à la fois un monomorphisme et un épimorphisme : $\mathscr{K}_n=\mathscr{I}\cdot\mathscr{A}_n$. Ceci permet d'obtenir l'isomorphisme $\mathscr{A}_\star\otimes_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{I})\xrightarrow{\sim}\mathbf{S}^\star\mathscr{E}$.

Pour montrer que le morphisme évident $\mathscr{A}_1^{\otimes n}\to\mathscr{A}_n$ de Modules est un épimorphisme, il suffit, d'après le lemme de Nakayama, de le tester après passage aux corps résiduels de X. Au-dessus de l'ouvert U, c'est évident ; au-dessus de Y, cela résulte de l'isomorphisme $\mathscr{A}_\star\otimes_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{I})\xrightarrow{\sim}\mathbf{S}^\star\mathscr{E}$.

2.2.1.4. Corollaire. — *Le morphisme $\pi\colon \mathrm{Écl}_{Y,\mathscr{E}}(X)\to X$ est projectif et on dispose d'isomorphismes canoniques $\pi^{-1}(U)\xrightarrow{\sim}U$ et $\pi^{-1}(Y)\simeq\mathbf{P}(\mathscr{E})$.*

L'isomorphisme au-dessus de U est évident. Compte tenu de [ÉGA II 3.5.3], celui décrivant $\pi^{-1}(Y)$ se déduit de l'isomorphisme de $\mathscr{O}_Y$-Algèbres graduées $\mathscr{A}_\star\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{O}_Y\xrightarrow{\sim}\mathbf{S}^\star\mathscr{E}$.

2.2.1.5. Proposition. — *Soit $p\colon X'\to X$ un morphisme. On pose $Y'=Y\times_X X'$ et $\mathscr{E}'=p^\star\mathscr{E}$. On dispose d'un épimorphisme évident $\mathscr{E}'\to\mathscr{N}_{X'/Y'}$. Le morphisme canonique*

$$\mathrm{Écl}_{Y',\mathscr{E}'}(X')\to\mathrm{Écl}_{Y,\mathscr{E}}(X)\times_X X'$$

est une nil-immersion.

Notons $\mathscr{A}'_\star$ la $\mathscr{O}_{X'}$-Algèbre graduée quasi-cohérente donnant naissance à $\mathrm{Écl}_{Y',\mathscr{E}'}(X')$. On dispose d'un morphisme évident $p^\star\mathscr{A}_\star\to\mathscr{A}'_\star$ de $\mathscr{O}_{X'}$-Algèbres graduées quasi-cohérentes. Pour tout entier, le morphisme $p^\star\mathscr{A}_n\to\mathscr{A}'_n$ est un morphisme entre $\mathscr{O}_{X'}$-Modules de type fini ; pour montrer qu'il s'agit d'un épimorphisme, d'après le lemme de Nakayama, il suffit de vérifier que ce morphisme induit un isomorphisme d'une part au-dessus de $U'=X'-Y'$ (c'est évident) et d'autre part modulo l'idéal $\mathscr{I}'$ définissant Y' dans X' (cela résulte de la description donnée dans la proposition 2.2.1.3). Le morphisme

$$\mathrm{Écl}_{Y',\mathscr{E}'}(X')\to\mathrm{Écl}_{Y,\mathscr{E}}(X)\times_X X'$$

s'identifie au X'-morphisme évident $\mathrm{Proj}(\mathscr{A}'_\star)\to\mathrm{Proj}(p^\star\mathscr{A}_\star)$ ([ÉGA II 3.5.3]) ; d'après ce qui précède, il s'agit d'une immersion fermée. Le fait que ce morphisme induise un isomorphisme au-dessus de $p^{-1}(U)$ et de $p^{-1}(Y)$ permet d'en déduire aussitôt que le morphisme induit au niveau des schémas réduits associés

$$\mathrm{Écl}_{Y',\mathscr{E}'}(X')_{\mathrm{réd}}\to(\mathrm{Écl}_{Y,\mathscr{E}}(X)\times_X X')_{\mathrm{réd}}$$

est un isomorphisme.

2.2.2. Définition des classes. — On se donne toujours une immersion fermée $i\colon Y \to X$ définie par un Idéal $\mathscr{I}$ de type fini. On note $j\colon U \to X$ l'inclusion de l'ouvert complémentaire ($\mathscr{I}$ étant de type fini, j est un morphisme de type fini). On suppose donné un épimorphisme de $\mathscr{O}_Y$-Modules $\mathscr{E} \to \mathscr{N}_{X/Y}$ avec $\mathscr{E}$ est localement libre de rang fini. On note $\pi\colon \mathrm{Écl}_{Y,\mathscr{E}}(X) \to X$ la projection de l'éclatement modifié, $j'\colon U \to \mathrm{Écl}_{Y,\mathscr{E}}(X)$ l'immersion ouverte évidente et $i'\colon \mathbf{P}(\mathscr{E}) \to \mathrm{Écl}_{Y,\mathscr{E}}(X)$ l'immersion fermée donnée par le corollaire 2.2.1.4. On note r le rang du fibré vectoriel $\mathscr{E}$ que l'on suppose de rang constant pour simplifier et on suppose $r > 0$.

On a ainsi le diagramme suivant de schémas, où les carrés sont cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P}(\mathscr{E}) \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "\pi'"] & \mathrm{Écl}_{Y,\mathscr{E}}(X) \arrow[d, "\pi"] & U \arrow[l, "j'"'] \arrow[d, equal] \\
Y \arrow[r, "i"] & X & U \arrow[l, "j"']
\end{tikzcd}$$

2.2.2.1. Proposition. — *Le morphisme évident $\Lambda \to \mathrm{R}\pi'_\star\Lambda$ dans $\mathsf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ est un monomorphisme scindé : la formule du fibré projectif identifie son conoyau à*

$$\bigoplus_{k=1}^{r-1} \Lambda(-k)\,[-2k]\,.$$

Les morphismes évidents définissent un triangle distingué :

$$\Lambda \to \mathrm{R}\pi_\star\Lambda \to i_\star\mathrm{Coker}(\Lambda \to \mathrm{R}\pi'_\star\Lambda) \xrightarrow{0} \Lambda\,[1]$$

dans $\mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. On peut le récrire sous la forme

$$\Lambda \to \mathrm{R}\pi_\star\Lambda \xrightarrow{\rho} \bigoplus_{k=1}^{r-1} i_\star\Lambda(-k)\,[-2k] \xrightarrow{0} \Lambda\,[1]\,,$$

le morphisme ρ admettant une section canonique donnée par les éléments $c_1(\mathscr{O}(1), 1_U)^k$ de $\mathrm{H}^{2k}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(\mathrm{Écl}_{Y,\mathscr{E}}(X), \Lambda(k))$, identifiés à des morphismes $i_\star\Lambda(-k)\,[-2k] \to \mathrm{R}\pi_\star\Lambda$ dans $\mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

On note L une résolution injective du faisceau constant Λ vu comme faisceau de Λ-modules sur le grand site étale des schémas de type fini sur X. Pour tout morphisme de type fini $W \xrightarrow{p} X$, on note $L_{|W}$ le complexe de faisceau de Λ-modules sur $W_{\text{ét}}$ induit par L ; on peut le voir comme un objet de $\mathsf{D}^+(W_{\text{ét}}, \Lambda)$ isomorphe à Λ.

2.2.2.2. Lemme. — *Le carré commutatif évident de complexes de faisceaux sur $X_{\text{ét}}$ est homotopiquement bicartésien :*

$$\begin{tikzcd} L_{|X} \arrow[r] \arrow[d] & i_\star L_{|Y} \arrow[d] \\ \pi_\star L_{|\mathrm{Écl}_{Y,\mathscr{E}}(X)} \arrow[r] & \pi_\star i'_\star L_{|\mathbf{P}(\mathscr{E})} \end{tikzcd}$$

(ceci signifie par exemple que le complexe simple associé à ce diagramme, identifié à un complexe 3-uple, est acyclique).

Les complexes simples associés aux complexes doubles

$$j_! L_{|U} \to L_{|X} \to i_\star L_{|Y}$$

et

$$j'_! L_{|U} \to L_{|\mathrm{Écl}_{Y,\mathscr{E}}(X)} \to i'_\star L_{|\mathbf{P}(\mathscr{E})}$$

de faisceaux sur X et $\mathrm{Écl}_{Y,\mathscr{E}}(X)$ respectivement sont acycliques. Choisissons un foncteur de résolution « flasque » additif r sur la catégorie des faisceaux de Λ-modules sur $\mathrm{Écl}_{Y,\mathscr{E}}(X)_{\text{ét}}$ et notons abusivement $\mathrm{R}\pi_\star$ le foncteur (additif) de la catégorie des complexes (bornés inférieurement) de faisceaux de Λ-modules sur $\mathrm{Écl}_{Y,\mathscr{E}}(X)$ vers la catégorie des complexes de faisceaux de Λ-modules sur X défini par la formule $\mathrm{R}\pi_\star K = \mathrm{Tot}(\pi_\star r K)$, ce foncteur préserve les quasi-isomorphismes et induit le foncteur $\mathrm{R}\pi_\star \colon \mathsf{D}^+(\mathrm{Écl}_{Y,\mathscr{E}}(X)_{\text{ét}}, \Lambda) \to \mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ usuel.

On obtient ainsi un diagramme commutatif de complexes de faisceaux de Λ-modules sur X :

$$\begin{tikzcd} j_! L_{|U} \arrow[r] \arrow[d] & L_{|X} \arrow[r] \arrow[d] & i_\star L_{|Y} \arrow[d] \\ \mathrm{R}\pi_\star j'_! L_{|U} \arrow[r] & \mathrm{R}\pi_\star L_{|\mathrm{Écl}_{Y,\mathscr{E}}(X)} \arrow[r] & \mathrm{R}\pi_\star i'_\star L_{|\mathbf{P}(\mathscr{E})}. \end{tikzcd}$$

Les lignes de ce diagramme constituent des complexes doubles dont les complexes simples associés sont acycliques. D'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre, le morphisme $j_! L_{|U} \to \mathrm{R}\pi_\star j'_! L_{|U}$ est un quasi-isomorphisme. On en déduit que le carré de droite est homotopiquement bicartésien, ce qui permet de conclure.

Revenons à la démonstration de la proposition 2.2.2.1, la formule du fibré projectif pour $\mathbf{P}(\mathscr{E})$ implique que l'on a un triangle distingué dans $\mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$i_\star \Lambda \to \mathrm{R}\pi_\star i'_\star \Lambda \to \bigoplus_{i=1}^{r-1} i_\star \Lambda(-i)\,[-2i] \xrightarrow{0} i_\star \Lambda\,[1]\,.$$

En considérant les colonnes du carré homotopiquement bicartésien donné par le lemme, on peut conclure à l'existence d'un triangle distingué

$$\Lambda \to \mathrm{R}\pi_\star\Lambda \to \bigoplus_{i=1}^{r-1} i_\star\Lambda(-i)\,[-2i] \to \Lambda\,[1]\,.$$

Ce triangle est scindé par les puissances de l'élément $c_1(\mathscr{O}(1), 1_U)$; le morphisme de droite est donc nul, ce qui achève la démonstration de la proposition.

2.2.2.3. Corollaire. — *La suite suivante, dont les morphismes sont évidents, est exacte :*

$$0 \to \mathrm{H}^{2r}_Y(X,\Lambda(r)) \to \mathrm{H}^{2r}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(\text{Écl}_{Y,\mathscr{E}}(X),\Lambda(r)) \to \mathrm{Coker}(\mathrm{H}^{2r}(Y,\Lambda(r)) \to \mathrm{H}^{2r}(\mathbf{P}(\mathscr{E}),\Lambda(r))) \to 0.$$

L'énoncé de ce corollaire vaut bien évidemment en tout bidegré (p,q) et pas seulement en bidegré $(2r,r)$, mais nous n'utiliserons pour ainsi dire que ce cas particulier.

On note Gys: $\mathrm{H}^p(\mathbf{P}(\mathscr{E}),\Lambda(q)) \to \mathrm{H}^{p+2}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(\text{Écl}_{Y,\mathscr{E}}(X),\Lambda(q+1))$ le morphisme de Gysin associé au pseudo-diviseur $-(\mathscr{O}(1),1_U)$ sur $\text{Écl}_{Y,\mathscr{E}}(X)$ et $\xi = c_1(\mathscr{O}(1)) \in \mathrm{H}^2(\mathbf{P}(\mathscr{E}),\Lambda(1))$. Le lemme suivant est évident :

2.2.2.4. Lemme. — *Le morphisme composé*

$$\mathrm{H}^p(\mathbf{P}(\mathscr{E}),\Lambda(q)) \overset{\mathrm{Gys}}{\to} \mathrm{H}^{p+2}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(\text{Écl}_{Y,\mathscr{E}}(X),\Lambda(q+1)) \to \mathrm{H}^{p+2}(\mathbf{P}(\mathscr{E}),\Lambda(q+1)),$$

où la flèche de droite est le morphisme de restriction, est la multiplication par $-\xi$.

2.2.2.5. Définition. — On définit un élément $\mathrm{Clf}_{i,\mathscr{E}}$ de $\mathrm{H}^{2r-2}(\mathbf{P}(\mathscr{E}),\Lambda(r-1))$ par la formule :

$$\mathrm{Clf}_{i,\mathscr{E}} = \xi^{r-1} - c_1(\mathscr{E})\xi^{r-2} + \cdots + (-1)^{r-1}c_{r-1}(\mathscr{E}).$$

2.2.2.6. Lemme. — *Dans $\mathrm{H}^{2r}(\mathbf{P}(\mathscr{E}),\Lambda(r))$, on a l'égalité*

$$-\xi\mathrm{Clf}_{i,\mathscr{E}} = (-1)^r c_r(\mathscr{E}).$$

Si $\mathscr{E}$ est un fibré vectoriel de rang r sur X, on peut introduire le polynôme $P_t(\mathscr{E}) = \sum_{i=0}^r (-1)^i c_i(\mathscr{E})t^{r-i}$ en une indéterminée t à coefficients dans l'anneau commutatif $\bigoplus_n H^{2n}(X,\Lambda(n))$. On peut écrire :

$$P_t(\xi) = tG_t(\mathscr{E}) + (-1)^r c_r(\mathscr{E}) \text{ où } G_t(\mathscr{E}) = \sum_{i=0}^{r-1}(-1)^i c_i(\mathscr{E})t^{r-1-i}.$$

Quand on effectue la substitution $t := \xi \in H^2(\mathbf{P}(\mathscr{E}),\Lambda(1))$, par définition de $\mathrm{Clf}_{i,\mathscr{E}}$ on a $\mathrm{Clf}_{i,\mathscr{E}} = G_\xi(\mathscr{E})$ et la définition des classes de Chern donne la relation $0 = P_\xi(\mathscr{E}) = \xi\mathrm{Clf}_{i,\mathscr{E}} + (-1)^r c_r(\mathscr{E})$ de sorte que $-\xi\mathrm{Clf}_{i,\mathscr{E}} = (-1)^r c_r(\mathscr{E})$.

2.2.2.7. Définition. — Compte tenu du corollaire 2.2.2.3, les lemmes 2.2.2.4 et 2.2.2.6 montrent que l'élément $\mathrm{Gys}(\mathrm{Clf}_{i,\mathscr{E}}) \in \mathrm{H}^{2r}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(\mathrm{\acute{E}cl}_{Y,\mathscr{E}}(X), \Lambda(r))$ provient par restriction d'un unique élément de $\mathrm{H}^{2r}_Y(X, \Lambda(r))$, noté $\mathrm{Cl}_{i,\mathscr{E}}$.

2.2.3. Propriétés des classes généralisées

2.2.3.1. Proposition. — *La formation des classes généralisées* $\mathrm{Cl}_{i,\mathscr{E}}$ *et* $\mathrm{Clf}_{i,\mathscr{E}}$ *est compatible à tout changement de base* $X' \to X$.

Compte tenu de la proposition 2.2.1.5, ceci résulte aussitôt des définitions.

2.2.3.2. Proposition. — *Soit* $\mathscr{E}' \to \mathscr{E}$ *un épimorphisme de modules localement libres sur* Y. *Soit* $\mathscr{K}$ *le noyau de cet épimorphisme. On suppose que* $\mathscr{E}'$ *est de rang constant* r'. *On a alors la relation*

$$\mathrm{Cl}_{i,\mathscr{E}'} = (-1)^{r'-r} c_{r'-r}(\mathscr{K}) \cdot \mathrm{Cl}_{i,\mathscr{E}}$$

dans $\mathrm{H}^{2r'}_Y(X, \Lambda(r'))$ *où on a utilisé les accouplements canoniques*

$$\mathrm{H}^a(Y, \Lambda(b)) \otimes \mathrm{H}^{a'}_Y(X, \Lambda(b')) \to \mathrm{H}^{a+a'}_Y(X, \Lambda(b + b')).$$

On dispose d'une immersion fermée de $\mathrm{\acute{E}cl}_{Y,\mathscr{E}}(X)$ dans $\mathrm{\acute{E}cl}_{Y,\mathscr{E}'}(X)$, ce qui permet de considérer la composition suivante de flèches de restriction :

$$\mathrm{H}^{2r'}_Y(X, \Lambda(r')) \to \mathrm{H}^{2r'}_{\mathbf{P}(\mathscr{E}')}(\mathrm{\acute{E}cl}_{Y,\mathscr{E}'}(X), \Lambda(r')) \to \mathrm{H}^{2r'}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(\mathrm{\acute{E}cl}_{Y,\mathscr{E}}(X), \Lambda(r')).$$

Cette composée étant injective, il s'agit de montrer que les images des deux éléments considérés dans $\mathrm{H}^{2r'}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(\mathrm{\acute{E}cl}_{Y,\mathscr{E}}(X), \Lambda(r'))$ sont égales, mais comme ces deux éléments sont naturellement définis comme étant des images d'éléments de $\mathrm{H}^{2r'-2}(\mathbf{P}(\mathscr{E}), \Lambda(r'-1))$ par le morphisme Gys associé au fibré en droites $\mathscr{O}(-1)$ sur $\mathrm{\acute{E}cl}_{Y,\mathscr{E}}(X)$ canoniquement trivialisé sur $X - Y$, on se ramène à montrer l'égalité

$$\mathrm{Clf}_{i,\mathscr{E}'|\mathbf{P}(\mathscr{E})} = (-1)^{r'-r} c_{r'-r}(\mathscr{K}) \cdot \mathrm{Clf}_{i,\mathscr{E}}$$

dans $\mathrm{H}^{2r'}(\mathbf{P}(\mathscr{E}), \Lambda(r'))$.

On reprend les notations du lemme 2.2.2.6. La formule de Cartan-Whitney appliquée à la suite exacte courte $0 \to \mathscr{K} \to \mathscr{E}' \to \mathscr{E} \to 0$ donne la relation suivante : $P_t(\mathscr{E}') = P_t(\mathscr{K}) P_t(\mathscr{E})$, ou encore :

$$tG_t(\mathscr{E}') + (-1)^{r'} c_{r'}(\mathscr{E}') = tG_t(\mathscr{K}) P_t(\mathscr{E}) + (-1)^{r'-r} c_{r'-r}(K)(tG_t(\mathscr{E}) + (-1)^r c_r(\mathscr{E})).$$

Ceci implique l'identité $G_t(\mathscr{E}') = G_t(\mathscr{K}) P_t(\mathscr{E}) + (-1)^{r'-r} c_{r'-r}(\mathscr{K}) G_t(\mathscr{E})$. En faisant la substitution $t := \xi \in H^2(\mathbf{P}(\mathscr{E}), \Lambda(1))$, on obtient l'égalité $G_\xi(\mathscr{E}') = (-1)^{r'-r} c_{r'-r}(\mathscr{K}) G_\xi(\mathscr{E})$, qui n'est autre que la relation voulue.

2.3. Immersions régulières. — On rappelle que la notion d'immersion régulière est définie dans [SGA 6 VII 1.4].

2.3.1. Définition. — Soit $i\colon Y \to X$ une immersion régulière entre $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas. On pose $i^? = i^\star(c)\,[2c] : \mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda) \to \mathsf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ où c est la codimension de i. On définit un morphisme $\mathrm{Cl}_i\colon \Lambda \to i^?\Lambda$ dans $\mathsf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ de la façon suivante. Quitte à décomposer Y en réunion disjointe d'ouverts-fermés, on peut supposer que la codimension c de i est constante. Si $c = 0$, i est l'inclusion d'un ouvert, Cl_i est l'isomorphisme évident. Dans le cas où $c > 0$, choisissons un ouvert U de X dans lequel Y est un sous-schéma fermé, notons $i'\colon Y \to U$ cette immersion fermée. Le faisceau conormal $\mathscr{N}_{X/Y}$ de Y dans X est un fibré vectoriel de rang c sur Y muni de l'épimorphisme tautologique $\mathscr{N}_{X/Y} \to \mathscr{N}_{X/Y}$; on peut donc considérer la classe $\mathrm{Cl}_{i'} = \mathrm{Cl}_{i',\mathscr{N}_{X/Y}} \in \mathrm{H}^{2c}_Y(U, \Lambda(c))$, que l'on identifie à un morphisme $\mathrm{Cl}_i\colon \Lambda \to i'^?\Lambda \simeq i^?\Lambda$ dans $\mathsf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$; il est évident que la construction ne dépend pas de l'ouvert intermédiaire U. Si l'immersion i est fermée, on note Gys_i ou $\mathrm{Gys}_{Y\subset X}$ les morphismes $\mathrm{H}^p(Y, \Lambda(q)) \to \mathrm{H}^{p+2c}_Y(X, \Lambda(q+c))$ induits par la multiplication par $\mathrm{Cl}_i \in \mathrm{H}^{2c}_Y(X, \Lambda(c))$ [(vii)]. On note de même les versions à supports $\mathrm{H}^p_Z(Y, \Lambda(q)) \to \mathrm{H}^{p+2c}_Z(X, \Lambda(q+c))$ définies de même pour tout sous-schéma fermé Z de Y.

Les propositions 2.2.3.1 et 2.2.3.2 impliquent immédiatement la « formule d'excès d'intersection » (analogue de [Fulton, 1998, theorem 6.3] où elle est énoncée dans la théorie de Chow) :

***2.3.2. Proposition* (Formule d'excès d'intersection).** — *Supposons que l'on dispose d'un carré cartésien dans la catégorie des $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas :*

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "q"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

où $i\colon Y \to X$ est une immersion fermée régulière de codimension c. Supposons que $i'\colon Y' \to X'$ soit une immersion régulière de codimension c', notons $\mathscr{K} :=$ $\mathrm{Ker}(q^\star\mathscr{N}_{X/Y} \to \mathscr{N}_{X'/Y'})$ le faisceau conormal d'excès. C'est un fibré vectoriel de rang $e := c - c'$ sur Y'. On a alors l'égalité $f^\star\mathrm{Cl}_i = (-1)^e c_e(\mathscr{K}) \cdot \mathrm{Cl}_{i'} \in H^{2c}_{Y',\text{ét}}(X', \Lambda(c))$.

En particulier, si $i'\colon Y' \to X'$ est une immersion fermée régulière de même codimension que $i\colon Y \to X$, alors $f^\star\mathrm{Cl}_i = \mathrm{Cl}_{i'} \in H^{2c}_{Y',\text{ét}}(X', \Lambda(c))$.

Le théorème suivant généralise l'énoncé établi dans [Fujiwara, 2002, proposition 1.2.1] :

(vii) Cette définition est bien sûr compatible avec celle déjà donnée en codimension 1 dans la définition 2.1.1.

2.3.3. Théorème. — *Si $Z \xrightarrow{i} Y$ et $Y \xrightarrow{j} X$ sont deux immersions régulières composables, le diagramme suivant est commutatif dans $\mathsf{D}^+(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$:*

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\mathrm{Cl}_i"] \arrow[dr, "\mathrm{Cl}_{j\circ i}"'] & i^? \Lambda \arrow[d, "i^?(\mathrm{Cl}_j)"] \\ & i^? j^? \Lambda. \end{tikzcd}$$

On peut évidemment supposer que les immersions i et j sont des immersions fermées et que les codimensions de i et de j sont constantes, de valeurs respectives m et n. Si $m = 0$ ou $n = 0$, c'est trivial; on suppose donc que $m > 0$ et $n > 0$.

2.3.4. Lemme. — *On peut supposer que $n = 1$ (*i.e.* j est de codimension 1).*

On éclate Y dans X pour obtenir le diagramme suivant où les carrés sont cartésiens :

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "p'"] & P \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "p"] & \mathrm{Écl}_Y(X) \arrow[d, "\pi"] \\ Z \arrow[r, "i"] & Y \arrow[r, "j"] & X. \end{tikzcd}$$

L'idée de la démonstration va être d'utiliser la formule d'excès d'intersection 2.3.2 pour les immersions $j \circ i \colon Z \to X$ et $j \colon Y \to X$ relativement au changement de base $\pi \colon \mathrm{Écl}_Y(X) \to X$ qui va faire chuter la codimension de ces immersions fermées régulières.

On a des isomorphismes canoniques $P = \mathbf{P}(\mathscr{N}_{X/Y})$ et $P' = \mathbf{P}(\mathscr{N}_{X/Y|Z})$. On vérifie facilement que $P \to \mathrm{Écl}_Y(X)$ est une immersion fermée régulière de codimension 1. Par changement de base lisse, $P' \to P$ est une immersion fermée régulière de codimension m. On suppose que $i'^?(\mathrm{Cl}_{j'}) \circ \mathrm{Cl}_{i'} = \mathrm{Cl}_{j' \circ i'}$ et on veut montrer que $i^?(\mathrm{Cl}_j) \circ \mathrm{Cl}_i = \mathrm{Cl}_{j \circ i}$. Les morphismes à comparer s'identifient à des éléments de $\mathrm{H}_Z^{2(m+n)}(X, \Lambda(m+n))$ (on fera ce type d'identifications jusqu'à la fin de la démonstration). La proposition 2.2.2.1 implique que l'application

$$\pi^\star \colon \mathrm{H}_Z^{2(m+n)}(X, \Lambda(m+n)) \to \mathrm{H}_{P'}^{2(m+n)}(\mathrm{Écl}_Y(X), \Lambda(m+n))$$

est injective, il suffit donc de comparer les classes après application de $\pi^\star$.

D'après la formule d'excès d'intersection 2.3.2, on a l'égalité $\pi^\star(\mathrm{Cl}_{j \circ i}) = c_{n-1}(\mathscr{E}'^{\vee}) \cdot \mathrm{Cl}_{j' \circ i'} \in \mathrm{H}_{P'}^{2(m+n)}(\mathrm{Écl}_Y(X), \Lambda(m+n))$ où $\mathscr{E}'$ est le fibré vectoriel de rang $n-1$ noyau de l'épimorphisme $p'^\star \mathscr{N}_{X/Z} \to \mathscr{N}_{\mathrm{Écl}_Y(X)/P'}$.

La composition des classes admise provisoirement pour les immersions j' et i' donne l'égalité

$$\mathrm{Cl}_{j' \circ i'} = \mathrm{Cl}_{i'} \cdot \mathrm{Cl}_{j'}$$

via l'accouplement

$$\mathrm{H}^{2m}_{P'}(P,\Lambda(m)) \times \mathrm{H}^2_P(\mathrm{\acute{E}cl}_Y(X),\Lambda(1)) \to \mathrm{H}^{2(m+1)}_{P'}(\mathrm{\acute{E}cl}_Y(X),\Lambda(n+1)).$$

On a ainsi obtenu :

$$\pi^\star \mathrm{Cl}_{j\circ i} = c_{n-1}(\mathscr{E}'^\vee)\cdot \mathrm{Cl}_{i'}\cdot \mathrm{Cl}_{j'}.$$

Notons $\mathscr{E}$ le noyau de l'épimorphisme $p^\star\mathscr{N}_{X/Y} \to \mathscr{N}_{\mathrm{\acute{E}cl}_Y(X)/P}$. Il vient aussitôt que dans le diagramme évident de Modules sur P' qui suit, les lignes et les colonnes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & i'^\star\mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{E}' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & i'^\star p^\star \mathscr{N}_{X/Y} \arrow[r] \arrow[d] & p'^\star\mathscr{N}_{X/Z} \arrow[r] \arrow[d] & p'^\star\mathscr{N}_{Y/Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & i'^\star\mathscr{N}_{\mathrm{\acute{E}cl}_Y(X)/P} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{N}_{\mathrm{\acute{E}cl}_Y(X)/P'} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{N}_{P/P'} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

En particulier, on obtient un isomorphisme canonique $i'^\star\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}'$, d'où $i'^\star c_{n-1}(\mathscr{E}^\vee) = c_{n-1}(\mathscr{E}'^\vee) \in \mathrm{H}^{2(n-1)}(P',\Lambda(n-1))$. On en déduit :

$$\pi^\star \mathrm{Cl}_{j\circ i} = c_{n-1}(\mathscr{E}'^\vee)\cdot \mathrm{Cl}_{i'}\cdot \mathrm{Cl}_{j'} = \mathrm{Cl}_{i'}\cdot c_{n-1}(\mathscr{E}^\vee)\cdot \mathrm{Cl}_{j'}.$$

On utilise implicitement dans ces notations l'associativité des structures multiplicatives permettant par exemple de définir une application

$$\mathrm{H}^{2m}_{P'}(P,\Lambda(m)) \times \mathrm{H}^{2(n-1)}(P,\Lambda(n-1)) \times \mathrm{H}^2_P(\mathrm{\acute{E}cl}_Y(X),\Lambda(1)) \to \mathrm{H}^{2(m+n)}_{P'}(\mathrm{\acute{E}cl}_Y(X),\Lambda(m+n))$$

sans qu'il y ait à s'inquiéter de l'ordre dans lequel les multiplications sont faites. La formule d'excès d'intersecion 2.3.2 implique l'égalité suivante :

$$\pi^\star \mathrm{Cl}_j = c_{n-1}(\mathscr{E}^\vee)\cdot \mathrm{Cl}_{j'} \in \mathrm{H}^{2n}_P(\mathrm{\acute{E}cl}_Y(X),\Lambda(n)).$$

Le morphisme p étant lisse, on a aussitôt $\mathrm{Cl}_{i'} = \pi^\star\mathrm{Cl}_i$. On a ainsi obtenu l'égalité voulue :

$$\pi^\star \mathrm{Cl}_{j\circ i} = \pi^\star\mathrm{Cl}_i\cdot \pi^\star\mathrm{Cl}_j,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

On est ramené à établir le théorème 2.3.3 dans le cas où j est de codimension 1. On pose maintenant $P = \mathbf{P}(\mathscr{N}_{X/Z})$ et $P' = \mathbf{P}(\mathscr{N}_{Y/Z})$. Le diagramme suivant récapitule la situation :

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] & \pi^{-1}(Y) \arrow[r] & \mathrm{\acute{E}cl}_Z(X) \arrow[dd, "\pi"] \\
P' \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r] & \mathrm{\acute{E}cl}_Z(Y) \arrow[u] \arrow[d] & \\
Z \arrow[r, "i"] & Y \arrow[r, "j"] & X.
\end{tikzcd}$$

On veut établir l'égalité suivante dans $\mathrm{H}^{2m+2}_Z(X, \Lambda(m+1))$:

$$\mathrm{Cl}_{j\circ i} = \mathrm{Cl}_i \cdot \mathrm{Cl}_j.$$

D'après la proposition 2.2.2.1, il suffit de vérifier cette égalité dans $\mathrm{H}^{2m+2}_P(\mathrm{\acute{E}cl}_Z(X), \Lambda(m+1))$ après application de $\pi^\star$.

Par définition, la classe $\mathrm{Cl}_{j\circ i} \in \mathrm{H}^{2m+2}_Z(X, \Lambda(m+1))$ se « restreint » en un élément

$$\gamma := \pi^\star \mathrm{Cl}_{j\circ i} = \mathrm{Gys}_{P\subset \mathrm{\acute{E}cl}_Z(X)}(\mathrm{Clf}_{j\circ i})$$

dans $\mathrm{H}^{2m+2}_P(\mathrm{\acute{E}cl}_Z(X), \Lambda(m+1))$ où $\mathrm{Clf}_{j\circ i} \in \mathrm{H}^{2m}(P, \Lambda(m))$.

Notons $\mathscr{I}$ l'Idéal de Y dans X, $\mathscr{I}_P$ celui de P dans $\mathrm{\acute{E}cl}_Z(X)$ et $\tilde{\mathscr{I}}$ celui de $\mathrm{\acute{E}cl}_Z(Y)$ dans $\mathrm{\acute{E}cl}_Z(X)$. On a un isomorphisme canonique de faisceaux inversibles sur $\mathrm{\acute{E}cl}_Z(X)$:

$$\pi^\star \mathscr{I} \simeq \mathscr{I}_P \otimes \tilde{\mathscr{I}}.$$

Cet isomorphisme est compatible aux trivialisations données sur $\pi^{-1}(V)$ où $V = X - Y$. On obtient ainsi une égalité dans le groupe des classes d'équivalence de tels pseudo-diviseurs, ce qui permet de décomposer $\pi^\star \mathrm{Cl}_j = -\pi^\star(c_1(\mathscr{I}, 1_{X-Y})) \in \mathrm{H}^2_{\pi^{-1}(V)}(\mathrm{\acute{E}cl}_Z(X), \Lambda(1))$ en une somme de deux composantes :

$$\begin{aligned}
\pi^\star \mathrm{Cl}_j &= -\pi^\star(c_1(\mathscr{I}, 1_{X-Y})) = -c_1(\pi^\star \mathscr{I}, 1_{\pi^{-1}(X-Y)}) \\
&= -c_1(\mathscr{I}_P, 1_{\mathrm{\acute{E}cl}_Z(X)-P}) - c_1(\tilde{\mathscr{I}}, 1_{\mathrm{\acute{E}cl}_Z(X)-\mathrm{\acute{E}cl}_Z(Y)}).
\end{aligned}$$

On en déduit une décomposition

$$\pi^\star \mathrm{Cl}_i \cdot \pi^\star \mathrm{Cl}_j = \alpha + \beta$$

dans $\mathrm{H}^{2m+2}_P(\mathrm{\acute{E}cl}_Z(X), \Lambda(m+1))$ où

$$\begin{aligned}
\alpha &= \mathrm{Gys}_{P\subset \mathrm{\acute{E}cl}_Z(X)}(\mathrm{Cl}_{i|P}), \\
\beta &= \mathrm{Gys}_{\mathrm{\acute{E}cl}_Z(Y)\subset \mathrm{\acute{E}cl}_Z(X)}(\mathrm{Gys}_{P'\subset \mathrm{\acute{E}cl}_Z(Y)}(\mathrm{Clf}_i)).
\end{aligned}$$

Le calcul de Cl_k où k est l'inclusion de l'intersection de diviseurs de Cartier s'intersectant transversalement dans le schéma ambiant réalisé dans [Fujiwara, 2002, proposition 1.1.4] permet d'obtenir l'égalité d'opérateurs suivante :

$$\mathrm{Gys}_{\text{Écl}_Z(Y)\subset\text{Écl}_Z(X)} \circ \mathrm{Gys}_{P'\subset\text{Écl}_Z(Y)} = \mathrm{Gys}_{P\subset\text{Écl}_Z(X)} \circ \mathrm{Gys}_{P'\subset P}\,.$$

Notre but est d'établir l'égalité $\gamma = \alpha + \beta$. Les calculs précédents permettent d'écrire chacun des éléments α, β et γ comme des images par le morphisme $\mathrm{Gys}_{P\subset\text{Écl}_Z(X)}$ de classes $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ et $\tilde{\gamma}$ dans $\mathrm{H}^{2m}(P,\Lambda(m))$:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &= \mathrm{Cl}_{i|P},\\ \tilde{\beta} &= \mathrm{Gys}_{P'\subset P}(\mathrm{Clf}_i),\\ \tilde{\gamma} &= \mathrm{Clf}_{j\circ i}.\end{aligned}$$

On est ainsi ramené à établir l'égalité $\tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$ dans $\mathrm{H}^{2m}(P,\Lambda(m))$.

D'après les lemmes 2.2.2.4 et 2.2.2.6, on a $\mathrm{Cl}_{i|Z} = (-1)^m c_m(\mathscr{N}_{Y/Z})$. On en déduit l'égalité

$$\tilde{\alpha} = (-1)^m c_m(\mathscr{N}_{Y/Z}).$$

Pour calculer $\tilde{\beta}$, on observe que l'Idéal de P' dans P s'identifie au faisceau inversible $\mathscr{K}\otimes_{\mathscr{O}_Z}\mathscr{O}(-1)$ où $\mathscr{K} = \mathscr{N}_{X/Y\,|Z}$ est le noyau de l'épimorphisme $\mathscr{N}_{X/Z} \to \mathscr{N}_{Y/Z}$. On en déduit

$$\tilde{\beta} = (\xi - c_1(\mathscr{K}))\cdot\left[\xi^{m-1} - c_1(\mathscr{N}_{Y/Z})\xi^{m-2} + \cdots + (-1)^{m-1}c_{m-1}(\mathscr{N}_{Y/Z})\right].$$

Par ailleurs, la définition de $\tilde{\gamma}$ donne l'égalité :

$$\tilde{\gamma} = \xi^m - c_1(\mathscr{N}_{X/Z})\xi^{m-1} + \cdots + (-1)^m c_m(\mathscr{N}_{X/Z}).$$

La formule de Cartan-Whitney appliquée à la suite exacte courte

$$0 \to \mathscr{K} \to \mathscr{N}_{X/Z} \to \mathscr{N}_{Y/Z} \to 0$$

de fibrés vectoriels sur Z permet d'obtenir aussitôt la relation voulue $\tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$, ce qui achève la démonstration du théorème.

2.3.5. Lemme. — *Supposons que l'on dispose d'un carré cartésien dans la catégorie des $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas :*

$$\begin{tikzcd} Y_{12} \arrow[r, "i'_1"] \arrow[d, "i'_2"'] & Y_2 \arrow[d, "i_2"] \\ Y_1 \arrow[r, "i_1"] & X. \end{tikzcd}$$

Supposons de plus que i_1 et i'_1 (resp. i_2 et i'_2) soient deux immersions fermées régulières de même codimension c_1 *(resp. c_2). Alors, on a l'égalité suivante entre opérateurs*

$H^p(Y_{12}, \Lambda(q)) \to H^{p+2c_1+2c_2}_{Y_{12}}(X, \Lambda(q + c_1 + c_2))$:

$$\mathrm{Gys}_{Y_1 \subset X} \circ \mathrm{Gys}_{Y_{12} \subset Y_1} = \mathrm{Gys}_{Y_2 \subset X} \circ \mathrm{Gys}_{Y_{12} \subset Y_2} .$$

D'après la proposition 2.3.2, l'image de Cl_{i_1} par $i_2^\star \colon H^{2c_1}_{Y_1}(X, \Lambda(c_1)) \to H^{2c_1}_{Y_{12}}(Y_2, \Lambda(c_1))$ est $\mathrm{Cl}_{i_1'}$. Ceci permet de montrer que l'opérateur $\mathrm{Gys}_{Y_2 \subset X} \circ \mathrm{Gys}_{Y_{12} \subset Y_2}$ est induit par le produit $\mathrm{Cl}_{i_1} \cdot \mathrm{Cl}_{i_2} \in H^{2c_1+2c_2}_{Y_{12}}(X, \Lambda(c_1 + c_2))$. Par symétrie des rôles de Y_1 et Y_2, on obtient l'identité énoncée dans le lemme.

2.3.6. Remarque. — Une fois que le théorème 2.3.3 est connu, on peut observer que les deux opérateurs apparaissant dans le lemme précédent sont égaux à $\mathrm{Gys}_{Y_{12} \subset X}$, ce qui signifie aussi que le produit $\mathrm{Cl}_{i_1} \cdot \mathrm{Cl}_{i_2} \in H^{2c_1+2c_2}_{Y_{12}}(X, \Lambda(c_1 + c_2))$ est égal à Cl_k où $k \colon Y_{12} \to X$ est l'inclusion de l'intersection de Y_1 et Y_2 dans X.

La classe que l'on a définie est compatible avec celle définie localement dans [SGA $4\frac{1}{2}$ [Cycle] 2.2] :

2.3.7. Proposition. — *Soit $i \colon Y \to X$ une immersion régulière de codimension c entre $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas. Le morphisme de faisceaux $\Lambda \to \mathscr{H}^{2c}(i^! \Lambda(c))$ induit par le morphisme $\mathrm{Cl}_i \colon \Lambda \to i^? \Lambda$ est donné par la classe* $\mathrm{cl}\, Y$ *de* [SGA $4\frac{1}{2}$ [Cycle] 2.2].

Le lecteur intéressé par les questions de signes pourra consulter 4.8...

2.4. Morphismes lisses. — Soit $p \colon X \to S$ un morphisme lisse compactifiable de $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas de dimension relative d. D'après [SGA 4 XVIII 2.9], on dispose d'un morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_p \colon \mathrm{R}^{2d} p_! \Lambda(d) \to \Lambda,$$

que l'on peut réinterpréter sous la forme d'un morphisme

$$\mathrm{R}p_! \Lambda(d)\, [2d] \to \Lambda$$

dans $\mathsf{D}^+(S_{\text{ét}}, \Lambda)$ (en effet, d'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre et [SGA 4 X 4.3], les faisceaux $\mathrm{R}^i p_! \Lambda$ sont nuls pour $i > 2d$).

2.4.1. Définition. — Soit $p \colon X \to S$ un morphisme lisse compactifiable de $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas. Le morphisme $\mathrm{Cl}_p \colon \Lambda \to p^? \Lambda$(viii) dans $\mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ est le morphisme déduit par adjonction du morphisme $\mathrm{R}p_! \Lambda(d)\, [2d] \to \Lambda$ défini ci-dessus.

D'après [SGA 4 XVIII 3.2.4], ce morphisme Cl_p est un isomorphisme : c'est la dualité de Poincaré.

(viii) On rappelle que l'on a posé $p^? = p^!(-d)\, [-2d]$ où d est la dimension relative de p.

2.4.2. Proposition. — *Si $f\colon Z \to Y$ et $g\colon Y \to X$ sont des morphismes lisses compactifiables composables, le diagramme suivant est commutatif dans $\mathsf{D}^+(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$:*

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\mathrm{Cl}_f"] \arrow[dr, "\mathrm{Cl}_{g\circ f}"'] & f^?\Lambda \arrow[d, "f^?(\mathrm{Cl}_g)"] \\ & f^?g^?\Lambda. \end{tikzcd}$$

Ceci est énoncé en [SGA 4 XVIII 3.2.4] et résulte de la compatibilité des morphismes traces à la composition, cf. propriété (Var 3) dans [SGA 4 XVIII 2.9].

2.4.3. Remarque. — Si cette théorie avait été à notre disposition, il eût peut-être été plus commode d'utiliser ici la construction des foncteurs $f^!$ pour f lissifiable mentionnée dans l'introduction de [SGA 4 XVIII 0.4]. Dans le cadre axiomatique des « foncteurs homotopiques stables », ceci est réalisé dans [Ayoub, 2007].

2.5. Morphismes d'intersection complète lissifiables

2.5.1. Définition. — Un morphisme d'**intersection complète** est un morphisme $X \xrightarrow{f} S$ admettant localement une factorisation sous la forme $X \xrightarrow{i} T \xrightarrow{p} S$ où p est lisse et i une immersion régulière (cf. [SGA 6 VII 1.4]). On pose $\operatorname{dim.rel.virt.} f = \dim p - \operatorname{codim} i$: c'est la dimension relative virtuelle de f (cf. [SGA 6 VIII 1.9]). Il s'agit d'une fonction localement constante $X \to \mathbf{Z}$.

2.5.2. Définition. — On note $\mathscr{S}$ la catégorie dont les objets sont les $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas quasi-compacts admettant un faisceau inversible ample et dont les morphismes sont les morphismes de type fini entre de tels schémas. On note $\mathscr{S}^{\mathrm{ic}}$ la sous-catégorie de $\mathscr{S}$ ayant les mêmes objets mais dont les morphismes sont les morphismes d'intersection complète.

Dans $\mathscr{S}$, tout morphisme $X \to Y$ peut se factoriser sous la forme $X \xrightarrow{i} \mathbf{P}^n_Y \xrightarrow{\pi} Y$ où i est une immersion et π la projection canonique. Tous les morphismes de $\mathscr{S}$ sont donc compactifiables, on peut leur appliquer le formalisme des foncteurs $\mathrm{R}f_!$ et $f^!$.

Les morphismes de $\mathscr{S}^{\mathrm{ic}}$ admettent des factorisations globales dans $\mathscr{S}^{\mathrm{ic}}$ sous la forme d'une immersion fermée régulière suivie d'un morphisme lisse.

2.5.3. Définition. — Pour tout morphisme $f\colon X \to Y$ dans $\mathscr{S}^{\mathrm{ic}}$, on peut définir un foncteur

$$f^?\colon \mathsf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda) \to \mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$$

par la formule $f^? = f^!(-d)\,[-2d]$ où $d = \operatorname{dim.rel.virt.} f$ [(ix)].

(ix) On peut donner un sens à cette définition même si la dimension relative virtuelle n'est pas constante. On définit alors $f^?K$ pour tout $K \in \mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ par recollement des objets

Les foncteurs $f^?$ sont les foncteurs image inverse pour une structure de catégorie fibrée convenable au-dessus de la catégorie $\mathscr{S}^{\mathrm{ic}}$: on utilisera implicitement les isomorphismes de transitivité $f^?g^? \simeq (gf)^?$ associés à la composition de deux morphismes composables dans $\mathscr{S}^{\mathrm{ic}}$.

2.5.4. Définition. — Soit $f\colon X \to S$ un morphisme dans $\mathscr{S}^{\mathrm{ic}}$. On suppose donnée une factorisation de f dans $\mathscr{S}^{\mathrm{ic}}$ sous la forme $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} S$ où i est une immersion régulière et p un morphisme lisse. On définit un morphisme

$$\mathrm{Cl}_{p,i}\colon \Lambda \to f^?\Lambda$$

dans $\mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ comme étant le morphisme composé

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\mathrm{Cl}_i"] \arrow[dr, "\mathrm{Cl}_{p,i}"'] & i^?\Lambda \arrow[d, "i^?(\mathrm{Cl}_p)"] \\ & f^?\Lambda \end{tikzcd}$$

où Cl_i est le morphisme de la définition 2.3.1 et Cl_p celui de la définition 2.4.1.

2.5.5. Théorème. — *Soit $f\colon X \to S$ un morphisme dans $\mathscr{S}^{\mathrm{ic}}$. Si $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} S$ et $X \xrightarrow{i'} Y' \xrightarrow{p'} S$ sont deux factorisations du type envisagé dans la définition 2.5.4, alors les deux morphismes suivants dans la catégorie $\mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ sont égaux :*

$$\mathrm{Cl}_{p,i} = \mathrm{Cl}_{p',i'}\colon \Lambda \to f^?\Lambda.$$

La notation suivante s'avère assez commode pour cette démonstration :

2.5.6. Définition. — Si $f\colon Z \to Y$ et $g\colon Y \to X$ sont des morphismes composables dans $\mathscr{S}^{\mathrm{ic}}$, $a\colon \Lambda \to g^?\Lambda$ et $b\colon \Lambda \to f^?\Lambda$ des morphismes dans $\mathsf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ et $\mathsf{D}^+(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$ respectivement, on pose $a \bigstar b = f^?(a) \circ b\colon \Lambda \to (g \circ f)^?\Lambda$.

Cette loi $\bigstar$ vérifiant une propriété d'associativité évidente, on omettra les parenthèses.

Par définition, on a ainsi : $\mathrm{Cl}_{p,i} = \mathrm{Cl}_p \bigstar \mathrm{Cl}_i$. On veut vérifier l'égalité $\mathrm{Cl}_p \bigstar \mathrm{Cl}_i = \mathrm{Cl}_{p'} \bigstar \mathrm{Cl}_{i'}$. Quitte à introduire le produit fibré de Y et de Y' au-dessus de S, on peut supposer que « Y' coiffe Y », à savoir qu'il existe un morphisme lisse $q\colon Y' \to Y$ tel que $i = q \circ i'$ et $p' = p \circ q$:

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[d, "q"] \arrow[dr, "p'"] & \\ X \arrow[ur, "i'"] \arrow[r, "i"'] & Y \arrow[r, "p"'] & S. \end{tikzcd}$$

$(f^!K)_{|U_i}(-i)[-2i]$ sur les ouverts-fermés disjoints $U_i := \{x \in X, d(x) = i\}$ où f est de dimension relative virtuelle i, pour tout $i \in \mathbf{Z}$.

On a ainsi

$$\mathrm{Cl}_{p',i'} = \mathrm{Cl}_{p'} \bigstar \mathrm{Cl}_{i'} = \mathrm{Cl}_p \bigstar \mathrm{Cl}_q \bigstar \mathrm{Cl}_{i'}\ ,$$

la dernière égalité résultant de la proposition 2.4.2. On est ramené à montrer l'égalité $\mathrm{Cl}_i = \mathrm{Cl}_q \bigstar \mathrm{Cl}_{i'}$. Pour cela, on introduit le produit fibré X' de X et Y' au-dessus de Y :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "q'"] & Y' \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "i"'] \arrow[u, bend left, dotted, "s"] \arrow[ur, "i'"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Le morphisme i' donne naissance à la section s de la projection $q' \colon X' \to X$. Le morphisme q étant lisse, l'immersion $j \colon X' \to Y'$ est régulière. Admettons provisoirement les égalités suivantes :

$$\mathrm{Cl}_{q'} \bigstar \mathrm{Cl}_s = \mathrm{Id}_\Lambda, \qquad \mathrm{Cl}_q \bigstar \mathrm{Cl}_j = \mathrm{Cl}_i \bigstar \mathrm{Cl}_{q'}.$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cl}_i &= \mathrm{Cl}_i \bigstar \mathrm{Cl}_{q'} \bigstar \mathrm{Cl}_s \\ &= \mathrm{Cl}_q \bigstar \mathrm{Cl}_j \bigstar \mathrm{Cl}_s. \end{aligned}$$

On utilise alors la composition des morphismes de Gysin associés aux immersions régulières (cf. théorème 2.3.3). Celle-ci donne l'égalité $\mathrm{Cl}_j \bigstar \mathrm{Cl}_s = \mathrm{Cl}_{i'}$ qui permet de conclure que $\mathrm{Cl}_i = \mathrm{Cl}_q \bigstar \mathrm{Cl}_{i'}$. Les deux lemmes qui suivent permettent d'obtenir les deux égalités admises ci-dessus :

2.5.7. Lemme. — *Soit un diagramme cartésien dans $\mathscr{S}$:*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "q'"] & Y' \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "i"] & Y. \end{tikzcd}$$

On suppose que q est lisse et que i est une immersion régulière (donc j aussi). Alors on a l'égalité

$$\mathrm{Cl}_q \bigstar \mathrm{Cl}_j = \mathrm{Cl}_i \bigstar \mathrm{Cl}_{q'}.$$

On peut supposer que i est une immersion fermée. On identifie Cl_i (resp. Cl_j) à une classe dans $\mathrm{H}^{2d}_X(Y, \Lambda(d))$ (resp. $\mathrm{H}^{2c}_{X'}(Y', \Lambda(c))$) où c est la codimension de l'immersion régulière i. D'après la proposition 2.3.2, on a $q^\star(\mathrm{Cl}_i) = \mathrm{Cl}_j$.

On peut identifier $\mathsf{D}^+(X'_{\text{ét}}, \Lambda)$ à la sous-catégorie pleine de $\mathsf{D}^+(Y'_{\text{ét}}, \Lambda)$ formée des complexes tels K que $K \xrightarrow{\sim} j_\star j^\star K$: le foncteur $j_\star$ s'interprète alors comme un foncteur d'inclusion. On identifie de même $\mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ à une sous-catégorie pleine de $\mathsf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$. Le foncteur $q'_! \colon \mathsf{D}^+(X'_{\text{ét}}, \Lambda) \to \mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ est alors induit par $q_!\colon \mathsf{D}^+(Y'_{\text{ét}},\Lambda) \to \mathsf{D}^+(Y_{\text{ét}},\Lambda)$ et $q'^!$ est également induit par $q^!$. Notons d la dimension relative de q. Le morphisme $\mathrm{Tr}_q\colon q_!\Lambda_Y(d)[2d] \to \Lambda_Y$ s'étend *via* la formule de projection [SGA 4 XVII 5.2.9] en un morphisme fonctoriel en $K \in \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(Y_{\text{ét}},\Lambda)$:

$$\mathrm{Tr}_q\colon q_!q^\star K(d)[2d] \simeq q_!\Lambda_{Y'}(d)[2d] \overset{\mathrm{L}}{\otimes} K \xrightarrow{\mathrm{Tr}_q \overset{\mathrm{L}}{\otimes} K} \Lambda_Y \overset{\mathrm{L}}{\otimes} K \simeq K.$$

La compatibilité du morphisme trace au changement de base par i (propriété (Var 2) de [SGA 4 XVIII 2.9]) revient à dire que pour $K = \Lambda_X = i_\star\Lambda_X \in \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(Y_{\text{ét}},\Lambda)$, le morphisme $\mathrm{Tr}_q\colon q_!q^\star\Lambda_X(d)[2d] \to \Lambda_X$ est $\mathrm{Tr}_{q'}$. La fonctorialité de la transformation naturelle Tr_q ci-dessus appliquée au morphisme $\mathrm{Cl}_i\colon \Lambda_X \to \Lambda_Y(c)[2d]$ fournit alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
q_!q^\star\Lambda_X(d)[2d] \arrow[r, "\mathrm{Tr}_{q'}"] \arrow[d, "q_!q^\star\mathrm{Cl}_i"] & \Lambda_X \arrow[d, "\mathrm{Cl}_i"] \\
q_!q^\star\Lambda_Y(d+c)[2d+2c] \arrow[r, "\mathrm{Tr}_q(c)[2c]"] & \Lambda_Y(c)[2c].
\end{tikzcd}$$

Compte tenu de l'identité $q^\star\mathrm{Cl}_i = \mathrm{Cl}_j$ précédemment obtenue, la commutativité du diagramme ci-dessus signifie précisément que $\mathrm{Cl}_q\bigstar\mathrm{Cl}_j = \mathrm{Cl}_i\bigstar\mathrm{Cl}_{q'}$.

2.5.8. Lemme. — *Soit $p\colon X \to S$ un morphisme lisse dans $\mathscr{S}$ admettant une section $s\colon S \to X$ (qui est une immersion régulière). Alors, $\mathrm{Cl}_p\bigstar\mathrm{Cl}_s = \mathrm{Id}_\Lambda$ dans $\mathsf{D}^+(S_{\text{ét}},\Lambda)$.*

Les endomorphismes de Λ dans $\mathsf{D}^+(S_{\text{ét}},\Lambda)$ étant donnés par des sections du faisceau Λ dans S, il suffit de vérifier que les nombres obtenus en passant aux points génériques de S sont égaux à 1. Comme on peut supposer que S est réduit et que la construction est compatible avec le passage aux points génériques, on peut supposer que S est le spectre d'un corps k. Notons x l'image de $\mathrm{Spec}(k)$ dans X. Quitte à remplacer X par un voisinage ouvert, on peut supposer qu'il existe un morphisme étale $\pi\colon X \to \mathbf{A}^d_k$ identifiant x à l'image inverse de l'origine dans $\mathbf{A}^d_k$. En utilisant l'isomorphisme évident $\mathrm{H}^{2d}_{(0,\ldots,0)}(\mathbf{A}^d_k,\Lambda(d)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{2d}_x(X,\Lambda(d))$, on se ramène au lemme suivant :

2.5.9. Lemme. — *Pour tout entier naturel d et tout schéma $S \in \mathscr{S}$, si on note $p\colon \mathbf{A}^d_S \to S$ la projection et $s\colon S \to \mathbf{A}^d_S$ l'inclusion de l'origine, on a l'égalité*

$$\mathrm{Cl}_p\bigstar\mathrm{Cl}_s = \mathrm{Id}_\Lambda$$

dans $\mathsf{D}^+(S_{\text{ét}},\Lambda)$.

L'énoncé est évident pour $d = 0$. Une récurrence évidente s'appuyant sur le théorème 2.3.3 et la proposition 2.4.2 permet de se ramener au cas où $d = 1$, et comme précédemment, on peut supposer que $S = \mathrm{Spec}(k)$ où k est un corps que l'on peut supposer séparablement clos. On se ramène finalement au lemme suivant :

2.5.10. Lemme. — *Pour tout corps séparablement clos k, si on note $p\colon \mathbf{P}^1_k \to \mathrm{Spec}(k)$ la projection et $s\colon \mathrm{Spec}(k) \to \mathbf{P}^1_k$ l'inclusion de 0, on a l'égalité*

$$\mathrm{Cl}_p \bigstar \mathrm{Cl}_s = \mathrm{Id}_\Lambda$$

dans $\mathsf{D}^+(\mathrm{Spec}(k)_{\text{ét}}, \Lambda)$.

L'idéal de l'immersion fermée s s'identifie au faisceau inversible $\mathscr{O}(-1)$ sur la droite projective. L'image $\mathrm{Cl}_{s|\mathbf{P}^1_k}$ de Cl_s dans $\mathrm{H}^2(\mathbf{P}^1_k, \Lambda(1))$ est $-c_1(\mathscr{O}(-1)) = c_1(\mathscr{O}(1))$ (cf. définitions 2.1.1 et 2.3.1). Le degré du fibré en droites $\mathscr{O}(1)$ étant 1, on peut conclure en utilisant la commutativité du diagramme suivant (cf. [SGA 4 XVIII 1.1.6]) :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pic}(\mathbf{P}^1_k) \arrow[r, "c_1"] \arrow[dr, "\deg"'] & \mathrm{H}^2(\mathbf{P}^1_k, \Lambda(1)) \arrow[d, "\sim"', "\mathrm{Tr}_p"] \\ & \Lambda. \end{tikzcd}$$

2.5.11. Définition. — Soit $f\colon X \to S$ un morphisme dans $\mathscr{S}^{\mathrm{ic}}$. On note $\mathrm{Cl}_f\colon \Lambda \to f^?\Lambda$ le morphisme $\mathrm{Cl}_{p,i}$ dans $\mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ défini à partir d'une factorisation de f dans $\mathscr{S}^{\mathrm{ic}}$ sous la forme $f = p \circ i$ avec i une immersion régulière et p un morphisme lisse. D'après le théorème 2.5.5, cette définition est indépendante de la factorisation.

2.5.12. Théorème. — *Si $X \xrightarrow{f} Y$ et $Y \xrightarrow{g} Z$ sont des morphismes composables dans $\mathscr{S}^{\mathrm{ic}}$, le diagramme suivant est commutatif dans $\mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.*

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\mathrm{Cl}_f"] \arrow[dr, "\mathrm{Cl}_{g\circ f}"'] & f^?\Lambda \arrow[d, "f^?(\mathrm{Cl}_g)"] \\ & (g \circ f)^?\Lambda. \end{tikzcd}$$

Paraphrasant [SGA 6 VIII 2.6], on choisit une factorisation $Y \xrightarrow{j} V' \xrightarrow{p'} Z$ dans $\mathscr{S}^{\mathrm{ic}}$ avec j une immersion régulière et p' lisse, et une immersion régulière $X \xrightarrow{i} \mathbf{P}^n_Y$, de façon à obtenir le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{P}^n_Y \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "p"] & \mathbf{P}^n_{V'} \arrow[d, "p''"] \\ & Y \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "g"'] & V' \arrow[d, "p'"] \\ & & Z. \end{tikzcd}$$

En utilisant le théorème 2.3.3 et la proposition 2.4.2, on obtient

$$\mathrm{Cl}_{g\circ f} = (\mathrm{Cl}_{p'} \bigstar \mathrm{Cl}_{p''}) \bigstar (\mathrm{Cl}_{j'} \bigstar \mathrm{Cl}_i).$$

Le lemme 2.5.7 donne l'égalité :

$$\mathrm{Cl}_{p''} \bigstar \mathrm{Cl}_{j'} = \mathrm{Cl}_j \bigstar \mathrm{Cl}_p,$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\mathrm{Cl}_{g\circ f} = (\mathrm{Cl}_{p'} \bigstar \mathrm{Cl}_j) \bigstar (\mathrm{Cl}_p \bigstar \mathrm{Cl}_i),$$

où l'on reconnaît l'égalité $\mathrm{Cl}_{g\circ f} = \mathrm{Cl}_g \bigstar \mathrm{Cl}_f$.

2.5.13. Proposition. — *Soit $f\colon X \to S$ un morphisme dans $\mathscr{S}^{\mathrm{ic}}$. On suppose que f est plat de dimension relative d. Alors le morphisme $\mathrm{Cl}_f\colon \Lambda \to f^? \Lambda$ correspond par adjonction au morphisme $\mathrm{R}f_! \Lambda(d)[2d] \to \Lambda$ donné par le morphisme trace $\mathrm{Tr}_f\colon \mathrm{R}^{2d} f_! \Lambda(d) \to \Lambda$.*

Compte tenu de la proposition 2.3.7, cela résulte de [SGA $4\frac{1}{2}$ [Cycle] 2.3.8 (i)].

2.5.14. Remarque. — Si $f\colon X \to Y$ est un morphisme propre dans $\mathscr{S}^{\mathrm{ic}}$ de dimension relative virtuelle (constante) d, le morphisme Cl_f permet de définir, pour tout $K \in \mathrm{D}^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$, un morphisme $f_\star\colon \mathrm{H}^p(X, f^\star K) \to \mathrm{H}^{p-2d}(Y, K(-d))$, compatible à la composition. On peut aussi en définir une version à supports $f_\star\colon \mathrm{H}^p_Z(X, f^\star K) \to \mathrm{H}^{p-2d}_{Z'}(Y, K(-d))$ si $f\colon X \to Y$ est un morphisme dans $\mathscr{S}^{\mathrm{ic}}$, que Z et Z' sont des sous-schémas fermés de X et Y respectivement, que $f(Z) \subset Z'$ et que morphisme induit $f_{|Z}\colon Z \to Z'$ est propre.

3. Théorème de pureté

3.1. Énoncés. — L'objectif de cette section est de donner une démonstration du théorème suivant :

3.1.1. Théorème. — *Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma régulier. Soit Y un sous-schéma (fermé) de X qui est aussi régulier. On note $i\colon Y \to X$ l'immersion, et c sa codimension. Alors, le morphisme de Gysin $\mathrm{Cl}_i\colon \Lambda \to i^? \Lambda = i^! \Lambda(c)\,[2c]$ est un isomorphisme dans $\mathrm{D}^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$.*

3.1.2. Corollaire. — *Soit $f\colon X \to S$ un morphisme de type fini entre $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas réguliers. On suppose que X et S admettent un faisceau ample. Alors, le morphisme de Gysin $\mathrm{Cl}_f(d)[2d]\colon \Lambda(d)[2d] \to f^! \Lambda$ est un isomorphisme dans $\mathrm{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, où d désigne la dimension relative virtuelle de f.*

3.1.3. Corollaire. — *Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma régulier. Soit D un diviseur régulier dans X. On note $j\colon X - D \to X$ l'inclusion de son complémentaire. Alors, on dispose d'isomorphismes canoniques $j_\star \Lambda = \Lambda$, $\mathrm{R}^1 j_\star \Lambda = \Lambda_Z(-1)$ et $\mathrm{R}^q j_\star \Lambda = 0$ pour $q \geq 2$.*

Ce corollaire résulte du théorème 3.1.1 appliqué à l'immersion fermée $i\colon D \to X$ et de la suite exacte longue de cohomologie appliquée au triangle distingué canonique suivant dans $\mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$i_\star i^\star \Lambda \to \Lambda \to \mathrm{R}j_\star \Lambda \xrightarrow{\delta} i_\star i^! \Lambda[1]$$

L'isomorphisme $\Lambda_Z(-1) \simeq \mathrm{R}^1 j_\star \Lambda_Z(-1)$ est normalisé de façon à ce que le composé $\Lambda_Z(-1) \simeq \mathrm{R}^1 j_\star \Lambda_Z(-1) \underset{\sim}{\xrightarrow{\delta}} i_\star \mathrm{R}^2 i^! \Lambda$ soit donné par la classe Cl_i. Alternativement, cette identification est induite par une section globale du faisceau $\mathrm{R}^1 j_\star \Lambda(1)$ qui est donnée localement par l'opposé de la classe du μ_n-torseur des racines n-ièmes de f où f est une équation locale de D dans X. (Voir la démonstration du lemme 3.4.8 pour plus de détails sur cette compatibilité.)

3.1.4. Corollaire. — *Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma régulier. Soit D un diviseur à croisements normaux dans X. On note $j\colon X - D \to X$ l'inclusion de son complémentaire. Alors, $\mathrm{R}j_\star\Lambda$ appartient à $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{ctf}}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Plus précisément, si $D = D_1 + \cdots + D_n$ est un diviseur à croisements normaux strict, alors $\mathrm{R}^1 j_\star \Lambda$ s'identifie à $\bigoplus_{1 \leq i \leq n} \Lambda_{D_i}(-1)$ et $\mathrm{R}^\star j_\star \Lambda$ est l'algèbre extérieure sur $\mathrm{R}^1 j_\star \Lambda$.*

Ce corollaire mérite une démonstration. Pour la première assertion, on peut travailler localement pour la topologie étale sur X ; il suffit donc d'établir la deuxième assertion. On suppose que $D = D_1 + \cdots + D_n$ est un diviseur à croisements normaux strict. On note $j_i\colon X - D_i \to X$ l'inclusion du complémentaire de D_i pour tout i. Nous allons montrer que le morphisme de Künneth

$$\mathrm{R}j_{1\star}\Lambda \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \ldots \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathrm{R}j_{n\star}\Lambda \to \mathrm{R}j_\star\Lambda$$

est un isomorphisme dans $\mathsf{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, ce qui impliquera le résultat vu que les faisceaux $\mathrm{R}^q j_{i\star}\Lambda$ sont connus par pureté (corollaire 3.1.3) et qu'ils sont plats.

On procède par récurrence sur n. Les cas $n = 0$ et $n = 1$ sont évidents. On suppose $n \geq 2$, on pose $D' = D_2 + \cdots + D_n$ et on fait l'hypothèse que le résultat est connu pour D'. Il s'agit donc de montrer que si on note $j'\colon X - D' \to X$ l'inclusion du complémentaire de D', alors le morphisme de Künneth

$$\mathrm{R}j_{1\star}\Lambda \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathrm{R}j'_\star\Lambda \to \mathrm{R}j_\star\Lambda$$

est un isomorphisme. Autrement dit, le morphisme canonique

$$\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(\Lambda_{X-D_1}, \Lambda) \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(\Lambda_{X-D'}, \Lambda) \to \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(\Lambda_{X-D_1} \otimes \Lambda_{X-D'}, \Lambda)$$

est un isomorphisme dans $\mathsf{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. À K (resp. L) fixé dans $\mathsf{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, la famille des L (resp. K) tels que le morphisme

$$\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(K, \Lambda) \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(L, \Lambda) \to \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(K \overset{\mathrm{L}}{\otimes} L, \Lambda)$$

soit un isomorphisme, propriété que nous appellerons (Kü), est une sous-catégorie triangulée de $\mathsf{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

Pour $K = \Lambda$ ou $L = \Lambda$, la condition (Kü) est évidemment vérifiée, la montrer pour $(\Lambda_{X-D_1}, \Lambda_{X-D'})$ revient donc, par dévissage, à la montrer pour $(\Lambda_{D_1}, \Lambda_{X-D'})$ ou encore pour $(\Lambda_{D_1}, \Lambda_{D'})$. Il résulte aussitôt du théorème de pureté et des compatibilités obtenues (cf. remarque 2.3.6) que si Y et Z sont deux sous-schémas fermés réguliers de X s'intersectant transversalement (*i.e.* $Y \cap Z$ est régulier de codimension la somme des codimensions de Y et de Z), alors (Λ_Y, Λ_Z) vérifie (Kü). En particulier, $(\Lambda_{D_1}, \Lambda_{D_i})$ vérifie (Kü) pour $i \geq 2$ et plus généralement, pour tout sous-ensemble non vide I de $\{2, \ldots, n\}$, $(\Lambda_{D_1}, \Lambda_{D_I})$ vérifie (Kü) où D_I est l'intersection des D_i pour $i \in I$. En utilisant la suite exacte standard

$$0 \to \Lambda_{D'} \to \bigoplus_{2 \leq i \leq n} \Lambda_{D_i} \to \bigoplus_{2 \leq i < j \leq n} \Lambda_{D_{ij}} \to \cdots,$$

on en déduit par dévissage la condition (Kü) pour $(\Lambda_{D_1}, \Lambda_{D'})$, ce qu'il fallait démontrer.

3.1.5. Définition. — Un **couple régulier** est un couple (X, Y) où X est un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma régulier et Y un sous-schéma fermé de X qui est régulier. On dit que (X, Y) est **pur** si la conclusion du théorème 3.1.1 est vraie pour l'inclusion de Y dans X. Si $\overline{y} \to Y$ est un point géométrique de Y, on dira que (X, Y) est **pur en** $\overline{y}$ si après passage aux germes en $\overline{y}$, le morphisme $\mathrm{Cl}_i \colon \Lambda \to i^{?}\Lambda$ induit un isomorphisme dans la catégorie $\mathsf{D}^+(\overline{y}_{\text{ét}}, \Lambda)$.

Le théorème 3.1.1 peut ainsi se reformuler en disant que tout couple régulier est pur. Dans la sous-section 3.2 sera introduite la notion de pureté ponctuelle qui consiste à étudier les couples réguliers de la forme (X, x) où X est un schéma local régulier de point fermé x. Pour démontrer le théorème de pureté, il suffira de savoir que les couples réguliers de cette forme sont purs. Dans la sous-section 3.3, on se ramènera au cas où l'anneau de coefficients Λ est $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ avec ℓ un nombre premier inversible sur les schémas réguliers considérés. Dans la sous-section 3.4, on établira quelques propriétés utiles concernant la pureté des couples réguliers donnés par des diviseurs. Comme dans la démonstration de [Fujiwara, 2002], la démonstration de la pureté ponctuelle pour des schémas réguliers arbitraires se ramènera à celle des schémas réguliers qui sont de type fini sur un trait S (d'inégale caractéristique). Dans la sous-section 3.5, on obtiendra des conditions suffisantes pour montrer que des schémas réguliers de type fini sur S sont ponctuellement purs. La sous-section 3.6 donnera les énoncés de géométrie logarithmique permettant d'établir que si (X, M) est un log-schéma log-lisse sur un trait (muni de sa log-structure canonique) et que le schéma X est régulier, alors X est ponctuellement pur. La démonstration du théorème 3.1.1 sera donnée dans la sous-section 3.7. Elle utilisera les résultats des sous-sections précédentes ainsi que trois théorèmes de résolution des singularités que l'on peut résumer ainsi :

— utilisation d'altérations pour obtenir un schéma à réduction semi-stable à partir d'un schéma (normal) sur S (cf. [Vidal, 2004, proposition 4.4.1]) ;
— modification d'une action modérée d'un groupe fini sur un log-schéma log-régulier de façon à obtenir une action très modérée (cf. X-1.1) ;
— résolution des singularités des log-schémas log-réguliers (théorème de Kato-Nizioł, cf. [Kato, 1994, 10.3, 10.4] et [Nizioł, 2006, 5.7]).

3.2. Pureté ponctuelle

3.2.1. Définition. — Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma local régulier. On dit que X est **ponctuellement pur en son point fermé** x si le morphisme $\mathrm{Cl}_i \colon \Lambda \to i^? \Lambda$ est un isomorphisme dans $\mathsf{D}^+(x_{\text{ét}}, \Lambda)$ où $i \colon x \to X$ est l'inclusion du point fermé de X.

Un schéma local régulier est ponctuellement pur en son point fermé si et seulement si son hensélisé (resp. son hensélisé strict) l'est.

3.2.2. Définition. — Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma. Si $x \in X$, on dit que X est **ponctuellement pur au point** x si le localisé de X en x est ponctuellement pur en son point fermé. On dit que X est **ponctuellement pur** s'il l'est en tous ses points.

La proposition suivante est [Fujiwara, 2002, proposition 2.2.4]. La démonstration de cet article semble compliquée puisqu'elle passe par des résultats plus fins que ceux dont nous avons besoin. On en redonne donc une démonstration plus courte.

3.2.3. Proposition. — *Soit $i \colon Y \to X$ une immersion fermée entre schémas réguliers. Le nombre de conditions satisfaites parmi les trois suivantes ne peut pas être deux :*

(a) *Le couple régulier (X, Y) est pur ;*
(b) *Le schéma Y est ponctuellement pur ;*
(c) *Le schéma X est ponctuellement pur aux points situés dans l'image de i.*

Soit $y \in Y$, notons $V(y)$ le localisé de Y en y et $V(x)$ celui de l'image x de y dans X. On a un diagramme de schémas :

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r, "i_y"] \arrow[dr, "i_x"'] & V(y) \arrow[d, "i'"] \\ & V(x). \end{tikzcd}$$

La composition des morphismes de Gysin donne le diagramme commutatif suivant dans $\mathsf{D}^+(y_{\text{ét}},\Lambda)$:

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\mathrm{Cl}_{i_y}"] \arrow[dr, "\mathrm{Cl}_{i_x}"'] & i_y^? \Lambda \arrow[d, "i_y^? \mathrm{Cl}_{i'}"] \\ & i_x^? \Lambda. \end{tikzcd}$$

Sur ce diagramme, on voit aussitôt que (a) et (b) impliquent (c) et que (a) et (c) impliquent (b). Montrons que (b) et (c) impliquent (a). Il s'agit de montrer que pour tout point y de Y, le morphisme $i_y^\star \mathrm{Cl}_{i'}$ est un isomorphisme. On peut procéder par récurrence sur la dimension de $V(y)$. On peut ainsi supposer que le support d'un cône C du morphisme $\mathrm{Cl}_{i'}$ dans $\mathsf{D}^+(V(y)_{\text{ét}},\Lambda)$ est contenu dans $\{y\}$. Mézalor, le morphisme canonique $i_y^! C \to i_y^\star C$ est un isomorphisme ; le diagramme ci-dessus montre que $i_y^! C = 0$, ce qui permet de conclure que $C = 0$ et finalement d'obtenir (a).

Rappelons quelques propriétés importantes concernant la pureté ponctuelle :

***3.2.4. Proposition* ([Fujiwara, 2002, proposition 2.2.2]).** — *Soit X un schéma local strictement hensélien régulier. Le complété $\hat{X}$ est ponctuellement pur en son point fermé si et seulement si X l'est.*

***3.2.5. Proposition* ([Fujiwara, 2002, corollary 2.2.3]).** — *Soit k un corps premier. Si X est schéma régulier qui est un k-schéma, alors X est ponctuellement pur.*

3.3. Changement de coefficients

3.3.1. Proposition. — *Soit n un entier naturel non nul. Soit $n = \prod_{j=1}^k \ell_j^{\nu_j}$ la factorisation de n en produit de puissances de nombres premiers distincts. Un couple régulier (X,Y) est pur relativement à l'anneau de coefficients $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ si et seulement s'il l'est relativement à l'anneau de coefficients $\mathbf{Z}/\ell_j^{\nu_j}\mathbf{Z}$ pour tout $j \in \{1,\dots,k\}$.*

Cela résulte aussitôt du lemme chinois et du fait que si m est un entier naturel divisant n, alors pour toute immersion fermée régulière $i\colon Y \to X$, le diagramme évident commute dans $\mathsf{D}^+(Y_{\text{ét}},\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \arrow[r, "\mathrm{Cl}_i"] \arrow[d] & i^? \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \arrow[d] \\ \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \arrow[r, "\mathrm{Cl}_i"] & i^? \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}. \end{tikzcd}$$

3.3.2. Proposition. — *Soit ℓ un nombre premier. Pour tout entier $\nu \geq 1$, un couple régulier (X,Y) est pur relativement à l'anneau de coefficients $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ si et seulement s'il l'est relativement à l'anneau de coefficients $\mathbf{Z}/\ell^\nu\mathbf{Z}$.*

En utilisant la résolution de Godement des faisceaux $\mathbf{Z}/\ell^\nu\mathbf{Z}(c)$ (où c est la codimension de l'immersion $i\colon Y \to X$) pour tout ν, on peut représenter les morphismes de Gysin $\mathrm{Cl}_i\colon \mathbf{Z}/\ell^\nu\mathbf{Z} \to i^?\mathbf{Z}/\ell^\nu\mathbf{Z}$ dans $\mathsf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^\nu\mathbf{Z})$ par des cocycles. Un tel cocycle pour ν_0 fixé induit pour tout entier $\nu \leq \nu_0$ un cocycle représentant le morphisme de Gysin à coefficients dans $\mathbf{Z}/\ell^\nu\mathbf{Z}$. Les propriétés élémentaires de la résolution de Godement font que, si on le souhaite, on peut en fait trouver une famille compatible de cocycles pour tout $\nu \in \mathbf{N}$.

Compte tenu de ces observations, une fois ces cocycles convenablement choisis, on dispose d'un cône privilégié $C(\nu)$ du morphisme $\mathrm{Cl}_i\colon \mathbf{Z}/\ell^\nu\mathbf{Z} \to i^?\mathbf{Z}/\ell^\nu\mathbf{Z}$ dans $\mathsf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^\nu\mathbf{Z})$ pour tout $\nu \in \mathbf{N}$ et de triangles

$$C(\mu) \longrightarrow C(\mu+\nu) \longrightarrow C(\nu) \longrightarrow C(\mu)[1]$$

dans $\mathsf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^{\mu+\nu}\mathbf{Z})$ pour tous $(\mu,\nu) \in \mathbf{N}^2$.

Par conséquent, si $C(1) = 0$, il vient que pour tout $\nu \geq 1$, $C(\nu) = 0$. Inversement, si $C(1)$ est non nul, son premier objet de cohomologie non nul s'injecte dans celui de $C(\nu)$ pour tout $\nu \geq 1$.

3.4. Diviseurs réguliers

3.4.1. Définition. — Si X est un schéma et $\overline{x} \to X$ un point géométrique, on note $V(\overline{x})$ l'hensélisé strict de X en $\overline{x}$ et $i_{\overline{x}}\colon V(\overline{x}) \to X$ le morphisme canonique.

3.4.2. Proposition. — *Soit X un schéma régulier. Soit D un diviseur régulier de X* (x)*. Le couple régulier (X, D) est pur si et seulement si pour tout point géométrique $\overline{x} \to D$, on a $\mathrm{H}^q_{\text{ét}}(V(\overline{x}) - i_{\overline{x}}^{-1}(D), \Lambda) = 0$ pour tout $q \geq 2$.*

Cela résulte du calcul de $\mathrm{H}^q_{\text{ét}}(V(\overline{x}) - i_{\overline{x}}^{-1}(D), \Lambda)$ pour $q \in \{0,1\}$ (cf. [SGA $4\frac{1}{2}$ [Cycle] 2.1.4]).

3.4.3. Proposition. — *On suppose que l'anneau de coefficients est $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ où ℓ est un nombre premier. Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme fini et plat de degré constant premier à ℓ entre $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{\ell}\right]$-schémas réguliers. Soit D un diviseur régulier de X. On suppose que $D' = f^{-1}(D)_{\text{réd}}$ est un diviseur régulier de Y. Si le couple régulier (Y, D') est pur, alors (X, D) aussi.*

Grâce à la proposition 3.4.2, on peut choisir un point géométrique de D et remplacer X par son hensélisé strict en ce point. On suppose donc que X et D sont locaux strictement henséliens et on se concentre sur la pureté du couple (X, D) en le point fermé de D. Le schéma Y est alors réunion disjointe finie de schémas locaux strictement henséliens ; au moins un de ceux-ci est de degré premier à ℓ sur X. On

(x) On veut dire par là que D est un sous-schéma fermé de X qui est régulier et purement de codimension 1. Ceci n'exclut pas le cas où D serait vide.

peut donc supposer que Y aussi est local strictement hensélien. Il suffit alors de montrer que $\mathrm{H}^q(X - D, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ s'injecte dans $\mathrm{H}^q(Y - D', \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$, ce qui résulte du lemme suivant :

3.4.4. Lemme. — *On suppose que l'anneau de coefficients Λ est $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ où ℓ est un nombre premier. Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme de présentation finie, fini et plat de rang d premier à ℓ entre $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{\ell}\right]$-schémas. Alors, le morphisme canonique $\Lambda \to f_\star\Lambda$ est un monomorphisme scindé dans $\mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.*

D'après [SGA 4 XVII 6.2.3], on a un morphisme $\mathrm{Tr}_f\colon f_\star\Lambda \to \Lambda$ tel que la composée

$$\Lambda \to f_\star\Lambda \to \Lambda$$

soit la multiplication par d, ce qui donne le scindage voulu puisque d est inversible dans Λ.

3.4.5. Proposition. — *On suppose que l'anneau de coefficients Λ est $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ où ℓ est un nombre premier. Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{\ell}\right]$-schéma régulier. Soit f une fonction sur X dont le lieu des zéros $D = V(f)$ soit un diviseur régulier de X. On pose $X' = \operatorname{Spec}\left(\mathscr{O}_X[T]/(T^\ell - f)\right)$. On note $\pi\colon X' \to X$ la projection, $D' = \pi^{-1}(D)_{\text{réd}}$ (noter que $D' \to D$ est un isomorphisme). Alors, X' est un schéma régulier, et le couple régulier (X', D') est pur si et seulement si le couple régulier (X, D) l'est.*

Soit $\overline{x}$ un point géométrique de D (on identifiera aussi $\overline{x}$ à un point géométrique de D'). On va en fait montrer que (X, D) est pur en $\overline{x}$ si et seulement si (X', D') l'est. On peut supposer que X est le spectre premier d'un anneau local strictement hensélien A d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et que $\overline{x}$ est au-dessus du point fermé de X. On a évidemment $f \in \mathfrak{m}$; le fait que $D = V(f)$ soit régulier revient à dire que $f \notin \mathfrak{m}^2$.

Notons $A' = A[T]/(T^\ell - f)$. En considérant le déterminant de l'endomorphisme de A' comme A-module donné par la multiplication par un élément $b \in A'$, on observe que b est inversible dans A' si et seulement si son image dans l'algèbre locale $(A/\mathfrak{m})[T]/(T^\ell)$ est inversible. Il en résulte que A' est local d'idéal maximal $\mathfrak{m}' = (T) + \mathfrak{m}A'$. Par ailleurs, on a un isomorphisme $A/(f) \xrightarrow{\sim} A'/(T)$ (*i.e.* $D' \to D$ est un isomorphisme). L'anneau $A_{(f)}[T]/(T^\ell - f)$ est un anneau de valuation discrète d'uniformisante T ; on en déduit un isomorphisme $A_{(f)}[T]/(T^\ell - f) \xrightarrow{\sim} A'_{(T)}$ dont il découle que le localisé de A' par rapport à l'idéal (T) est un anneau de valuation discrète. La codimension de l'idéal premier (T) dans A' est donc 1. On en déduit que $\dim A' \geq 1 + \dim A'/(T) = 1 + \dim A/(f) = \dim A$. Comme $f \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$, on peut introduire des éléments $(g_1, \ldots, g_d)$ de $\mathfrak{m}$ tels que les classes des éléments $f, g_1, \ldots, g_d$ forment une base de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ comme $A/\mathfrak{m}$-espace vectoriel. On a alors $\mathfrak{m} = (f, g_1, \ldots, g_d)$ et $\dim A = d+1$ car A est régulier. L'idéal maximal $(T) + \mathfrak{m}A'$ de A' est engendré par $(T, g_1, \ldots, g_d)$, donc $\dim A' \leq d+1 = \dim A$. Comme on sait déjà que $\dim A' \geq \dim A$, il vient que $\dim A' = d+1$ et que l'idéal maximal de A' est engendré par $\dim A'$ éléments, donc A' est régulier.

On peut considérer, pour tout entier $\nu \geq 0$, le X-schéma affine $X^\nu = \operatorname{Spec}\big(A[T]/(T^{\ell^\nu} - f)\big)$. En élevant T à la puissance ℓ, on obtient une tour de morphismes

$$\cdots \to X^{\nu+1} \to X^\nu \to \cdots \to X^1 \to X^0,$$

le dernier morphisme $X^1 \to X^0$ s'identifiant à $\pi\colon X' \to X$. Pour tout entier n inversible dans A, on note $\mu_n := \mu_n(A)$. Pour tout $\nu \geq 0$, on munit la A-algèbre $A[T]/(T^{\ell^\nu} - f)$ de l'action à gauche de μ_{ℓ^ν} telle que $\zeta \in \mu_{\ell^\nu}$ agisse en envoyant T sur ζT. Le schéma X^ν hérite ainsi d'une action à droite de μ_{ℓ^ν} et $X^\nu \times_X (X-D)$ est muni d'une structure de μ_{ℓ^ν}-torseur à droite au-dessus de $(X-D)_{\text{ét}}$. D'après 4.6.2, on dispose pour tout $\nu \geq 0$ d'un morphisme de topos $(X-D)_{\text{ét}} \to \mathbf{B}\mu_{\ell^\nu}$ tel que l'image inverse du μ_{ℓ^ν}-torseur à droite $\mathbf{E}\mu_{\ell^\nu}$ (cf. 4.6.1) s'identifie à X^ν. Les compatibilités évidentes entre les revêtements constituant cette tour font que si on note $\mathbf{Z}_\ell(1) = \lim\limits_{\nu} \mu_{\ell^\nu}$, alors on dispose en fait d'un morphisme de topos $\rho_f\colon (X-D)_{\text{ét}} \to \mathbf{BZ}_\ell(1)$ tel que le foncteur $\rho_f^\star$ envoie le système projectif $\mathbf{EZ}_\ell(1) := (\mathbf{E}\mu_{\ell^\nu})_\nu$ sur $(X^\nu \times_X (X-D))_\nu$, et ce de façon équivariante pour les actions à droite des groupes μ_{ℓ^ν}. (Si on a choisi un système compatible de points géométriques $\overline{y}_\nu$ des schémas $X^\nu \times_X (X-D)$, la construction 4.6.3 donne un système compatible de morphismes $\pi_1^{\text{ét}}(X-D, \overline{y}_0) \to \mu_{\ell^\nu}$. Par passage à la limite projective on obtient un morphisme $\pi_1^{\text{ét}}(X-D,\overline{y}_0) \to \mathbf{Z}_\ell(1)$. Le morphisme de topos ρ_f s'identifie alors au composé evident $X_{\text{ét}} \to \mathbf{B}\pi_1^{\text{ét}}(X-D,\overline{y}_0) \to \mathbf{BZ}_\ell(1)$.)

Dans la suite, le μ_ℓ-torseur étale à droite $X' - D = X^1 - D$ au-dessus de $X-D$ sera aussi considéré comme un μ_ℓ-torseur à gauche (*sans passage à l'inverse*, ce qui est possible parce que μ_ℓ est commutatif) : c'est le μ_ℓ-torseur des racines ℓ-ièmes de f.

3.4.6. Lemme. — *Le couple régulier (X,D) est pur en $\overline{x}$ si et seulement si le morphisme*

$$\mathrm{R}\Gamma(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mu_\ell) \to \mathrm{R}\Gamma((X-D)_{\text{ét}}, \mu_\ell)$$

induit par le morphisme de topos ρ_f est un isomorphisme dans la catégorie dérivée des groupes abéliens.

Ce lemme découle des deux lemmes suivants :

3.4.7. Lemme. — *Pour tout entier $q \geq 2$, $\mathrm{H}^q(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mu_\ell) = 0$ et on a des isomorphismes canoniques*

$$\mathrm{H}^0(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mu_\ell) \simeq \mu_\ell, \quad \mathrm{H}^1(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mu_\ell) \simeq \mathrm{Hom}_{cont}(\mathbf{Z}_\ell(1), \mu_\ell) \simeq \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}.$$

Pour obtenir l'identification $\mathrm{H}^1(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mu_\ell) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_\ell(1), \mu_\ell)$, on utilise des conventions de signes compatibles avec 4.6.1. Pour le reste, il s'agit de montrer que

$\mathbf{Z}_\ell(1)$ est de ℓ-dimension cohomologique 1. Pour cela, voir par exemple [Serre, 1994, § 3.4, chapitre I].

3.4.8. Lemme. — *Le morphisme composé*

$$\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \simeq \mathrm{H}^1(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mu_\ell) \xrightarrow{\rho_f^\star} \mathrm{H}^1((X-D)_{\text{ét}}, \mu_\ell) \underset{\sim}{\xrightarrow{\delta}} \mathrm{H}^2_D(X, \mu_\ell)$$

envoie 1 *sur* $-\mathrm{Cl}_{D\subset X}$.

Grâce à 4.6.1, on obtient que le générateur canonique de $\mathrm{H}^1(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mu_\ell)$ s'envoie par $\rho_f^\star$ sur la classe du μ_ℓ-torseur $X' - D \to X - D$ qui d'après la construction 4.3.1 est égale à $\delta_K(f)$ où $\delta_K\colon \mathrm{H}^i(X-D, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \to \mathrm{H}^{i+1}(X-D, \mu_\ell)$ est le morphisme de bord associé à la suite exacte de Kummer. Si on note $\delta_{X-D}\colon \mathrm{H}^i(X-D, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^{i+1}_D(X, \mathscr{F})$ les morphismes de bord reliant la cohomologie et la cohomologie à supports (cf. 4.7.6), comme dans [SGA $4\frac{1}{2}$ [Cycle] 2.1.3], 4.7.5 fournit la relation suivante dans $\mathrm{H}^2_D(X, \mu_\ell)$:

$$\begin{aligned}
\delta_{X-D}(\delta_K(f)) &= -\delta_K(\delta_{X-D}(f)) \\
&= -c_1(\mathscr{O}_X, f) \quad \text{d'après 4.7.6} \\
&= c_1(\mathscr{O}_X, f^{-1}) \\
&= c_1(f\mathscr{O}_X, 1) \\
&= -\mathrm{Cl}_{D\subset X}.
\end{aligned}$$

On peut appliquer le lemme 3.4.6 à X' : il vient que le couple régulier (X', D') est pur en $\overline{x}$ si et seulement si le morphisme

$$\mathrm{R}\Gamma(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mu_\ell) \to \mathrm{R}\Gamma((X'-D')_{\text{ét}}, \mu_\ell)$$

induit par le morphisme de topos $\rho_T\colon (X'-D')_{\text{ét}} \to \mathbf{BZ}_\ell(1)$ est un isomorphisme.

On dispose d'un carré commutatif de topos :

$$\begin{tikzcd}
(X'-D')_{\text{ét}} \arrow[r, "\rho_T"] \arrow[d, "g"] & \mathbf{BZ}_\ell(1) \arrow[d, "g'"'] \\
(X-D)_{\text{ét}} \arrow[r, "\rho_f"] & \mathbf{BZ}_\ell(1)
\end{tikzcd}$$

où g est induit par $\pi\colon X' \to X$ et g' par la multiplication par ℓ sur $\mathbf{Z}_\ell(1)$. Le faisceau $g_\star\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ s'identifie canoniquement à $\rho_f^\star g'_\star(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$. Il en découle aisément que le couple régulier (X', D') est pur en $\overline{x}$ si et seulement si le morphisme canonique

$$\mathrm{R}\Gamma(\mathbf{BZ}_\ell(1), g'_\star(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})) \to \mathrm{R}\Gamma((X-D)_{\text{ét}}, \rho_f^\star g'_\star(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}))$$

est un isomorphisme.

La cohomologie relative du morphisme de topos $\rho_f\colon (X-D)_{\text{ét}} \to \mathbf{BZ}_\ell(1)$ définit un foncteur triangulé

$$F\colon \mathsf{D}^+(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to \mathsf{D}^+(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$$

tel que pour tout $K \in \mathsf{D}^+(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$, $F(K)$ soit isomorphe à un cône du morphisme canonique $\mathrm{R}\Gamma(\mathbf{BZ}_\ell(1), K) \to \mathrm{R}\Gamma((X-D)_{\text{ét}}, \rho_f^\star K)$.

Le lemme suivant découle de ce qui précède :

3.4.9. Lemme. — *Le couple régulier (X,D) est pur en $\overline{x}$ si et seulement si $F(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) = 0$ tandis que (X',D') est pur en $\overline{x}$ si et seulement si $F(g'_\star(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})) = 0$.*

Comme $\mathbf{Z}_\ell(1)$ est un pro-ℓ-groupe, le faisceau $g'_\star(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ est une extension successive de ℓ copies de $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$. Le foncteur F étant triangulé, on en déduit aussitôt que si $F(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ est nul, alors $F(g'_\star\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ aussi et que si $F(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ est non nul, son premier objet de cohomologie non nul s'injecte dans celui de $F(g'_\star(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}))$. Ceci achève la démonstration de la proposition 3.4.5.

3.5. Schémas sur un trait. — Soit S un trait (dans lequel les nombres premiers divisant le cardinal de Λ sont inversibles). On note s son point fermé, η son point générique et π une uniformisante.

3.5.1. Proposition. — *Le trait S est ponctuellement pur.*

Il s'agit de montrer que S est ponctuellement pur en son point fermé. On peut supposer que S est strictement hensélien ; d'après la proposition 3.4.2, cela résulte alors du fait que le corps des fractions de S soit de ℓ-dimension cohomologique 1 pour tout nombre premier ℓ inversible sur S (cf. [SGA 4 X 2.2]).

3.5.2. Proposition. — *Pour tout entier naturel n, l'espace affine $\mathbf{A}^n_S$ est ponctuellement pur.*

D'après la proposition 3.2.5, les schémas $\mathbf{A}^n_s$ et $\mathbf{A}^n_\eta$ sont ponctuellement purs. Ainsi, $\mathbf{A}^n_S$ est ponctuellement pur en les points de la fibre générique. Pour établir la pureté ponctuelle de $\mathbf{A}^n_S$ en les points de la fibre spéciale, on utilise la proposition 3.2.3 : il suffit de montrer que le couple régulier $(\mathbf{A}^n_S, \mathbf{A}^n_s)$ est pur. Le cas $n = 0$ résulte de la proposition 3.5.1 et le cas général en découle en vertu du théorème de changement de base lisse.

3.5.3. Corollaire. — *Un S-schéma lisse est ponctuellement pur.*

3.5.4. Définition. — Soit $p\colon X \to S$ un morphisme de type fini, avec X régulier et admettant un faisceau ample. On pose $K_X = p^?\Lambda_S$ et on dispose d'un morphisme de Gysin $\mathrm{Cl}_{X/S}\colon \Lambda_X \to K_X$ dans $\mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ (cf. définition 2.5.11).

3.5.5. Proposition. — *Soit* $p\colon X \to S$ *un morphisme de type fini, avec* X *régulier et admettant un faisceau ample. Le schéma* X *est ponctuellement pur si et seulement si le morphisme* $\mathrm{Cl}_{X/S}\colon \Lambda_X \to K_X$ *est un isomorphisme dans* $\mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

On choisit une factorisation $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{q} S$ de p (dans la catégorie $\mathscr{S}^{\mathrm{ic}}$) avec Y lisse sur S et i une immersion fermée (régulière). D'après le théorème 2.5.12 (ou plutôt par définition de $\mathrm{Cl}_{X/S}$), le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\mathrm{Cl}_i"] \arrow[dr, "\mathrm{Cl}_{X/S}"'] & i^?\Lambda \arrow[d, "i^?\mathrm{Cl}_q", "\sim"'] \\ & i^?q^?\Lambda. \end{tikzcd}$$

Le morphisme q étant lisse, le morphisme de Gysin Cl_q est un isomorphisme. Par conséquent, $\mathrm{Cl}_{X/S}$ est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{Cl}_i\colon \Lambda \to i^?\Lambda$ en est un. D'après la proposition 3.2.3 et compte tenu du fait que Y soit ponctuellement pur (cf. corollaire 3.5.3), ceci équivaut encore à dire que X est ponctuellement pur.

3.5.6. Corollaire. — *Soit* X *un* S*-schéma de type fini qui est régulier. Soit* Y *un* X*-schéma lisse. Si* X *est ponctuellement pur, alors* Y *aussi.*

3.5.7. Proposition. — *Soit* $f\colon X \to Y$ *un morphisme propre et dominant de* S*-schémas où* X *et* Y *sont supposés de type fini sur* S*, intègres, réguliers et admettant des faisceaux amples. On suppose de plus que* f *est génériquement étale de degré* d *inversible dans* Λ*. Alors, la pureté ponctuelle de* X *implique celle de* Y*.*

Le morphisme f est localement d'intersection complète lissifiable de dimension relative virtuelle zéro, d'où $f^? = f^!$. Le morphisme de Gysin relatif à f est un morphisme $\mathrm{Cl}_f\colon \Lambda \to f^!\Lambda$.

3.5.8. Lemme. — *On peut généraliser le morphisme* $\mathrm{Cl}_f\colon \Lambda \to f^!\Lambda$ *en des morphismes* $f^\star M \to f^!M$*, fonctoriellement en* $M \in \mathsf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$.

Le morphisme $\mathrm{Cl}_f\colon \Lambda \to f^!\Lambda$ correspond par adjonction à un morphisme $\mathrm{R}f_!\Lambda \to \Lambda$, que l'on peut tensoriser avec M pour obtenir (*via* la formule de projection) un morphisme $\mathrm{R}f_!f^\star M \to M$ qui correspond lui-même par adjonction au morphisme $f^\star M \to f^!M$ du type recherché.

En appliquant la fonctorialité de la construction du lemme au morphisme $\mathrm{Cl}_{Y/S}\colon \Lambda_Y \to K_Y$, on obtient un diagramme commutatif dans $\mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

$$\begin{tikzcd} f^\star\Lambda_Y \arrow[r] \arrow[d, "f^\star(\mathrm{Cl}_{Y/S})"'] & f^!\Lambda_Y \arrow[d, "f^!(\mathrm{Cl}_{Y/S})"] \\ f^\star K_Y \arrow[r] & f^!K_Y. \end{tikzcd}$$

Via l'isomorphisme canonique $f^\star\Lambda_Y \simeq \Lambda_X$, le morphisme du haut s'identifie au morphisme $\mathrm{Cl}_f\colon \Lambda_X \to f^!\Lambda_Y$; celui de droite est $f^!(\mathrm{Cl}_{Y/S})$. D'après le théorème 2.5.12, il vient que le morphisme composé $\Lambda_X \simeq f^\star\Lambda_Y \to f^!K_Y \simeq K_X$ est le morphisme de Gysin $\mathrm{Cl}_{X/S}$. On déduit de ceci un diagramme commutatif de la forme suivante dans $\mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$\begin{tikzcd} f^\star\Lambda_Y \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "f^\star(\mathrm{Cl}_{Y/S})"'] & \Lambda_X \arrow[r, "\mathrm{Cl}_f"] \arrow[d, "\mathrm{Cl}_{X/S}"] & f^!\Lambda_Y \arrow[d, "f^!\mathrm{Cl}_{Y/S}"] \\ f^\star K_Y \arrow[r] & K_X \arrow[r, "\sim"] & f^!K_Y. \end{tikzcd}$$

Comme f est propre, on obtient par adjonction un nouveau diagramme commutatif dans $\mathsf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$\begin{tikzcd} \Lambda_Y \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Cl}_{Y/S}"'] & \mathrm{R}f_\star\Lambda_X \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{R}f_\star(\mathrm{Cl}_{X/S})"] & \Lambda_Y \arrow[d, "\mathrm{Cl}_{Y/S}"] \\ K_Y \arrow[r] & \mathrm{R}f_\star K_X \arrow[r] & K_Y. \end{tikzcd}$$

Le diagramme ci-dessus met en évidence une relation entre les morphismes $\mathrm{Cl}_{Y/S}$ et $\mathrm{R}f_\star(\mathrm{Cl}_{X/S})$. Comme va le montrer le lemme suivant, le premier morphisme est un facteur direct du second, ce qui montre que la pureté ponctuelle de X implique celle de Y, achevant la démonstration de la proposition 3.5.7.

3.5.9. Lemme. — *Sur le diagramme précédent, les morphismes composés $\Lambda_Y \to \Lambda_Y$ et $K_Y \to K_Y$ sont les multiplications par le degré d (en particulier, ce sont des isomorphismes).*

Comme Y est connexe (non vide), on a un isomorphisme évident $\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathsf{End}_{\mathsf{D}^+(Y_{\text{ét}},\Lambda)}(\Lambda_Y)$. D'après le théorème de bidualité locale (cf. [SGA 4½ [Th. finitude] 4.3]), on a aussi un isomorphisme $\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathsf{End}_{\mathsf{D}^+(Y_{\text{ét}},\Lambda)}(K_Y)$. Il suffit donc d'obtenir la conclusion au-dessus d'un ouvert non vide de Y. Quitte à remplacer Y par un ouvert non vide convenable, on peut supposer que f est un revêtement étale. On est ainsi ramené au lemme suivant :

3.5.10. Lemme. — *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme de schémas fini étale de degré constant d. Pour tout objet $M \in \mathsf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$, le morphisme composé*

$$M \to f_\star f^\star M \to M$$

déduit des adjonctions canoniques $(f^\star, f_\star)$ et $(f_\star, f^\star)$ est la multiplication par d.

Grâce aux formules de projection, on peut supposer que $M = \Lambda_Y$. Il suffit alors d'établir le résultat après un changement de base étale (non vide) trivialisant le revêtement $X \to Y$ (par exemple une clôture galoisienne de ce revêtement). Bref, on peut supposer que X est une réunion disjointe de d copies de Y, auquel cas le résultat est trivial.

3.5.11. Définition. — Soit $(e_1, \ldots, e_n) \in \mathbf{N}^n$. On définit un S-schéma :

$$V(S, \pi, e_1, \ldots, e_n) = \operatorname{Spec}\left(\mathscr{O}_S[T_1, \ldots, T_n]/\left(\textstyle\prod_{i=1}^n T_i^{e_i} - \pi\right)\right).$$

Pour tout i, on note H_i le sous-schéma fermé de $V(S, \pi, e_1, \ldots, e_n)$ défini par l'équation $T_i = 0$.

3.5.12. Proposition. — *Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ un n-uplet d'entiers naturels non tous nuls. Alors, le schéma $V(S, \pi, e_1, \ldots, e_n)$ est régulier et ponctuellement pur.*

On peut supposer que l'anneau des coefficients est $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ où ℓ est un nombre premier inversible sur S.

3.5.13. Lemme. — (i) *Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est un n-uplet d'entiers non tous nuls dont au moins un est inversible dans η, le S-schéma $V(S, \pi, e_1, \ldots, e_n)$ est intègre, régulier et de fibre générique lisse ;*

(ii) *Soit $d \geq 1$, si S' est le trait obtenu en extrayant une racine d-ième π' de l'uniformisante π (cf.* [Serre, 1968, Proposition 17, § 6, Chapitre I]*), pour tout n-uplet $(e_1, \ldots, e_n)$, on a un isomorphisme de schémas*

$$V(S', \pi', e_1, \ldots, e_n) = V(S, \pi, de_1, \ldots, de_n) \ ;$$

(iii) *Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est un n-uplet d'entiers non tous nuls, le schéma $V(S, \pi, e_1, \ldots, e_n)$ est régulier et intègre ;*

(iv) *Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est un n-uplet d'entiers non tous nuls, le schéma $V(S, \pi, e_1, \ldots, e_n)$ est ponctuellement pur si et seulement si pour tout i tel que $e_i > 0$, le couple régulier $(V(S, \pi, e_1, \ldots, e_n), H_i)$ est pur*(xi) *;*

(v) *Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ un n-uplet d'entiers non nuls, soit e le p.p.c.m. des e_i ; on suppose que ℓ ne divise pas e ; si $V(S, \pi, e, \ldots, e)$ est ponctuellement pur, alors $V(S, \pi, e_1, \ldots, e_n)$ aussi ;*

(xi) Si $e_i = 0$, c'est vrai aussi : c'est un cas particulier du théorème de pureté relatif, cf. [SGA 4 XVI 3.7].

(vi) *Si* $(e_1, \dots, e_n)$ *est un* n*-uplet d'entiers tel que* $e_1 \neq 0$, $V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$ *est ponctuellement pur si et seulement si* $V(S, \pi, \ell e_1, e_2, \dots, e_n)$ *est ponctuellement pur.*

Les assertions (i) et (ii) sont laissées en exercice au lecteur. L'assertion (iii) résulte aussitôt de (i) et de (ii).

Pour montrer l'assertion (iv), il suffit d'observer que les diviseurs H_i pour $e_i > 0$ sont ponctuellement purs (ce sont des espaces affines sur le corps résiduel de S) et forment un recouvrement de la fibre spéciale de $V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$. La fibre générique du schéma $V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$ étant ponctuellement pure (puisque lisse sur une extension de η), on peut conclure en utilisant la proposition 3.2.3.

Concernant l'assertion (v), l'élévation des T_i à la puissance $\frac{e}{e_i}$ définit un morphisme fini et plat $V(S, \pi, e, \dots, e) \to V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$ de degré $\frac{e^n}{e_1 \cdots e_n}$ (premier à ℓ) ; compte tenu du critère (iv), la proposition 3.4.3 permet de conclure.

Pour établir (vi), remarquons que l'élévation de T_1 à la puissance ℓ définit un morphisme fini et plat $V(S, \pi, \ell e_1, e_2, \dots, e_n) \to V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$ de degré ℓ et étale en dehors du lieu d'annulation de T_1. Il suffit donc de montrer que $(V(S, \pi, \ell e_1, e_2, \dots, e_n), H_1)$ est pur si et seulement si $(V(S, \pi, e_1, \dots, e_n), H_1)$ l'est, ce qui résulte de la proposition 3.4.5.

Établissons la proposition 3.5.12. D'après l'assertion (iii), les schémas considérés sont réguliers. Pour établir leur pureté ponctuelle, d'après le corollaire 3.5.6, on peut supposer qu'aucun des exposants e_i n'est nul. Dans le cas où les tous les entiers e_i valent 1, le résultat est établi dans [Illusie, 2004, theorem 1.4] (voir aussi [Rapoport & Zink, 1982, Satz 2.21]). Grâce à l'utilisation d'un trait auxiliaire, l'assertion (ii) permet d'en déduire que pour tout entier $d \geq 1$, $V(S, \pi, d, \dots, d)$ est ponctuellement pur. En utilisant l'assertion (v), on obtient que $V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$ est ponctuellement pur si ℓ ne divise aucun des entiers e_i. L'assertion (vi) permet de passer au cas général.

3.6. Géométrie logarithmique

3.6.1. Définition. — Soit S un trait, de point générique η. La log-structure canonique sur S est la log-structure image directe de la log-structure triviale sur η. Toute uniformisante de S définit un morphisme de monoïdes $\mathbf{N} \to \Gamma(S, \mathscr{O}_S)$ donnant naissance à une carte $S \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[\mathbf{N}])$ du log-schéma S.

L'objectif de cette sous-section est d'établir le théorème suivant :

3.6.2. Théorème. — *Soit S un trait muni de sa log-structure canonique. Soit $(X, M) \to S$ un morphisme log-lisse de log-schémas fs. Si le schéma X est régulier, alors il est ponctuellement pur.*

La proposition suivante précise [Kato, 1988, theorem 3.5] dans le cas des log-schémas fs :

3.6.3. Proposition. — *Soit $(X, M) \to (Y, N)$ un morphisme log-lisse entre log-schémas fs. On suppose donnée une carte $Y \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[Q])$ de (Y, N) où Q est un monoïde fs sans torsion*[(xii)]*. Pour tout point géométrique $\overline{x}$ de X, il existe un voisinage étale U de $\overline{x}$, un morphisme injectif de monoïde $Q \to P$ avec P fs sans torsion et une carte $U \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[P])$ tels que la partie de torsion de $\mathrm{Coker}(Q^{\mathrm{gp}} \to P^{\mathrm{gp}})$ soit d'ordre inversible sur U et que le morphisme de schémas $U \to Y \times_{\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[Q])} \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[P])$ soit étale.*

Dans la démonstration du critère de log-lissité de [Kato, 1988, theorem 3.5], des éléments $t_1, \dots, t_r$ de $M_{\overline{x}}$ sont choisis de sorte que la famille $(d\log t_1, \dots, d\log t_r)$ forme une base du faisceau des log-différentielles $\omega^1_{X/Y,\overline{x}}$. On considère ensuite le morphisme de monoïdes évident $\mathbf{N}^r \oplus Q \to M_{\overline{x}}$ donné sur la composante $\mathbf{N}^r$ par les $t_1, \dots, t_r$. Il est tel que le conoyau de $\mathbf{Z}^r \oplus Q^{\mathrm{gp}} \to M^{\mathrm{gp}}_{\overline{x}}/\mathscr{O}^\times_{X,\overline{x}}$ soit fini d'exposant n inversible dans l'anneau $\mathscr{O}_{X,\overline{x}}$ (en particulier, $\mathscr{O}^\times_{X,\overline{x}}$ est n-divisible). Il existe un morphisme injectif $\mathbf{Z}^r \oplus Q^{\mathrm{gp}} \to G$ de conoyau tué par une puissance de n et un prolongement $h\colon G \to M^{\mathrm{gp}}_{\overline{x}}$ de $\mathbf{Z}^r \oplus Q^{\mathrm{gp}} \to M^{\mathrm{gp}}_{\overline{x}}$ tel que $G \to M^{\mathrm{gp}}_{\overline{x}}/\mathscr{O}^\times_{X,\overline{x}}$ soit surjectif. Comme $M^{\mathrm{gp}}_{\overline{x}}/\mathscr{O}^\times_{X,\overline{x}}$ est un groupe abélien de type fini et sans torsion, le lemme suivant montre que l'on peut s'arranger pour que G soit un groupe abélien libre. Dans la démonstration de [Kato, 1988, theorem 3.5], on pose ensuite $P = h^{-1}(M_{\overline{x}})$ et il est montré que sur un voisinage étale U de $\overline{x}$, P engendre la log-structure de (X, M) et que le morphisme de schémas $U \to S \times_{\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[Q])} \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[P])$ est étale en $\overline{x}$. Le monoïde P ainsi construit est fs et sans torsion.

3.6.4. Lemme. — *Soit n un entier naturel non nul. Soit A un groupe abélien libre de type fini. Soit $\varphi\colon A \to B$ un morphisme de groupes abéliens. Soit $U \subset B$ un sous-groupe n-divisible. On suppose que B/U est sans torsion et que $\mathrm{Coker}(A \to B/U)$ est fini et tué par n. Alors, il existe un groupe abélien A' libre de type fini, un morphisme injectif $A \to A'$ de groupes abéliens tel que A'/A soit tué par une puissance de n et une extension $A' \to B$ du morphisme $A \to B$ telle que le morphisme composé $A' \to B/U$ soit surjectif.*

Grâce à une récurrence sur l'ordre de $\mathrm{Coker}(A \to B/U)$, on peut supposer que $\mathrm{Coker}(A \to B/U)$ est cyclique d'ordre $d \geq 2$, engendré par la classe d'un élément $b \in B$. Il existe donc $a \in A$ et $u \in U$ tels que $db = \varphi(a) + u$. Comme u est n-divisible,

(xii) Si $\overline{y}$ est un point géométrique de Y, il existe un voisinage étale de $\overline{y}$ admettant une telle carte avec $Q = M_{\overline{y}}/\mathscr{O}^\times_{Y,\overline{y}}$ qui est fs saillant (cf. [Kato, 1994, Lemma 1.6]).

il existe $\tilde{u} \in U$ tel que $u = d\tilde{u}$. Quitte à remplacer b par $b - \tilde{u}$, on peut supposer que $u = 0$. On forme le carré cocartésien suivant dans la catégorie des groupes abéliens :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \xrightarrow{a} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{1}{d}\mathbf{Z} & \longrightarrow & A'. \end{array}$$

En raison de la relation $db = \varphi(a)$, on peut définir un unique morphisme de groupes abéliens $\varphi' \colon A' \to B$ induisant $\varphi \colon A \to B$ et envoyant $\frac{1}{d}$ sur b. On obtient ainsi une surjection $A' \to B/U$ induisant un isomorphisme $A'/A \xrightarrow{\sim} \operatorname{Coker}(A \to B/U)$. Il reste à vérifier que A' est sans torsion. Soit a' un élément de torsion de A'. L'image de a' dans B/U *via* φ' est de torsion, mais B/U étant sans torsion, on a $\varphi'(a') \in U$. Comme φ' induit un isomorphisme $A'/A \xrightarrow{\sim} \operatorname{Coker}(A \to B/U)$, on en déduit que $a' \in A$, mais A est sans torsion, donc $a' = 0$.

3.6.5. Proposition. — *Soit $(X, M) \to S$ un log-schéma fs log-lisse sur un trait S (muni de sa log-structure canonique). On suppose que le schéma X est régulier. Alors, localement pour la topologie étale, X admet un morphisme étale vers un schéma $V(S, \pi, e_1, \ldots, e_n)$ où $(e_1, \ldots, e_n)$ est un n-uplet d'entiers non tous nuls (cf. définition 3.5.11).*

Soit π une uniformisante de S ; elle donne naissance à une carte $S \to \operatorname{Spec}(\mathbf{Z}[\mathbf{N}])$. D'après la proposition 3.6.3, on peut supposer qu'il existe un monoïde P fs sans torsion, un morphisme injectif $\mathbf{N} \to P$, une carte $X \to \operatorname{Spec}(\mathbf{Z}[P])$ telle que le morphisme de schémas $X \to S \times_{\operatorname{Spec}(\mathbf{Z}[\mathbf{N}])} \operatorname{Spec}(\mathbf{Z}[P])$ soit étale. Soit $\overline{x}$ un point géométrique de X. On note P' le sous-monoïde de P formé des éléments dont l'image dans $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ soit inversible au point $\overline{x}$.

On peut supposer que P' est un groupe. En effet, si A est un sous-ensemble fini de P' qui engendre le groupe abélien (libre de type fini) P'^{gp} (xiii), on peut remplacer X par le voisinage ouvert de $\overline{x}$ sur lequel les images des éléments de A (et donc de P') sont inversibles dans le faisceau structural et par suite, remplacer P par $P[-P']$ qui est encore fs et sans torsion.

Le fait que $X \to \operatorname{Spec}(\mathbf{Z}[P])$ soit une carte implique alors que P' est le noyau de $P^{\mathrm{gp}} \to M_{\overline{x}}^{\mathrm{gp}}/\mathscr{O}_{X,\overline{x}}^{\times}$. En particulier, on obtient un isomorphisme

$$P/P' \xrightarrow{\sim} M_{\overline{x}}/\mathscr{O}_{X,\overline{x}}^{\times}.$$

Comme X est log-régulier, on reconnaît que X est régulier au fait que $M_{\overline{x}}/\mathscr{O}_{X,\overline{x}}^{\times}$ soit un monoïde libre (cf. VI-1.7). Par conséquent, il existe un entier r et un isomorphisme

(xiii) En fait, on peut montrer que P' est un monoïde de type fini (c'est une face de P).

de monoïdes $\mathbf{N}^r \xrightarrow{\sim} P/P'$. On peut relever ce morphisme en un morphisme $\mathbf{N}^r \to P$, ce qui permet de construire un isomorphisme $\mathbf{N}^r \oplus P' \xrightarrow{\sim} P$.

Il en résulte que le morphisme de carte $X \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[P])$ a pour but un schéma isomorphe à $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[\mathbf{N}^r \oplus P'])$ qui est le produit d'un espace affine et d'un tore déployé (dont P' est le groupe des caractères). Dans la carte du morphisme $(X, M) \to S$ qui est donnée, l'image de 1 par le morphisme de monoïdes $\mathbf{N} \to P$ peut s'écrire $(e_1, \dots, e_r, p')$ dans $\mathbf{N}^r \oplus P'$ *via* les identifications ci-dessus. On peut choisir une base $a_1, \dots, a_s$ de P' comme groupe abélien telle que $p' = \sum_{i=1}^{s} f_i a_i$ avec $f_i \in \mathbf{N}$. On a ainsi construit un morphisme étale $X \to V(S, \pi, e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_s)$ (avec les $e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_s$ non tous nuls).

Compte tenu de la proposition 3.5.12, le théorème 3.6.2 résulte aussitôt de la proposition 3.6.5.

3.7. Démonstration du théorème de pureté. — Démontrons le théorème 3.1.1. D'après les propositions 3.3.1 et 3.3.2, on peut supposer que l'anneau des coefficients Λ est $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ où ℓ est un nombre premier. D'après la proposition 3.2.3, il s'agit de montrer que tout $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{\ell}\right]$-schéma régulier est ponctuellement pur. D'après [Fujiwara, 2002, corollary 6.1.5], on peut supposer que X est un schéma régulier intègre, quasi-projectif et plat sur un trait (strictement hensélien) S, que l'on peut supposer d'inégale caractéristique d'après la proposition 3.2.5. On peut utiliser les notations de la sous-section 3.5. Quitte à étendre le trait S, on peut supposer que l'anneau sous-jacent à S est intégralement fermé dans le corps des fonctions rationnelles sur X. La fibre générique X_η de X est donc géométriquement intègre.

En appliquant [Vidal, 2004, proposition 4.4.1] à la normalisation de l'adhérence de X dans un plongement projectif, on obtient qu'il existe un groupe fini G et un diagramme G-équivariant :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ S' \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

tels que :

— G agisse trivialement sur X et S ;

— $S' \to S$ soit une extension finie de traits ;

— $X' \to X$ soit projectif, X' soit régulier, connexe et à réduction semi-stable sur S' ;

— G agisse fidèlement sur X' et $X' \to X$ soit génériquement un revêtement étale galoisien de groupe G.

On munit X' de la log-structure dont l'ouvert de trivialité est la fibre générique de $X' \to S'$. Soit H un ℓ-Sylow de G. On note $T = S'/H$. L'extension de traits (strictement henséliens) $S' \to T$ est d'ordre une puissance de ℓ, donc modérément ramifiée. Par conséquent, pour les log-structures canoniques, $S' \to T$ est log-étale. Comme on sait que X' est log-lisse sur S', il l'est donc aussi sur T. Comme H agit trivialement sur T et que son action sur X' est modérée, on peut appliquer le théorème de résolution équivariante X-1.1 qui donne un morphisme projectif et birationnel H-équivariant $X'' \to X'$ de log-schémas tel que X'' soit log-lisse sur T et que H agisse très modérément sur X''. Le log-schéma quotient X''/H est aussi log-lisse sur T (en particulier, X''/H est log-régulier). D'après le théorème de résolution des singularités de Kato-Nizioł (cf. [Kato, 1994, 10.3, 10.4] et [Nizioł, 2006, 5.7]), il existe un log-éclatement (en particulier, log-étale, projectif et birationnel) $X''' \to X''/H$ tel que X''' soit régulier. La situation est résumée sur le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & X'' \arrow[loop above, "H"] \arrow[r, "\text{birat.}"] \arrow[d] & X' \arrow[loop above, "G"] \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[dd] \\
X''' \arrow[r, "\text{birat.}"] & X''/H \arrow[urr, dotted] \arrow[dr] & S' \arrow[loop left, "G"] \arrow[d] & \\
 & & T \arrow[r] & S.
\end{tikzcd}$$

Le log-schéma X''' est régulier et log-lisse sur T ; d'après le théorème 3.6.2, X''' est ponctuellement pur. Le morphisme évident $X''' \to X$ est projectif et génériquement un revêtement étale de degré premier à ℓ ; d'après la proposition 3.5.7, on peut conclure que X est ponctuellement pur, ce qui achève la démonstration du théorème de pureté.

4. Conventions de signes

Bien que le rédacteur de cet exposé y répugne, il peut être utile de préciser certaines conventions de signe. Nous nous appuierons sur celles de [Conrad, 2000, § 1.3] ; elles ne coïncident pas avec celles de [SGA 4 XVII 1.1]. Quelques conventions supplémentaires sont précisées ci-dessous.

4.1. — On rappelle que si $K = (\cdots \to K^n \to K^{n+1} \to \cdots)$ est un complexe dans une catégorie abélienne, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, le complexe $K[i]$ est tel que $K[i]^n = K^{i+n}$ et que les différentielles sur $K[i]$ soient données par les différentielles sur K multipliées par $(-1)^i$.

Si $f\colon K \to L$ est un morphisme de complexes, cône(f) est le complexe tel que cône$(f)^n := K^{n+1} \oplus L^n$ et dont la différentielle est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} -d_K & 0 \\ f & d_L \end{pmatrix}$. Les inclusions $L^n \to K^{n+1} \oplus L^n$ induisent un morphisme $i \colon L \to \text{cône}(f)$ et les projections $K^{n+1} \oplus L^n \to K^{n+1}$ un morphisme $p \colon \text{cône}(f) \to K[1]$. On décrète que le triangle suivant est distingué[(xiv)] :

$$K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{i} \text{cône}(f) \xrightarrow{-p} K[1].$$

Si $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$ est une suite exacte courte dans une catégorie abélienne $\mathscr{A}$, β induit un quasi-isomorphisme $\text{cône}(\alpha) \to M''$:

$$\begin{tikzcd} -1 & M' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \arrow[d] \\ 0 & M \arrow[r, "\beta"] & M'' \end{tikzcd}$$

$$\text{cône}(\alpha) \xrightarrow{\sim} M''.$$

Dans la catégorie dérivée de $\mathscr{A}$, on obtient ainsi un triangle distingué

$$M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \xrightarrow{\delta} M'[1],$$

où δ est le zigzag ainsi décrit :

$$\begin{tikzcd} -1 & 0 \arrow[d] & M' \arrow[l] \arrow[r, "-\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\alpha"] & M' \arrow[d] \\ 0 & M'' & M \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$M'' \xleftarrow{\sim} \text{cône}(\alpha) \longrightarrow M'[1].$$

4.2. — Si l'on dispose d'un foncteur cohomologique (covariant) $\mathscr{F}^0$ d'une des variantes de la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne $\mathscr{A}$, on peut étendre ce foncteur en une suite de foncteurs $(\mathscr{F}^n)_{n \in \mathbf{Z}}$ en posant $\mathscr{F}^n M := \mathscr{F}^0(M[n])$. À toute suite exacte courte $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$ dans $\mathscr{A}$ est associée une suite exacte longue :

$$\cdots \to \mathscr{F}^n M' \xrightarrow{\alpha} \mathscr{F}^n M \xrightarrow{\beta} \mathscr{F}^n M'' \xrightarrow{\delta} \mathscr{F}^{n+1} M' \to \cdots$$

où les morphismes $\delta \colon \mathscr{F}^n M'' \to \mathscr{F}^{n+1} M'$ sont obtenus par l'application du foncteur $\mathscr{F}^0$ au morphisme $\delta[n] \colon M'[n] \to M''[n+1]$. C'est ainsi que l'on munit par exemple la suite des foncteurs $\mathrm{H}^n(X, -)$ pour X un site d'une structure de ∂-foncteur [Grothendieck, 1957, § 2.1], lequel est universel, ce qui permet de comparer des classes

(xiv) On prendra garde au fait que [SGA 4 XVII 1.1] utilise une convention opposée.

de cohomologie construites par des procédés faisant intervenir différentes constructions du ∂-foncteur universel (cf. § 4.8).

4.3. — Soit $\mathscr{G}$ est un faisceau de groupes abéliens sur un site X et $\mathscr{T}$ est un $\mathscr{G}$-torseur (à gauche). On se propose de définir une classe $[\mathscr{T}] \in \mathrm{H}^1(X, \mathscr{G})$.

4.3.1. — Il existe un monomorphisme de faisceaux abéliens $i\colon \mathscr{G} \to \mathscr{A}$ et un morphisme $\mathscr{G}$-équivariant $\alpha\colon \mathscr{T} \to \mathscr{A}$ où l'on fait agir $\mathscr{G}$ sur $\mathscr{A}$ par la formule $g.a = i(g) + a$. L'image de α dans le quotient $\mathscr{A}/\mathscr{G}$ s'identifie à un élément $s \in \mathrm{H}^0(X, \mathscr{A}/\mathscr{G})$. On note $[\mathscr{T}] := \delta(s) \in \mathrm{H}^1(X, \mathscr{G})$ l'image de s par le morphisme de bord $\delta\colon \mathrm{H}^0(X, \mathscr{A}/\mathscr{G}) \to \mathrm{H}^1(X, \mathscr{G})$ associé à la suite exacte $0 \to \mathscr{G} \to \mathscr{A} \to \mathscr{A}/\mathscr{G} \to 0$ (cf. [SGA $4\frac{1}{2}$ [Cycle] 1.1.1]).

4.3.2. — Si $\mathscr{E} \to \bullet$ est un épimorphisme de faisceaux d'ensembles (où $\bullet$ est l'objet final) et $s\colon \mathscr{E} \to \mathscr{T}$ un morphisme (que l'on considère comme une section de $\mathscr{T}$ au-dessus de $\mathscr{E}$), en considérant $\mathscr{T}$ comme un torseur-$\mathscr{G}$ (*i.e.* comme un torseur à droite sous $\mathscr{G}$) en faisant agir $\mathscr{G}$ à droite sur $\mathscr{T}$ par la formule $t.g := g.t$ (ce qui est possible puisque $\mathscr{G}$ est commutatif), il existe un (unique) morphisme $\gamma\colon \mathscr{E} \times \mathscr{E} \to \mathscr{G}$ tel que $pr_2^\star(s) = pr_1^\star(s).\gamma$: c'est le 1-cocycle associé au torseur à droite $\mathscr{T}$[(xv)]. En suivant les conventions de [Conrad, 2000, § 1.3] convenablement généralisées pour s'appliquer aux sites et pas seulement aux espaces topologiques, le 1-cocycle γ est un 1-cocycle de Čech associé au recouvrement $\mathscr{E} \to \bullet$; il définit donc un élément de $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{G})$ dont on peut montrer qu'il coïncide avec l'élément $[\mathscr{T}]$ défini en 4.3.1.

4.3.3. — Il est également intéressant de disposer d'une troisième construction de $[\mathscr{T}]$, en identifiant cette fois $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{G})$ au groupe des morphismes $\mathbf{Z} \to \mathscr{G}[1]$ dans la catégorie dérivée des faisceaux abéliens. Pour cela, avec les mêmes notations qu'en 4.3.2, on introduit le faisceau d'ensembles simplicial $\check{\mathrm{C}}(\mathscr{E})$ défini par $\check{\mathrm{C}}(E)_n := \mathbf{Hom}(\{0, \dots, n\}, \mathscr{E}) \simeq \mathscr{E}^{1+n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, la structure simpliciale étant évidente. En notant $\mathbf{Z}-$ le foncteur adjoint à gauche du foncteur d'oubli des faisceaux abéliens vers les faisceaux d'ensembles, on obtient un faisceau abélien simplicial $\mathbf{Z}\check{\mathrm{C}}(\mathscr{E})$ qui donne naissance à un complexe de faisceaux abéliens (concentré en degré négatifs), que l'on notera encore abusivement $\mathbf{Z}\check{\mathrm{C}}(\mathscr{E})$:

$$\cdots \to \mathbf{Z}(\mathscr{E}^3) \overset{d_0 - d_1 + d_2}{\to} \mathbf{Z}(\mathscr{E}^2) \overset{d_0 - d_1}{\to} \mathbf{Z}\mathscr{E} \to 0 \to \cdots$$

La projection $\mathscr{E} \to \bullet$ induit le morphisme d'augmentation $\varepsilon\colon \mathbf{Z}\check{\mathrm{C}}(\mathscr{E}) \to \mathbf{Z}$, lequel est un quasi-isomorphisme. On peut alors décrire $[\mathscr{T}] \in \mathrm{H}^1(X, \mathscr{G})$ comme étant le zigzag

(xv) C'est la formule que l'on utiliserait pour définir le 1-cocycle associé à un torseur à droite sous un faisceau de groupes non-nécessairement commutatif.

suivant :

$$
\begin{tikzcd}
-2 & 0 \arrow[d] & \vdots \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
-1 & 0 \arrow[d] & \mathbf{Z}(\mathscr{E}^2) \arrow[l] \arrow[r, "-\gamma"] \arrow[d, "{(e,e') \mapsto e'-e}"] & \mathscr{G} \arrow[d] \\
0 & \mathbf{Z} & \mathbf{Z}\mathscr{E} \arrow[l] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

$$\mathbf{Z} \xleftarrow[\sim]{\varepsilon} \mathbf{Z}\check{\mathrm{C}}(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathscr{G}[1].$$

4.4. — Un bicomplexe est une famille $(K^{p,q})_{(p,q)\in\mathbf{Z}^2}$ d'objets d'une catégorie abélienne $\mathscr{A}$ munis de différentielles horizontales $d_h\colon K^{p,q} \to K^{p+1,q}$ et verticales $d_v\colon K^{p,q} \to K^{p,q+1}$ telles que $d_h \circ d_h = 0$, $d_v \circ d_v = 0$ et $d_v \circ d_h = d_h \circ d_v$. Le complexe simple associé à $K^{\bullet,\bullet}$ est défini par $(\operatorname{Tot} K^{\bullet,\bullet})^n := \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}$ et la différentielle $(\operatorname{Tot} K^{\bullet,\bullet})^n \to (\operatorname{Tot} K^{\bullet,\bullet})^{n+1}$ est définie sur le terme $K^{p,q}$ (pour $p+q=n$) comme étant $d_h + (-1)^p d_v\colon K^{p,q} \to K^{p+1,q} \oplus K^{p,q+1} \subset (\operatorname{Tot} K^{\bullet,\bullet})^{n+1}$. (Le complexe simple défini ci-dessus est celui défini en termes de sommes. Il existe aussi une version définie en utilisant des produits plutôt que des sommes. Dans les deux cas, il convient de s'assurer que les sommes ou produits considérés sont représentables dans $\mathscr{A}$.)

4.5. — Le produit tensoriel de complexes est défini de la façon habituelle. Si K et L sont deux complexes (de modules, ou de faisceaux de modules), $(K \otimes L)^n := \oplus_{p+q=n} K^p \otimes L^q$ et la différentielle est définie par la formule $d(x \otimes y) = dx \otimes y + (-1)^{|x|} x \otimes dy$ où $|x|$ est le degré de x (autrement dit, $K \otimes L$ est le complexe simple associé au bicomplexe évident $(K^p \otimes L^q)_{(p,q)\in\mathbf{Z}^2}$, cf. 4.4).

4.5.1. — L'automorphisme de symétrie $K \otimes L \simeq L \otimes K$ envoie $x \otimes y$ sur $(-1)^{|x|\cdot|y|} y \otimes x$. (L'isomorphisme d'associativité $(K \otimes L) \otimes M \simeq K \otimes (L \otimes M)$ ne fait en revanche pas intervenir de signe.) On peut alors remarquer que si K est un complexe et $i \in \mathbf{Z}$, alors $K \otimes (\Lambda[i])$ s'identifie canoniquement à K décalé de i crans vers la gauche *sans changement du signe des différentielles.* En revanche, on peut observer que $\Lambda[i] \otimes K$ s'identifie tout à fait canoniquement à $K[i]$. (Ici, Λ est un anneau (commutatif) de coefficients tout à fait arbitraire.)

4.5.2. — Supposons que $a\colon M' \otimes_\Lambda M'' \to M$ soit un morphisme de complexes de Λ-modules. On définit pour tout $(i,j) \in \mathbf{Z}^2$ un morphisme $a\colon \mathrm{H}^i(M') \otimes_\Lambda \mathrm{H}^j(M'') \to \mathrm{H}^{i+j}(M)$ de la façon suivante. Si $x \in M'^i$ et $y \in M''^j$ sont des cocycles, alors $x \otimes y \in M'^i \otimes_\Lambda M''^j \subset (M' \otimes_\Lambda M'')^{i+j}$ est un cocycle dont on peut considérer l'image par

a dans M^{i+j} : on définit ainsi l'image de $[x] \otimes [y]$. Avec les notations précédentes, si on interprète x, y et $a(x \otimes y)$ comme des morphismes de complexes $x \colon \Lambda \to M'[i] = \Lambda[i] \otimes_\Lambda M'$, $y \colon \Lambda \to M''[j] = \Lambda[j] \otimes_\Lambda M''$ et $a(x \otimes y) \colon \Lambda \to M[i+j]$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, "(-1)^{ij}", "\sim"'] \arrow[d, "a(x\otimes y)"'] & \Lambda \otimes_\Lambda \Lambda \arrow[r, "x\otimes y"] & (\Lambda[i] \otimes_\Lambda M') \otimes_\Lambda (\Lambda[j] \otimes_\Lambda M'') \arrow[d, "\sim"] \\
M[i+j] \arrow[r, equal] & \Lambda[i] \otimes_\Lambda \Lambda[j] \otimes_\Lambda M & \Lambda[i] \otimes_\Lambda \Lambda[j] \otimes_\Lambda (M' \otimes_\Lambda M''). \arrow[l, "\mathrm{Id}\otimes a"']
\end{tikzcd}$$

(On prendra garde à la présence de la multiplication par $(-1)^{ij}$ en haut à gauche ! Elle est liée à l'isomorphisme de symétrie intervenant à droite.) Cette construction s'étend formellement au cas où a serait un morphisme $M' \otimes^{\mathrm{L}}_\Lambda M'' \to M$ dans $\mathsf{D}(\Lambda)$ (cf. XVII-8 pour la construction du produit tensoriel dérivé sur la catégorie dérivée totale).

4.5.3. — Soit X un site muni du faisceau d'anneaux constant Λ. On peut appliquer la construction 4.5.2 au morphisme de Künneth $a \colon \mathrm{R}\Gamma(X,\Lambda) \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_\Lambda \mathrm{R}\Gamma(X,\Lambda) \to \mathrm{R}\Gamma(X,\Lambda)$ (cf. XVII-12.4.2). On définit ainsi le produit $\mathrm{H}^i(X,\Lambda) \times \mathrm{H}^j(X,\Lambda) \to \mathrm{H}^{i+j}(X,\Lambda)$. Si $u \in \mathrm{H}^i(X,\Lambda)$ et $v \in \mathrm{H}^j(X,\Lambda)$, on note uv (ou $u \cup v$) le produit de deux classes. Ce produit vérifie la relation $vu = (-1)^{ij} uv$.

Il est également possible de décrire ce produit en termes de la composition de morphismes dans $\mathsf{D}(X,\Lambda)$. Identifions $u \in \mathrm{H}^i(X,\Lambda)$ et $v \in \mathrm{H}^j(X,\Lambda)$ à des morphismes $u \colon \Lambda \to \Lambda[i]$ et $v \colon \Lambda \to \Lambda[j]$ dans $\mathsf{D}(X,\Lambda)$. Le morphisme $\Lambda \simeq \Lambda \otimes \Lambda \overset{u \overset{\mathrm{L}}{\otimes} v}{\to} \Lambda[i] \otimes \Lambda[j] \simeq \Lambda[i+j]$ correspond à une classe dans $H^{i+j}(X,\Lambda)$ qui est égale non pas à uv en général, mais à $(-1)^{ij} uv$, c'est-à-dire vu. En utilisant la factorisation $u \overset{\mathrm{L}}{\otimes} v = (\mathrm{Id} \overset{\mathrm{L}}{\otimes} v) \circ (u \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathrm{Id})$, on montre que $vu = (-1)^{ij} uv$ peut aussi être décrit comme la composée $\Lambda \overset{u}{\to} \Lambda[i] \overset{v[i]}{\to} \Lambda[i+j]$. Une description plus élégante peut être obtenue en identifiant $u \in \mathrm{H}^i(X,\Lambda)$ à un morphisme $u' \colon \Lambda[-i] \to \Lambda$ et $v \in \mathrm{H}^j(X,\Lambda)$ à un morphisme $v' \colon \Lambda[-j] \to \Lambda$. Le produit $uv \in \mathrm{H}^{i+j}(X,\Lambda)$ correspond alors, sans signe parasite, au morphisme $\Lambda[-(i+j)] \simeq \Lambda[-i] \otimes \Lambda[-j] \overset{u' \overset{\mathrm{L}}{\otimes} v'}{\to} \Lambda$. (On notera que cette description du $\cup$-produit est particulièrement adaptée à la définition des variantes à support de ces structures multiplicatives.)

4.6. — On s'intéresse dans ce paragraphe aux conventions portant sur la cohomologie des groupes et sur le groupe fondamental étale.

4.6.1. — Soit G un groupe. Soit A un groupe abélien (que l'on munit de l'action triviale de G). Nous avons besoin de préciser l'identification $\mathrm{H}^1(G,A) \simeq \mathrm{Hom}(G,A)$

pour le premier groupe de cohomologie du groupe (discret) G. On définit ici la cohomologie du groupe G comme étant celle du topos $\mathbf{B}G$ des G-ensembles (à gauche). Soit $\varphi\colon G \to A$ un homomorphisme. On définit un ensemble $A^{\varphi} := A$ que l'on munit d'une action à gauche de G par la formule $g.a := \varphi(g) + a$ et d'une action à droite de A par $a.a' := a + a'$. L'ensemble A^{φ} muni de l'action à gauche de G peut ainsi être considéré comme un faisceau sur le topos $\mathbf{B}G$. Si on tient aussi compte de l'action à droite de A, on fait de A^{φ} un torseur à droite sous le faisceau constant A sur le topos $\mathbf{B}G$. Comme A est abélien, A^{φ} peut aussi être vu comme un torseur à gauche sous A sur $\mathbf{B}G$. D'après 4.3, A^{φ} possède une classe $[A^{\varphi}] \in \mathrm{H}^1(\mathbf{B}G, A) = \mathrm{H}^1(G, A)$. L'isomorphisme canonique $\mathrm{Hom}(G, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(G, A)$ est celui qui à φ associe $[A^{\varphi}]$. *Via* la comparaison entre la cohomologie et la cohomologie de Čech (cf. 4.3.2), cette définition est compatible avec l'identification de la cohomologie du groupe G calculée en termes de cochaînes (cf. [Serre, 1968, § 3, Chapitre VII]) et la cohomologie de Čech associée au recouvrement donné par l'épimorphisme $\mathbf{E}G \to \mathbf{B}G$ où $\mathbf{B}G$ est ici l'objet final du topos $\mathbf{B}G$ et où $\mathbf{E}G$ est le faisceau sur $\mathbf{B}G$ correspondant à l'ensemble G muni de l'action à gauche de G par multiplication. On peut observer que la multiplication à droite sur G induit sur $\mathbf{E}G$ une structure de torseur à droite sous le groupe constant G dans le topos $\mathbf{B}G$. Dans le cas où G est commutatif, la classe de ce torseur $[\mathbf{E}G]$ correspond à l'identité de G *via* les identifications $\mathrm{Hom}(G, G) \simeq \mathrm{H}^1(G, G) = \mathrm{H}^1(\mathbf{B}G, G)$.

4.6.2. — Soit G un groupe fini. Soit X un topos. Soit $\mathscr{T}$ un faisceau d'ensembles sur X muni d'une structure de torseur à droite sous le groupe G. Pour tout faisceau d'ensembles F sur X, on note $u_\star F := \mathrm{Hom}_X(\mathscr{T}, F)$ et cet ensemble hérite d'une structure de G-ensemble (à gauche) provenant de l'action sur $\mathscr{T}$. Ce foncteur $u_\star$ est le foncteur image directe pour un morphisme de topos $u\colon X \to \mathbf{B}G$ et on a un isomorphisme canonique de torseurs à droite $\mathscr{T} \simeq u^\star\mathbf{E}G$. Il vient ainsi que la donnée d'un morphisme de topos $u\colon X \to \mathbf{B}G$ équivaut à celle d'un torseur à droite sous G sur X.

4.6.3. — Soit X un schéma noethérien connexe muni d'un point géométrique $\overline{x}$. On dispose du groupe fondamental étale $\pi_1^{\text{ét}}(X, \overline{x})$, cf. [SGA 1 V 7]. La catégorie des $\pi_1^{\text{ét}}(X, \overline{x})$-ensembles (à gauche) discrets s'identifie à une sous-catégorie pleine de la catégorie des faisceaux d'ensembles sur $X_{\text{ét}}$ (cf. XVII-7.2 pour plus de détails). Ce foncteur d'inclusion est le foncteur image inverse pour un morphisme de topos canonique $X_{\text{ét}} \to \mathbf{B}\pi_1^{\text{ét}}(X, \overline{x})$. Soit $Y \to X$ un revêtement étale galoisien. Notons $G := \mathsf{Aut}_{\mathscr{O}_X-\text{Algèbre}}(\mathscr{O}_Y)$: c'est le groupe opposé au groupe des automorphismes du X-schéma Y. Le schéma Y est ainsi naturellement muni d'une action à droite de G qui en fait un torseur à droite sous G au-dessus de $X_{\text{ét}}$. On dispose donc d'après 4.6.2 d'un morphisme de topos $X_{\text{ét}} \to \mathbf{B}G$, lequel est canoniquement isomorphe au composé $X_{\text{ét}} \to \mathbf{B}\pi_1^{\text{ét}}(X, \overline{x}) \xrightarrow{\mathbf{B}p} \mathbf{B}G$ pour $p\colon \pi_1^{\text{ét}}(X, \overline{x}) \to G$ un morphisme que nous allons maintenant définir et qui dépend du choix d'un point fermé $\overline{y}$ dans la fibre géométrique $Y_{\overline{x}}$. Soit $\gamma \in \pi_1^{\text{ét}}(X, \overline{x})$. Cet élément γ agit (à gauche) sur la fibre $Y_{\overline{x}}$ sur laquelle G agit aussi (à droite), et ces deux actions commutent. On note $p(\gamma) \in G$ l'unique élément tel que $\gamma.\overline{y} = \overline{y}.p(\gamma)$.

4.7. — On définit ici le foncteur **Hom** (hom. interne) sur les complexes (de faisceaux étales de Λ-modules sur un schéma X) comme étant le bifoncteur défini par un isomorphisme d'adjonction « cher à Cartan » où le Hom est le hom. dans la catégorie des complexes :

$$\mathrm{Hom}(K, \mathbf{Hom}(L, M)) \simeq \mathrm{Hom}(K \otimes L, M).$$

Cette adjonction s'enrichit tautologiquement en un isomorphisme « cher à Cartan » énoncé en termes du hom. interne :

$$\mathbf{Hom}(K, \mathbf{Hom}(L, M)) \simeq \mathbf{Hom}(K \otimes L, M).$$

4.7.1. — Si K, L et M sont des complexes, l'identité de $\mathbf{Hom}(K, L)$ induit par adjonction un « morphisme d'évaluation » $\mathbf{Hom}(K, L) \otimes K \to L$ auquel on peut appliquer $M \otimes -$ pour obtenir un morphisme $M \otimes \mathbf{Hom}(K, L) \otimes K \to M \otimes L$, lequel induit par adjonction un morphisme canonique $M \otimes \mathbf{Hom}(K, L) \to \mathbf{Hom}(K, M \otimes L)$. En particulier, pour $M = \Lambda[m]$ avec $m \in \mathbf{Z}$, ce morphisme est un isomorphisme canonique $\mathbf{Hom}(K, L)[m] \simeq \mathbf{Hom}(K, L[m])$.

4.7.2. — Si L et N sont des complexes, on peut définir un morphisme

$$\gamma_L\colon \mathbf{Hom}(L, \Lambda) \otimes N \to \mathbf{Hom}(L, N)$$

de la façon suivante. L'identité de $\mathbf{Hom}(L, \Lambda)$ induit par adjonction un morphisme $\mathrm{ev}\colon \mathbf{Hom}(L, \Lambda) \otimes L \to \Lambda$ qui permet de définir un morphisme :

$$\mathbf{Hom}(L, \Lambda) \otimes N \otimes L \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}(L, \Lambda) \otimes L \otimes N \xrightarrow{\mathrm{ev} \otimes N} \Lambda \otimes N \xrightarrow{\sim} N,$$

lequel définit par adjonction le morphisme voulu $\mathbf{Hom}(L, \Lambda) \otimes N \to \mathbf{Hom}(L, N)$. Soit $m \in \mathbf{Z}$. L'isomorphisme évident $\mathbf{Z}[-m] \otimes \mathbf{Z}[m] \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}$ induit par adjonction un isomorphisme $\mathbf{Z}[-m] \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}(\mathbf{Z}[m], \mathbf{Z})$. La construction γ_L précédente appliquée à $L = \mathbf{Z}[m]$ fournit ainsi un morphisme $\gamma_m\colon N[-m] \to \mathbf{Hom}(\Lambda[m], N)$ qui est un isomorphisme. Si $N = \mathbf{Hom}(K, L)$ avec K et L deux complexes, on obtient un isomorphisme (encore noté γ_m) :

$$\mathbf{Hom}(K, L)[-m] \underset{\sim}{\xrightarrow{\gamma_m}} \mathbf{Hom}(\Lambda[m], \mathbf{Hom}(K, L)) \simeq \mathbf{Hom}(\Lambda[m] \otimes K, L) \simeq \mathbf{Hom}(K[m], L).$$

On définit $\alpha_m\colon \mathbf{Hom}(K[m], L) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}(K, L)[-m]$ par la formule $\alpha_m := (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \gamma_m^{-1}$.

4.7.3. — Dans [Conrad, 2000, § 1.3], Conrad définit explicitement le foncteur **Hom**. Sa construction est compatible à celle définie ici par adjonction puisqu'elle satisfait un tel isomorphisme d'adjonction : cet isomorphisme est donné degré par degré par des isomorphismes d'adjonctions chers à Cartan au niveau du hom. interne dans la catégorie des faisceaux, et ce *sans ajout de signes.* Avec ces conventions, les isomorphismes de « commutation » de $\mathbf{Hom}(-,-)$ aux foncteurs $-[m]$ en les deux variables (4.7.1) et 4.7.2 sont les mêmes que ceux de [Conrad, 2000, § 1.3]. En dérivant ce foncteur (cf. XVII-8 pour plus de détails), on obtient un bifoncteur $\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}\colon \mathsf{D}(X_{\text{ét}},\Lambda)^{\text{opp}} \times \mathsf{D}(X_{\text{ét}},\Lambda) \to \mathsf{D}(X_{\text{ét}},\Lambda)$ qui est « triangulé par rapport aux deux variables ». Ceci signifie notamment que pour tout $K \in \mathsf{D}(X_{\text{ét}},\Lambda)$, le foncteur $\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(K,-)\colon \mathsf{D}(X_{\text{ét}},\Lambda) \to \mathsf{D}(X_{\text{ét}},\Lambda)$ est triangulé et que pour tout $L \in \mathsf{D}(X_{\text{ét}},\Lambda)$, le foncteur $\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(-,L)\colon \mathsf{D}(X_{\text{ét}},\Lambda)^{\text{opp}} \to \mathsf{D}(X_{\text{ét}},\Lambda)$ est triangulé.

4.7.4. — La dernière assertion de 4.7.3 signifie que si $K' \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} K'' \xrightarrow{\gamma} K'[1]$ est un triangle distingué de $\mathsf{D}(X_{\text{ét}},\Lambda)$, le triangle suivant

$$\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(K',L)[-1] \xrightarrow{\gamma^\star} \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(K'',L) \xrightarrow{\beta^\star} \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(K,L) \xrightarrow{\alpha^\star} \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(K',L)$$

obtenu en appliquant le foncteur $\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(-,L)$ et en utilisant $\alpha_1\colon \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(K'[1],L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(K',L)[-1]$, est **antidistingué** dans $\mathsf{D}(X_{\text{ét}},\Lambda)$, ce qui signifie que le triangle suivant est *distingué* dans $\mathsf{D}(X_{\text{ét}},\Lambda)$:

$$\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(K',L)[-1] \xrightarrow{-\gamma^\star} \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(K'',L) \xrightarrow{\beta^\star} \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(K,L) \xrightarrow{\alpha^\star} \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(K',L)$$

Il est également vrai que le triangle suivant est distingué, où l'on utilise ici implicitement $\alpha_{-1}\colon \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(K''[-1],L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(K'',L)[1]$:

$$\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(K'',L) \xrightarrow{\beta^\star} \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(K,L) \xrightarrow{\alpha^\star} \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(K',L) \xrightarrow{\gamma[-1]^\star} \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(K'',L)[1]$$

Considérons ce morphisme $\delta := \gamma[-1]^\star\colon \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(K',L) \xrightarrow{\gamma[-1]^\star} \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(K'',L)[1]$. Pour tout entier $n \in \mathbf{Z}$, le morphisme δ induit après application du foncteur $\mathrm{H}^n_{\text{ét}}(X,-)$ un morphisme de groupes abéliens, où le Hom est le groupe abélien des morphismes dans la catégorie $\mathsf{D}(X_{\text{ét}},\Lambda)$:

$$\delta^n\colon \mathrm{Hom}(K',L[n]) \to \mathrm{Hom}(K'',L[n+1]).$$

On peut alors observer que si $\varphi \in \mathrm{Hom}(K',L[n])$, alors $\delta^n(\varphi)$ est le morphisme composé $K'' \xrightarrow{(-1)^{n+1}\gamma} K'[1] \xrightarrow{\varphi[1]} K[n+1]$.

4.7.5. — Si $L' \xrightarrow{a} L \xrightarrow{b} L'' \xrightarrow{c} L'[1]$ est un triangle distingué dans $\mathsf{D}(X_{\text{ét}},\Lambda)$, on dispose aussi de suites exactes longues pour tout $K \in \mathsf{D}(X_{\text{ét}},\Lambda)$:

$$\cdots \to \mathrm{Hom}(K,L'[n]) \xrightarrow{a[n]_\star} \mathrm{Hom}(K,L[n]) \xrightarrow{b[n]_\star} \mathrm{Hom}(K,L''[n]) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Hom}(K,L'[n+1]) \to \cdots$$

où pour tout $\varphi \in \mathrm{Hom}(K, L''[n])$, $\delta(\varphi) = c[n] \circ \varphi$. Si $K' \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} K'' \xrightarrow{\gamma} K'[1]$ est un triangle distingué dans $\mathsf{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, on peut considérer le carré suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(K'', L''[n+1]) \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{Hom}(K'', L'[n+2]) \\
\mathrm{Hom}(K', L''[n]) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "\delta"] & \mathrm{Hom}(K', L'[n+1]) \arrow[u, "\delta"]
\end{tikzcd}$$

L'interprétation des morphismes δ en termes de composition dans $\mathsf{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ montre que ce carré est *anticommutatif* !

4.7.6. — Un cas particulier de 4.7.4 qui nous intéressera est le suivant. Si Z est un sous-schéma fermé d'un schéma X et que $U = X - Z$, on dispose d'une suite exacte courte canonique de faisceaux étales sur X :

$$0 \to \mathbf{Z}_U \to \mathbf{Z}_X \to \mathbf{Z}_Z \to 0.$$

D'après 4.7.4, on dispose d'une suite exacte longue pour tout $L \in \mathsf{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$\cdots \to \mathrm{H}^n_{Z,\text{ét}}(X, L) \to \mathrm{H}^n_{\text{ét}}(X, L) \to \mathrm{H}^n_{\text{ét}}(U, L) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^{n+1}_{Z,\text{ét}}(X, L) \to \cdots$$

Supposons que L est un complexe borné inférieurement formé de faisceaux injectifs. Soit une classe $[\gamma] \in \mathrm{H}^n_{\text{ét}}(U, L)$ représentée par une section $\gamma \in \Gamma(U, L^n)$ telle que $d\gamma = 0 \in \Gamma(U, L^{n+1})$. Le faisceau L^n étant injectif, il existe une section $\tilde{\gamma} \in \Gamma(X, L^n)$ telle que $\tilde{\gamma}_{|U} = \gamma$. La section $d\tilde{\gamma} \in \Gamma(X, L^{n+1})$ s'annule sur U, donc définit un élément $d\tilde{\gamma} \in \Gamma_Z(X, L^{n+1})$ qui est évidemment un $(n+1)$-cocycle. On a alors $\delta([\gamma]) = [d\tilde{\gamma}] \in \mathrm{H}^{n+1}_{Z,\text{ét}}(X, L)$.

Si on suppose maintenant que $L = \mathscr{G}$ où $\mathscr{G}$ est un faisceau abélien sur $X_{\text{ét}}$, il est utile de connaître une description explicite du morphisme $\delta \colon H^0(U, \mathscr{G}) \to H^1_Z(X, \mathscr{G})$. Notons tout d'abord que l'on peut généraliser la construction 4.3.1 : si $\mathscr{T}$ est un $\mathscr{G}$-torseur sur $X_{\text{ét}}$ muni d'une section $s \in \mathscr{T}(U)$, on dispose d'un élément $[\mathscr{T}, s] \in \mathrm{H}^1_{Z,\text{ét}}(X, \mathscr{G})$ (induisant $[\mathscr{T}] \in \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(X, \mathscr{G})$). Il est aisé de montrer que si $s \in \mathscr{G}(U) = H^0(U, \mathscr{G})$, alors, si on note $(\mathscr{G}, s)$ le $\mathscr{G}$-torseur trivial ($\mathscr{G}$ agissant sur lui-même par addition) muni de la section s, on a $[\mathscr{T}, s] = \delta(s) \in H^1_{Z,\text{ét}}(X, \mathscr{G})$.

4.7.7. — Si K et L sont deux objets de $\mathsf{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, on a déjà construit (cf. 4.7.1) un morphisme $\mathbf{Hom}(K, L) \otimes K \to L$. En utilisant l'isomorphisme de symétrie, on en déduit un morphisme $K \otimes \mathbf{Hom}(K, L) \to L$ qui correspond par adjonction à un morphisme $K \to \mathbf{Hom}(\mathbf{Hom}(K, L), L)$ dit de « bidualité ». Il satisfait aux mêmes règles de signe que celles énoncées dans [Conrad, 2000, § 1.3]. L'objet de l'exposé XVII sera d'étudier une version dérivée de cette construction...

4.8. — Ce paragraphe est une mise en garde à propos de l'ambiguïté du sens que pourrait revêtir un énoncé disant deux constructions cohomologiques utilisant des conventions de signes différentes sont égales ou bien opposées. Considérons par exemple la catégorie dérivée $\mathsf{D}^+(X)$ des faisceaux abéliens sur un site X. Pour tout faisceau abélien $\mathscr{F}$, on peut noter $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) := \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^+(X)}(\mathbf{Z}, \mathscr{F}[i])$. En utilisant la construction 4.2, on obtient un ∂-foncteur $(\mathrm{H}^\star(X, -), \delta)$. Posons maintenant, $\tilde{\mathrm{H}}^i(X, \mathscr{F}) := \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$ et notons $\tilde{\delta} := -\delta$. Bien sûr, $(\tilde{\mathrm{H}}^\star(X, -), \tilde{\delta})$ est aussi un ∂-foncteur : c'est celui que l'on obtient naturellement en utilisant les conventions de [SGA 4 XVII 1.1].

Le caractère universel de ces deux ∂-foncteurs induit un isomorphisme canonique de ∂-foncteurs $\varphi\colon (\mathrm{H}^\star(X, -), \delta) \xrightarrow{\sim} (\tilde{\mathrm{H}}^\star(X, -), \tilde{\delta})$: en degré i, il est donné par la multiplication par $(-1)^i$.

Admettons qu'une certaine construction cohomologique utilisant le premier ∂-foncteur produise une classe $x \in \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$ et qu'une autre construction utilisant le deuxième produise une classe $y \in \tilde{\mathrm{H}}^i(X, \mathscr{F})$. L'énoncé « les classes de cohomologie x et y sont égales » peut alors raisonnablement prendre deux sens différents :

(a) Comme ensemblistement, $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$ et $\tilde{\mathrm{H}}^i(X, \mathscr{F})$ sont tous les deux égaux à l'ensemble des morphismes $\mathbf{Z} \to \mathscr{F}[i]$ dans $\mathsf{D}^+(X)$, on peut comprendre que $y = x$;

(b) Si on identifie $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$ et $\tilde{\mathrm{H}}^i(X, \mathscr{F})$ *via* l'isomorphisme de ∂-foncteurs φ, on peut comprendre que $y = (-1)^i x$.

On notera qu'en degré pair, les deux acceptions coïncident. (Sinon, le rédacteur recommande d'utiliser le sens (b).)