Vincent Pilloni
Benoît Stroh

Théorème de Lefschetz affine

Astérisque, tome 363-364 (2014), Séminaire Bourbaki, exp. nº XV, p. 293-300
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2014__363-364__293_0>

EXPOSÉ XV

THÉORÈME DE LEFSCHETZ AFFINE

Vincent Pilloni et Benoît Stroh

1. Énoncé du théorème et premières réductions

1.1. Énoncé

1.1.1. — Soient X un schéma muni d'une fonction de dimension δ_X (XIV-2.1.10) et n un entier inversible sur X. Pour tout faisceau étale $\mathscr{F}$ de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$-modules sur X,

$$\delta_X(\mathscr{F}) = \sup\left\{\delta_X(x)\ \ x \in X \mid \mathscr{F}_{\bar{x}} \neq 0\right\}.$$

Rappelons (XIV-2.5.2) qu'un morphisme de type fini $f : Y \to X$ induit une fonction de dimension sur Y ; nous la noterons ici $f^\star\delta_X$. Le théorème principal de cet exposé est le suivant (voir aussi Intro.-7).

1.1.2. Théorème. — *Supposons le schéma X quasi-excellent et le morphisme $f : Y \to X$* affine *de type fini. Alors, pour tout faisceau constructible $\mathscr{F}$ de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$-modules sur Y, on a :*

$$\delta_X(\mathrm{R}^q f_\star(\mathscr{F})) \leq f^\star\delta_X(\mathscr{F}) - q.$$

1.1.3. Remarque. — Ce théorème a été déjà démontré en 1994 par O. Gabber lorsque X est de type fini sur un trait, cf. [Illusie, 2003]. La démonstration du théorème précédent procède notamment par réduction à ce cas.

1.2. Reformulation et réductions

1.2.1. — Soient f et $\mathscr{F}$ comme ci-dessus. La conclusion du théorème signifie que pour tout point géométrique $\bar{x}$ de X localisé en un point x et tout entier $q > f^\star\delta_X(\mathscr{F}) - \delta_X(x)$, on a

$$(\mathrm{R}f_\star\mathscr{F})_{\bar{x}} = H^q(Y_{(\bar{x})}, \mathscr{F}) = 0,$$

où l'on note $Y_{(\bar{x})}$ le produit fibré $Y \times_X X_{(\bar{x})}$. Rappelons (XIV-2.4.5) que le schéma strictement local $X_{(\bar{x})}$ peut être muni la fonction de dimension $\delta_{X_{(\bar{x})}} : t \mapsto \dim\overline{\{t\}}$

(XIV-2.4.5) ; c'est l'unique fonction de dimension nulle en x. Notons l'inégalité $f^{\star}\delta_X(\mathscr{F}) - \delta_X(x) \geq f^{\star}_{(\bar{x})}\delta_{X_{(\bar{x})}}(\mathscr{F})$, triviale dans le cas où $\delta_X(x) = 0$, auquel on peut se ramener. Ainsi, le théorème 1.1.2 est équivalent à l'énoncé suivant.

1.2.2. Corollaire. — *Soit X un schéma quasi-excellent,* strictement local, *muni de la fonction de dimension $\delta_X : t \mapsto \dim \overline{\{t\}}$. Alors, pour tout faisceau constructible $\mathscr{F}$ de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$-modules sur Y, on a :*

$$\mathrm{H}^q(Y, \mathscr{F}) = 0 \textit{ si } q > f^{\star}\delta_X(\mathscr{F}).$$

1.2.3. — Procédant comme en [SGA 4 XIV 4.4] pour se ramener au cas d'une immersion ouverte affine puis utilisant la méthode de la trace ([SGA 4 IX 5.5] ou [SGA 5 I 3.1.2]) pour se ramener au cas des coefficients constants (voir aussi XIII-3.7), on montre que le théorème est également équivalent au corollaire suivant. (On pourrait d'ailleurs supposer l'entier n premier.)

1.2.4. Corollaire. — *Soient X un schéma strictement local quasi-excellent de dimension d, un ouvert affine U de X, et un entier inversible n sur X. Alors,*

$$\mathrm{H}^q(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = 0 \textit{ si } q > d.$$

1.2.5. Réduction au cas complet. — Supposons dorénavant X strictement local quasi-excellent, de complété $\widehat{X}$ en le point fermé, et fixons un ouvert affine U de X, dont on note $\widehat{U}$ l'image inverse sur $\widehat{X}$. Le morphisme naturel de $\widehat{X}$ dans X est régulier car X est quasi-excellent. En appliquant le lemme de changement de base par un morphisme régulier (XIV-2.5.3) au diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \widehat{U} \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ \widehat{X} \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

on obtient $\mathrm{H}^q(\widehat{U}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = \mathrm{H}^q(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ pour tout $q \geq 0$. Voir également [Fujiwara, 1995, 7.1.1] pour une autre approche, ainsi que XX-4.4.

1.2.6. — Dans les deux sections qui vont suivre, nous allons démontrer l'énoncé 1.2.4 dans le cas particulier où X est local nœthérien complet à corps résiduel séparablement clos.

2. Pureté, combinatoire des branches et descente

2.1. Pureté : rappel et une application

2.1.1. — Nous rappelons le théorème de pureté absolue démontré par O. Gabber ([Fujiwara, 2002]). Par convention, on considère le schéma vide comme un diviseur à croisements normaux strict dont l'ensemble des branches est indexé par l'ensemble vide.

2.1.2. *Théorème* (XVI-3.1.1). — *Soient X un schéma régulier, Z un diviseur à croisements normaux strict de complémentaire $j : U = X - Z \hookrightarrow X$ et de branches $\{Z_i\}_{i\in I}$, et n un entier inversible sur X. Il existe des isomorphismes canoniques*

$$\mathrm{R}^1 j_\star\,(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in I} (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_{Z_i}(-1)$$

$$\mathrm{R}^q j_\star\,(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \bigwedge^q \mathrm{R}^1 j_\star\,(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$$

2.1.3. Combinatoire des branches : définitions. — Soient $g : X' \to X$ un morphisme entre schémas, et U un ouvert rétrocompact de X. Notons $j : U \hookrightarrow X$ l'immersion ouverte, $j' : U' \hookrightarrow X'$ l'immersion ouverte qui s'en déduit par changement de base, et Z et Z' les fermés complémentaires respectifs. Enfin on se donne un fermé $F \subset Z$ dont on note F' l'image inverse. (L'hypothèse de rétrocompacité de U — c'est-à-dire de quasi-compacité de j — est automatiquement satisfaite si X est localement nœthérien ; elle permet le calcul des fibres des images directes $\mathrm{R}^p j_\star$ ci-dessous.)

2.1.4. Définition. — On dit que $(Z \hookrightarrow X)$ et $(Z' \hookrightarrow X')$ ont **même combinatoire le long de** F si pour tout point géométrique $\overline{z}'$ de F' d'image le point géométrique $\overline{z}$ de F, les propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) les schémas $X_{(\overline{z})}$ et $X'_{(\overline{z}')}$ sont réguliers ;

(ii) (i) soit $X_{(\overline{z})} = Z_{(\overline{z})}$,

 (ii) soit le fermé $Z_{(\overline{z})}$ est un diviseur à croisements normaux strict, dont les composantes sont définies par des équations $f_1, \ldots, f_r$, et les fonctions $g^\star f_1, \ldots, g^\star f_r$ forment une famille libre de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de $X'_{(\overline{z}')}$.

2.1.5. — Notons que, dans le second cas ($Z_{(\overline{z})}$ diviseur), le fermé $Z'_{(\overline{z}')}$ est un diviseur à croisements normaux dans $X'_{(\overline{z}')}$, ayant même nombre de branches.

2.1.6. — Lorsque X est un schéma sur une base S, et F est un fermé de ce dernier, on s'autorise à dire « ... le long de F » pour « ... le long de l'image inverse $F \times_S X$ ».

2.1.7. Proposition. — *Supposons que $(Z \hookrightarrow X)$ et $(Z' \hookrightarrow X')$ aient même combinatoire le long d'un fermé F de X. Alors, pour tout entier n inversible sur X, le morphisme d'adjonction*

$$(\mathrm{R}j_\star \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_{|F'} \to (\mathrm{R}j'_\star \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_{|F'}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Quitte à localiser en des points géométriques $\overline{z}'$ et $\overline{z}$, on peut supposer les schémas strictement locaux et le morphisme $X' \to X$ local. Il faut alors montrer que $\mathrm{R}\Gamma(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \to \mathrm{R}\Gamma(U', \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ est un isomorphisme. D'après le théorème de pureté 2.1.2, il suffit de montrer que le morphisme induit sur le H^1 est un isomorphisme, ce qui résulte aussitôt de la structure de ces groupes et de ce que la classe associée à une branche $Z_i = V(f_i)$ de Z est envoyée par restriction sur la classe de la branche $g^{-1}(Z_i) = V(g^\star f_i)$ (cf. XVI-2). □

2.2. Application du théorème d'hyper-changement de base

2.2.1. — Soit X un schéma nœthérien. Dans cet exposé, on utilise une variante de la topologie h sur X définie en $\mathrm{XII_A}$-2.1.3 : on ne veut considérer ici que des X-schémas de type fini (afin de pouvoir appliquer les résultats de III par exemple) tandis que dans $\mathrm{XII_A}$ il était nécessaire d'autoriser des coproduits infinis (afin de pouvoir appliquer le formalisme de la descente cohomologique ; voir [SGA 4 $\mathrm{V^{bis}}$ 3.0.0]).

On dira donc qu'un morphisme $Y' \to Y$ dans la catégorie Sch.tf$/X$ des X-schémas de type fini est **h-couvrant** s'il est dominé par une composition (finie, dans un ordre arbitraire) de familles couvrantes (dites « élémentaires ») d'un des deux types suivants (dans Sch.tf$/X$) :

— un morphisme propre et surjectif $Z' \to Z$;

— un recouvrement Zariski $(Z_i \to Z)_{i\in I}$, où I est un ensemble *fini.*

Observons qu'un h-hyperrecouvrement $X_\bullet \to X$ (au sens de la définition ci-dessus) est également un hyperrecouvrement pour la topologie h (sur Sch$/X$) de $\mathrm{XII_A}$.

2.2.2. — Supposons maintenant X strictement local (nœthérien) de point fermé x, dont on note $i_x : x \hookrightarrow X$ l'immersion fermée. Considérons une immersion ouverte $j : U \hookrightarrow X$ et $\varepsilon : X_\bullet \to X$ un h-hyperrecouvrement. La proposition suivante — où les morphismes obtenus par changement de base sont notés de façon évidente — est un corollaire immédiat du théorème d'hyper-changement de base ($\mathrm{XII_A}$-2.2.5, ou $\mathrm{XII_B}$-1.10) et du fait que la cohomologie de U est la fibre en x de l'image directe par j.

2.2.3. *Proposition.* — *Sous les hypothèses précédentes, le morphisme d'adjonction*

$$\mathrm{R}\Gamma(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \to \mathrm{R}\varepsilon_{x\star}(i^\star_{x\bullet}\mathrm{R}j_{\bullet\star}\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$$

est un isomorphisme.

2.2.4. — Supposons maintenant donné un morphisme *local* $X' \to X$ de schémas strictement locaux nœthériens. Comme précédemment, on note U un ouvert de X, Z son complémentaire et x le point fermé de X. À tout h-hyperrecouvrement $X_\bullet \to X$ de X est associé par changement de base un hyperrecouvrement de X'. (On utilise ici la stabilité par changement de base des familles couvrantes élémentaires de 2.2.1 ci-dessus.)

2.2.5. Proposition. — *Supposons que pour chaque entier $q \geq 0$ les fermés $(Z_q \hookrightarrow X_q)$ et $(Z'_q \hookrightarrow X'_q)$ aient même combinatoire le long de la fibre spéciale $(X_q)_x$. Alors le morphisme d'adjonction*

$$\mathrm{R}\Gamma(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \to \mathrm{R}\Gamma(U', \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$$

est un isomorphisme. De plus, si l'on fait l'hypothèse précédente pour les seuls entiers $q \leq N+1$, où N est un entier quelconque, les morphismes $\mathrm{H}^q(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \to \mathrm{H}^q(U', \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ sont des isomorphismes pour chaque $q \leq N$.

Démonstration. — Le premier point est conséquence immédiate des deux propositions précédentes. En effet, d'après 2.2.3 et l'invariance de la cohomologie par changement de corps séparablement clos, soit

$$\Big(\mathrm{R}\varepsilon_{x\star}\big(i^\star_{x\bullet}\mathrm{R}j_{\bullet\star}\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}\big)\Big)_{|x'} = \mathrm{R}\varepsilon'_{x'\star}\Big(\big(i_{x\bullet}{}^\star\mathrm{R}j_{\bullet\star}\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}\big)_{|x'_\bullet}\Big),$$

il suffit de démontrer que pour chaque q, l'adjonction $(\mathrm{R}j_{q_\star}\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_{|X'_{q_x}} \to (\mathrm{R}j'_{q_\star}\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_{|X'_{q_x}}$ est un isomorphisme. Cela résulte de l'hypothèse combinatoire et de 2.1.7. La variante tronquée est un corollaire de la démonstration précédente et du fait que la cohomologie en degré q ne dépend que des étages $\leq q+1$. □

2.2.6. Remarque. — Dans ce critère, on ne fait d'hypothèses qu'en les points des fibres spéciales des hyperrecouvrements ; c'est ce qui en fait toute sa force.

3. Uniformisation et approximation des données

3.1. Notations

3.1.1. — Soient X, U, Z et n comme à la fin du paragraphe 1.2 : le schéma X est strictement local complet, U en est un ouvert *affine* strict (sans quoi il n'y a rien à démontrer), $Z = X - U$ (muni de la structure réduite), et n est un entier inversible sur X. On veut démontrer 1.2.4 dans ce cas. Fixons un entier N.

3.1.2. — Il résulte du théorème d'uniformisation (VII-1.1), complété par XIII-2.2.2, qu'il existe un h-hyperrecouvrement $\varepsilon : X_\bullet \to X$ tel que chaque X_q soit régulier et, dans chaque composante connexe de X_q, le sous-schéma fermé $Z_q = Z \times_X X_q$ est soit tout, soit un diviseur à croisements normaux strict.

3.1.3. — Soient k le corps résiduel de X, un anneau de Cohen C de corps résiduel k (IV-4.1.7) et $S = \mathrm{Spec}(C)$. Il résulte du théorème de structure des anneaux locaux nœthériens ([ÉGA 0_{IV} 19.8.8]) qu'il existe un entier m et une immersion fermée de X dans le complété en l'origine (de la fibre spéciale sur S) de l'espace affine $\mathbf{A}^m_S$. Notons $\widehat{E}$ ce complété, E son analogue hensélien (hensélisé de l'espace affine en l'origine) et enfin e le point fermé de ce dernier.

3.1.4. — Le schéma E étant quasi-excellent, le morphisme de complétion $\widehat{E} \to E$ est (local) régulier de sorte que, d'après le théorème de Popescu, on peut écrire :

$$\widehat{E} = \lim_{\alpha} E_{\alpha},$$

où les $E_\alpha \to E$ sont des morphismes essentiellement lisses entre schémas strictement locaux, la limite étant filtrante. Notons que les schémas E_α sont essentiellement de type fini sur S.

3.2. Passage à la limite

3.2.1. — Quitte à restreindre l'ensemble d'indices, c'est-à-dire à supposer $\alpha \geq \alpha_0$ pour α_0 convenable, les principes généraux de [ÉGA IV3 § 8], joints au fait que les schémas X, Z, U et les X_q pour $q \leq N$ sont de présentation finie sur $\widehat{E}$, entraînent l'existence de diagrammes à carrés cartésiens de E_α-schémas de type fini

$$\begin{tikzcd} U_{\leq N,\alpha} \arrow[r] \arrow[d] & X_{\leq N,\alpha} \arrow[d] & Z_{\leq N,\alpha} \arrow[l] \arrow[d] \\ U_\alpha \arrow[r] \arrow[dr] & X_\alpha \arrow[d] & Z_\alpha \arrow[l] \arrow[dl] \\ & E_\alpha & \end{tikzcd}$$

déduits par changement de base $E_\alpha \to E_{\alpha_0}$ du diagramme pour α_0, et dont l'analogue sur $\widehat{E}$ se déduit par changement de base $\widehat{E} \to E_\alpha$. De plus, on peut supposer que pour chaque $\alpha \geq \alpha_0$, $X_\alpha \to E_\alpha$ est une immersion fermée — de sorte que X_α est strictement local —, et $U_\alpha \to X_\alpha$ une immersion ouverte affine de complémentaire Z_α.

3.2.2. Remarque. — Les schémas X_q et $X_{q\alpha}$ ont même fibre spéciale pour tout $q \leq N$.

3.2.3. — Il résulte de [ÉGA IV3 8.10.5] et de la description (2.2.1) des morphismes h-couvrants que l'on peut supposer que les $X_{\leq N,\alpha} \to X_\alpha$ sont des h-hyperrecouvrements (tronqués) pour $\alpha \geq \alpha_0$.

3.2.4. — Vérifions que l'on peut supposer que pour chaque α et chaque $q \leq N$, le « modèle » $X_{q\alpha}$ de X_q est régulier le long de sa fibre spéciale. Fixons q puis oublions le. Le schéma X est donc maintenant régulier, de type fini sur $\widehat{E}$. Le problème étant local pour la topologie de Zariski on peut supposer, par quasi-compacité, que X est un sous-schéma de $Y = \mathbf{A}^m_{\widehat{E}}$ de la forme $V(f_1, \dots, f_c) \cap D(g)$, où $f_1, \dots, f_c, g \in \Gamma(Y, \mathscr{O}_Y)$, purement de codimension c dans $D(g)$[(i)].

(i) Bien que cela ne soit pas utile ici, notons qu'un tel X a une immersion régulière de codimension $c+1$ dans $\mathbf{A}^{m+1}_{\widehat{E}}$, où il est défini par les équations $f_1, \dots, f_c, 1 - gT_{m+1}$.

Pour α suffisamment grand, les fonctions $f_1, \ldots, f_c, g$ se descendent en des fonctions $f_{i\alpha}, g_\alpha$ sur $Y_\alpha = \mathbf{A}^m_{E_\alpha}$. Soit x un point de Y appartenant à la fibre spéciale de X et soit x_α son image par $Y \to Y_\alpha$. Notons $\mathfrak{m}$ (resp. $\mathfrak{m}_\alpha$) l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{Y,x}$ (resp. $\mathscr{O}_{Y_\alpha,x_\alpha}$). Par régularité de X en x, les images $\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_c}$ des f_i dans $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ sont linéairement indépendantes sur $\kappa(x) = \mathscr{O}_{Y,x}/\mathfrak{m}$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} f_i & \mathfrak{m} \arrow[r, two heads] & \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \\ f_{i\alpha} \arrow[u, mapsto] & \mathfrak{m}_\alpha \arrow[u] \arrow[r, two heads] & \mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

étant commutatif, il résulte de l'égalité $\kappa(x) = \kappa(x_\alpha)$ que les images $\overline{f_{i\alpha}}$ des $f_{i\alpha}$ dans $\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$ sont linéairement indépendantes sur $\kappa(x_\alpha)$. Le sous-schéma localement fermé $X_\alpha = V(f_{1\alpha}, \ldots, f_{c\alpha}) \cap D(g_\alpha)$ de Y_α est donc régulier en x_α.

3.2.5. — On montre de même que l'on peut supposer que pour chaque α et chaque $q \leq N$, les immersions $(Z_q \hookrightarrow X_q)$ et $(Z_{q\alpha} \hookrightarrow X_{q\alpha})$ ont *même combinatoire* le long du point fermé $e \in E$, c'est-à-dire le long des fibres spéciales.

3.2.6. — Il résulte de la proposition 2.2.5 que les morphismes d'adjonction

$$\mathrm{H}^q(U_\alpha, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \to \mathrm{H}^q(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$$

sont des isomorphismes pour $q < N$. Nous allons montrer que si $q > d = \dim(X)$ et α est suffisamment grand, on a $\mathrm{H}^q(U_\alpha, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = 0$. Ceci achèvera la démonstration du théorème de Lefschetz affine. Notons qu'en général les X_α sont de dimension bien plus grande que $d = \dim(X)$.

3.3. Utilisation d'une section

3.3.1. — Soient $\sigma : E \to E_\alpha$ une section de $E_\alpha \to E$ et X^σ_α (resp. $U^\sigma_\alpha, Z^\sigma_\alpha$) le E-schéma déduit de X_α (resp. U_α, Z_α) par changement de base. Notons également $X^\sigma_{\leq N,\alpha}$ le h-hyperrecouvrement de X^σ_α obtenu à partir de $X_{\leq N,\alpha} \to X_\alpha$ par changement de base. Enfin $U^\sigma_{\leq N,\alpha}$ (resp. $Z^\sigma_{\leq N,\alpha}$) est l'ouvert (resp. le fermé) simplicial évident.

3.3.2. — Il résulte de III-5.1 et III-5.4 (voir aussi III-6.2, démonstration) que si α est suffisamment grand et σ est suffisamment proche de l'identité, alors les immersions fermées $(Z^\sigma_{q\alpha} \hookrightarrow X^\sigma_{q\alpha})$ et $(Z_{q\alpha} \hookrightarrow X_{q\alpha})$ ont *même combinatoire* le long de la fibre spéciale au-dessus de E pour chaque $q \leq N$, et $\dim(X^\sigma_\alpha) = d$. Il en résulte comme ci-dessus que le morphisme

$$\mathrm{H}^q(U_\alpha, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \to \mathrm{H}^q(U^\sigma_\alpha, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$$

est un isomorphisme pour $q < N$. Comme l'ouvert U^σ_α est affine dans X^σ_α de dimension d et essentiellement de type fini sur S, il résulte par passage à la limite du théorème de Lefschetz sur S que

$$\mathrm{H}^q(U_\alpha^\sigma, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = 0 \text{ si } d < q < N.$$

Si S est un *trait*, le théorème de Lefschetz utilisé est dû à O. Gabber ; voir [Illusie, 2003, 2.4]. Si S est le spectre d'un corps, voir [SGA 4 XIV]. Finalement, $\mathrm{H}^q(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = 0$ si $q > d = \dim(X)$. □