Astérisque

FABRICE ORGOGOZO

Le théorème de finitude

Astérisque, tome 363-364 (2014), Séminaire Bourbaki,
exp. nº XIII, p. 261-275

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2014__363-364__261_0>

EXPOSÉ XIII

LE THÉORÈME DE FINITUDE

Fabrice Orgogozo

1. Introduction

1.1. — L'objet de cet exposé est de démontrer le théorème suivant (Intro.-1).

1.1.1. Théorème. — *Soient X un schéma nœthérien* quasi-excellent *(I-2.10), $f : Y \to X$ un morphisme de type fini, $n \geq 1$ un entier inversible sur X et $\mathscr{F}$ un faisceau constructible de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$-modules sur Y. Alors :*

(i) *Pour tout entier $q \geq 0$, le faisceau $\mathrm{R}^q f_\star \mathscr{F}$ est constructible.*

(ii) *Il existe un entier N tel que $\mathrm{R}^q f_\star \mathscr{F} = 0$ pour $q \geq N$.*

1.1.2. — De façon équivalente, le morphisme $\mathrm{R}f_\star : \mathsf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \to \mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ induit un morphisme $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \to \mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ entre les sous-catégories de complexes à cohomologie bornée et constructible.

1.2. Remarques

1.2.1. Organisation de l'exposé. — L'énoncé ci-dessus est la conjonction d'un résultat de *constructibilité* (i) et d'un résultat d'*annulation* (ii). Dans le § 2, nous présentons une démonstration de la constructibilité qui ne requiert pas la forme forte du théorème d'uniformisation mais seulement la forme faible (VII-1.1). Les ingrédients clefs supplémentaires sont le théorème de pureté absolu, le théorème de constructibilité générique (dû à P. Deligne) et la formule d'hyper-changement de base. Au paragraphe 2.3, nous donnons une démonstration d'un résultat d'annulation pour les schémas *de dimension finie*, qui complète la démonstration du théorème 1.1.1 pour ces schémas. Le cas général est traité en § 3, en s'appuyant sur le théorème d'uniformisation premier à ℓ (IX-1.1), où ℓ est un nombre premier divisant n. Enfin, nous esquissons des extensions de ce résultat d'abord au cas des coefficients ℓ-adiques, où ℓ est un nombre premier inversible sur les schémas considérés, puis au cas des champs (comme coefficients).

1.2.2. Terminologie et notations. — Nous dirons d'un complexe $\mathscr{K} \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$, où Λ est un anneau fini, est **constructible** s'il appartient à $\mathrm{Ob}\,\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$, c'est-à-dire si ses faisceaux de cohomologie sont constructibles, nuls en grands degrés. Lorsque $n \geq 1$ est fixé et que cela ne semble pas créer de confusion nous notons Λ l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. De même, un complexe $\mathscr{K}$ sur un schéma X étant donné, nous noterons souvent encore $\mathscr{K}$ ses images inverses sur différents X-schémas.

2. Constructibilité via l'uniformisation locale faible

Dans cette section, on démontre 1.1.1 (i), dont on reprend les notations.

2.1. Réductions. — Les réductions suivantes sont classiques : cf. par ex. [SGA 4 XVI 4.5].

2.1.1. Réduction au cas où le faisceau $\mathscr{F}$ est constant. — D'après [SGA 4 IX 2.14 (ii)], le faisceau $\mathscr{F}$ s'injecte dans une somme finie $\mathscr{G} = \bigoplus_{i \in I} g_{i\star} C_i$ d'images directes par des morphismes finis g_i de faisceaux en $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$-modules constants constructibles C_i. On peut supposer $\mathscr{F} = \mathscr{G}$. Cela résulte d'une part du fait qu'un sous-quotient d'un faisceau constructible est constructible(i) et d'autre part de la suite exacte longue de cohomologie associée au triangle

$$\mathrm{R}f_\star \mathscr{F} \to \mathrm{R}f_\star \mathscr{G} \to \mathrm{R}f_\star(\mathscr{G}/\mathscr{F}) \xrightarrow{+1} .$$

Enfin, on peut supposer $\mathscr{F}$ constant constructible car on peut supposer l'ensemble d'indices I être un singleton et l'égalité $\mathrm{R}f_\star(g_\star C) = \mathrm{R}(f \circ g)_\star C$, où g est un morphisme fini, nous permet de supposer $g = \mathrm{Id}$. Décomposant n en produit, on se ramène au cas où $\mathscr{F}$ est un faisceau constant $\mathbf{F}_\ell$, le nombre premier ℓ étant inversible sur X (cf. p. ex. [SGA $4\frac{1}{2}$ [Th. finitude] 2.2 b)]).

2.1.2. Réduction au cas où le morphisme f est une immersion ouverte. — Un faisceau sur le schéma X étant constructible si et seulement si il l'est localement pour la topologie de Zariski ([SGA 4 IX 2.4 (ii)]), on peut supposer X affine. On utilise ici le fait trivial que la formation des images directes commute au changement de base par un ouvert de Zariski. On peut également supposer Y affine ; cela résulte par exemple de l'analogue faisceautique

$$E_1^{p,q} = \mathrm{R}^q f_{p\star}(\mathscr{F}_{|Y_p}) \Rightarrow \mathrm{R}^{p+q} f_\star \mathscr{F}$$

de la suite spectrale de Leray ([Deligne, 1974, 5.2.7.1]), où les $f_p : Y_p \to X$ sont déduits de f et d'un hyperrecouvrement Zariski $Y_\bullet \to Y$. Le morphisme $f : Y \to X$ est alors affine donc quasi-projectif, et le théorème de constructibilité étant connu pour les morphismes propres ([SGA 4 XIV 1.1]), on peut supposer que f est une *immersion*

(i) Pour le voir, on peut utiliser le fait qu'un faisceau est constructible si et seulement si il est nœthérien, cf. [SGA 4 IX 2.9 (i)].

ouverte dominante. (On pourrait également utiliser le théorème de compactification de Nagata lorsque f est séparé.) Conformément à l'usage, nous noterons dorénavant $j : U \to X$ le morphisme f.

2.2. Fin de la démonstration du théorème 1.1.1 (i)

2.2.1. — Soit $q \geq 0$ un indice pour lequel on souhaite montrer que le faisceau $\mathrm{R}^q j_\star \mathbf{F}_\ell$ est constructible. On rappelle que j est une immersion ouverte $U \hookrightarrow X$ et ℓ est un nombre premier inversible sur X. Il résulte du critère de constructibilité [SGA 4 IX 2.4(v)] qu'il suffit de démontrer que pour toute immersion fermée $g : Z \hookrightarrow X$, le faisceau $g^\star \mathrm{R}^q j_\star \mathbf{F}_\ell$ est constructible *sur un ouvert dense* de Z. Le théorème d'uniformisation locale (VII-1.1), joint à la méthode classique de construction d'hyperrecouvrements ([Deligne, 1974, § 6.2]), a pour corollaire immédiat le fait suivant.

2.2.2. Théorème. — *Il existe un hyperrecouvrement pour la topologie h sur les X-schémas de type fini $\varepsilon_\bullet : X_\bullet \to X$ satisfaisant les conditions suivantes :*

(i) *pour chaque $i \geq 0$, le schéma X_i est régulier ;*
(ii) *pour chaque $i \geq 0$, l'image inverse de U dans chaque composante connexe de X_i est soit le complémentaire du support d'un diviseur à croisements normaux strict, soit vide.*

La topologie h sur la catégorie des X-schémas de type fini est définie de façon semblable à $\mathrm{XII_A}$-2.1.3. (Voir aussi XV-2.2.1 et [Goodwillie & Lichtenbaum, 2001].) On utilise le fait que, par II-3.2.1, un morphisme dans alt/X qui est couvrant pour la topologie des altérations est un h-recouvrement.

2.2.3. — Notons $Z_\bullet$, $g_\bullet$ et $j_\bullet$ le schéma et les morphismes simpliciaux qui se déduisent de Z, g et j respectivement par le changement de base $X_\bullet \to X$. Il résulte du théorème de pureté absolue (XVI-3.1.1) que le complexe $g_\bullet^\star \mathrm{R} j_{\bullet\star} \Lambda$ sur $Z_\bullet$ est à cohomologie constructible. Par ailleurs, il résulte du théorème de constructibilité générique [SGA $4\frac{1}{2}$ [Th. finitude] 1.9 (i)] — appliqué aux morphismes $\varepsilon_p : Z_p \to Z$ et aux complexes $g_p^\star \mathrm{R} j_{p_\star} \mathbf{F}_\ell$ — et de la suite spectrale rappelée ci-dessus qu'il existe un ouvert dense de Z au-dessus duquel le tronqué en degrés inférieurs ou égaux à q de l'image directe $\mathrm{R}\varepsilon_{Z_\bullet\star}(g_\bullet^\star \mathrm{R} j_{\bullet\star} \mathbf{F}_\ell)$ est *constructible.* D'après le théorème d'hyper-changement de base ($\mathrm{XII_A}$-2.2.5 ou $\mathrm{XII_B}$-1.10), cette image directe est isomorphe à $g^\star \mathrm{R} j_\star \mathbf{F}_\ell$. Le faisceau $g^\star \mathrm{R}^q j_\star \mathbf{F}_\ell$ est donc constructible sur un ouvert dense de Z. □

2.3. Compléments

2.3.1. Théorème. — *Soient S un schéma nœthérien, $f : X \to Y$ un morphisme de type fini entre S-schémas de type fini et n un entier inversible sur S. Supposons l'une des deux conditions suivantes satisfaite :*

(i) *le schéma S est de dimension* 1 *;*
(ii) *le schéma S est* local *de dimension* 2.

Alors, pour faisceau de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$-modules constructible $\mathscr{F}$ sur X, les faisceaux image directe $\mathrm{R}^q f_\star \mathscr{F}$ sont constructibles et nuls pour $q \gg 0$.

2.3.2. Remarque. — On verra en XIX-2.5 qu'il existe un contre-exemple à la constructibilité lorsque S est nœthérien de dimension 2 (non local). Ceci résulte de l'existence d'une surface régulière et d'un diviseur possédant une infinité de points doubles. Il serait intéressant de construire un contre-exemple à l'énoncé de constructibilité précédent lorsque S est *local* (nœthérien) de dimension 3, ou bien de montrer qu'il n'en existe pas.

Esquisse de démonstration. — (i) D'après le théorème de constructibilité générique ([SGA $4\frac{1}{2}$ [Th. finitude] 1.9 (i)]), il existe un ouvert dense de S au-dessus duquel le résultat est acquis. On peut donc supposer le schéma S *local.* Il est également loisible de le supposer strictement hensélien. Par restriction à ses composantes irréductibles, on peut finalement supposer S local *intègre* (de dimension 1). Soit $S' \to S$ le morphisme de normalisation. C'est un homéomorphisme universel de sorte que l'on peut remplacer S par S'. Or, ce dernier schéma est nœthérien régulier, de dimension 1. La conclusion résulte alors du théorème de constructibilité [SGA $4\frac{1}{2}$ [Th. finitude] 1.1] et du théorème de finitude de la dimension cohomologique [SGA 4 x 3.2, 4.4]. (Voir aussi [Illusie, 2003, 2.4] et $\mathrm{XVIII}_{\mathrm{A}}$-1.1.)

(ii) Soit s le point fermé de S. Le schéma $S - \{s\}$ étant de dimension 1 le résultat est acquis au-dessus de cet ouvert. Soit $\mathscr{F}$ un $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$-Module constructible sur X et considérons un triangle distingué

$$\mathscr{K} \to \mathscr{F} \to \mathrm{R}j_\star j^\star \mathscr{F},$$

où j est l'immersion ouverte $X - X_s \hookrightarrow X$. Notons que $\mathscr{K}$ est à support dans X_s et constructible si $\mathrm{R}j_\star j^\star \mathscr{F}$ l'est. Appliquant le foncteur $\mathrm{R}f_\star$ au triangle précédent et utilisant la finitude sur $X - X_s$ (resp. X_s), on est ramené à montrer la constructibilité des images directes par les immersions ouvertes $X - X_s \hookrightarrow X$ et $Y - Y_s \hookrightarrow Y$. On utilise alors le morphisme de complétion $\widehat{S} \to S$ et le théorème de comparaison de Gabber-Fujiwara ([Fujiwara, 1995, 6.6.4]) pour se ramener au cas où le schéma local S est complet, donc excellent. □

2.3.3. — Reprenons les notations du théorème 1.1.1 et supposons le schéma X de dimension finie. Le (i) de *loc. cit.* joint au théorème de Lefschetz affine XV-1.1.2[(ii)] entraînent le complément suivant, qui sera amélioré dans la section suivante.

2.3.4. Proposition. — *Soient X un schéma nœthérien quasi-excellent de* dimension finie *et $f : Y \to X$ un morphisme de type fini. Pour tout entier $n \geq 1$ inversible sur X, le foncteur $\mathrm{R}f_\star : \mathsf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \to \mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ est de dimension cohomologique finie. En particulier, il induit un foncteur de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ dans $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$.*

Démonstration. — On peut supposer X affine. Il résulte de la suite spectrale de Čech alternée ([Gabber & Ramero, 2013, 7.2.20]) associée à un recouvrement fini par des ouverts affines de Y que l'on peut supposer f séparé puis — par une nouvelle application de cette suite spectrale — affine (voir aussi XVIII$_{\mathrm{A}}$-1.4). Soit maintenant N un majorant de la dimension des fibres de f. La dimension cohomologique du foncteur image directe par f est au plus $d + N$, où $d = \dim(X)$. En effet, si $\overline{x}$ est un point géométrique de X, et $\mathscr{F}$ un $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$-faisceau constructible sur Y, on a $(\mathrm{R}f_\star\mathscr{F})_{\overline{x}} = \mathrm{R}\Gamma(Y \times_X X_{(\overline{x})}, \mathscr{F})$. Les schémas $X' = X_{(\overline{x})}$ et $Y' = Y \times_X X_{(\overline{x})}$ admettent respectivement les fonctions de dimension $\delta_{X'} : x' \mapsto \dim(\overline{\{x'\}})$ et la fonction induite $\delta_{Y'}$ définie en XIV-2.5.2. Notons que $\delta_{X'}$ est bornée par d et $\delta_{Y'}$ par $d+N$. Il résulte donc du théorème de Lefschetz affine (sous la forme XV-1.2.4) que $\mathrm{H}^q(Y', \mathscr{F}) = 0$ pour $q > d + N$. □

2.3.5. Remarque. — On verra en XVIII$_{\mathrm{A}}$-1.1 que l'on a un résultat d'annulation sous la seule hypothèse que X est nœthérien de dimension finie : si X est un schéma nœthérien strictement local hensélien de dimension $d > 0$ et n est inversible sur X, alors tout ouvert de X est de n-dimension cohomologique au plus $2d - 1$.

2.3.6. Constructibilité des images directes dans le cas non abélien. — Quitte à remplacer la réduction 2.1.1 par [SGA 1 XIII § 3, 4)], l'usage de [SGA 4 XIV 1.1] en 2.1.2 par [SGA 1 XIII 6.2], le théorème de pureté absolu par [SGA 1 XIII 2.4], le théorème de finitude [SGA $4\frac{1}{2}$ [Th. finitude] 1.9 (i)] par [Orgogozo, 2003, 2.2] et enfin XII$_{\mathrm{A}}$-2.2.5 par les résultats énoncés en XII$_{\mathrm{A}}$-2.2.6.2 ou XII$_{\mathrm{B}}$-2.2, on obtient essentiellement par la même méthode une démonstration du théorème suivant.

***2.4. Théorème* (XXI-1.2).** — *Soient X un schéma nœthérien* quasi-excellent, *$f : Y \to X$ un morphisme de type fini, et L l'ensemble des nombres premiers inversibles sur X. Pour tout champ en groupoïdes constructible ind-L-fini sur $Y_{\text{ét}}$ le champ $f_\star\mathscr{C}$ est constructible.*

(ii) Le lecteur constatera que cette référence à un exposé ultérieur ne génère pas de cercle vicieux.

3. Constructibilité et annulation via l'uniformisation locale première à ℓ

Dans cette section, on démontre le théorème 1.1.1. Constructibilité (i) et annulation (ii) sont établis simultanément.

3.1. Réduction au cas d'une immersion ouverte et à la finitude hors d'un lieu de codimension donnée

3.1.1. — Comme en 1.2.2, posons $\Lambda = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, où n est l'entier inversible sur X de l'énoncé. Pour chaque entier $c \geq 0$, considérons la propriété (P_c) suivante :

> *Pour tout schéma quasi-excellent nœthérien X, toute immersion ouverte dominante $j : U \hookrightarrow X$ et tout complexe $\mathscr{K} \in \mathsf{Ob}\,\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}(U_{\text{ét}}, \Lambda)$, il existe un fermé $T \hookrightarrow X$ de codimension strictement supérieure à c tel que $(\mathrm{R}j_\star\mathscr{K})_{|X-T}$ appartienne à $\mathsf{Ob}\,\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}((X-T)_{\text{ét}}, \Lambda)$.*

3.1.2. — Vérifions que la conjonction des énoncés (P_c) pour chaque $c \geq 0$, entraîne le théorème. On peut supposer le schéma but, disons Y, *affine*. Procédant ensuite comme dans la démonstration de 2.3.4, on se ramène au cas où le morphisme $f : X \to Y$ considéré est *séparé* de type fini. D'après le théorème de compactification de Nagata, il existe une immersion ouverte $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ et un morphisme propre $\overline{f} : \overline{X} \to Y$ tels que $f = \overline{f}j$. La formule de composition $\mathrm{R}f_\star = \mathrm{R}\overline{f}_\star\mathrm{R}j_\star$ et le théorème de finitude pour les morphismes propres nous ramènent à démontrer la constructibilité du complexe $\mathscr{K} = \mathrm{R}j_\star\mathscr{F}$. La conclusion résulte alors du lemme suivant.

3.1.3. Lemme. — *Soient X un schéma nœthérien et $\mathscr{K} \in \mathsf{Ob}\,\mathsf{D}^{+}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Supposons que pour tout entier $c \geq 0$, il existe un fermé T_c de codimension strictement supérieure à c tel que $\mathscr{K}_{|X-T_c} \in \mathsf{Ob}\,\mathsf{D}^{+}((X-T_c)_{\text{ét}}, \Lambda)$. Alors, $\mathscr{K} \in \mathsf{Ob}\,\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.*

Démonstration. — Le schéma X étant nœthérien, ses localisés sont de dimension finie et pour toute suite de fermés $(T_c)_{c\in\mathbf{N}}$ comme dans l'énoncé, on a $X = \bigcup_c (X - T_c)$. D'autre part, le schéma X étant quasi-compact, il est recouvert par un nombre *fini* des ouverts $X - T_c$. La conclusion résulte alors du fait que si U, U' sont deux ouverts de X tels que $\mathscr{K}_{|U} \in \mathsf{Ob}\,\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}(U_{\text{ét}}, \Lambda)$, $\mathscr{K}_{|U'} \in \mathsf{Ob}\,\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}(U'_{\text{ét}}, \Lambda)$, on a également $\mathscr{K}_{|U\cup U'} \in \mathsf{Ob}\,\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}((U \cup U')_{\text{ét}}, \Lambda)$. □

3.1.4. — Nous allons démontrer la propriété (P_c) ci-dessus par récurrence sur c. Insistons sur le fait que *le schéma X et le complexe $\mathscr{K}$ sont variables.* Pour $c = 0$, cette propriété est triviale : prendre $T = X - U$. Soit $c \geq 1$ et supposons la propriété établie au cran $c - 1$. On souhaite la démontrer au cran c.

3.2. Récurrence : l'ingrédient clef et une première réduction

3.2.1. — Supposons, comme on peut le faire, le schéma X *réduit.* D'après le théorème d'uniformisation première à ℓ (IX-1.1) et le théorème de la forme standard (II-3.2.3) il existe une famille finie, indexée par un ensemble I d'éléments i, de diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
X_i''' \arrow[rr] \arrow[d, "\text{fini, plat, surjectif}"', "\text{degré premier à } \ell"] & & Y = \coprod_{j\in J} Y_j \arrow[d] & \\
X_i'' \arrow[r, "\text{étale}"'] & X' \arrow[r, "p", "\text{propre, birationnel}"'] & X & U \arrow[l, hook', "j"']
\end{tikzcd}$$

où, en plus des propriétés indiquées ci-dessus,

— la famille $(X_i'' \to X')$ est couvrante pour la topologie étale complètement décomposée ;

— les schémas Y_j, $j \in J$, sont *réguliers* ;

— l'image inverse de U dans Y_j est le complémentaire d'un diviseur strictement à croisements normaux.

3.2.2. — Soit $(j, \mathscr{K})$ une paire comme dans l'énoncé de la propriété (P_c) (3.1). Nous verrons seulement plus tard que l'on peut supposer $\mathscr{K} = \Lambda$. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée aux paires $(j, \mathscr{K})$ et $(j', \mathscr{K})$, où j' est l'immersion ouverte de $U' = U \times_X X'$ dans X', il existe deux fermés $T \hookrightarrow X$ et $T' \hookrightarrow X'$ de codimension $\geq c$ tels que les complexes $\mathrm{R}j_\star\mathscr{K}$ et $\mathrm{R}j'_\star\mathscr{K}$ soient constructibles sur les ouverts complémentaires correspondants. Le fermé T n'ayant qu'un nombre fini de points maximaux et l'énoncé à démontrer — la constructibilité hors d'un fermé de codimension $> c$ — étant un problème local au voisinage de ces points, on peut supposer T irréductible, de codimension c, de point générique noté η_T. Soit η' un point maximal de T'. Si l'image par p de η' n'est pas égale à η_T, la composante irréductible correspondante de T' disparaît après localisation (Zariski) au voisinage de η_T. (Il résulte en effet de la formule des dimensions [ÉGA IV_1 5.5.8.1] que $p(\eta')$ ne peut être une générisation stricte de η_T.) Compte tenu du fait que T est de codimension c et T' de codimension au moins égale, toute composante irréductible T'_α de T' dominant T est nécessairement de codimension égale à celle de T — en vertu de la formule des dimensions (*loc. cit.*) —, et le morphisme induit $T'_\alpha \to T$ est génériquement fini. Quitte à se restreindre à un voisinage ouvert de η_T dans X, on peut finalement supposer que T' est une somme $\coprod_\alpha T'_\alpha$, où les T'_α sont irréductibles et les morphismes $T'_\alpha \to T$ sont *finis*, surjectifs.

3.3. Notation : le complexe $\psi_f(g, \mathscr{K})$

3.3.1. — Pour tout X-schéma $f : X_1 \to X$ et tout X_1-schéma $g : X_2 \to X_1$, notons h le morphisme composé $X_2 \to X_1 \to X$ et j_1 l'immersion ouverte $U_1 = X_1 \times_X U \hookrightarrow X_1$

déduite de j par changement de base. Pour tout complexe $\mathscr{K} \in \mathsf{Ob}\,\mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, considérons le complexe de faisceaux sur X,

$$\psi_f(g, \mathscr{K}) := \mathrm{R}h_\star\big(g^\star(\mathrm{R}j_{1\star}\mathscr{K})\big) \qquad \begin{tikzcd} X_2 \arrow[d, "g"'] \arrow[dd, bend right=60, "h"'] & \\ X_1 \arrow[d, "f"'] \arrow[r, phantom, ""] & U_1 \arrow[l, hook', "j_1"'] \arrow[d] \\ X \arrow[ur, phantom, "\square"] & U \arrow[l, hook', "j"] \end{tikzcd}$$

où l'on note abusivement $\mathscr{K}$ pour son image inverse sur U_1. Ci-dessous, le morphisme g sera le plus souvent une immersion fermée, qui sera parfois supprimée de la notation, ainsi que f, si cela ne semble pas induire de confusion. Par exemple, $\psi(X, \mathscr{K}) = \mathrm{R}j_\star\mathscr{K}$.

3.3.2. — La formation du complexe ψ est fonctorielle en le sens suivant : pour tout diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & X_2 \arrow[d, "g"'] & & X'_2 \arrow[ll, "m"'] \arrow[d, "g'"] & \\ U_1 \arrow[r, hook, "j_1"] & X_1 \arrow[dr, "f"'] & & X'_1 \arrow[ll, "n"'] \arrow[dl, "f'"] & U'_1 = n^{-1}(U_1) \arrow[l, hook', "j'_1"'] \\ & & X & & \end{tikzcd}$$

le morphisme de changement de base (adjonction) $n^\star \mathrm{R}j_{1\star}\mathscr{K} \to \mathrm{R}j_{1'\star}\mathscr{K}$ induit un morphisme

$$\psi_f(g, \mathscr{K}) \to \psi_{f'}(g', \mathscr{K}).$$

3.4. Seconde localisation

3.4.1. — Nous dirons qu'un morphisme d'une catégorie dérivée $\mathsf{D}^+(\mathscr{T}, \Lambda)$, où $\mathscr{T}$ est le topos étale d'un schéma, est un **$\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}$-isomorphisme** ou isomorphisme *modulo* $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}$, s'il a un cône dans $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}(\mathscr{T}, \Lambda)$. Cela revient d'après [Neeman, 2001, 2.1.35] à supposer que la flèche induite dans la catégorie triangulée quotient $\mathsf{D}^+(\mathscr{T}, \Lambda)/\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}(\mathscr{T}, \Lambda)$ est un *isomorphisme.* Notons que dans la terminologie d'*op. cit.*, la sous-catégorie $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}(\mathscr{T}, \Lambda)$ est *épaisse.* La localisation considérée ici (due à J.-L. Verdier) est l'analogue triangulé de celle considérée par J.-P. Serre dans le cas des catégories abéliennes.

3.4.2. Proposition. — *Quitte à se restreindre au voisinage de η_T, on peut supposer que le morphisme d'adjonction*

$$\psi_{\mathrm{Id}}(T \hookrightarrow X, \mathscr{K}) \to \psi_p(T' \hookrightarrow X', \mathscr{K})$$

est un $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}$*-isomorphisme.*

Notons que le terme de droite, $\psi_p(T' \hookrightarrow X', \mathscr{K})$, est isomorphe à la somme directe $\bigoplus_\alpha \psi_p(T'_\alpha \hookrightarrow X', \mathscr{K})$.

Démonstration. — Soit p_U le morphisme induit par p au-dessus de l'ouvert U de X ; c'est un isomorphisme au-dessus d'un ouvert dense W de U. Notons i l'immersion fermée du complémentaire $Z = U - W$ dans U. On a sur U un triangle distingué

$$\mathscr{K} \to \mathrm{R}p_{U\star}p_U{}^\star\mathscr{K} \to i_\star\mathscr{H} \xrightarrow{+1},$$

où $\mathscr{H}$ est constructible sur Z, d'après le théorème de finitude pour le morphisme propre p_U. Il résulte du théorème de changement de base propre pour p que le triangle distingué précédent devient, après application du foncteur $\psi_{\mathrm{Id}}(T \hookrightarrow X, -)$, le triangle distingué de complexes supportés sur T suivant :

$$\psi_{\mathrm{Id}}(T \hookrightarrow X, \mathscr{K}) \to \psi_p(p^{-1}(T) \hookrightarrow X', \mathscr{K}) \to \psi_{\mathrm{Id}}(T \hookrightarrow X, i_\star\mathscr{H}) \xrightarrow{+1}.$$

Première étape. Nous allons commencer par montrer que la première flèche est génériquement sur T un $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}$-isomorphisme. (« Génériquement sur T » : quitte à se restreindre à un voisinage Zariski convenable de η_T.) Soient en effet $\overline{Z}$ l'adhérence de Z dans X, $\bar{j} : Z \hookrightarrow \overline{Z}$ l'immersion ouverte et $\bar{i} : \overline{Z} \hookrightarrow X$ l'immersion fermée, représentés dans le diagramme ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[d, hook, "j"'] & Z = U - W \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[d, hook, "\bar{j}"] \\ X & \overline{Z} \arrow[l, hook', "\bar{i}"'] \end{tikzcd}$$

La restriction à T du complexe $\psi(T, i_\star\mathscr{H})$ — dont on veut montrer qu'elle est génériquement $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}$-nulle — est isomorphe à la restriction du complexe $\bar{i}_\star\mathrm{R}\bar{j}_\star\mathscr{H}$. Le fermé $\overline{Z}$ étant de codimension ≥ 1 dans X, car W est partout dense dans X, l'hypothèse de récurrence pour la paire $(\bar{j}, \mathscr{H})$ entraîne immédiatement le résultat.

Deuxième étape. Pour conclure, il nous faut maintenant montrer que le morphisme d'adjonction $\psi_p(p^{-1}(T), \mathscr{K}) \to \psi_p(T', \mathscr{K})$, à travers lequel le morphisme $\psi_{\mathrm{Id}}(T, \mathscr{K}) \to \psi_p(T', \mathscr{K})$ de l'énoncé se factorise est, génériquement sur T, un $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}$-isomorphisme. Sur le fermé $T'_p = p^{-1}(T)$ de X', considérons la restriction $\mathscr{L} = (\mathrm{R}j'_\star\mathscr{K})_{|p^{-1}(T)}$ de l'image directe par j' de $\mathscr{K}$, et le triangle distingué

$$(T'_p - T' \hookrightarrow T'_p)_!\mathscr{L}_{|T'_p - T'} \to \mathscr{L} \to (T' \hookrightarrow T'_p)_\star\mathscr{L}_{|T'} \xrightarrow{+1}$$

constitué de ses prolongements par zéro. Rappelons que j' désigne l'immersion ouverte de U' dans X'. Par définition de T', le premier complexe est constructible ; il en est donc de même de son image directe (dérivée) par le morphisme *propre* p_T. Or, l'image directe de la seconde flèche par p_T n'est autre que le morphisme d'adjonction $\psi_p(T'_p, \mathscr{K}) \to \psi_p(T', \mathscr{K})$. □

3.5. Construction d'une rétraction

3.5.1. — Quitte à rétrécir X un peu plus encore, on peut supposer que pour tout α — on rappelle que $T' = \coprod_\alpha T'_\alpha$ —, il existe un indice i_α tel que le morphisme étale $X''_{i_\alpha} \to X'$ ait une section σ_α au-dessus de T'_α. Cela résulte du fait que la famille $(X''_i \to X')_i$ est complètement décomposée, de sorte qu'une section existe au voisinage du point générique de T'_α (II-2.2.3). La propreté du morphisme dominant $X' \to X$ permet de déduire l'existence d'un ouvert convenable de X de celle d'un ouvert de X'.

3.5.2. — Pour simplifier les notations, on pose pour chaque indice α, $X''_\alpha = X''_{i_\alpha}$, $X'''_\alpha = X'''_{i_\alpha}$ et on note $T''_\alpha \subset X''_\alpha$ l'image de T'_α par une section σ_α comme ci-dessus, et enfin $T'''_\alpha \subset X'''_\alpha$ l'image inverse de T''_α par le morphisme fini $X'''_\alpha \to X''_\alpha$.

3.5.3. Proposition. — *Le morphisme d'adjonction $\psi(T'_\alpha \hookrightarrow X'_\alpha, \mathscr{K}) \to \psi(T''_\alpha \hookrightarrow X''_\alpha, \mathscr{K})$ est un* isomorphisme.

Bien entendu, les complexes ci-dessus sont calculés en munissant les schémas X'_α et X''_α de la structure de X-schéma évidente. Nous nous autoriserons dorénavant cet abus de notation.

Démonstration. — Résulte du fait que le morphisme $X''_\alpha \to X'$ est étale. □

3.5.4. Proposition. — *Le morphisme d'adjonction $\psi(T''_\alpha \hookrightarrow X'_\alpha, \mathscr{K}) \to \psi(T'''_\alpha \hookrightarrow X''_\alpha, \mathscr{K})$ a un inverse à gauche.*

Démonstration. — Considérons le diagramme à carrés cartésiens suivant :

$$\begin{tikzcd} T'''_\alpha \arrow[r] \arrow[d, "\pi_T"'] & X'''_\alpha \arrow[d, "\pi"] & U'''_\alpha \arrow[l, "j'''_\alpha"'] \arrow[d, "\pi_U"] \\ T''_\alpha \arrow[r] & X''_\alpha & U''_\alpha \arrow[l, "j''_\alpha"'] \end{tikzcd}$$

où $U''_\alpha = U \times_X X''_\alpha$, de même pour U'''_α, et $\pi : X'''_\alpha \to X''_\alpha$ est comme en 3.2.1. En particulier, le morphisme π_U est fini, plat, et de degré générique premier à ℓ, de sorte que le morphisme composé

$$\mathscr{K} \to \pi_{U\star}\pi_U{}^\star\mathscr{K} \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathscr{K}$$

est la multiplication par le degré, donc inversible. Appliquons le foncteur $\mathrm{R}j''_{\alpha\star}$. Par composition des images directes, le terme du milieu est $\pi_\star \mathrm{R}j'''_{\alpha}{}_\star\mathscr{K}$, où l'on omet le foncteur image inverse de la notation (1.2.2). D'après le théorème de changement de base pour les morphismes finis, sa restriction au fermé T''_α est isomorphe à $\pi_{T\star}\big((\mathrm{R}j'''_{\alpha\,\star}\mathscr{K})_{|T'''_\alpha}\big)$. En poussant les faisceaux sur X par le morphisme $T''_\alpha \to X$, la suite précédente devient donc

$$\psi(T''_\alpha \hookrightarrow X''_\alpha, \mathscr{K}) \to \psi(T'''_\alpha \hookrightarrow X'''_\alpha, \mathscr{K}) \to \psi(T''_\alpha \hookrightarrow X''_\alpha, \mathscr{K})$$

et la composition de ces flèches est un isomorphisme. □

3.6. Cas des coefficients constants : utilisation du théorème de pureté

3.6.1. — Posons $T''' = \coprod T'''_\alpha$, $X''' = \coprod X'''_\alpha$ et considérons le diagramme commutatif de morphismes d'adjonction, complété du morphisme trace :

$$\begin{tikzcd}
\psi(T\hookrightarrow X,\mathscr{K}) \arrow[r, dashed] \arrow[drrr, bend right] & \psi(T'\hookrightarrow X',\mathscr{K}) \arrow[r, dashed] & \psi(T''\hookrightarrow X'',\mathscr{K}) \arrow[r] \arrow[rr, dashed, bend left] & \psi(T'''\hookrightarrow X''',\mathscr{K}) \arrow[r, "\mathrm{Tr}"'] & \psi_p(T''\hookrightarrow X'',\mathscr{K}) \\
 & & & \psi(T'''\to Y,\mathscr{K}). \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

D'après les trois propositions précédentes, les flèches en tirets deviennent des isomorphismes modulo $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}$. Si le complexe $\psi(T''' \to Y, \mathscr{K})$ est *constructible*, c'est-à-dire nul modulo $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}$, il en résulte que $\psi(T \hookrightarrow X, \mathscr{K})$ — ou, de façon équivalente, $(\mathrm{R}j_\star\mathscr{K})_{|T}$ — est également constructible.

3.6.2. Proposition. — *Le complexe $\psi(T''' \to Y, \Lambda)$ est constructible.*

Démonstration. — Le morphisme composé $T''' \to X$ étant fini, il suffit de démontrer que le complexe $\mathrm{R}j_{Y\star}\Lambda$ est constructible. Cela résulte des hypothèses faites en 3.2.1 et du théorème de pureté XVI-3.1.1. □

3.7. Réduction au cas des coefficients constants

3.7.1. — Pour achever la démonstration du théorème 1.1.1, il nous faut maintenant montrer que la propriété (P_c) de § 3.1, où c est fixé, résulte du cas particulier où $\mathscr{K} = \Lambda$ et de (P_{c-1}).

3.7.2. — Commençons par observer que l'on peut supposer $\mathscr{K}$ concentré en degré 0, c'est-à-dire être un *faisceau* constructible, que nous noterons dorénavant $\mathscr{F}$. L'ensemble des faisceaux constructibles satisfaisant la propriété à établir au rang c est, à X fixé, stable par extension et facteur direct. D'après [SGA 5 I 3.1.2], on peut supposer $\mathscr{F} = \pi_\star k_!\Lambda$ où $\pi : U' \to U$ est un morphisme *fini* et $k : W \hookrightarrow U'$ une immersion ouverte, avec U' *intègre*. D'après le théorème principal de Zariski ([ÉGA IV$_3$ 8.12.6]), le morphisme composé $U' \to X$, *quasi-fini*, se factorise en une immersion ouverte $j' : U' \hookrightarrow X'$ suivie d'un morphisme fini $\overline{\pi} : X' \to X$.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, hook, "k"] & U' \arrow[r, hook, "j'"] \arrow[d, "\pi"'] & X' \arrow[d, "\overline{\pi}"] \\ & U \arrow[r, hook, "j"] & X. \end{tikzcd}$$

Le complexe $\mathrm{R}j_\star\pi_\star k_!\Lambda$, dont on s'interroge sur la constructibilité, est isomorphe au complexe $\overline{\pi}_\star\mathrm{R}j'_\star k_!\Lambda$. En vertu du lemme suivant, on peut supposer $X' = X$.

3.7.3. Lemme. — *Soient $f : Y \to X$ un morphisme fini de schémas, T_Y un fermé de Y et $T_X = f(T_Y)$ son image.*

(i) *On a l'inégalité :* $\mathrm{codim}(T_X, X) \geq \mathrm{codim}(T_Y, Y)$.

(ii) *Soit* $K \in \mathsf{Ob}\,\mathsf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ *tel que* $K_{|Y-T_Y} \in \mathsf{Ob}\,\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}((Y-T_Y)_{\text{ét}}, \Lambda)$. *Alors,* $(\mathrm{R}f_\star K)_{|X-T_X} \in \mathsf{Ob}\,\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}((X-T_X)_{\text{ét}}, \Lambda)$.

Démonstration. — Le premier énoncé est bien connu. Le second est un corollaire immédiat de la préservation de la constructibilité par le morphisme composé, fini, $Y - f^{-1}(T_X) \hookrightarrow Y - T_Y \to X - T_X$. □

3.7.4. — Soient $j : U \to X$ et $k : W \to U$ deux immersions ouvertes, avec U intègre. Nous souhaitons maintenant déduire la constructibilité du complexe $\mathrm{R}j_\star k_!\Lambda$ hors d'un fermé de codimension au moins c de la propriété analogue pour les complexes $\mathrm{R}j_\star\Lambda$. Admettant ce résultat pour ces derniers, il résulte du triangle distingué $k_!\Lambda \to \Lambda \to i_\star\Lambda \xrightarrow{+1}$, où i est l'immersion fermée du complémentaire F de W dans U, qu'il suffit de démontrer la constructibilité de $\mathrm{R}j_\star i_\star\Lambda$ hors d'un fermé de codimension au moins c. Le schéma U étant intègre, l'adhérence $\overline{F}$ de F dans X est de codimension strictement positive X. Soit $m : F \hookrightarrow \overline{F}$ l'immersion ouverte correspondante et $n : \overline{F} \hookrightarrow X$ l'immersion fermée. On a tautologiquement :

$$\mathrm{R}j_\star i_\star\Lambda = n_\star\mathrm{R}m_\star\Lambda,$$

par commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook, "j"] & X \\ F \arrow[u, "i"] \arrow[r, hook, "m"] & \overline{F}. \arrow[u, "n"'] \end{tikzcd}$$

Par hypothèse de récurrence (P_{c-1}), il existe un fermé $T_{\overline{F}}$ de $\overline{F}$, de codimension au moins c dans $\overline{F}$, tel que la restriction de $\mathrm{R}m_\star\Lambda$ à l'ouvert $\overline{F} - T_{\overline{F}}$ de $\overline{F}$ soit constructible. L'image directe par l'immersion fermée n du complexe $\mathrm{R}m_\star\Lambda$ est donc constructible sur l'ouvert $X - T_{\overline{F}}$ de X. La conclusion résulte maintenant du fait que la codimension de $T_{\overline{F}}$ dans X est *strictement supérieure* à c.

3.7.5. ***Remarque.*** — O. Gabber sait également démontrer un résultat de *constructibilité uniforme*, dans l'esprit de ceux de [Katz & Laumon, 1985, § 3] mais sans hypothèse sur la caractéristique. Cf. courriel à Luc Illusie, du 3 avril 2007 ; voir aussi [Orgogozo, 2011].

4. Coefficients ℓ-adiques

4.1. Définitions. — On rappelle ici la construction, due à Torsten Ekedahl ([Ekedahl, 1990]), de la catégorie triangulée des complexes bornés constructibles ℓ-adiques. Voir aussi [Fargues, 2009], § 5 pour un résumé et quelques améliorations. Pour d'autres approches, voir [Bhatt & Scholze, 2013] ou [Liu & Zheng, 2014] (pour les champs).

On fixe ici un schéma nœthérien X, sur lequel un nombre premier ℓ est inversible.

4.1.1. Systèmes projectifs. — Notons $X^{\mathbf{N}}$ le topos des systèmes projectifs indicés par $\mathbf{N}$ de faisceaux étales sur X ; on en fait un topos annelé via $\mathbf{Z}/\ell^{\mathbf{N}}\mathbf{Z} := (\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})_n$. Un **système projectif ℓ-adique** de faisceaux sur X est un $\mathbf{Z}/\ell^{\mathbf{N}}\mathbf{Z}$-module sur $X^{\mathbf{N}}$, c'est-à-dire un système projectif de faisceaux abéliens $\mathscr{F} = (\cdots \to \mathscr{F}_{n+1} \to \mathscr{F}_n \to \cdots)$ sur X, où $\mathscr{F}_n$ un $\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}$-modules sur X. Ils constituent une catégorie abélienne, dont on note $\mathsf{D}(X^{\mathbf{N}}, \mathbf{Z}/\ell^{\mathbf{N}}\mathbf{Z})$ la catégorie dérivée et $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(X^{\mathbf{N}}, \mathbf{Z}/\ell^{\mathbf{N}}\mathbf{Z})$ sa sous-catégorie pleine des systèmes de complexes *uniformément* bornés. Un système projectif ℓ-adique est dit **essentiellement nul** si, pour tout n, il existe un entier $m \geq n$ tel que le morphisme de transition $\mathscr{F}_m \to \mathscr{F}_n$ correspondant soit nul. De même, un complexe $\mathscr{K} \in \mathsf{Ob}\,\mathsf{D}(X^{\mathbf{N}}, \mathbf{Z}/\ell^{\mathbf{N}}\mathbf{Z})$ est essentiellement nul si chaque système projectif $\mathrm{H}^i(\mathscr{K})$ de faisceaux l'est.

4.1.2. $\mathbf{Z}_\ell$*-complexes.* — Soit $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}(X^{\mathbf{N}}, \mathbf{Z}/\ell^{\mathbf{N}}\mathbf{Z})$ la sous-catégorie pleine de $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(X^{\mathbf{N}}, \mathbf{Z}/\ell^{\mathbf{N}}\mathbf{Z})$ constituée des complexes

$$\mathscr{K} = \big(\mathscr{K}_n \in \mathsf{Ob}\,\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(X, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})\big)_n$$

dont la « réduction modulo ℓ »

$$\mathbf{F}_\ell \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}/\ell^{\mathbf{N}}\mathbf{Z}} \mathscr{K} = (\mathbf{F}_\ell \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}} \mathscr{K}_n)_n \in \mathsf{Ob}\,\mathsf{D}^-(X^{\mathbf{N}}, \mathbf{Z}/\ell^{\mathbf{N}}\mathbf{Z})$$

soit *essentiellement constante constructible*, c'est-à-dire isomorphe, modulo les complexes essentiellement nuls, à un système projectif provenant de $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}(X, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$. Un tel objet est appelé un **$\mathbf{Z}_\ell$-complexe borné constructible** ; ils forment une catégorie triangulée.

Noter que les complexes $\mathbf{F}_\ell \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}/\ell^{\mathbf{N}}\mathbf{Z}} \mathscr{K}$ ne sont pas nécessairement bornés inférieurement même si $\mathscr{K}$ est borné. En [Fargues, 2009, 5.7] est définie une sous-catégorie notée $\mathsf{D}^{e+}(X^{\mathbf{N}}, \mathbf{Z}/\ell^{\mathbf{N}}\mathbf{Z})$ préservée par le produit tensoriel ci-dessus ; ceci repose sur le fait que le faisceau constant $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \in \operatorname{Ob} \mathsf{D}(X^{\mathbf{N}}, \mathbf{Z}/\ell^{\mathbf{N}}\mathbf{Z})$ est de tor-dimension finie *modulo les essentiellement nuls.*

4.1.3. Catégorie triangulée des $\mathbf{Z}_\ell$-faisceaux. — On note $\mathscr{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}(X, \mathbf{Z}_\ell)$ la catégorie triangulée obtenue à partir de la catégorie $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}(X^{\mathbf{N}}, \mathbf{Z}/\ell^{\mathbf{N}}\mathbf{Z})$ en inversant les **isomorphismes essentiels**, c'est-à-dire les flèches à cône essentiellement nul. (D'après *op. cit.* 5.18, il revient au même d'inverser les flèches u telles que $\mathbf{F}_\ell \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}/\ell^{\mathbf{N}}\mathbf{Z}} u$ ait un cône essentiellement nul.) De même, on peut définir des variantes non bornées et non constructibles.

4.1.4. — Comme expliqué en [Fargues, 2009, § 5.9], lorsque X est de type fini sur un corps séparablement clos ou fini, la catégorie obtenue est équivalente à la catégorie 2-$\lim_n \mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{ctf}}(X, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})$ considérée par P. Deligne dans Weil II. Notons que les constituants d'un $\mathbf{Z}_\ell$-complexe borné constructible $(\mathscr{K}_n) \in \operatorname{Ob} \mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}(X^{\mathbf{N}}, \mathbf{Z}/\ell^{\mathbf{N}}\mathbf{Z})$ ne sont pas nécessairement de tor-dimension finie mais il existe un représentant (par un « complexe normalisé », [Fargues, 2009, 5.14]) pour lequel c'est vrai. On rappelle ([SGA 4 XVII 4.1.9]) qu'un complexe $\mathscr{K} \in \operatorname{Ob} \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(T, A)$, où T est un topos et A un Anneau commutatif, est dit de **tor-dimension** inférieure ou égale à n si pour tout complexe $\mathscr{L}$ de A-modules concentré en degrés positifs ou nuls, $\mathrm{H}^i(\mathscr{K} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathscr{L}) = 0$ pour tout $i < -n$.

4.1.5. — Un des points clefs de la théorie est le *lemme de Nakayama-Ekedahl* d'après lequel le foncteur triangulé noté $\mathbf{F}_\ell \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}_\ell} -$, déduit du foncteur de réduction modulo ℓ ci-dessus, est *conservatif* : $\mathscr{K} \in \operatorname{Ob} \mathscr{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}(X, \mathbf{Z}_\ell)$ est nul si et seulement si le complexe $\mathbf{F}_\ell \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}_\ell} \mathscr{K} \in \operatorname{Ob} \mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}(X, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ l'est. Nous renvoyons le lecteur à [Ekedahl, 1984, prop. 1.1, p. 214] ou [Illusie, 1983, 2.3.7, 2.4.5] pour une première apparition de ce lemme, et [Ekedahl, 1990, 3.6 (ii)] pour le résultat précédent.

4.1.6. — D'après ce lemme, et ces corollaires (*op. cit.*, th. 5.1 (ii) et th. 6.3), le théorème de finitude ℓ-adique ci-dessous résulte d'un théorème de finitude pour les coefficients finis.

4.2. Théorèmes : énoncés

4.2.1. Théorème. — *Soient X un schéma nœthérien quasi-excellent de dimension finie, ℓ un nombre premier inversible sur X et $f : Y \to X$ un morphisme de type fini. Pour tout entier $n \geq 1$, le foncteur $\mathrm{R}f_\star : \mathsf{D}^+(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}) \to \mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})$ envoie $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{ctf}}(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})$ dans $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{ctf}}(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})$.*

Démonstration. — D'après le résultat du paragraphe § 2.3, le foncteur $\mathrm{R}f_\star$ est de dimension cohomologique finie. La conclusion résulte de [SGA 4 XVII 5.2.11] (tor-dimension finie) et du théorème 1.1.1 (constructibilité). □

4.2.2. Remarque. — On devrait pouvoir montrer, par réduction au cas des schémas de type fini sur $\mathbf{Z}$, que pour tout morphisme cohérent f, le foncteur $\mathrm{R}f_\star$ envoie un faisceau plat constructible sur un complexe de tor-dimension au plus zéro.

D'après les résultats esquissés dans [Ekedahl, 1990, § 5-6], on peut déduire du théorème précédent le théorème ℓ-adique suivant.

4.2.3. Théorème. — *Soient X un schéma nœthérien quasi-excellent de dimension finie, ℓ un nombre premier inversible sur X et $f : Y \to X$ un morphisme de type fini. Le foncteur* $\mathrm{R}f_\star : \mathsf{D}^+(Y^{\mathbf{N}}, \mathbf{Z}/\ell^{\mathbf{N}}\mathbf{Z}) \to \mathsf{D}^+(X^{\mathbf{N}}, \mathbf{Z}/\ell^{\mathbf{N}}\mathbf{Z})$, $\mathscr{K} = (\mathscr{K}_n)_n \mapsto \mathrm{R}f_\star\mathscr{K} = (\mathrm{R}f_\star\mathscr{K}_n)_n$ *induit un foncteur* $\mathrm{R}f_\star : \mathscr{D}^b_c(Y, \mathbf{Z}_\ell) \to \mathscr{D}^b_c(X, \mathbf{Z}_\ell)$.