

Astérisque

FABRICE ORGOGOZO

Descente cohomologique orientée

Astérisque, tome 363-364 (2014), Séminaire Bourbaki,
exp. n° XII_A, p. 235-249

http://www.numdam.org/item?id=AST_2014_363-364_235_0

© Société mathématique de France, 2014, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « *Astérisque* » ([http://smf4.emath.fr/
Publications/Asterisque/](http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/)) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/*

EXPOSÉ XII_A

DESCENTE COHOMOLOGIQUE ORIENTÉE

Fabrice Orgogozo

1. Acyclicité orientée des morphismes propres

L'objet de cette section est de démontrer le théorème 1.1.2 ci-dessous, qui généralise l'invariance cohomologique du voisinage tubulaire, défini à l'aide du produit fibré orienté, par éclatement admissible (cf. XI-1.7 et XI-2.8).

1.1. Notations et énoncé

1.1.1. — Considérons un diagramme commutatif

$$(1.1.1.1) \quad \begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{r'} & X' & & \\ f \downarrow & \square & \downarrow f' & & \\ S & \xleftarrow{r} & S' & \xleftarrow{g'} & Y \\ & \swarrow g & & & \end{array}$$

de schémas cohérents — à morphismes nécessairement cohérents ([EGA I' 6.1.10 (i),(iii)]) —, auquel on associe un morphisme de topos

$$\begin{array}{ccc} T' = X' \overset{\leftarrow}{\times}_{S'} Y & & \\ \downarrow \overleftarrow{r} & & \\ T = X \overset{\leftarrow}{\times}_S Y & & \end{array}$$

par fonctorialité du produit orienté (XI-1.9). (Abus de notations : X pour $X_{\text{ét}}$, etc.)

1.1.2. Théorème. — *Si le morphisme r est propre, le morphisme \overleftarrow{r} est acyclique pour les faisceaux de torsion : pour tout entier $n \geq 1$, l’unité d’adjonction $\eta_{\overleftarrow{r}} : \text{Id} \rightarrow R\overleftarrow{r}_* \overleftarrow{r}^*$ est un isomorphisme entre endofoncteurs de $D^+(T, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$.*

1.2. Rappels sur les flèches de changement de base. — Nous conseillons au lecteur de ne lire ce paragraphe qu’en cas de nécessité. Rappelons que si

$$\begin{array}{ccc} & b' & \\ B & \xleftarrow{\quad \tau \quad} & B' \\ a \downarrow & \tau & \downarrow a' \\ A & \xleftarrow{\quad b \quad} & A' \end{array}$$

est un diagramme de topos muni d’une 2-flèche $\tau : ab' \Rightarrow ba'$, correspondant à des flèches de transitivité $\tau_* : a_* b'_* \Rightarrow b_* a'_*$ et $\tau^* : a'^* b^* \Rightarrow b'^* a^*$, la flèche de changement de base $b^* a_* \rightarrow a'_* b'^*$ est la composée $cb_{BAA'B'}^\tau = (a'_* b'^* \star \varepsilon_a) \odot (a'_* \star \tau^* \star a_*) \odot (\eta_{a'} \star b^* a_*)$, où $\eta_?$ (resp. $\varepsilon_?$) désigne l’unité (resp. la counité) de l’adjonction $?^* \dashv ?_*$. La variante dérivée est définie de même. Notons que dans [SGA 4 XII § 4] — où le diagramme considéré est essentiellement commutatif —, la flèche de changement de base est définie comme le composé $(\varepsilon_b \star a'_* b'^*) \odot (b^* \star \tau_* \star b'^*) \odot (b^* a_* \star \eta_{b'})$; d’après P. Deligne, la « *perplexité d’Artin* » n’a pas lieu d’être : ces deux définitions coïncident ([SGA 4 XVII § 2.1]).

Dans le langage de Joseph Ayoub ([Ayoub, 2007, 1.1.10]), cette 2-flèche de changement de base est *obtenue de τ^* par adjonction suivant (a'^*, a'_*) et (a^*, a_*)* . Il montre (*op. cit.*, 1.1.9) que, donné un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & b^* & \\ A & \xrightarrow{\quad} & A' \\ a^* \downarrow & & \downarrow a'^* \\ B & \xrightarrow{\quad b'^* \quad} & A' \end{array}$$

dans une 2-catégorie quelconque, la flèche de changement de base définie par la formule ci-dessus est l’unique 2-flèche du diagramme obtenu par retournement des flèches verticales

$$\begin{array}{ccc} & b^* & \\ A & \xrightarrow{\quad} & A' \\ a_* \uparrow & & \uparrow a'_* \\ B & \xrightarrow{\quad b'^* \quad} & A' \end{array}$$

satisfaisant l’une des deux égalités (écrites sous forme simplifiée) $\tau^* \odot \eta_a = cb \odot \eta_{a'}$ et $\varepsilon_{a'} \odot \tau^* = \varepsilon_a \odot cb$. Il montre également (*op. cit.*, 1.1.11 et 1.1.12), que l’on a la compatibilité attendue avec les compositions horizontales et verticales. (Un cas particulier

est énoncé sans démonstration en [SGA 4 XII 4.4] ; voir aussi [Lipman et al., 2009, 3.7.2]).

1.3. — La fin de ce paragraphe est consacrée à la démonstration du théorème 1.1.2.

1.3.1. Réduction au cas local. — Soit $\mathcal{K} \in \text{Ob } \mathbf{D}^+(T, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ dont on note \mathcal{K}' le tiré en arrière par \overleftarrow{r} sur T' . Rappelons ([SGA 4 VI 2.9.2, 3.10]) que le topos étale d'un schéma quelconque (resp. cohérent) est localement cohérent (resp. cohérent) et qu'un morphisme cohérent de schémas induit un morphisme cohérent entre les topos étalés. Il en résulte (XI-2.5) que le topos T est cohérent et par conséquent qu'il suffit de vérifier que la fibre en chaque point $t \rightarrow T$ de l'unité $\mathcal{K} \rightarrow R\overleftarrow{r}_*\mathcal{K}'$ est un isomorphisme. (*Localement* cohérent suffirait, cf. [SGA 4 VI 9.0]). D'après XI-1.8, tout tel point t provient d'une paire de points (géométriques) x, y de X et Y , munis d'un morphisme de spécialisation $g(y) \rightsquigarrow f(x) = s$. D'autre part, on vérifie comme en XI-2.7 que si $a : (X_2 \rightarrow S_2 \leftarrow Y_2) \rightarrow (X_1 \rightarrow S_1 \leftarrow Y_1)$ est un morphisme de diagrammes de schémas cohérents, le morphisme induit $\overleftarrow{a} : X_2 \overleftarrow{\times}_{S_2} Y_2 \rightarrow X_1 \overleftarrow{\times}_{S_1} Y_1$ est un morphisme cohérent de topos cohérents et que la fibre en un point t_1 d'une image directe dérivée par \overleftarrow{a} est naturellement isomorphe au complexe des sections globales dérivées du topos $X_{2(x_1)} \overleftarrow{\times}_{S_{2(s_1)}} Y_{2(y_1)}$, où x_1 et y_1 (resp. s_1) sont les points géométriques de X_1 et Y_1 (resp. S_1) déduits de t_1 (resp. est l'image de x_1), et où l'on pose $X_{2(x_1)} = X_2 \times_{X_1} X_{1(x_1)}$, etc.

Ceci nous amène à considérer les localisés stricts $X_{(x)}$, $S_{(s)}$ et $Y_{(y)}$ ainsi que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 X_{(x)} & \xleftarrow{r'_{(x)}} & X'_{(x)} & & \\
 \downarrow f_{(x)} & \square & \downarrow f'_{(x)} & & \\
 S_{(s)} & \xleftarrow{r_{(s)}} & S'_{(s)} & \xleftarrow{g'_{(y)}} & Y_{(y)} \\
 \downarrow & \square & \downarrow & & \downarrow \\
 S & \xleftarrow{\quad} & S' & \xleftarrow{\quad} & Y
 \end{array}$$

au-dessus de 1.1.1.1. Le morphisme $f_{(x)}$ est *local* tandis que $r_{(s)}$ est *propre*. Comme énoncé ci-dessus, la fibre en t de l'unité $\eta_{\overleftarrow{r}}$ considérée s'identifie au morphisme de fonctorialité de la cohomologie :

$$\mathcal{K}_t = R\Gamma(T_{(t)}, \mathcal{K}) \rightarrow R\Gamma(T'_{(t)}, \mathcal{K}')$$

où $T_{(t)}$ est le topos $X_{(x)} \overleftarrow{\times}_{S_{(s)}} Y_{(y)}$ — local (au sens de XI-2.1) par *loc. cit.*, 2.3.2 — et $T'_{(t)}$ est le produit orienté $X'_{(x)} \overleftarrow{\times}_{S'_{(s)}} Y'_{(y)}$. Quitte à remplacer X (resp. S , Y) par $X_{(x)}$ (resp. $S_{(s)}$, $Y_{(y)}$), on peut donc supposer les schémas X, Y, S strictement locaux,

ainsi que le morphisme f et le topos T locaux. Nous le faisons pour simplifier les notations dans la démonstration ci-dessous. On a vu de plus qu'il est suffisant, sous ces hypothèses supplémentaires, de vérifier que le morphisme de complexes

$$\eta : \mathrm{R}\Gamma(T, \mathcal{K}) \rightarrow \mathrm{R}\Gamma(T', \mathcal{K}')$$

est un isomorphisme.

1.3.2. Cas d'un complexe provenant du second facteur. — Dans ce paragraphe, on montre que la flèche $\eta : \mathrm{R}\Gamma(T, \mathcal{K}) \rightarrow \mathrm{R}\Gamma(T', \mathcal{K}')$ est un isomorphisme lorsqu'il existe un complexe $\mathcal{K}_Y \in \mathrm{D}^+(Y, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ tel que $\mathcal{K} = p_2^* \mathcal{K}_Y$. Cela revient à montrer que la flèche de fonctorialité $\mathrm{R}\Gamma(T, p_2^* -) = \mathrm{R}\Gamma(X, \mathrm{R}p_{1*} p_2^* -) \rightarrow \mathrm{R}\Gamma(T', p_2'^* -) = \mathrm{R}\Gamma(X', \mathrm{R}p_{1*}' p_2'^* -)$ est un isomorphisme (pour tout objet $\mathcal{K}_Y \in \mathrm{Ob} \mathrm{D}^+(Y, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$). Les différents morphismes sont représentés dans le diagramme cubique suivant :

$$(1.3.2.1) \quad \begin{array}{ccccc} & & Y & & T' \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ Y & & \xleftarrow{p_2} & & T' \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & & p_2 & & p_1 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ S' & & \xleftarrow{f'} & & X' \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ S & & \xleftarrow{f} & & X \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & & \square & & \end{array}$$

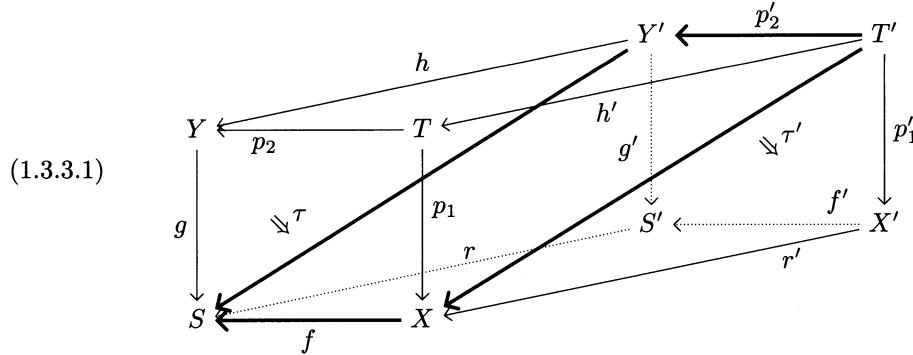
Pour montrer que $\mathrm{R}\Gamma(X, \mathrm{R}p_{1*} p_2^* -) \rightarrow \mathrm{R}\Gamma(X', \mathrm{R}p_{1*}' p_2'^* -)$ est un isomorphisme, il suffit d'établir le résultat *a priori* plus fort suivant : le diagramme

$$(1.3.2.2) \quad \begin{array}{ccc} p_{1*} p_2^* & \xrightarrow{p_{1*} \star \eta \tau \star p_2^*} & r'_* p_{1*}' p_2'^* \\ \uparrow \mathrm{cb}_{YSXT}^\tau & & \uparrow r'_* \star \mathrm{cb}_{YS'X'T'}^{\tau'} \\ f^* g_* & \xrightarrow{\mathrm{cb}_{S'SX'X'} \star g'_*} & r'_* f'^* g'_* \end{array}$$

est un diagramme *commutatif d'isomorphismes*, où $\tau : gp_2 \Rightarrow fp_1$ et $\tau' : g'p'_2 \Rightarrow f'p'_1$ sont comme en XI-1.3. On sait déjà que les flèches verticales sont des isomorphismes (XI-2.4) ; par propriété de r , il en est de même de la flèche horizontale inférieure.

1.3.3. Commutativité. — Faute d'un métathéorème (à énoncer) garantissant la commutativité du diagramme 1.3.2.2, nous allons procéder de manière *ad hoc* pour démontrer un résultat un peu plus général. Pour alléger les notations, nous omettons

dorénavant les compositions avec les 1-flèches. Soit



un diagramme cubique de topos dont quatre faces sont (essentiellement) commutatives et deux (celles dans le plan du texte) munies de 2-flèches τ et τ' . On suppose que ces flèches sont compatibles au sens suivant : les deux 2-flèches induites par τ et τ' dans le carré diagonal en traits pleins $Y'SXT'$ coïncident. Cela revient à dire que l'on a l'égalité $r \star \tau' = \tau \star h'$; sous les hypothèses du paragraphe précédent (voir diagramme 1.3.2.1), on la vérifie directement sur les sites de définition des topos.

Par compatibilité avec les compositions verticales des flèches de changement de base, rappelée en 1.2, les deux triangles ci-dessous sont commutatifs, où la flèche horizontale est la flèche de changement de base induite par le carré diagonal :

(1.3.3.2)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & p_1 \star p_2 \star h_* & & \\
 & \nearrow \text{cb}_{YSXT} & & \searrow \text{cb}_{Y'YTT'} & \\
 f^* r_* g'_* & = & f^* g_* h_* & \xrightarrow{\text{cb}_{YSXT'}} & r'_* p'_1 \star p'_2 = p_1 \star h'_* p'_2 \star \\
 & \searrow & \text{cb}_{X'SSX} & \nearrow & \text{cb}_{Y'S'X'T'} \\
 & & r'_* f'^* g'_* & &
 \end{array}$$

est *commutatif*⁽ⁱ⁾. Notons que lorsque h est l'identité, la 2-flèche en pointillé n'est autre que (la 2-flèche induite par) la coünité $\eta_{h'}$. La commutativité de 1.3.2.2 en résulte.

1.3.4. — Dans ce paragraphe, on montre que la flèche $\eta : R\Gamma(T, \mathcal{K}) \rightarrow R\Gamma(T', \mathcal{K}')$ considérée à la fin du paragraphe 1.3.1 — dont on conserve les hypothèses — est un isomorphisme. On procède par réduction au cas précédent (1.3.2). Le morphisme p_2 a une section, que nous noterons σ , définie en XI-2.2. Posons $\mathcal{K}_Y = \sigma^* \mathcal{K}$ — cette notation est compatible avec celle du paragraphe précédent —, et $\widetilde{\mathcal{K}} = p_2^* \mathcal{K}_Y$. D'après

⁽ⁱ⁾ Le rédacteur remercie Joseph Ayoub de son aide sur cette question.

XI-2.3 et XI-2.3.2, le morphisme de changement de base $\text{cb}_{TYYY} : \text{R}p_{2*} \rightarrow \sigma^*$ déduit du diagramme 2-commutatif

$$\begin{array}{ccc} T & \xleftarrow{\sigma} & Y \\ p_2 \downarrow & & \parallel \\ Y & \xlongequal{\quad} & Y \end{array}$$

est un isomorphisme et la coünité $\widetilde{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{K}$ induit un isomorphisme $\text{R}\Gamma(T, \widetilde{\mathcal{K}}) \xrightarrow{\sim} \text{R}\Gamma(T, \mathcal{K})$. (On rappelle que T est local.) Comme on l'a vu au paragraphe précédent, le morphisme de fonctorialité $\text{R}\Gamma(T, \widetilde{\mathcal{K}}) \rightarrow \text{R}\Gamma(T', \widetilde{\mathcal{K}'})$ est un isomorphisme, où $\widetilde{\mathcal{K}'}$ désigne le tiré en arrière par \overleftarrow{r} de $\widetilde{\mathcal{K}}$ (ou encore, par p'_2 de \mathcal{K}_Y) sur le topos T' . Pour conclure, il nous faut montrer que la flèche $\text{R}\Gamma(T', \widetilde{\mathcal{K}'}) \rightarrow \text{R}\Gamma(T', \mathcal{K}')$ déduite de $\widetilde{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{K}$ est un isomorphisme. Calculant ces complexes par projection sur le premier facteur X' et utilisant le théorème de changement de base propre pour le morphisme $X' \rightarrow X$, il nous suffit de montrer que le morphisme $\text{R}p_{1*} \widetilde{\mathcal{K}'} \rightarrow \text{R}p_{1*} \mathcal{K}'$ de complexes sur X' est un isomorphisme au-dessus du point fermé x de X . L'évaluation en un point géométrique $x' \rightarrow X'_x$ est

$$\text{R}\Gamma(T'_{(x')}, \widetilde{\mathcal{K}'}) \rightarrow \text{R}\Gamma(T'_{(x')}, \mathcal{K}'),$$

où $T'_{(x')} = X'_{(x')} \xleftarrow{\quad} S'_{(s')} Y_{(s')}$, avec $s' \rightarrow S'$ l'image de $x' \rightarrow X'$ et $Y_{(s')} := Y \times_{S'} S'_{(s')}$. Comme rappelé ci-dessus, cette flèche s'identifie par projection sur le second facteur à la flèche

$$\text{R}\Gamma(Y_{(s')}, \sigma'_{(x')}^* \widetilde{\mathcal{K}'}) \rightarrow \text{R}\Gamma(Y_{(s')}, \sigma'_{(x')}^* \mathcal{K}'),$$

où $\sigma'_{(x')} : Y_{(s')} \rightarrow X'_{(x')} \xleftarrow{\quad} S'_{(s')} Y_{(s')}$ est la section définie en XI-2.2. Nous allons montrer plus précisément que la coünité $\widetilde{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{K}$ induit un isomorphisme $\sigma'_{(x')}^* \widetilde{\mathcal{K}'} \rightarrow \sigma'_{(x')}^* \mathcal{K}'$. Par fonctorialité des images inverses, il suffit de montrer que l'on a les égalités

$$\sigma \circ p_2 \circ \overleftarrow{r}_{(x')} \circ \sigma'_{(x')} = \overleftarrow{r}_{(x')} \circ \sigma'_{(x')} = \sigma \circ \text{Id}_{(s')},$$

— la seconde entraînant la première —, où les morphismes sont comme dans le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc}
& (x', y) & \xleftarrow{\quad} & y & \\
& \downarrow & \nearrow \sigma'_{(x')} & \downarrow & \\
T'_{(x')} & \xrightarrow{\quad} & Y_{(s')} & \xleftarrow{\quad} & \\
\downarrow \overleftarrow{r}_{(x')} & & \downarrow \text{Id}_{(s')} & & \\
T & \xrightarrow{p_2} & Y & \xleftarrow{\quad} & \\
\uparrow \sigma & & \uparrow & & \\
& (x, y) & \xleftarrow{\quad} & y. &
\end{array}$$

L'identité $\overleftarrow{r}_{(x')} \circ \sigma'_{(x')} = \sigma \circ \text{Id}_{(s')}$ est conséquence du fait que le morphisme $X'_{(x')} \rightarrow X$ est *local*.

1.4. Remarques sur le cas non abélien. — En utilisant le théorème de changement de base propre non abélien (XX-7.1), la même démonstration devrait permettre de montrer que, sous les hypothèses de 1.1.2, le morphisme \overleftarrow{r} est **1-asphérique** : pour tout champ ind-finie \mathcal{C} sur T , l'unité d'adjonction $\mathcal{C} \rightarrow \overleftarrow{r}_* \overleftarrow{r}^* \mathcal{C}$ est une équivalence de catégories. Signalons cependant que, comme signalé en XI-2.8 (3), nous n'avons pas connaissance d'une référence publiée permettant de justifier le passage à la limite nécessaire au calcul des fibres.

2. Descente cohomologique orientée

2.1. Topologie *h*-orientée

2.1.1. — Notons \mathcal{B} la catégorie dont les objets sont les diagrammes de schémas $X \xrightarrow{f} S \xleftarrow{g} Y$ et les morphismes sont les triplets de morphismes $(X' \rightarrow X, S' \rightarrow S, Y' \rightarrow Y)$ rendant commutatifs les deux carrés associés. Les limites (projectives) finies existent dans \mathcal{B} et se calculent « terme à terme ». Par exemple, le produit fibré de $X_1 \rightarrow S_1 \leftarrow Y_1$ et $X_2 \rightarrow S_2 \leftarrow Y_2$ au-dessus de $X \rightarrow S \leftarrow Y$ est $(X_1 \times_X X_2) \rightarrow (S_1 \times_S S_2) \leftarrow (Y_1 \times_Y Y_2)$.

2.1.2. — Notons $\overleftarrow{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{B}$ la catégorie bifibrée en duals de topos induite par le pseudo-foncteur « produit orienté des topos étale » de \mathcal{B} vers la 2-catégorie des topos, $(X \rightarrow S \leftarrow Y) \rightsquigarrow X \overleftarrow{\times}_S Y$. La condition [SGA 4 v^{bis} 3.0.0] est satisfaite. Enfin, notons que si \mathcal{B} est annelé par des coefficients constants, toutes les flèches de \mathcal{B} sont *plates* au sens de *loc. cit.*, § 1.3.

2.1.3. — Nous munissons la catégorie des schémas de la **topologie *h***, engendrée par les morphismes propres et surjectifs ainsi que les recouvrements de Zariski. Dans la définition précédente, on peut se restreindre aux morphismes propres et surjectifs

entre schémas *cohérents*, comme il résulte des faits suivants : tout schéma est Zariski-localement cohérent ; tout schéma cohérent sur un schéma cohérent est cohérent (voir [ÉGA I' 6.1.10 (ii)] pour la quasi-séparation, l'analogue pour la quasi-compacté étant tautologique) ; un morphisme universellement fermé (resp. propre) est quasi-compact (resp. cohérent). Rappelons que la topologie h est plus fine que la topologie étale (cf. par exemple II-3.1.1).

2.1.4. — On considère la **topologie h -orientée** sur \mathcal{B} engendrée par les familles ci-dessous :

- (i). — $((X_\alpha \rightarrow S \leftarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y))_{\alpha \in A}$, où $(X_\alpha \rightarrow X)_{\alpha \in A}$ est une famille couvrante pour la topologie h ;
- (ii). — $((X \rightarrow S \leftarrow Y_\alpha) \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y))_{\alpha \in A}$, où $(Y_\alpha \rightarrow Y)_{\alpha \in A}$ est une famille couvrante pour la topologie h ;
- (iii). — $((X \times_S S_\alpha \rightarrow S_\alpha \leftarrow Y \times_S S_\alpha) \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y))_{\alpha \in A}$, où $(S_\alpha \rightarrow S)_{\alpha \in A}$ est une famille couvrante pour la topologie h ;
- (iv). — $((X \times_S S' \rightarrow S' \leftarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y))$, où $S' \rightarrow S$ est un morphisme *propre* ;
- (v). — $((X \rightarrow S' \leftarrow Y \times_S S') \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y))$, où $S' \rightarrow S$ est un morphisme *étale*.

Remarquons que les propriétés des familles de morphismes (i)–(v) sont stables par changement de base dans la catégorie \mathcal{B} .

2.1.5. — Il est formel de vérifier que la topologie h -orientée est engendrée par :

- les familles de type (i)–(iii), où les familles h -couvrantes sont des recouvrements de Zariski ;
- les familles de type (i)–(iii), où les familles h -couvrantes sont données par un seul morphisme propre et surjectif ;
- les familles de type (iv) et (v).

On peut également observer que les familles de type (iii) avec $(S_\alpha \rightarrow S)_{\alpha \in A}$ un recouvrement de Zariski (resp. un morphisme propre et surjectif) s'obtiennent par composition à partir des types (i) et (v) (resp. des types (iv) et (ii)).

2.2. Énoncés

2.2.1. — Fixons un objet $B = (X \rightarrow S \leftarrow Y)$ de \mathcal{B} . Conformément aux définitions générales, on dit qu'un objet simplicial augmenté $(X_\bullet \rightarrow S_\bullet \leftarrow Y_\bullet) \rightarrow B$ de \mathcal{B} est un **hyperrecouvrement pour la topologie h -orientée** si tout entier $i \geq -1$, le morphisme canonique $(X_{i+1} \rightarrow S_{i+1} \leftarrow Y_{i+1}) \rightarrow (\text{cosq}_i(X_\bullet \rightarrow S_\bullet \leftarrow Y_\bullet))_{i+1}$ de la catégorie \mathcal{B}/B

est couvrant pour la topologie h -orientée définie en 2.1.4 ci-dessus. Les termes du cosquelette, qui sont des limites finies, existent et sont calculés dans $\mathcal{B}_{/B}$.

2.2.2. — Aux données précédentes est associé un topos simplicial — c'est-à-dire fibré sur Δ , cf. [SGA 4 v^{bis} § 1.2] —, que nous notons $X_\bullet \overset{\leftarrow}{\times}_{S_\bullet} Y_\bullet$, et son topos total $\text{Tot}(X_\bullet \overset{\leftarrow}{\times}_{S_\bullet} Y_\bullet)$. Nous renvoyons le lecteur à [Illusie, 1972, VI, § 5.1] et [SGA 4 VI § 7] pour des définitions générales sur le topos total, ainsi que [Deligne, 1974, § 5.1] pour un résumé dans le cas particulier des espaces topologiques simpliciaux. On a le résultat suivant de descente cohomologique.

2.2.3. Théorème. — *Soit $(X_\bullet \rightarrow S_\bullet \leftarrow Y_\bullet) \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y)$ un hyperrecouvrement pour la topologie h -orientée et soit $\overset{\leftarrow}{\varepsilon} : \text{Tot}(X_\bullet \overset{\leftarrow}{\times}_{S_\bullet} Y_\bullet) \rightarrow X \overset{\leftarrow}{\times}_S Y$ le morphisme d'augmentation associé. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout complexe $\mathcal{K} \in \text{Ob D}^+(X \overset{\leftarrow}{\times}_S Y, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$, l'unité d'adjonction $\mathcal{K} \rightarrow R\overset{\leftarrow}{\varepsilon}_* \overset{\leftarrow}{\varepsilon}^* \mathcal{K}$ est un isomorphisme.*

2.2.4. Remarque. — Prendre garde au fait que, contrairement au cas usuel (non orienté), un objet cartésien de $\text{Tot}(X_\bullet \overset{\leftarrow}{\times}_{S_\bullet} Y_\bullet)$ ne provient pas nécessairement d'un objet de $X \overset{\leftarrow}{\times}_S Y$: le morphisme $\overset{\leftarrow}{\varepsilon}$ n'est en général pas de 2-descente cohomologique au sens de [SGA 4 v^{bis} 2.2.6].

La principale application que nous ferons du théorème précédent est la formule de changement de base suivante, dont on trouvera une autre démonstration dans XII_B-2.1.

2.2.5. Théorème (« hyper-changement de base »). — *Soient $X \xrightarrow{f} S \xleftarrow{g} Y$ un objet de \mathcal{B} avec g cohérent, et $S_\bullet \rightarrow S$ un hyperrecouvrement pour la topologie h . Notons respectivement $f_\bullet : X_\bullet \rightarrow S_\bullet$ et $g_\bullet : Y_\bullet \rightarrow S_\bullet$ les morphismes déduits de f et g par le changement de base $S_\bullet \rightarrow S$, et $X_\bullet \rightarrow X$ l'hyperrecouvrement de X pour la topologie h déduit de $S_\bullet \rightarrow S$. Enfin, notons ε_X le morphisme de topos $\text{Tot}(X_\bullet) \rightarrow X$. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout complexe $\mathcal{K} \in \text{Ob D}^+(Y, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$, le morphisme*

$$f^* Rg_* \mathcal{K} \rightarrow R\varepsilon_{X*} (f_\bullet^* Rg_\bullet_* \mathcal{K}|_{Y_\bullet})$$

est un isomorphisme.

On note f_\bullet , etc., pour ce que l'on aurait pu noter $\text{Tot}(f_\bullet)$, etc. Cela ne devrait pas prêter à confusion.

L'hypothèse de cohérence sur g est faite pour pouvoir appliquer le théorème XI-2.4, qui peut être mis en défaut sans cette hypothèse⁽ⁱⁱ⁾. (Par exemple, si S est un schéma de Dedekind possédant une infinité de points fermés ξ_0, ξ_1, \dots , si l'on pose $X = \xi_0$

⁽ⁱⁱ⁾ Il est vraisemblable que les techniques de l'exposé XII_B permettent de démontrer le théorème précédent sans supposer g cohérent.

et $Y = \coprod_{i>0} \xi_i$, le topos $X \overset{\leftarrow}{\times}_S Y$ — où f et g sont les morphismes évidents — est le topos vide tandis que le faisceau $f^* g_* \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est non nul pour tout $n > 1$.)

Démonstration. — Admettant le théorème de descente précédent (2.2.3), il n'est pas difficile de démontrer la formule de changement de base ci-dessus. Soit \mathcal{K} un complexe sur Y comme dans l'énoncé dont on note $\overset{\leftarrow}{\mathcal{K}}$ le tiré en arrière par la seconde projection $p_2 : X \overset{\leftarrow}{\times}_S Y \rightarrow Y$. Il résulte du théorème 2.2.3 (i) que l'unité $\mathcal{K} \rightarrow R\overset{\leftarrow}{\varepsilon}_* \overset{\leftarrow}{\varepsilon}^* \mathcal{K}$ est un isomorphisme, où $\overset{\leftarrow}{\varepsilon}$ désigne le morphisme d'augmentation $\text{Tot}(X_\bullet \overset{\leftarrow}{\times}_S Y_\bullet) \rightarrow X \overset{\leftarrow}{\times}_S Y$. La conclusion résulte de la chaîne d'isomorphismes ci-dessous, les premier et dernier résultant de XI-2.4, le troisième de la fonctorialité des images directes, et le second — comme on l'a vu — de la descente cohomologique h -orientée.

$$\begin{aligned} f^* Rg_* \mathcal{K} &\xrightarrow{\sim} Rp_{1*} \overset{\leftarrow}{\mathcal{K}} \\ Rp_{1*} \overset{\leftarrow}{\mathcal{K}} &\xrightarrow{\sim} Rp_{1*} R\overset{\leftarrow}{\varepsilon}_* \overset{\leftarrow}{\varepsilon}^* \mathcal{K} \\ Rp_{1*} R\overset{\leftarrow}{\varepsilon}_* \overset{\leftarrow}{\varepsilon}^* \mathcal{K} &= R\varepsilon_{X*} Rp_{1*} \overset{\leftarrow}{\mathcal{K}}_\bullet, \text{ où } \overset{\leftarrow}{\mathcal{K}}_\bullet = \overset{\leftarrow}{\varepsilon}^* \overset{\leftarrow}{\mathcal{K}} \\ R\varepsilon_{X*} Rp_{1*} \overset{\leftarrow}{\mathcal{K}}_\bullet &\xleftarrow{\sim} R\varepsilon_{X*} f^* Rg_{\bullet*} \overset{\leftarrow}{\mathcal{K}}_\bullet. \end{aligned} \quad \square$$

2.2.6. Remarques

2.2.6.1. — Dans les deux théorèmes précédents, on pourrait remplacer l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ par un anneau de torsion Λ quelconque ; la démonstration donnée ci-dessous s'applique sans changement. Plus généralement, on pourrait considérer des complexes de $D^+(X \overset{\leftarrow}{\times}_S Y, \Lambda)$ ou $D^+(Y, \Lambda)$ à cohomologie de torsion⁽ⁱⁱⁱ⁾ lorsque Λ est un anneau quelconque. Dans ce cadre, l'hypothèse [SGA 4 v^{bis} 2.4.1.1] de stabilité par image directe n'est pas toujours satisfaite ; ceci explique pourquoi il semble parfois utile de se restreindre à la catégorie des schémas à morphismes cohérents (cf. XII_B-1 et [SGA 4 v^{bis} 4.3.1]). Il est cependant vraisemblable qu'une analyse précise des démonstrations de *op. cit.* permette de s'affranchir de cette hypothèse et par conséquent de démontrer les théorèmes précédents avec des hypothèses de torsion plus faibles.

2.2.6.2. — Utilisant 1.4 et [Orgogozo, 2003, 2.5, 2.8] il est vraisemblable que l'on puisse adapter les démonstrations données ci-dessous pour obtenir les énoncés de cohomologie non abélienne suivants :

- (sous les hypothèses de 2.2.3) l'unité d'adjonction $\mathcal{C} \rightarrow \overset{\leftarrow}{\varepsilon}_* \overset{\leftarrow}{\varepsilon}^* \mathcal{C}$ est une équivalence pour tout champ \mathcal{C} ind-fini sur $X \overset{\leftarrow}{\times}_S Y$;
- (sous les hypothèses de 2.2.5) $f^* g_* \mathcal{C} \rightarrow \varepsilon_{X*} (f_\bullet^* g_{\bullet*} \mathcal{C}|_{Y_\bullet})$ est une équivalence pour tout champ ind-fini \mathcal{C} sur Y .

⁽ⁱⁱⁱ⁾ Un faisceau abélien \mathcal{F} est de torsion si la flèche $\text{colim}_n \text{Ker}([n] : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}$ est un isomorphisme, où n parcourt les entiers non nuls ordonnés par divisibilité ; voir ([SGA 4 ix § 1]).

Pour le sens à donner à ces énoncés voir [Giraud, 1971] (spécialement chap. VII, § 2.2) et [Orgogozo, 2003, § 2]. Voir aussi XII_B-2.2 pour une autre esquisse de démonstration du second énoncé.

2.3.

Le reste de cet exposé est consacré à la démonstration du théorème 2.2.3.

2.3.1. Réductions

2.3.1.1. — D'après la théorie générale de la descente — cf. [SGA 4 v^{bis} § 3.3] ou [Deligne, 1974, 5.3.5] pour un résumé —, il suffit de démontrer qu'un morphisme $B' = (\coprod X_\alpha \rightarrow \coprod S_\alpha \leftarrow \coprod Y_\alpha) \rightarrow B$ déduit d'une famille de type (i) à (v) est de descente cohomologique. (Par stabilité par changement de base, on aura automatiquement descente cohomologique *universelle*.) De plus, et pour la même raison, on peut se contenter du cas particulier où les familles *h*-couvrantes de X, Y et S considérées en (i)–(iii) sont, soit un recouvrement de Zariski, soit un morphisme propre et surjectif.

2.3.1.2. — Soient \mathcal{S} un site, de topos associé \mathcal{T} et le pseudo-foncteur $V \mapsto \mathcal{T}_{/V}$. Pour tout recouvrement $V \rightarrow U$, on a descente cohomologique pour $\text{Tot } \mathcal{T}_{/V_\bullet} \rightarrow \mathcal{T}_{/U}$, où $\mathcal{T}_{/V_\bullet}$ est le topos simplicial déduit du cosquelette de V sur U . Ceci résulte par exemple de l'existence locale d'une section au morphisme $V \rightarrow U$. Appliquant cette observation à notre catégorie \mathcal{B} , on constate que l'on a descente cohomologique (universelle) pour les familles de type (i), (ii), (iii) et (v) lorsque l'on suppose les morphismes $X_\alpha \rightarrow X, Y_\alpha \rightarrow Y$ et $S_\alpha \rightarrow S$ étalés. D'après l'observation 2.1.5, ceci nous permet de nous ramener au cas où les familles *h*-couvrantes de 2.1.4 sont données par un seul morphisme, propre et surjectif. Ceci nous permet aussi de supposer les schémas cohérents et, par conséquent, d'utiliser le théorème 1.1.2 dont la démonstration donnée utilise des hypothèses de finitude (permettant le calcul de fibres d'images directes).

2.3.1.3. — Dans les paragraphes suivants, on fixe un objet $B = (X \rightarrow S \leftarrow Y)$ de \mathcal{B} à objets (et morphismes) cohérents, et on note T le topos $X \overset{\leftarrow}{\times}_S Y$. Donné un objet simplicial $B_\bullet = (X_\bullet \rightarrow S_\bullet \leftarrow Y_\bullet)$ augmenté vers B , on note T_\bullet le topos total du topos simplicial $X_\bullet \overset{\leftarrow}{\times}_{S_\bullet} Y_\bullet$: pour alléger les notations, nous omettons dorénavant le « Tot ». On fixe également un entier $n \geq 1$ et un complexe $\mathcal{K} \in \text{Ob } \mathcal{D}^+(T, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$, dont on note \mathcal{K}_\bullet le tiré en arrière par le morphisme de topos $\overset{\leftarrow}{\varepsilon} : T_\bullet \rightarrow T$. On souhaite montrer que si B_\bullet est le 0-cosquelette d'une flèche $B' \rightarrow B$ comme en 2.3.1.1 ci-dessus et à objets cohérents, l'unité d'adjonction

$$\mathcal{K} \rightarrow R\overset{\leftarrow}{\varepsilon}_* \mathcal{K}_\bullet$$

est un isomorphisme.

2.3.2. *Famille de type (i) : $(X' \rightarrow S \leftarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y)$.* — Soit $r' : X' \rightarrow X$ un morphisme cohérent couvrant pour la topologie h , et $X_\bullet = \text{cosq}_0^X(X')$ son cosquelette. (Comme expliqué en 2.3.1, on pourrait supposer r' propre et surjectif; ce n'est pas nécessaire.) Par cohérence et passage aux fibres en les points du topos T , il suffit de montrer que le morphisme de fonctorialité

$$R\Gamma(T, \mathcal{K}) \rightarrow R\Gamma(T_\bullet, \mathcal{K}_\bullet)$$

est un isomorphisme, lorsque les schémas Y , X , S , et le morphisme $f : X \rightarrow S$, sont locaux (pour la topologie étale). Comme en § 1, calculons l'unité d'adjonction par projection sur le premier facteur, c'est-à-dire sur la ligne horizontale inférieure du diagramme 2-commutatif

$$\begin{array}{ccc} T & \xleftarrow{\overleftarrow{\varepsilon}} & T_\bullet \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_{1\bullet} \\ X & \xleftarrow{\varepsilon_X} & X_\bullet \end{array}$$

On veut montrer que la flèche

$$R\Gamma(X, Rp_{1\bullet} \mathcal{K}) \rightarrow R\Gamma(X_\bullet, Rp_{1\bullet} \mathcal{K}_\bullet)$$

est un isomorphisme. Comme, par descente cohomologique usuelle, le morphisme $R\Gamma(X, Rp_{1\bullet} \mathcal{K}) \rightarrow R\Gamma(X_\bullet, (Rp_{1\bullet} \mathcal{K})_\bullet)$ est un isomorphisme, il suffit de montrer que la flèche de changement de base $\varepsilon_X^* Rp_{1\bullet} \mathcal{K} \rightarrow Rp_{1\bullet} \overleftarrow{\varepsilon}^* \mathcal{K}$ induit un isomorphisme sur les sections globales (sur X_\bullet). Les images directes et inverses simpliciales se calculant étage par étage, il suffit donc de montrer que, pour chaque $i \geq 0$, les morphismes de changement de base $\varepsilon_i^* Rp_{1\bullet} \mathcal{K} \rightarrow Rp_{1i\bullet} \overleftarrow{\varepsilon_i}^* \mathcal{K}$ associés aux diagrammes 2-commutatifs

$$\begin{array}{ccc} T & \xleftarrow{\overleftarrow{\varepsilon_i}} & T_i = X_i \times_S Y \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_{1i} \\ X & \xleftarrow{\varepsilon_i} & X_i \end{array}$$

sont des isomorphismes. Cela résulte du lemme ci-dessous (i), appliqué à $\varepsilon_i : X_i \rightarrow X$.

2.3.3. *Lemme.* — *Considérons un objet $X \rightarrow S \leftarrow Y$ de \mathcal{B} et un complexe \mathcal{K} comme en 2.3.1.3.*

(i) *Soit $\gamma : Z \rightarrow X$ un morphisme cohérent, faisant de Z un S -schéma. Notons $\overleftarrow{\gamma} : Z \times_S Y \rightarrow X \times_S Y$ le morphisme induit entre les topos orientés. Le morphisme de changement de base*

$$\gamma^* (Rp_{1\bullet}^X \mathcal{K}) \rightarrow Rp_{1\bullet}^Z \overleftarrow{\gamma}^* \mathcal{K}$$

associé au diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xleftarrow{\gamma} & Z \times_S Y \\ p_1^X \downarrow & \gamma & \downarrow p_1^Z \\ X & \xleftarrow{\gamma} & Z \end{array}$$

est un isomorphisme.

(ii) Soit $\delta : Z \rightarrow Y$ un morphisme cohérent, faisant de Z un S -schéma. Notons $\overleftarrow{\delta} : X \times_S Z \rightarrow X \times_S Y$ le morphisme induit entre les topos orientés. Sous l'hypothèse supplémentaire que $X \rightarrow S$ est un morphisme local entre schémas strictement locaux, le morphisme de changement de base

$$\delta^* (R\Gamma(Y, \mathcal{K})) \rightarrow R\Gamma(Z, \overleftarrow{\delta}^* \mathcal{K})$$

associé au diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xleftarrow{\overleftarrow{\delta}} & X \times_S Z \\ p_2^Y \downarrow & \delta & \downarrow p_2^Z \\ Y & \xleftarrow{\delta} & Z \end{array}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — (i) Par passage aux fibres en un point géométrique de Z et son image par γ , il suffit de montrer que le morphisme $\overleftarrow{\gamma}$ induit un isomorphisme sur les *sections globales* lorsque $Z \rightarrow X$ est un morphisme local entre schémas strictement locaux. Soit s le point géométrique de S image des points centraux de Z et X ; les morphismes de topos $Z \times_{S(s)} Y_{(s)} \rightarrow Z \times_S Y$ et $X \times_{S(s)} Y_{(s)} \rightarrow X \times_S Y$ étant des équivalences (XI-1.11), on peut supposer de plus que les morphismes $Z \rightarrow S$ et $X \rightarrow S$ sont locaux (entre schémas strictement locaux). Notons σ_X et σ_Z les sections canoniques des secondes projections $Z \times_S Y \rightarrow Y$ et $Z \times_S Y \rightarrow Y$. Pour conclure, on observe que les flèches verticales de restriction du diagramme ci-dessous sont des isomorphismes par les égalités $p_{2*} = \sigma^*$ déjà utilisées.

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma(X \times_S Y, \mathcal{K}) & \xrightarrow{R\Gamma(\overleftarrow{\gamma}, \mathcal{K})} & R\Gamma(Z \times_S Y, \mathcal{K}) \\ R\Gamma(\sigma_X, \mathcal{K}) \downarrow & = & \downarrow R\Gamma(\sigma_Y, \mathcal{K}) \\ R\Gamma(Y, \mathcal{K}) & \xrightarrow{=} & R\Gamma(Y, \mathcal{K}). \end{array}$$

(ii) Par passage aux fibres en un point géométrique de Z et son image par δ , il suffit de montrer que le morphisme $\overleftarrow{\delta}$ induit un isomorphisme sur les *sections globales* lorsque $Z \rightarrow Y$ est un morphisme local entre schémas strictement locaux. Comme

on suppose d'autre part que le morphisme $X \rightarrow S$ est un morphisme local entre schémas strictement locaux, les topos $X \times_S Y$ et $X \times_S Z$ sont locaux et le morphisme $X \times_S Z \rightarrow X \times_S Y$ est local. La conclusion est alors immédiate. \square

2.3.4. *Famille de type (ii) : $(X \rightarrow S \leftarrow Y') \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y)$.* — Même argument, quitte à échanger p_1 et p_2 . Plus précisément : on peut supposer T local, et on projette sur Y et Y_\bullet pour se ramener à montrer, par la descente cohomologique usuelle pour $Y_\bullet = \text{cosq}_0^Y(Y') \rightarrow Y$, que le morphisme

$$(Rp_{2*}\mathcal{K})_\bullet \rightarrow Rp_{2\bullet*}\mathcal{K}_\bullet$$

induit un isomorphisme par application du foncteur $R\Gamma(Y_\bullet, -)$. On utilise alors le (ii) du lemme ci-dessus dont il résulte que le morphisme de changement de base $(Rp_{2*}\mathcal{K})_\bullet \rightarrow Rp_{2\bullet*}\mathcal{K}_\bullet$ est un isomorphisme.

2.3.5. *Famille de type (iii) : $(X' = X \times_S S' \rightarrow S' \leftarrow Y' = Y \times_S S') \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y)$.* — Notons $S_\bullet = \text{cosq}_0^S(S')$ le cosquelette du morphisme propre et surjectif $S' \rightarrow S$ et $Y_\bullet \rightarrow Y$, $X_\bullet \rightarrow X$ les schémas simpliciaux augmentés qui s'en déduisent. (La réduction au cas d'un morphisme propre et surjectif $S' \rightarrow S$ résulte de 2.1.5.) Factorisons $\overleftarrow{\varepsilon}$ en

$$\begin{array}{ccccc} X_\bullet \times_{S_\bullet} Y_\bullet & \xrightarrow{\overleftarrow{r}_\bullet} & X \times_S Y_\bullet & \xrightarrow{\overleftarrow{\varepsilon}_Y} & X \times_S Y. \\ & \searrow & \uparrow & \nearrow & \\ & & \overleftarrow{\varepsilon} & & \end{array}$$

On a vu au paragraphe précédent (2.3.4) que le morphisme $\mathcal{K} \rightarrow R\overleftarrow{\varepsilon}_Y_* \overleftarrow{\varepsilon}_Y^* \mathcal{K}$ est un isomorphisme. Pour conclure, il suffit de montrer que l'unité $\text{Id} \rightarrow R\overleftarrow{r}_\bullet_* \overleftarrow{r}_\bullet^*$ est un isomorphisme, évalué en un complexe de $D^+(X \times_S Y_\bullet, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$. Les images directes et inverses simpliciales se calculant étage par étage, il suffit de montrer que, pour chaque $i \geq 0$, le morphisme

$$\text{Id} \rightarrow R\overleftarrow{r}_i_* \overleftarrow{r}_i^*$$

associé aux morphismes

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{r'_i} & X_i \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ S & \xleftarrow{r_i} & S_i \leftarrow Y_i & \xleftarrow{\quad} & X_i \times_{S_i} Y_i \\ & & & \downarrow \overleftarrow{r}_i & \\ & & & & X \times_S Y_i \end{array}$$

est un isomorphisme. C'est ce qu'affirme le théorème 1.1.2.

2.3.6. *Famille de type (iv) : $(X' = X \times_S S' \rightarrow S' \leftarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y)$.* — On suppose ici que le morphisme $Y \rightarrow S$ se factorise à travers un morphisme *propre* $S' \rightarrow S$, et on définit S_\bullet et X_\bullet comme ci-dessus. Notons que le cosquelette sur

$B = (X \rightarrow S \leftarrow Y)$ de $(X' \rightarrow S' \leftarrow Y)$ est, à l'étage i , l'objet $X_i \rightarrow S_i \leftarrow Y$, où $Y \rightarrow S_i$ est le morphisme évident se factorisant à travers la diagonale. Décomposons le morphisme $\overleftarrow{\varepsilon}$ en

$$\begin{array}{ccccc} X_{\bullet} \overleftarrow{\times}_{S_{\bullet}} Y & \xrightarrow{\overleftarrow{r}_{\bullet}} & (X \overleftarrow{\times}_S Y)_{\bullet} & \longrightarrow & X \overleftarrow{\times}_S Y \\ & \searrow & \uparrow & \nearrow & \\ & & \overleftarrow{\varepsilon} & & \end{array}$$

où $(X \overleftarrow{\times}_S Y)_{\bullet}$ est le topos total associé à l'objet simplicial constant de valeur $(X \rightarrow S \leftarrow Y)$ de \mathcal{B} . (Il s'agit du topos des faisceaux cosimpliciaux sur $X \overleftarrow{\times}_S Y$.) La descente cohomologique est triviale pour $(X \overleftarrow{\times}_S Y)_{\bullet} \rightarrow X \overleftarrow{\times}_S Y$: l'identité a une section. (Alternativement : le foncteur image directe se dérive en le foncteur complexe simple associé, $\text{Tot} : \mathbf{D}^+((X \overleftarrow{\times}_S Y)_{\bullet}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{D}^+(X \overleftarrow{\times}_S Y, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$.) La conclusion résulte du fait que l'unité $\text{Id} \rightarrow \text{R}\overleftarrow{r}_{\bullet*}\overleftarrow{r}_{\bullet}^*$ est un isomorphisme, par une nouvelle application du théorème 1.1.2.

2.3.7. Famille de type (v) : $(X \rightarrow S' \leftarrow Y' = Y \times_S S') \rightarrow (X \rightarrow S \leftarrow Y)$. — On suppose ici que le morphisme $X \rightarrow S$ se factorise à travers un morphisme étale $S' \rightarrow S$. Nous avons déjà donné en 2.3.1 une démonstration du résultat souhaité. On peut également procéder comme précédemment ; voici brièvement un argument. Notons à nouveau S_{\bullet} le 0-cosquelette du morphisme $S' \rightarrow S$, et $Y_{\bullet} = Y \times_S S_{\bullet}$ le schéma simplicial augmenté vers Y qui s'en déduit. Le cosquelette de $(X \rightarrow S' \leftarrow Y')$ sur B est, à l'étage i , l'objet $X \rightarrow S_i \leftarrow Y_i$, où $X \rightarrow S_i$ est le morphisme évident se factorisant à travers la diagonale. Le morphisme $X \overleftarrow{\times}_{S_i} Y_i \rightarrow X \overleftarrow{\times}_S Y$ étant une équivalence, le topos simplicial $X \overleftarrow{\times}_{S_{\bullet}} Y_{\bullet}$ est constant : son topos total est équivalent au topos (total de) $(X \overleftarrow{\times}_S Y)_{\bullet}$. Comme au paragraphe précédent, on est ramené au cas trivial où $S' = S$.