

# *Astérisque*

LUC ILLUSIE

## **Produits orientés**

*Astérisque*, tome 363-364 (2014), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° XI, p. 213-234

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_2014\\_\\_363-364\\_\\_213\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_2014__363-364__213_0)

© Société mathématique de France, 2014, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# EXPOSÉ XI

## PRODUITS ORIENTÉS

---

Luc Illusie

On fixe un univers  $\mathcal{U}$ . Sauf mention du contraire, les sites (resp. topos) considérés seront des  $\mathcal{U}$ -sites (resp. topos), et « petit » signifiera  $\mathcal{U}$ -petit.

### 1. Construction des produits orientés

La construction suivante est due à Deligne [Laumon, 1983] :

**1.1.** — Soient  $f : X \rightarrow S$ ,  $g : Y \rightarrow S$  des morphismes de topos. On suppose que  $X$ ,  $Y$ ,  $S$  ont des sites de définition  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D$ , admettant des limites projectives finies, et que  $f^*$ ,  $g^*$  prolongent des foncteurs continus entre sites, et commutant aux limites projectives finies. Soit  $C$  le site suivant :

(i)  $C$  est la catégorie des couples de morphismes  $U \rightarrow V \leftarrow W$  au-dessus de  $X \rightarrow S \leftarrow Y$ , où  $U \rightarrow V$  (resp.  $V \leftarrow W$ ) désigne un morphisme  $U \rightarrow f^*V$  (resp.  $g^*V \leftarrow W$ ) de  $C_1$  (resp.  $C_2$ ) et  $V$  est un objet de  $D$ .

(ii)  $C$  est muni de la topologie engendrée (cf. [SGA 4 II 1.1.6]) par les familles couvrantes  $(U_i \rightarrow V_i \leftarrow W_i) \rightarrow (U \rightarrow V \leftarrow W)$  ( $i \in I$ ) du type suivant :

- (a)  $V_i = V$ ,  $W_i = W$  pour tout  $i$ , et la famille  $(U_i \rightarrow U)$  est couvrante;
- (b)  $U_i = U$ ,  $V_i = V$  pour tout  $i$ , et la famille  $(W_i \rightarrow W)$  est couvrante;
- (c)  $(U' \rightarrow V' \leftarrow W') \rightarrow (U \rightarrow V \leftarrow W)$ , où  $U' = U$  et  $W' \rightarrow W$  est déduit par changement de base d'un morphisme  $V' \rightarrow V$  de  $D$ .

Remarquons que les limites projectives finies sont représentables dans  $C$ .

On note  $\tilde{C}$  le topos des faisceaux sur  $C$ .

**1.2. Lemme.** — Soit  $F$  un préfaisceau sur  $C$ . Pour que  $F$  soit un faisceau il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

- (i) pour toute famille couvrante  $(Z_i \rightarrow Z)$  de  $C$  du type (a) ou (b), la suite  $F(Z) \rightarrow \prod_{i \in I} F(Z_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j) \in I \times I} F(Z_i \times_Z Z_j)$  est exacte ;  
 (ii) pour toute famille couvrante  $(U' \rightarrow V' \leftarrow W') \rightarrow (U \rightarrow V \leftarrow W)$  du type (c), l'application

$$F(U \rightarrow V \leftarrow W) \rightarrow F(U' \rightarrow V' \leftarrow W')$$

est bijective.

En particulier, si l'on note  $(-)^a$  le foncteur faisceau associé, pour toute famille couvrante  $(Z' \rightarrow Z)$  du type (c), le morphisme de faisceaux associés  $Z'^a \rightarrow Z^a$  est un isomorphisme.

La nécessité est triviale pour (i), et pour (ii), il suffit d'observer que le morphisme diagonal

$$(U \rightarrow V' \leftarrow W') \rightarrow (U \rightarrow V' \times_V V' \leftarrow W' \times_W W')$$

est un morphisme couvrant (du type (c)), qui égalise la double flèche

$$(U \rightarrow V' \times_V V' \leftarrow W' \times_W W') \rightrightarrows (U \rightarrow V' \leftarrow W').$$

Pour la suffisance, on note que les familles couvrantes  $(Z_i \rightarrow Z)$  de type (a), (b), ou (c) sont stables par changement de base  $Z' \rightarrow Z$ , et on applique [SGA 4 II 2.3].

**1.3.** — Notons  $e_X$  (resp.  $e_Y, e_S$ ) l'objet final de  $C_1$  (resp.  $C_2, D$ ). On a des projections naturelles

$$p_1 : \tilde{C} \rightarrow X, p_2 : \tilde{C} \rightarrow Y$$

données par

$$p_1^*(U) = (U \rightarrow e_S \leftarrow e_Y), p_2^*(W) = (e_X \rightarrow e_S \leftarrow W).$$

On a par ailleurs un morphisme canonique

$$\tau : gp_2 \rightarrow fp_1$$

donné par le morphisme de foncteurs  $\tau : (gp_2)_* \rightarrow (fp_1)_*$  défini de la façon suivante : pour un faisceau  $F$  sur  $C$ , et un objet  $V$  de  $S$ ,

$$\tau : ((gp_2)_* F)(V) \rightarrow ((fp_1)_* F)(V)$$

est le composé

$$F(e_X \rightarrow e_S \leftarrow g^*V) \rightarrow F(f^*V \rightarrow V \leftarrow g^*V) \rightarrow F(f^*V \rightarrow e_S \leftarrow e_Y),$$

où la première flèche est induite par la localisation  $(f^*V \rightarrow V \leftarrow g^*V) \rightarrow (e_X \rightarrow e_S \leftarrow g^*V)$ , et la seconde est l'inverse de l'isomorphisme donné par 1.2, relativement au morphisme de type (c)  $(f^*V \rightarrow V \leftarrow g^*V) \rightarrow (f^*V \rightarrow e_S \leftarrow e_Y)$ .

**1.4. Théorème.** — Soit  $T$  un topos muni de morphismes  $a : T \rightarrow X$ ,  $b : T \rightarrow Y$  et d'un morphisme  $t : gb \rightarrow fa$ . Il existe alors un triplet  $(h : T \rightarrow \tilde{C}, \alpha : p_1h \xrightarrow{\sim} a, \beta : p_2h \xrightarrow{\sim} b)$ , unique à isomorphisme unique près, tel que le composé

$$gb \xrightarrow{\beta^{-1}} gp_2h \xrightarrow{\tau} fp_1h \xrightarrow{\alpha} fa$$

soit égal à  $t$ .

Nous aurons besoin, pour la démonstration, du lemme suivant :

**1.5. Lemme.** — Soit  $Z = (U \rightarrow V \leftarrow W)$  un objet de  $C$ . Avec la notation de 1.2, le carré suivant est cartésien :

$$(1.5.1) \quad \begin{array}{ccc} Z^a & \longrightarrow & (p_2^*W)^a \\ \downarrow & & \downarrow v \\ (p_1^*U)^a & \xrightarrow{u} & ((gp_2^*)V)^a \end{array} .$$

Dans ce carré,  $v$  et les flèches issues de  $Z^a$  sont les flèches évidentes, et  $u$  est la flèche composée

$$(p_1^*U)^a \longrightarrow ((fp_1)^*V)^a \xrightarrow{\tau} ((gp_2)^*V)^a ,$$

où  $\tau$  est le composé

$$(f^*V \rightarrow e_S \leftarrow e_Y)^a \xrightarrow{r^{-1}} (f^*V \rightarrow V \leftarrow g^*V)^a \longrightarrow (e_X \rightarrow e_S \leftarrow g^*V)^a ,$$

$r$  désignant l'isomorphisme  $(f^*V \rightarrow V \leftarrow g^*V)^a \xrightarrow{\sim} (f^*V \rightarrow e_S \leftarrow e_Y)^a$  de 1.2.

Soit  $z : Z \rightarrow Z' = (f^*V \rightarrow V \leftarrow g^*V)$  la projection canonique. Le composé  $Z \rightarrow p_1^*U \rightarrow (fp_1)^*V$  se factorise à travers  $z$ . Par suite, et par définition de  $\tau$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z^a & \xrightarrow{z} & Z'^a \\ \downarrow & & \downarrow r \\ (p_1^*U)^a & \longrightarrow & ((fp_1)^*V)^a \xrightarrow{\tau} ((gp_2)^*V)^a \end{array}$$

est commutatif. Comme le composé  $Z \rightarrow p_2^*W \rightarrow (gp_2)^*V$  se factorise aussi à travers  $z$ , le carré 1.5.1 est donc commutatif. Celui-ci est le pourtour du diagramme suivant,

où les flèches autres que  $\tau$  sont les flèches évidentes :

$$\begin{array}{ccccc}
 (U \rightarrow V \leftarrow W)^a & \longrightarrow & (f^*V \rightarrow V \leftarrow W)^a & \longrightarrow & (e_X \rightarrow e_S \leftarrow W)^a \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 (U \rightarrow V \leftarrow g^*V)^a & \longrightarrow & (f^*V \rightarrow V \leftarrow g^*V)^a & \longrightarrow & (e_X \rightarrow e_S \leftarrow g^*V)^a \\
 \downarrow & & \downarrow \tau & & \downarrow \text{Id} \\
 (U \rightarrow e_S \leftarrow e_Y)^a & \longrightarrow & (f^*V \rightarrow e_S \leftarrow e_Y)^a & \xrightarrow{\tau} & (e_X \rightarrow e_S \leftarrow g^*V)^a.
 \end{array}$$

Chacun des carrés qui le composent est cartésien. Il en est donc de même de 1.5.1.

**1.6.** — Prouvons 1.4. On peut supposer que  $a$  et  $b$  sont donnés par des morphismes de sites ([SGA 4 IV 4.9.4]). Par 1.5 l'unicité est claire : pour  $Z = (U \rightarrow V \leftarrow W)$  dans  $C$ , on doit avoir

$$(1.6.1) \quad h^*Z = a^*U \times_{(gb)^*V} b^*W,$$

où  $a^*U \rightarrow (gb)^*V$  est le composé  $a^*U \longrightarrow (fa)^*V \xrightarrow{t} (gb)^*V$ . Les isomorphismes  $\alpha$  et  $\beta$  sont alors tautologiques, nous les négligerons dans le reste de la démonstration. Vérifions que le foncteur  $h^*$  donné par 1.6.1 définit un morphisme de topos  $h$  vérifiant la propriété énoncée en 1.4. Comme  $h^*$  commute aux limites projectives finies, pour vérifier que  $h^*$  induit un morphisme de topos, il suffit de vérifier que  $h^*$  est continu ([SGA 4 IV 4.9.1, 4.9.2]). Il est trivial que  $h^*$  transforme familles couvrantes du type (a) ou (b) en familles couvrantes. Par ailleurs, si  $(U' \rightarrow V' \leftarrow W') \rightarrow (U \rightarrow V \leftarrow W)$  est une famille couvrante du type (c), le carré

$$\begin{array}{ccc}
 b^*W' & \longrightarrow & b^*W \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (gb)^*V' & \longrightarrow & (gb)^*V
 \end{array}$$

est cartésien, et par suite

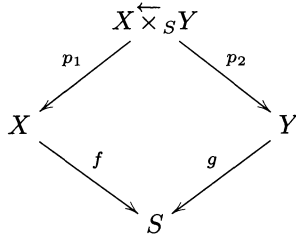
$$a^*U \times_{(gb)^*V'} b^*W' \rightarrow a^*U \times_{(gb)^*V} b^*W$$

est un isomorphisme. Il reste à vérifier que  $\tau$  induit  $t$ . Mais par définition, le morphisme de faisceaux défini par  $h^*(\tau)$  appliqué à  $V$  est le composé

$$((fa)^*V)^a \xrightarrow{r^{-1}} ((fa)^*V \times_{(gb)^*V} (gb)^*V)^a \longrightarrow ((gb)^*V)^a,$$

donc est égal à celui défini par  $t$  appliqué à  $(fa)^*V$ , ce qui achève la démonstration.

**1.7. Définition.** — Le topos  $\tilde{C}$  construit en 1.1 s'appelle le **produit orienté (gauche) de  $X$  et  $Y$  au-dessus de  $S$** , et se note  $X \overleftarrow{\times}_S Y$ . Les morphismes du diagramme



sont reliés par la 2-flèche  $\tau : gp_2 \rightarrow fp_1$ . Il découle de 1.4 que le quadruplet  $(X \overleftarrow{\times}_S Y, p_1, p_2, \tau)$  est indépendant (à isomorphisme unique près) du choix des sites de définition  $C_1, C_2, D$ .

Pour un objet  $Z = (U \rightarrow V \leftarrow W)$  de  $C$ , on notera parfois  $U \overleftarrow{\times}_V W$  l'objet  $Z^a$  de  $X \overleftarrow{\times}_S Y$ .

On définit de même le **produit orienté droit**  $X \overrightarrow{\times}_S Y$ , avec ses projections canoniques  $p_1 : X \overrightarrow{\times}_S Y \rightarrow X, p_2 : X \overrightarrow{\times}_S Y \rightarrow Y$  et la 2-flèche  $\tau' : fp_1 \rightarrow gp_2$ , qui possède la propriété universelle de 1.4, avec  $X$  et  $Y$  échangés.

**1.8.** — Désignons par  $\text{pt}$  un topos ponctuel (catégorie des faisceaux d'ensembles sur un espace réduit à un point). Soient  $x : \text{pt} \rightarrow X, y : \text{pt} \rightarrow Y$  des points de  $X$  et  $Y$  respectivement, et  $u : gy \rightarrow fx$  une 2-flèche. Par 1.4, le triplet  $(x, y, u)$  définit un point  $z : \text{pt} \rightarrow X \overleftarrow{\times}_S Y$  tel que  $p_1 z \simeq x, p_2 z \simeq y$ . Ce point sera noté  $(x, y, u)$  (ou parfois  $(x, y)$  s'il n'y a pas de confusion à craindre). Tout point de  $X \overleftarrow{\times}_S Y$  est de cette forme.

**1.9.** — Considérons un diagramme de 1-morphismes de topos

$$(1.9.1) \quad \begin{array}{ccccc}
 X' & \xrightarrow{f'} & S' & \xleftarrow{g'} & Y' \\
 \downarrow u & & \downarrow h & & \downarrow v \\
 X & \xrightarrow{f} & S & \xleftarrow{g} & Y
 \end{array}$$

et des 2-flèches  $a : hf' \rightarrow fu, b : gv \rightarrow hg'$ . Notons  $T = X \overleftarrow{\times}_S Y, T' = X' \overleftarrow{\times}_{S'} Y', p_1 : T \rightarrow X, p_2 : T \rightarrow Y, p'_1 : T' \rightarrow X', p'_2 : T' \rightarrow Y'$  les projections canoniques,  $\tau : gp_2 \rightarrow fp_1, \tau' : g'p'_2 \rightarrow f'p'_1$  les 2-flèches canoniques. Considérons la 2-flèche composée

$$c : gvp'_2 \xrightarrow{b} hg'p'_2 \xrightarrow{\tau'} hf'p'_1 \xrightarrow{a} fup'_1 .$$

D'après 1.4,  $c$  définit un diagramme de 1-morphismes

$$(1.9.2) \quad \begin{array}{ccccc} X' & \xleftarrow{p'_1} & T' & \xrightarrow{p'_2} & Y' \\ \downarrow u & & \downarrow t & & \downarrow v \\ X & \xleftarrow{p_1} & T & \xrightarrow{p_2} & Y \end{array}$$

et des 2-isomorphismes  $\alpha : p_1 t \xrightarrow{\sim} u p'_1$ ,  $\beta : p_2 t \xrightarrow{\sim} v p'_2$  rendant commutatif le carré

$$(1.9.3) \quad \begin{array}{ccc} g p_2 t & \xrightarrow{\tau} & f p_1 t \\ \downarrow \beta & & \downarrow \alpha \\ g v p'_2 & \xrightarrow{a \tau' b} & f u p'_1. \end{array}$$

On dit que le triplet  $(t, \alpha, \beta)$  (ou simplement  $t : T' \rightarrow T$ ) de 1.9.2 est déduit de 1.9.1 par *fonctorialité*. On notera

$$t = u \overleftarrow{\times}_h v.$$

On a une compatibilité évidente pour un composé de deux données 1.9.1.

**1.10.** — Voici quelques exemples.

(a) Dans la situation de 1.4, le triplet  $(a, b, t)$  définit un diagramme de type 1.9.1

$$\begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{\text{Id}} & T & \xleftarrow{\text{Id}} & T \\ \downarrow a & & \downarrow fa & & \downarrow b \\ X & \xrightarrow{f} & S & \xleftarrow{g} & Y, \end{array}$$

avec  $t : gb \rightarrow fa$ , d'où un morphisme

$$a \overleftarrow{\times}_{fa} b : T \overleftarrow{\times}_T T \rightarrow X \overleftarrow{\times}_S Y.$$

Par ailleurs, d'après 1.4, les flèches identiques de  $T$  définissent un morphisme canonique, dit **diagonal**

$$\Delta : T \rightarrow T \overleftarrow{\times}_T T.$$

La 1-flèche  $h$  de 1.4 est la composée

$$h = (a \overleftarrow{\times}_{fa} b) \Delta : T \rightarrow X \overleftarrow{\times}_S Y.$$

En particulier, prenant pour  $T$  un topos ponctuel, de sorte que  $\Delta$  est un isomorphisme, on a, avec les notations de 1.8

$$(x, y, u) = x \overleftarrow{\times}_{f_x} y : \text{pt} \rightarrow X \overleftarrow{\times}_S Y.$$

(b) Dans la situation de 1.7, soient  $X', S', Y'$  des objets de  $X, S, Y$  respectivement, et  $f' : X' \rightarrow S'$ , (resp.  $g' : Y' \rightarrow S'$ ) une flèche au-dessus de  $f$  (resp.  $g$ ), *i.e.* une flèche  $f' : X' \rightarrow f^*(S')$ , (resp.  $g' : Y' \rightarrow g^*(S')$ ). Notons  $X' \overleftarrow{\times}_{S'} Y'$  l'objet

$(X' \rightarrow S' \leftarrow Y')^a = p_1^*(X') \times_{(gp_2)^*(S')} p_2^*Y'$  de  $X \overleftarrow{\times}_S Y$ , cf. 1.5. On en déduit un diagramme 2-commutatif de 1-flèches naturelles

$$(1.10.1) \quad \begin{array}{ccccc} & & (X \overleftarrow{\times}_S Y)_{/(X' \overleftarrow{\times}_{S'} Y')} & & \\ & p'_1 \swarrow & & \searrow p'_2 & \\ X_{/X'} & \xrightarrow{f_{/S'}} & S_{/S'} & \xleftarrow{g_{/S'}} & Y_{/Y'} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & S & \longleftarrow & Y, \end{array}$$

où la notation  $(-)/_{-}$  désigne un topos localisé, et la 2-flèche  $\tau' : g_{/S'} p'_2 \rightarrow f_{/S'} p'_1$  est déduite par localisation de la 2-flèche  $\tau : gp_2 \rightarrow fp_1$ . D'après 1.4,  $\tau'$  définit donc un 1-morphisme

$$(1.10.2) \quad m : (X \overleftarrow{\times}_S Y)_{/(X' \overleftarrow{\times}_{S'} Y')} \rightarrow X_{/X'} \overleftarrow{\times}_{S_{/S'}} Y_{/Y'}.$$

On montre (cf. ([Abbes & Gros, 2011b, 3.15]) que  $m$  est une équivalence, par laquelle, dans la suite, nous identifierons les deux membres. D'autre part, les carrés 2-commutatifs de 1.10.1 définissent, d'après 1.9, une flèche de functorialité

$$X_{/X'} \overleftarrow{\times}_{S_{/S'}} Y_{/Y'} \rightarrow X \overleftarrow{\times}_S Y,$$

Celle-ci, ou son composé avec  $m$ ,

$$(1.10.3) \quad (X \overleftarrow{\times}_S Y)_{/(X' \overleftarrow{\times}_{S'} Y')} \rightarrow X \overleftarrow{\times}_S Y$$

s'appelle **flèche de localisation**.

**1.11. Proposition.** — *Supposons que  $X'$  soit l'objet final de  $X$  et que  $g'$  soit cartésien au-dessus de  $g$ , i.e.  $g' : Y' \xrightarrow{\sim} g^*(S')$ . Alors la flèche 1.10.3 est une équivalence.*

En effet, avec les notations de 1.10.1, il résulte de 1.2 que la flèche  $e_X \overleftarrow{\times}_{S'} Y' \rightarrow e_X \overleftarrow{\times}_{e_S} e_Y$  de  $X \overleftarrow{\times}_S Y$  est un isomorphisme.

**1.12.** — Considérons en particulier le cas où  $S = Y$  est un schéma muni de la topologie étale,  $g = \text{Id}$  et  $f : X \rightarrow S = Y$  est l'inclusion d'un sous-schéma fermé de  $Y$ . Le topos  $T = X \overleftarrow{\times}_Y Y$  joue le rôle d'un *voisinage tubulaire étale* de  $X$  dans  $Y$ . Les points de  $T$  sont les triplets  $(x, y, t)$ , où  $x$  (resp.  $y$ ) est un point géométrique de  $X$  (resp.  $Y$ ) et  $t : y \rightarrow x$  une flèche de spécialisation (cf. [SGA 4 VIII 7.9]). En d'autres termes,  $(x, y, t)$  est la donnée d'un point géométrique  $x$  de  $X$ , d'une généralisation  $y_0$  du point fermé (noté encore par abus  $x$ ) du localisé strict  $X_{(x)}$  de  $X$  en  $x$  et d'un point géométrique de  $Y_{(x)}$  localisé en  $y_0$ , ou encore d'une extension séparablement close  $y \rightarrow y_0$  du point

générique de  $\overline{\{y_0\}}$ . Par ailleurs, si  $v : Y' \rightarrow Y$  est un voisinage étale de  $X$  dans  $Y$ , *i.e.* un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & Y' \\ & \nearrow & \downarrow v \\ X & \longrightarrow & Y, \end{array}$$

où  $v$  est étale, alors, d'après 1.11 le morphisme canonique

$$X \overleftarrow{\times}_{Y'} Y' \rightarrow X \overleftarrow{\times}_Y Y$$

est une équivalence. Ainsi,  $T$  ne dépend que du hensélisé de  $Y$  le long de  $X$  (lorsque celui-ci est défini, en particulier, pour  $Y$  affine, cf. [Raynaud, 1970]). Nous verrons au numéro suivant et dans l'exposé XII<sub>A</sub> d'autres propriétés de  $T$  précisant cette analogie avec un voisinage tubulaire.

**1.13.** — Voici un dernier exemple de functorialité de produits orientés, qui ne sera utilisé qu'en 2.7. Soit  $I$  une petite catégorie cofiltrante et soient

$$(X_i \xrightarrow{f_i} S_i \xleftarrow{g_i} Y_i)_{i \in I}$$

des morphismes de topos fibrés au-dessus de  $I$ . On en déduit un diagramme de topos limites projectives ([SGA 4 VI 8.1.3])

$$\begin{array}{ccc} & \text{Limproj}(X_i \overleftarrow{\times}_{S_i} Y_i) & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ \text{Limproj } X_i & & \text{Limproj } Y_i \\ f \searrow & & \swarrow g \\ & \text{Limproj } S_i & \end{array}$$

où  $f = \text{Limproj } f_i, g = \text{Limproj } g_i$ , avec une 2-flèche  $\tau : gp_2 \rightarrow fp_1$  déduite des flèches  $\tau_i : g_i p_{1i} \rightarrow f_i p_{2i}$ , et par suite, un morphisme

$$(1.13.1) \quad \text{Limproj}(X_i \overleftarrow{\times}_{S_i} Y_i) \rightarrow \text{Limproj } X_i \overleftarrow{\times}_{\text{Limproj } S_i} \text{Limproj } Y_i.$$

Il résulte des définitions que 1.13.1 est une équivalence.

**2. Tubes et changement de base**

**2.1.** — Soit  $(S, s)$  un topos ponctué, *i.e.* un couple formé d'un topos  $S$  et d'un point  $s : pt \rightarrow S$  de  $S$ . Si  $(S, s)$  et  $(T, t)$  sont des topos ponctués, un morphisme (ponctué) de  $(S, s)$  dans  $(T, t)$  est un couple  $(f, a)$  d'un morphisme  $f : S \rightarrow T$  et d'une 2-flèche  $a : fs \rightarrow t$ . Une 2-flèche  $c : (f, a) \rightarrow (g, b)$  est une 2-flèche  $c : f \rightarrow g$  telle que  $b(cs) = a$ . Si  $(S, s)$  est un topos ponctué, on note  $F \mapsto F_s = s^*F$  le foncteur fibre en  $s$ .

Rappelons qu'un topos ponctué  $(S, s)$  est dit **local de centre  $s$**  ([SGA 4 VI 8.4.6]) si, pour tout objet  $F$  de  $S$ , la flèche naturelle  $\Gamma(S, F) \rightarrow F_s$  est bijective. Un morphisme  $(f, a) : (S, s) \rightarrow (T, t)$  de topos ponctués est dit **local** si la 2-flèche  $a : fs \rightarrow t$  est un isomorphisme.

**2.2.** — La construction qui suit est due à Gabber. Soit  $(S, s)$  un topos local de centre  $s$ . Notons  $\varepsilon : S \rightarrow \text{pt}$  la projection. Par définition la flèche canonique  $\varepsilon_* \rightarrow s^*$  est un isomorphisme. On en déduit un isomorphisme

$$(2.2.1) \quad \varepsilon^* \varepsilon_* \xrightarrow{\sim} (s\varepsilon)^*.$$

La flèche d'adjonction  $\varepsilon^* \varepsilon_* \rightarrow \text{Id}$  s'identifie donc, par 2.2.1, à un morphisme  $(s\varepsilon)^* \rightarrow \text{Id}$ , *i.e.* à une 2-flèche

$$(2.2.2) \quad c_s : \text{Id} \rightarrow s\varepsilon$$

entre les 1-morphismes  $\text{Id} : S \rightarrow S$  et  $s\varepsilon : S \rightarrow S$ . Si  $F$  est un objet de  $S$ ,  $(s\varepsilon)^* F$  est le faisceau constant sur  $S$  de valeur  $F_s = \varepsilon_* F = \Gamma(S, F)$ . Si  $U$  est un objet connexe de  $S$ , le morphisme  $(s\varepsilon)^* F \rightarrow F$  induit sur  $\Gamma(U, -)$  le morphisme de restriction  $\Gamma(S, F) \rightarrow \Gamma(U, F)$ . Le composé  $c_s s : s \rightarrow s$  est l'identité :  $(s\varepsilon)^* F \rightarrow F$  induit l'identité sur les fibres en  $s$ .

Soient  $f : X \rightarrow S, g : Y \rightarrow S$  des morphismes de topos,  $x : \text{pt} \rightarrow X$  un point de  $X, s = fx : \text{pt} \rightarrow S$  son image dans  $S$ . Le diagramme

$$(2.2.3) \quad \begin{array}{ccccc} \text{pt} & \xrightarrow{\text{Id}} & \text{pt} & \xleftarrow{\varepsilon g} & Y \\ \downarrow x & & \downarrow s & & \downarrow \text{Id} \\ X & \xrightarrow{f} & S & \xleftarrow{g} & Y, \end{array}$$

(où le carré de gauche est 2-commutatif) et la 2-flèche

$$(2.2.4) \quad c_s g : g \rightarrow s\varepsilon g$$

sont une donnée de type 1.9.1. Pour un objet  $F$  de  $S, (s\varepsilon g)^* F$  est le faisceau constant sur  $Y$  de valeur  $F_s = \Gamma(S, F)$ , et la flèche  $(s\varepsilon g)^* F \rightarrow g^* F$  est la composée  $\Gamma(S, F)_Y \rightarrow \Gamma(Y, g^* F)_Y \rightarrow g^* F$ . Notons que, par 1.4, le produit orienté  $\text{pt} \overleftarrow{\times}_{\text{pt}} Y$  s'identifie canoniquement à  $Y$ , avec  $p_1 = \text{Id} : Y \rightarrow Y$ . De 2.2.3 et 2.2.4 on déduit donc un diagramme de type 1.9.2 :

$$(2.2.5) \quad \begin{array}{ccccc} \text{pt} & \xleftarrow{\varepsilon g} & Y & \xrightarrow{\text{Id}} & Y \\ \downarrow x & & \downarrow \sigma & & \downarrow \text{Id} \\ X & \xleftarrow{p_1} & X \overleftarrow{\times}_S Y & \xrightarrow{p_2} & Y, \end{array}$$

en d'autres termes, une section  $\sigma : Y \rightarrow X \overleftarrow{\times}_S Y$  de  $p_2$  telle que  $p_1 \sigma = x\varepsilon g$ . On peut voir cette section comme étant définie, via 1.4 par le couple de morphismes

$x\varepsilon g : Y \rightarrow X$ ,  $\text{Id} : Y \rightarrow Y$  et la 2-flèche  $c_s g : g \rightarrow fx\varepsilon g = s\varepsilon g$ . On dit que  $\sigma$  est la **section canonique** définie par le point  $x$ . Par composition avec  $p_{2*}$ , la flèche d'adjonction  $\text{Id} \rightarrow \sigma_* \sigma^*$  donne une flèche canonique

$$(2.2.6) \quad \gamma : p_{2*} \rightarrow \sigma^*.$$

Le résultat suivant est dû à Gabber :

**2.3. Proposition.** — Soient  $f : (X, x) \rightarrow (S, s)$  un morphisme local de topos locaux ( $fx = s$ ), et  $g : Y \rightarrow S$  un morphisme de topos. Soit  $y : \text{pt} \rightarrow Y$  un point de  $Y$ . Pour tout objet  $F$  de  $X \overleftarrow{\times}_S Y$ ,  $\gamma$  (2.2.6) induit un isomorphisme

$$\gamma_y : (p_{2*}F)_y \xrightarrow{\sim} (\sigma^*F)_y.$$

Soit  $t = \sigma y : \text{pt} \rightarrow T$  le point de  $T = X \overleftarrow{\times}_S Y$  image de  $y$  par  $\sigma$ . Ce point est défini (cf. 1.4) par le triplet  $(x, y, u)$ , où  $u : gy \rightarrow fx = fx\varepsilon gy = s\varepsilon gy = s$  est déduit de 2.2.4. On a  $(\sigma^*F)_y = F_t$ . Choisissons des sites de définition  $C_1, C_2, D$  comme en 1.1. Par définition,

$$F_t = \text{colim}_z F(U \rightarrow V \leftarrow W),$$

où  $z : \text{pt} \rightarrow (U \rightarrow V \leftarrow W)$  parcourt les voisinages de  $t$  dans  $T$ , avec  $(U \rightarrow V \leftarrow W)$  dans  $C$ . Comme  $X$  et  $S$  sont locaux, les voisinages de  $t$  de la forme  $\sigma w : \text{pt} \rightarrow (e_X \rightarrow e_S \leftarrow W)$ , où  $w : \text{pt} \rightarrow W$  est un voisinage de  $y$  dans  $Y$  forment un système cofinal. Donc

$$F_t = \text{colim}_w F(e_X \rightarrow e_S \leftarrow W),$$

où  $z = \sigma w : \text{pt} \rightarrow (e_X \rightarrow e_S \leftarrow W)$  parcourt les voisinages précédents, avec  $U = e_X$ ,  $V = e_S$ . Par ailleurs,

$$(p_{2*}F)_y = \text{colim}_w F(e_X \rightarrow e_S \leftarrow W),$$

où  $w : \text{pt} \rightarrow W$  parcourt les voisinages de  $y$  dans  $Y$ . La flèche  $\gamma_y$  est la restriction naturelle. C'est donc un isomorphisme.

**2.3.1. Corollaire.** — Sous les hypothèses de 2.3, si  $Y$  a assez de points, en particulier, si  $Y$  est localement cohérent ([SGA 4 VI 9.0]),  $\gamma$  (2.2.6) est un isomorphisme.

Il est plausible que l'hypothèse d'existence d'assez de points soit superflue. Celle-ci sera cependant satisfaite dans les applications que nous avons en vue.

**2.3.2. Corollaire.** — Sous les hypothèses de 2.3, supposons  $Y$  local de centre  $y$ . Alors  $X \overleftarrow{\times}_S Y$  est local de centre  $\sigma(y)$ .

En effet, on a alors  $(p_{2*}F)_y = \Gamma(Y, p_{2*}F) = \Gamma(X \overleftarrow{\times}_S Y, F)$ , et  $\gamma_y$  s'identifie à la restriction  $\Gamma(X \overleftarrow{\times}_S Y, F) \rightarrow F_{\sigma(y)}$ .

Notons que, si  $f : X \rightarrow S$  est un morphisme local de schémas strictement locaux,  $g : Y \rightarrow S$  un morphisme de schémas strictement locaux, le produit fibré schématique  $X \times_S Y$  n'est pas en général strictement local, ni même local, même si  $g$  est local.

Le résultat ci-après est dû également à Gabber :

**2.4. Théorème.** — Soient  $f : X \rightarrow S$ ,  $g : Y \rightarrow S$  des morphismes de topos,  $T = X \overleftarrow{\times}_S Y$ ,  $p_1 : T \rightarrow X$ ,  $p_2 : T \rightarrow Y$  les projections canoniques,  $\tau : gp_2 \rightarrow fp_1$  la 2-flèche canonique. On suppose  $X, Y, S$  cohérents et  $f, g$  cohérents ([SGA 4 VI 2.3, 2.4.5, 3.1]). Soit  $\Lambda$  un anneau. Alors, pour tout  $F \in D^+(Y, \Lambda)$ , la flèche de changement de base, déduite de  $\tau$ ,

$$(2.4.1) \quad f^*Rg_*F \rightarrow Rp_{1*}p_2^*F$$

est un isomorphisme (de  $D^+(X, \Lambda)$ ).

Nous aurons besoin du lemme suivant, qui généralise [Orgogozo, 2006, 9.1] :

**2.5. Lemme.** — Sous les hypothèses de 2.4,  $T$  est cohérent, et les projections  $p_1, p_2$  sont des morphismes cohérents.

Le topos  $X$  (resp.  $Y$ , resp.  $S$ ) admet une (petite) famille génératrice  $C_1$  (resp.  $C_2$ , resp.  $D$ ) formée d'objets cohérents, stable par limites projectives finies ([SGA 4 VI 2.4.5]). Comme  $f$  et  $g$  sont cohérents,  $f^*V$  (resp.  $g^*V$ ) est cohérent si  $V$  est dans  $D$  ([SGA 4 VI 3.2]). On peut donc supposer que  $f^*D \subset C_1$ ,  $g^*D \subset C_2$ . La sous-catégorie pleine de  $X$  (resp.  $Y$ , resp.  $S$ ) correspondante, munie de la topologie induite, est un site de définition de  $X$  (resp.  $Y$ , resp.  $S$ ). Soit  $C$  la catégorie définie comme en 1.1, munie de la topologie définie par la prétopologie  $\mathcal{P}$  engendrée par les familles finies de type (a) et (b) et les familles de type (c). Elle est stable par limites projectives finies, et est un site de définition de  $T$ , puisque toute famille couvrante de  $C$  de type (a) ou (b) est raffinée par une famille couvrante finie. Il suffit donc de montrer que tout objet de  $C$  est quasi-compact ([SGA 4 VI 2.4.5]). Décrivons  $\mathcal{P}$ . Pour chaque objet  $Z = (U \rightarrow V \leftarrow W)$  de  $C$ , notons  $\text{Cov}(Z)$  l'ensemble des familles  $(Z_i \rightarrow Z)_{i \in I}$  obtenues par composition d'un nombre fini de familles de type (c) et de familles (finies) de type (a) et (b). En particulier, l'ensemble  $I$  est fini. Par définition, la donnée des  $\text{Cov}(Z)$  vérifie les axiomes PT0, PT2 et PT3 de [SGA 4 II 1.3]. L'axiome PT1 (stabilité par changement de base) est également vérifié, les familles de type (c), ainsi que les familles finies de type (a) (resp. (b)) étant stables par changement de base, et le changement de base commutant à la composition des familles. La donnée des  $\text{Cov}(Z)$  est donc une prétopologie, et par définition, c'est la prétopologie  $\mathcal{P}$ . Comme les familles appartenant à  $\text{Cov}(Z)$  sont finies, tout objet de  $C$  est automatiquement quasi-compact, comme annoncé. La cohérence des projections  $p_1$  et  $p_2$  en découle.

**2.6. Remarques.** — (a) Gabber sait montrer que la conclusion de 2.5 vaut sous les seules hypothèses que  $X, Y, S$  et  $g$  sont cohérents. Nous n’aurons pas besoin de cette généralisation. (b) Le lecteur trouvera dans XII<sub>A</sub>-2.3.3 une autre application de 2.3 à des théorèmes de changement de base, dans le cadre des schémas et de la topologie étale.

**2.7.** — Prouvons 2.4. Comme  $X$  est cohérent, donc possède assez de points, il suffit de vérifier que, pour tout point  $x : \text{pt} \rightarrow X$  de  $X$ , la fibre en  $x$  de 2.4.1

$$(2.7.1) \quad (f^*Rg_*F)_x \rightarrow (Rp_{1*}p_2^*F)_x$$

est un isomorphisme. Soit  $s : \text{pt} \rightarrow S$  l’image de  $x$  par  $f$ . Soit  $X_{(x)}$  (resp.  $S_{(s)}$ ) le localisé de  $X$  (resp.  $S$ ) en  $x$  (resp.  $s$ ). Rappelons ([SGA 4 VI 8.4.2]) que  $X_{(x)}$  (resp.  $Y_{(y)}$ ) (noté  $\text{Loc}_x(X)$  (resp.  $\text{Loc}_s(S)$ ) dans *loc. cit.*) est la limite projective

$$X_{(x)} = \text{Limtop}_{U \in \text{Vois}(x)} X/U$$

(resp.

$$S_{(s)} = \text{Limtop}_{V \in \text{Vois}(s)} S/V),$$

où  $U$  (resp.  $V$ ) parcourt la catégorie cofiltrante  $\text{Vois}(x)$  (resp.  $\text{Vois}(s)$ ) des voisinages de  $x$  (resp.  $s$ ) dans  $X$  (resp.  $S$ ). Comme  $X$  (resp.  $S$ ) est cohérent, on peut d’ailleurs se borner aux  $U$  (resp.  $V$ ) qui sont cohérents, les morphismes de transition étant alors automatiquement cohérents. C’est ce que nous ferons dans la suite, notant encore  $\text{Vois}(x)$  (resp.  $\text{Vois}(s)$ ) la sous-catégorie pleine formée des  $U$  (resp.  $V$ ) cohérents. Le topos  $X_{(x)}$  (resp.  $S_{(s)}$ ) est un topos local, au-dessus de  $X$  (resp.  $S$ ), dont l’image du centre est  $x$  (resp.  $s$ ) ([SGA 4 VI 8.4.6]). Le morphisme  $f$  induit un morphisme local  $f_{(x)} : X_{(x)} \rightarrow S_{(s)}$ . Définissons de même

$$T_{(x)} = \text{Limtop}_{U \in \text{Vois}(x)} T/p_1^*U,$$

$$Y_{(s)} = \text{Limtop}_{V \in \text{Vois}(s)} Y/g^*V,$$

de sorte qu’on obtient un carré

$$(2.7.2) \quad \begin{array}{ccc} T_{(x)} & \xrightarrow{p_2} & Y_{(s)} \\ \downarrow p_1 & & \downarrow g \\ X_{(x)} & \xrightarrow{f} & S_{(s)}, \end{array}$$

avec une 2-flèche  $\tau : gp_2 \rightarrow fp_1$ . Par la compatibilité de la formation des produits orientés à la localisation (1.10.2) et aux limites projectives (1.13.1), la flèche

$$(2.7.3) \quad T_{(x)} \rightarrow X_{(x)} \overleftarrow{\times}_{S_{(s)}} Y_{(s)},$$

déduite de ce carré par 1.4 est une équivalence. En fait, comme l’observe le rapporteur, pour tout  $V \in \text{Vois}(s)$ , la flèche  $X_{(x)} \overleftarrow{\times}_{S/V} Y/g^*V \rightarrow X_{(x)} \overleftarrow{\times}_S Y$  est une équivalence, de

sorte que la localisation sur  $S$  est superflue. D'après 2.5, les topos  $X/U, S/V, T/p_1^*U, Y/g^*V$  sont cohérents, les flèches de transition des systèmes projectifs  $X/U, S/V$  sont cohérentes, et les morphismes  $g : Y/g^*V \rightarrow S/V, p_1 : T/p_1^*U \rightarrow X/U$  sont cohérents. On est donc dans les conditions d'application de [SGA 4 VI 8.7.3], qui, compte tenu de ce que  $S_{(s)}$  et  $X_{(x)}$  sont locaux, implique que les flèches canoniques

$$(2.7.4) \quad (\mathbf{R}g_*F)_s \rightarrow \mathbf{R}\Gamma(S_{(s)}, \mathbf{R}g_*F) \rightarrow \mathbf{R}\Gamma(Y_{(s)}, F),$$

$$(2.7.5) \quad (\mathbf{R}p_{1*}p_2^*F)_x \rightarrow \mathbf{R}\Gamma(X_{(x)}, \mathbf{R}p_{1*}p_2^*F) \rightarrow \mathbf{R}\Gamma(T_{(x)}, p_2^*F)$$

sont des isomorphismes. Avec les identifications 2.7.3, 2.7.4 et 2.7.5, la flèche 2.7.1 s'identifie à la fibre en  $x$  de la flèche de changement de base (déduite de  $\tau$ ) du carré 2.7.2. Cette flèche s'écrit

$$(2.7.6) \quad \mathbf{R}\Gamma(Y_{(s)}, F) \rightarrow \mathbf{R}\Gamma(T_{(x)}, p_2^*F).$$

On a :

(\*) : *La flèche 2.7.6 s'identifie canoniquement à la flèche de functorialité définie par  $p_2$ .*

Pour le vérifier, on peut supposer  $S$  et  $X$  locaux, de centres respectifs  $s$  et  $x$ , et  $f$  local. Par définition, 2.7.6 est la flèche composée

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}\Gamma(S, \mathbf{R}g_*F) & \xrightarrow{2.7.6} & \mathbf{R}\Gamma(T, p_2^*F) \\ \downarrow \alpha & & \uparrow \beta \\ \mathbf{R}\Gamma(S, \mathbf{R}g_*\mathbf{R}p_{2*}p_2^*F) & \xrightarrow{\mathbf{R}\Gamma(S, \tau)} & \mathbf{R}\Gamma(S, \mathbf{R}f_*\mathbf{R}p_{1*}p_2^*F), \end{array}$$

où la flèche  $\alpha$  est définie par la flèche d'adjonction  $\text{adj} : F \rightarrow \mathbf{R}p_{2*}p_2^*F$  (et donc est la flèche de functorialité  $\mathbf{R}\Gamma(Y, F) \rightarrow \mathbf{R}\Gamma(T, p_2^*F)$  définie par  $p_2$ ), et  $\beta$  est l'isomorphisme canonique de transitivité relatif à  $fp_1 : T \rightarrow S$ . Or, par définition de  $\tau$  (1.3), pour tout faisceau  $G$  sur  $T$ , la flèche

$$\Gamma(S, \tau) : \Gamma(S, (gp_2)_*G) \rightarrow \Gamma(S, (fp_1)_*G)$$

est l'identité. Il en est donc de même de la flèche horizontale inférieure du diagramme ci-dessus, ce qui prouve (\*). Il reste à prouver que 2.7.6 est un isomorphisme. En fait, la flèche

$$(2.7.7) \quad \text{adj} : F \rightarrow \mathbf{R}p_{2*}p_2^*F$$

est un isomorphisme. Pour le voir, il suffit d'observer que, compte tenu de la description de  $\gamma$  donnée en 2.3.2, le composé

$$F \xrightarrow{\text{adj}} \mathbf{R}p_{2*}p_2^*F \xrightarrow{\gamma} \sigma^*p_2^*F = F,$$

où  $\sigma$  est la section de  $p_2$  définie en 2.2.5 et  $\gamma$  l'isomorphisme de 2.3.1, est l'identité. Ceci achève la démonstration de 2.4.

**2.8. Remarques.** — (i) Supposons que les données de 2.4 proviennent de morphismes de schémas, munis de la topologie étale, avec  $X, S, Y$  cohérents et  $f$  et  $g$  cohérents. Les points  $x, s$  sont des points géométriques, et les localisés  $X_{(x)}, S_{(s)}$  des localisés stricts. Si  $f$  est une immersion fermée, la flèche d'adjonction 2.7.7 est un isomorphisme (on peut en effet supposer  $S$  strictement local, et il en est alors de même de  $X$ ). Supposons de plus que  $Y = S, g = \text{Id}_S$  comme en 1.12. On a vu en *loc. cit.* que  $T = X \overleftarrow{\times}_S S$  joue le rôle d'un voisinage tubulaire de  $X$  dans  $S$ . Soient  $j : S^* = S - X \rightarrow S$  l'ouvert complémentaire de  $X$ , et  $T^* = X \overleftarrow{\times}_S S^* = T_{/(e_X \rightarrow e_S - S^*)}$  le topos induit. Alors  $T^*$  joue le rôle d'un *voisinage tubulaire époinché* de  $X$  dans  $S$  : pour  $F \in D^+(S^*, \Lambda)$ , on a, par 2.4,

$$f^* Rj_* F \xrightarrow{\sim} R p_{1*} p_2^* F.$$

(ii) Sans l'hypothèse de cohérence sur  $g$ , la conclusion de 2.4 peut être en défaut, comme le montre l'exemple suivant, dû à Gabber. Soient  $X$  un espace topologique connexe, non vide,  $i : Y \rightarrow X$  l'inclusion d'un fermé non vide distinct de  $X$ ,  $j : U = X - Y \rightarrow X$  l'inclusion de l'ouvert complémentaire. Alors  $i^* j_* \mathbf{Z}$  est non nul. Mais, si tout point de  $U$  a un voisinage dont l'adhérence dans  $X$  ne rencontre pas  $Y$ , alors le produit orienté  $Y \overleftarrow{\times}_X U$  est vide. C'est le cas par exemple, si  $X$  est le segment  $[0, 1]$  et  $Y$  le point  $\{0\}$ .

(iii) Sous les hypothèses de 2.4, on montre de manière analogue que :

(a) Pour tout faisceau d'ensembles  $F$  sur  $Y$ , la flèche de changement de base

$$f^* g_* F \rightarrow p_{1*} p_2^* F$$

est un isomorphisme.

On peut espérer des variantes non abéliennes supérieures :

(b) Pour tout faisceau en groupes  $F$  sur  $Y$ , la flèche de changement de base

$$f^* R^1 g_* F \rightarrow R^1 p_{1*} p_2^* F,$$

est un isomorphisme (de faisceaux d'ensembles pointés).

(c) Plus généralement, pour tout champ  $F$  sur  $Y$ , la flèche de changement de base

$$f^* g_* F \rightarrow p_{1*} p_2^* F$$

est une équivalence.

La vérification de (b) et (c) semble requérir, outre les techniques de réduction des champs aux gerbes de [Giraud, 1971, III 2.1.5], des résultats de passage à la limite pour la cohomologie non abélienne analogues à ceux de [SGA 4 VI 8.7], pour lesquels nous ne connaissons pas de référence.

- (iv) Gabber sait démontrer la généralisation suivante de 2.4. Soient  $f : X \rightarrow S$ ,  $g : Y \rightarrow S$  des morphismes de topos,  $T = X \overleftarrow{\times}_S Y$ . On suppose que  $Y$  et  $S$  sont localement cohérents, et que, pour tout objet cohérent algébrique  $V$  de  $S$ ,  $g^*V$  est cohérent algébrique ([SGA 4 VI 2.1, 2.3]). Alors, pour tout  $F \in D^+(Y, \Lambda)$ , la flèche de changement de base 2.4.1 est un isomorphisme, et on devrait avoir des résultats analogues dans le cas non abélien, comme en (3) (a), (b), (c) ci-dessus. Gabber déduit ces résultats d'un théorème général de changement de base pour certains topos fibrés.

### 3. Produits fibrés

Les compléments donnés dans ce numéro et le suivant ne seront pas utilisés dans le reste du volume.

**3.1.** — Les produits fibrés de topos ont été construits par Giraud [Giraud, 1972, 3.4]. La construction suivante est due à Gabber. Soient  $f : X \rightarrow S$ ,  $g : Y \rightarrow S$  des morphismes de topos comme en 1.1. Soit  $D$  le site suivant :

- (i) La catégorie sous-jacente à  $D$  est la catégorie  $C$  considérée en 1.1 (i).
- (ii)  $D$  est munie de la topologie définie par la prétopologie engendrée par les familles couvrantes  $(U_i \rightarrow V_i \leftarrow W_i) \rightarrow (U \rightarrow V \leftarrow W)$  ( $i \in I$ ) de la forme (a), (b), (c) de 1.1 (ii) et de la forme
  - (d)  $(U' \rightarrow V' \leftarrow W') \rightarrow (U \rightarrow V \leftarrow W)$ , où  $W' = W$  et  $U' \rightarrow U$  est déduit par changement de base d'un morphisme  $V' \rightarrow V$  du site de définition de  $S$ .

En d'autres termes, la topologie sur  $D$  est la borne supérieure des topologies sur  $C$  définissant les produits orientés  $X \overleftarrow{\times}_S Y$  et  $X \overrightarrow{\times}_S Y$ .

D'après 1.2, pour qu'un préfaisceau  $F$  sur  $D$  soit un faisceau, il faut et il suffit que  $F$  vérifie les conditions d'exactitude habituelles relatives aux familles couvrantes de type (a) et (b), et que, pour toute famille couvrante  $Z' \rightarrow Z$  de type (c) ou (d),  $F(Z) \rightarrow F(Z')$  soit un isomorphisme.

Soit  $\tilde{D}$  le topos des faisceaux sur  $D$ . On a des projections naturelles

$$p_1 : \tilde{D} \rightarrow X, p_2 : \tilde{D} \rightarrow Y$$

données par les mêmes formules qu'en 1.3, et la construction de  $\tau$  en *loc. cit.* donne un *isomorphisme*

$$(3.1.1) \quad \varepsilon : gp_2 \xrightarrow{\sim} fp_1.$$

**3.2. Théorème.** — Soit  $T$  un topos muni de morphismes  $a : T \rightarrow X$ ,  $b : T \rightarrow Y$  et d'un isomorphisme  $t : gb \xrightarrow{\sim} fa$ . Il existe alors un triplet  $(h : T \rightarrow \tilde{D}, \alpha : p_1 h \xrightarrow{\sim} a, \beta :$

$p_2h \xrightarrow{\sim} b$ ), unique à isomorphisme unique près, tel que le composé

$$gb \xrightarrow{\beta^{-1}} gp_2h \xrightarrow{\varepsilon} fp_1h \xrightarrow{\alpha} fa$$

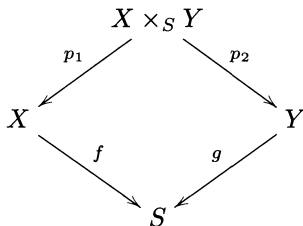
soit égal à  $t$ .

La démonstration est analogue à celle de 1.4. Le foncteur  $h^*$  est encore donné par la formule 1.6.1. Comme  $t$  est un isomorphisme, on a

$$a^*U \times_{(gb)^*V} b^*W = a^*U \times_{(fa)^*V} b^*W,$$

où  $b^*V \rightarrow (fa)^*V$  est le composé  $b^*V \longrightarrow (gb)^*V \xrightarrow{t^{-1}} (fa)^*V$ . Il s'ensuit que  $h^*$  transforme famille couvrante de type (d) en famille couvrante, et l'on conclut comme dans 1.6.

**3.3. Définition.** — Le topos  $\tilde{D}$  s'appelle **produit fibré de  $X$  et  $Y$  au-dessus de  $S$** , et se note  $X \times_S Y$ . Les morphismes du diagramme



sont reliés par le 2-isomorphisme  $\varepsilon : gp_2 \rightarrow fp_1$ .

**3.4. Exemples.** — (i) *Espaces topologiques.* Soient  $f : X \rightarrow S, g : Y \rightarrow S$  des applications continues entre espaces topologiques. On a un morphisme canonique

$$(3.4.1) \quad \widetilde{X \times_S Y} \rightarrow \tilde{X} \times_{\tilde{S}} \tilde{Y},$$

où  $\tilde{Z}$  désigne le topos des faisceaux sur un espace topologique  $Z$ . Si  $X, Y, S$  sont sobres, (3.4.1) induit une bijection sur les classes d'isomorphisme de points ([SGA 4 IV 4.2.3]). Si l'on suppose de plus que  $\tilde{X} \times_{\tilde{S}} \tilde{Y}$  a assez de points (condition vérifiée par exemple si  $X, Y, S, f, g$  sont cohérents, cf. 2.5), alors, comme la famille des sous-objets de l'objet final de  $\tilde{X} \times_{\tilde{S}} \tilde{Y}$  est génératrice, il résulte de [SGA 4 IV 7.1.9] que (3.4.1) est une équivalence de topos. On ignore si cette seconde hypothèse est nécessaire.

(ii) *Schémas.* Soient  $f : X \rightarrow S, g : Y \rightarrow S$  des morphismes de schémas. Désignons par l'indice zar (resp. ét) le topos zariskien resp. étale associé. Du fait de (1), le morphisme naturel  $(X \times_S Y)_{zar} \rightarrow X_{zar} \times_{S_{zar}} Y_{zar}$  n'est pas une équivalence en général. De même, le morphisme naturel  $(X \times_S Y)_{ét} \rightarrow X_{ét} \times_{S_{ét}} Y_{ét}$  n'est pas une équivalence en général, même si  $X, Y, S$  sont les spectres de corps : si  $S = \text{Spec } k, S_{ét}$  est équivalent au topos classifiant  $BG$  du groupe profini  $G = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ , où

$\bar{k}$  est une clôture séparable de  $k$ , et la formation de  $BG$  commute aux produits fibrés.

#### 4. Topos évanescents et co-évanescents

**4.1.** — Soient  $f : X \rightarrow S$ ,  $g : Y \rightarrow S$  des morphismes de topos comme en 1.1. Le produit orienté

$$(4.1.1) \quad X \overleftarrow{\times}_S S,$$

où  $S \rightarrow S$  est le morphisme identique, s'appelle le **topos évanescents** de  $f$ . Il est étudié dans [Laumon, 1983] et [Orgogozo, 2006]. Le produit orienté

$$(4.1.2) \quad S \overleftarrow{\times}_S Y,$$

où  $S \rightarrow S$  est le morphisme identique, joue un rôle important dans les travaux de Faltings sur les théorèmes de comparaison  $p$ -adiques et la correspondance de Simpson  $p$ -adique (**topos de Faltings**) (cf. [Faltings, 2002], [Faltings, 2005], [Abbes & Gros, 2011a], [Deligne, 1995], [Abbes & Gros, 2011b]). On propose ici de l'appeler **topos co-évanescents** de  $g$ . Du topos évanescents de  $\text{Id}_S$ ,

$$(4.1.3) \quad \overleftarrow{S} = S \overleftarrow{\times}_S S,$$

qui est aussi le topos co-évanescents de  $\text{Id}_S$ , les produits orientés  $X \overleftarrow{\times}_S Y$  se déduisent par changement de base. Considérons en effet le produit fibré itéré

$$(4.1.4) \quad Z = X \times_S \overleftarrow{S} \times_S Y,$$

où la flèche de gauche (resp. droite) de  $\overleftarrow{S}$  vers  $S$  est  $p_1$  (resp.  $p_2$ ). On a des projections naturelles  $q_1 : Z \rightarrow X$ ,  $q_2 : Z \rightarrow Y$  et  $m : Z \rightarrow \overleftarrow{S}$ , avec des isomorphismes  $p_1 m \xrightarrow{\sim} f q_1$ ,  $g q_2 \xrightarrow{\sim} p_2 m$ . Par composition avec la flèche structurale  $\tau : p_2 \rightarrow p_1$  de  $\overleftarrow{S}$ , on en déduit une flèche  $z : g q_2 \rightarrow f p_1$ . D'après 1.4, le triplet  $(q_1, q_2, z)$  définit donc une flèche

$$(4.1.5) \quad h : Z \rightarrow X \overleftarrow{\times}_S Y$$

et des isomorphismes  $p_1 h \xrightarrow{\sim} q_1$ ,  $p_2 h \xrightarrow{\sim} q_2$ , par lesquels  $z$  s'identifie à  $\tau h$ , où  $p_1, p_2$  désignent les projections canoniques de  $X \overleftarrow{\times}_S Y$  sur  $X$  et  $Y$ .

**4.2. Proposition.** — *Le morphisme  $h$  (4.1.5) est un isomorphisme. En particulier, il définit des isomorphismes canoniques*

$$(4.2.1) \quad X \times_S \overleftarrow{S} \xrightarrow{\sim} X \overleftarrow{\times}_S S,$$

$$(4.2.2) \quad \overleftarrow{S} \times_S Y \xrightarrow{\sim} S \overleftarrow{\times}_S Y.$$

Il suffit de montrer que  $Z$ , muni de  $(q_1, q_2, z)$  vérifie la propriété universelle du produit orienté. Soit  $T$  un topos muni de morphismes  $a : T \rightarrow X$ ,  $b : T \rightarrow Y$ , et d'une 2-flèche  $t : gb \rightarrow fa$ . Par la propriété universelle de  $\overleftarrow{S}$ , on en déduit d'abord un unique triplet, formé d'un morphisme  $k : T \rightarrow \overleftarrow{S}$  et d'isomorphismes  $p_1 k \rightarrow fa, p_2 k \rightarrow gb$  tels que  $t = \tau k$  modulo ces identifications. Puis, par la propriété universelle des produits fibrés, on en déduit un unique quadruplet formé d'un morphisme  $s : T \rightarrow Z$  et d'isomorphismes  $ms \xrightarrow{\sim} k, q_1 s \xrightarrow{\sim} a, q_2 s \xrightarrow{\sim} b$  tel que  $zs = t$  modulo ces identifications.

**4.3.** — Soit  $f : X \rightarrow S$  un morphisme de topos. D'après 1.4, les morphismes  $\text{Id}_X$  et  $f$  définissent un morphisme

$$(4.3.1) \quad \Psi : X \rightarrow X \overleftarrow{\times}_S S$$

tel que

$$(4.3.2) \quad p_1 \Psi = \text{Id}_X, p_2 \Psi = f, \tau \Psi = \text{Id}_f,$$

où  $\tau : p_2 \rightarrow fp_1$  est la 2-flèche structurale de  $X \overleftarrow{\times}_S S$  :

$$(4.3.3) \quad \begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \text{Id}_X \swarrow & \downarrow \Psi & \searrow f & \\ X & \xleftarrow{p_1} & X \overleftarrow{\times}_S S & \xrightarrow{p_2} & S \\ & \searrow f & & \swarrow \text{Id}_S & \\ & & S & & \end{array}$$

Le foncteur  $\Psi_*$  s'appelle **foncteur cycles proches**. Pour un objet  $(U \rightarrow V \leftarrow W)$  du site  $\mathcal{C}$  définissant  $X \overleftarrow{\times}_S S$ , on a  $\Psi^*(U \rightarrow V \leftarrow W) = U \times_V W$ , où  $U \times_V W := U \times_{f^*(V)} f^*W$ . Si  $\Lambda$  est un anneau et  $F \in D^+(X, \Lambda)$ , le complexe  $R\Psi_* F \in D^+(X \overleftarrow{\times}_S S, \Lambda)$  (noté aussi  $R\Psi F$ ) s'appelle **complexe des cycles proches** (de  $f$  relatif à  $F$ ).

L'identité  $p_{1*} \Psi_* = \text{Id}$  définit, par adjonction, un morphisme canonique

$$(4.3.4) \quad p_1^* \rightarrow \Psi_*.$$

Pour  $F \in D^+(X, \Lambda)$ , le cône du morphisme  $p_1^* F \rightarrow R\Psi F$  qui s'en déduit s'appelle le **complexe des cycles évanescents** (de  $f$  relatif à  $F$ ) et se note  $R\Phi F$ . Dans le cas des schémas (munis de la topologie étale), ces foncteurs, qui généralisent les foncteurs  $R\Psi$  et  $R\Phi$  de Grothendieck ([SGA 7 XIII]), sont étudiés dans [Laumon, 1983] et [Orgogozo, 2006].

Considérons le morphisme de changement de base

$$(4.3.5) \quad p_{1*} \rightarrow \Psi^*$$

déduit de l'identité  $p_1\Psi = \text{Id}_X$ , en d'autres termes, le morphisme déduit, par application de  $p_{1*}$ , de la flèche d'adjonction  $\text{Id} \rightarrow \Psi_*\Psi^*$ , compte tenu de ce que  $p_{1*}\Psi_* = \text{Id}$ . Le résultat suivant est donné sans démonstration dans [Laumon, 1983] :

**4.4. Proposition.** — *Le morphisme 4.3.5 est un isomorphisme.*

On va définir un morphisme

$$(4.4.1) \quad \Psi^* \rightarrow p_{1*},$$

dont on montrera qu'il est inverse de 4.3.5. Pour cela, on définit un morphisme

$$(4.4.2) \quad \text{Id} \rightarrow \Psi_*p_{1*}$$

de la façon suivante. Pour un faisceau  $F$  sur  $X \overleftarrow{\times}_S S$  et un objet  $Z = (U \rightarrow V \leftarrow W)$  du site  $C$  de 1.1, la flèche  $F(Z) \rightarrow (\Psi_*p_{1*}F)(Z)$  est la composée

$$(4.4.3) \quad F(Z) \rightarrow F(U \times_{f^*V} f^*W \rightarrow W \leftarrow W) \rightarrow F(U \times_{f^*V} f^*W \rightarrow e_S \leftarrow e_S),$$

où  $W \rightarrow W$  est l'identité, la première flèche est la restriction et la seconde, l'inverse de l'isomorphisme relatif au recouvrement de type (c)

$$(U \times_{f^*V} f^*W \rightarrow W \leftarrow W) \rightarrow (U \times_{f^*V} f^*W \rightarrow e_S \leftarrow e_S).$$

Le morphisme 4.4.1 est adjoint de 4.4.2. Notons  $u$  (resp.  $v$ ) le morphisme 4.3.5 (resp. 4.4.1). On va montrer que  $u$  et  $v$  sont inverses l'un de l'autre. L'argument qui suit est dû à Orgogozo. Il s'agit de montrer que, pour tout faisceau  $F$  sur  $X \overleftarrow{\times}_S S$  et tout faisceau  $G$  sur  $X$ , les applications  $\alpha(F, G) = \text{Hom}(u(F), G) : \text{Hom}(\Psi^*F, G) \rightarrow \text{Hom}(p_{1*}F, G)$  et  $\beta(F, G) = \text{Hom}(v(F), G) : \text{Hom}(p_{1*}F, G) \rightarrow \text{Hom}(\Psi^*F, G)$  sont inverses l'une de l'autre.

L'application

$$\alpha(F, G) : \text{Hom}(\Psi^*F, G) = \text{Hom}(F, \Psi_*G) \rightarrow \text{Hom}(p_{1*}F, G)$$

envoie  $a : F \rightarrow \Psi_*G$  sur  $p_{1*}a : p_{1*}F \rightarrow p_{1*}\Psi_*G = G$ . L'application  $a$  est la donnée d'une famille compatible d'applications  $a_{(U \rightarrow V \leftarrow W)} : F(U \rightarrow V \leftarrow W) \rightarrow G(U \times_V W)$ , pour  $(U \rightarrow V \leftarrow W)$  parcourant les objets de  $C$ , « compatible » voulant dire compatible aux flèches de restriction. L'application  $\alpha(a)$  est la famille  $a_{(U \rightarrow e_S \leftarrow e_S)} : F(U \rightarrow e_S \leftarrow e_S) \rightarrow G(U)$ ,  $U$  parcourant les objets de  $X$ .

L'application

$$\beta(F, G) : \text{Hom}(p_{1*}F, G) \rightarrow \text{Hom}(\Psi_*F, G) = \text{Hom}(F, \Psi_*G)$$

envoie  $b : p_{1*}F \rightarrow G$  sur le composé  $F \rightarrow \Psi_*p_{1*}F \rightarrow \Psi_*G$ , où la première flèche est 4.4.2 et la seconde  $\Psi_*b$ . L'application  $\beta(b)$  est la famille des  $\beta(b)_{(U \rightarrow V \leftarrow W)} : F(U \rightarrow V \leftarrow W) \rightarrow G(U \times_V W)$ , où  $\beta(b)_{(U \rightarrow V \leftarrow W)}$  est la composée de 4.4.3 et de

$$(\Psi_*b)(U \times_V W \rightarrow e_S \leftarrow e_S) : F(U \times_V W \rightarrow e_S \leftarrow e_S) = (p_{1*}F)(U \times_V W) \rightarrow G(U \times_V W).$$

Pour chaque  $a : F \rightarrow \Psi_*G$ , on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 F(U \rightarrow V \leftarrow W) & \xrightarrow{a_{(U \rightarrow V \leftarrow W)}} & G(U \times_V W) \\
 \downarrow & & \uparrow a_{(U \times_V W \rightarrow e_S \leftarrow e_S)} \\
 F(U \times_V W \rightarrow W \leftarrow W) & \longrightarrow & F(U \times_V W \rightarrow e_S \leftarrow e_S),
 \end{array}$$

où la flèche horizontale inférieure est l'isomorphisme figurant dans 4.4.3. Dans ce diagramme, le composé des flèches autres que la flèche horizontale supérieure est  $\beta\alpha(a)_{(U \rightarrow V \leftarrow W)}$ , donc  $\beta\alpha = \text{Id}$ . La vérification de  $\alpha\beta = \text{Id}$  est triviale également.

**4.5. Remarque.** — Lorsque les topos  $X$  et  $S$  sont localement cohérents et  $f : X \rightarrow S$  est localement cohérent, donc en particulier dans le cas des schémas, on peut prouver 4.4 plus simplement, en se ramenant au cas local. Comme  $X$  a assez de points, il suffit de montrer que, pour tout point  $x : \text{pt} \rightarrow X$ , et tout faisceau  $F$  sur  $X \overleftarrow{\times}_S S$ , la fibre en  $x$  de 4.3.5, est un isomorphisme. Quitte à remplacer  $X$  par son localisé en  $x$  (cf. 1.10.2 et 1.13.1), on peut supposer  $X$  local de centre  $x$ . Soit  $s : \text{pt} \rightarrow S$  l'image de  $x$  par  $f$ . Soit  $F$  un faisceau sur  $T = X \overleftarrow{\times}_S S$ . On doit montrer que

$$(p_{1*}F)_x = \Gamma(T, F) \rightarrow (\Psi_*F)_x = F_{(x,s)}$$

est un isomorphisme. Soient  $S_{(s)}$  le localisé de  $S$  en  $s$  et  $T_{(s)} = X \overleftarrow{\times}_{S_{(s)}} S_{(s)}$ . D'après les résultats de passage à limite invoqués dans 2.7, on a

$$\Gamma(T_{(s)}, F) = \text{colim } \Gamma(T_U, F),$$

où  $U$  parcourt les voisinages cohérents de  $s$  et  $T_U = X \overleftarrow{\times}_{S/U} S/U$ . D'après 1.11, les flèches de restriction  $\Gamma(T, F) \rightarrow \Gamma(T_U, F)$  sont des isomorphismes (en fait,  $T_U \rightarrow T$  est une équivalence). On peut donc supposer  $S$  local de centre  $s$ . D'après 2.3.2,  $T$  est alors local, de centre  $(x, s)$ , et  $\Gamma(T, F) = F_{(x,s)} = (\Psi^*F)_x$ .

**4.6.** — Soit  $g : Y \rightarrow S$  un morphisme de topos. Les faisceaux sur le topos co-évanescant  $T = S \overleftarrow{\times}_S Y$  (4.1.2) ont une description simple, due à Deligne [Deligne, 1995]. Pour un faisceau  $F$  sur  $T$ , la flèche de restriction  $F(U \rightarrow V \leftarrow W) \rightarrow F(U \rightarrow U \rightarrow U \times_V W)$  est un isomorphisme. Cela suggère de considérer le site  $C_0$  suivant. La catégorie  $C_0$  est celle des flèches  $(V \leftarrow W)$  au-dessus de  $g$ , i.e. des flèches  $W \rightarrow g^*V$  de  $Y$ . On munit  $C_0$  de la topologie définie par la prétopologie engendrée par les familles couvrantes des types (a) et (b) ci-après :

- (a)  $(V \leftarrow W_i)_{i \in I} \rightarrow (V \leftarrow W)$ , où la famille  $(W_i \rightarrow W)_{i \in I}$  est couvrante,
- (b)  $(V_i \leftarrow W_i)_{i \in I} \rightarrow (V \leftarrow W)$ , où la famille  $(V_i \rightarrow V)_{i \in I}$  est couvrante, et  $W_i = V_i \times_V W$ .

On montre ([Abbes & Gros, 2011b, 4.10]) que  $C_0$  est un site de définition de  $T$ . Un objet  $F$  de  $S \overleftarrow{\times}_S Y$ , décrit comme un faisceau sur  $C_0$ , s'interprète comme la donnée

d'une famille de faisceaux  $F_V : W \mapsto F(V \leftarrow W)$  sur  $g^*V$  et de flèches de restriction  $F_V \rightarrow j_{V'V}^*F_{V'}$  pour  $V' \rightarrow V$ , définissant  $j_{V'V} : g^*V' \rightarrow g^*V$ , satisfaisant la condition de descente que, pour une famille couvrante  $(V_i \rightarrow V)_{i \in I}$ , la suite

$$F_V \rightarrow \prod_i j_{V_i V}^* F_{V_i} \rightrightarrows \prod_{ii'} j_{V_{ii'} V}^* F_{V_{ii'}}$$

soit exacte, où  $V_{ii'} = V_i \times_V V_{i'}$ . D'après 1.4, les morphismes  $g : Y \rightarrow S$  et  $\text{Id}_Y$  définissent un morphisme

$$(4.6.1) \quad \Psi : Y \rightarrow S \overleftarrow{\times}_S Y$$

tel que

$$(4.6.2) \quad p_1 \Psi = g, p_2 \Psi = \text{Id}_Y, \tau \Psi = \text{Id}_g,$$

où  $\tau : gp_2 \rightarrow p_1$  est la 1-flèche structurale de  $S \overleftarrow{\times}_S Y$  :

$$(4.6.3) \quad \begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & g \swarrow & \downarrow \Psi & \searrow \text{Id}_Y & \\ S & \xleftarrow{p_1} & S \overleftarrow{\times}_S Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\ & \searrow \text{Id}_S & & \swarrow g & \\ & & S & & \end{array}$$

Le foncteur  $\Psi_*$ , qu'on pourrait appeler **foncteur cycles co-proches**, se comporte de manière très différente du foncteur cycles proches de 4.3.1. En effet, de l'identité  $p_2 \Psi = \text{Id}_Y$  on déduit, par adjonction, un morphisme canonique

$$(4.6.4) \quad p_2^* \rightarrow \Psi_*,$$

analogue de 4.3.4, et l'on a :

**4.7. Proposition.** — *Le morphisme 4.6.4 est un isomorphisme.*

En particulier, *le foncteur  $\Psi_*$  est exact.* Ici, c'est la flèche de changement de base, déduite de l'identité  $p_2 \Psi = \text{Id}_Y$ ,

$$(4.7.1) \quad p_{2*} \rightarrow \Psi^*,$$

analogue de 4.3.5, qui n'est pas, en général, un isomorphisme. On peut donner de 4.7 une démonstration analogue à celle de 4.4. Il est plus simple de déduire ce résultat des descriptions explicites suivantes des foncteurs  $p_1^*$ ,  $p_2^*$ ,  $\Psi$  et du morphisme  $\tau$ . Ces descriptions sont dues à Deligne [Deligne, 1995] (voir [Abbes & Gros, 2011b, 4.12, 4.14] pour les détails).

**4.8.** — (a) *Description de  $p_1^*$ .* On a  $p_1^*V = (V \leftarrow g^*V)$  (l'objet  $(V \rightarrow e_S \leftarrow e_Y)$  de  $C$  correspondant à l'objet  $(V \leftarrow g^*V)$  de  $C_0$ ). Si  $F$  est un faisceau sur  $S$ ,  $p_1^*F$  est le faisceau associé au préfaisceau dont la valeur en  $(V \leftarrow W)$  est la limite inductive des  $F(V')$  suivant la catégorie des flèches  $(V \leftarrow W) \rightarrow p_1^*V'$ . Cette catégorie ayant  $(V \leftarrow W) \rightarrow (V \leftarrow g^*V)$  pour objet initial, cette limite est égale à  $F(V)$ . En d'autres termes,  $p_1^*F$  est le faisceau associé au préfaisceau dont la valeur en  $(V \leftarrow W)$  est  $F(V)$ . Dans la description donnée plus haut d'un faisceau sur  $S \overleftarrow{\times}_S Y$  en termes d'une famille de faisceaux sur les  $g^*V$ ,  $p_1^*F$  est le faisceau associé à la famille des faisceaux constants  $G_V$  sur  $g^*V$  de valeur  $F(V)$ .

(b) *Description de  $p_2^*$ .* On a  $p_2^*W = (e_S \leftarrow W)$ . Si  $F$  est un faisceau sur  $Y$ ,  $p_2^*F$  est le faisceau associé au préfaisceau dont la valeur en  $(V \leftarrow W)$  est la limite inductive des  $F(W')$  suivant la catégorie des flèches  $(V \leftarrow W) \rightarrow p_2^*W'$ . Cette catégorie ayant  $(V \leftarrow W) \rightarrow (e_S \leftarrow W)$  pour objet initial, cette limite est égale à  $F(W)$ . En d'autres termes,  $p_2^*F$  est le faisceau associé à la famille des faisceaux  $H_V$  sur  $g^*V$ , où  $H_V$  est le faisceau  $W \mapsto F(W)$  (en fait, cette famille est déjà un faisceau, la condition de descente étant automatiquement satisfaite).

(c) *Description de  $\tau$ .* Si  $F$  est un faisceau sur  $S$ , le morphisme  $\tau : p_1^*F \rightarrow (gp_2)^*F$  est déduit du morphisme de préfaisceaux qui, pour  $(V \leftarrow W)$  dans  $C_0$ , envoie  $F(V)$  dans  $(gp_2)^*F(V \leftarrow W) = (g^*F)(W)$  par le morphisme composé  $F(V) \rightarrow (g^*F)(g^*V) \rightarrow (g^*F)(W)$ . On le voit à l'aide de (a) et (b), en explicitant le morphisme  $(fp_1)^* \rightarrow (gp_2)^*$  adjoint du morphisme  $\tau$  décrit en 1.3.

(d) *Description de  $\Psi_*$ .* Si  $F$  est un faisceau sur  $Y$ , et  $(U \rightarrow V \leftarrow W)$  un objet de  $C$ , on a  $(\Psi_*F)(U \rightarrow V \leftarrow W) = F(U \times_V W)$ . Dans la description de  $S \overleftarrow{\times}_S Y$  à l'aide du site  $C_0$ , on a donc

$$(\Psi_*F)(V \leftarrow W) = F(W).$$

Compte tenu de (b), on a donc

$$\Psi_*F = p_2^*F$$

Cette identification est celle donnée par 4.6.4, ce qui prouve 4.7.

Notons encore que les points de  $T = S \overleftarrow{\times}_S Y$  sont les flèches  $s \leftarrow y$ , où  $s$  (resp.  $y$ ) est un point de  $S$  (resp.  $Y$ ), et que, pour un faisceau  $F$  sur  $Y$ , si  $(s \leftarrow y)$  est un point de  $T$ , on a

$$(p_2^*F)_{(s \leftarrow y)} = F_y = (\Psi_*F)_{(s \leftarrow y)}.$$

**4.9. Remarque.** — Comme l'observe Gabber, l'isomorphisme 4.6.4 implique le théorème de changement de base 2.4 pour  $X = S$ ,  $f = \text{Id}_S$  sans hypothèse de cohérence sur  $S$ ,  $Y$ , et  $g$  (voir [Abbes & Gros, 2011b, 4.15]).