Astérisque

MICHEL RAYNAUD

Anneaux excellents

Astérisque, tome 363-364 (2014), Séminaire Bourbaki, exp. nº I, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2014__363-364__1_0>

EXPOSÉ I

ANNEAUX EXCELLENTS

Michel Raynaud, rédigé par Yves Laszlo

Ce texte est une version un peu modifiée d'un exposé de Michel Raynaud.

1. Introduction

Le but est de familiariser le lecteur avec la notion d'excellence et de lui donner un fil d'Ariane pour se repérer dans *ÉGA IV* où l'on trouve les principales propriétés des anneaux excellents. Son ambition n'est certainement pas de donner une exposition complète de la théorie, mais une idée de la stratégie qui ramène pour l'essentiel les preuves à des énoncés, souvent difficiles, dans le cas complet. Dans un second temps, on montre que toutes les propriétés définissant les anneaux excellents peuvent être mises en défaut, même en petite dimension. Notamment, il existe des anneaux de valuation discrète non excellents ainsi que des anneaux noethériens intègres de dimension 1 dont le lieu régulier n'est pas ouvert. Ce dernier exemple est un sous-produit d'une construction proposée par Gabber (XIX-2.6). Elle montre que le théorème de constructibilité des images directes (XIII-1.1.1) n'est plus vrai si on omet la condition de quasi-excellence.

2. Définitions

Soit A un anneau noethérien et $X = \mathrm{Spec}(A)$ son spectre. On va s'intéresser à des conditions sur X de deux sortes.

- *Conditions globales :*

2.1. Condition 1 : conditions d'ouverture. — *Tout schéma intègre Y fini sur X contient un ouvert dense*

1.a) *régulier.*

1.b) *normal.*

2.2. Remarque. — La condition 1.a) entraîne d'après le critère d'ouverture de Nagata que le lieu régulier de tout schéma fini sur X est ouvert ([ÉGA IV$_2$ 6.12.4]). De même, la condition 1.b) entraîne que le lieu normal de tout schéma fini sur X est ouvert ([ÉGA IV$_2$ 6.13.7]) [(i)]. Ces critères d'ouverture assurent en outre que pour tester 1.a) ou 1.b) on peut se limiter à des schémas intègres Y qui sont de plus finis *et* radiciels sur X.

• *Conditions locales.*

Elles sont de deux types.

2.3. Condition 2 : Conditions sur les fibres formelles. — *Pour tout point* fermé x *de* X*, le morphisme de complétion*[(ii)] $\mathrm{Spec}(\widehat{\mathscr{O}_x}) \to \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x)$ *est*

2.a) *régulier.*
2.b) *normal.*
2.c) *réduit.*

Un anneau vérifiant 2.a) est dit « G-ring » en anglais, ce en l'honneur de Grothendieck qui a dégagé l'importance de la notion et étudié ses propriétés.

2.4. Remarque. — Rappelons qu'un morphisme de schémas noethériens est dit **régulier** (resp. **normal**, **réduit**) respectivement s'il est plat et si les fibres géométriques en tout point de la base sont régulières (resp. normales, réduites). On dit que les fibres formelles de X en x sont géométriquement régulières, géométriquement normales ou géométriquement réduites si le morphisme de complétion $\mathrm{Spec}(\widehat{\mathscr{O}_x}) \to \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x)$ est régulier, normal ou réduit. Bien entendu, il suffit de tester la régularité, normalité, ou réduction des fibres après changement de base radiciel fini ([ÉGA IV$_2$ 6.7.7]). Notons que la fibre fermée de $\mathrm{Spec}(\widehat{\mathscr{O}_x}) \to \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x)$ est le spectre du corps résiduel $k(x)$: elle est toujours géométriquement régulière. La fibre formelle en $y \in \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x)$ s'identifie à la fibre formelle *générique* du sous-schéma fermé $\overline{\{y\}}$ (muni de sa structure réduite), adhérence de y dans $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x)$; ceci explique qu'on s'intéresse dans la littérature aux fibres formelles génériques des anneaux intègres. Dans le cas où A est local mais pas un corps, elles peuvent avoir des dimensions arbitraires entre 0 et $\dim(A) - 1$ et contenir des points fermés de hauteurs différentes, même dans le cas excellent (2.10) régulier ([Rotthaus, 1991]). Dans le cas où A est un localisé d'une algèbre intègre de type fini sur un corps, la dimension de la fibre formelle générique est bien $\dim(A) - 1$ ([Matsumura, 1988]).

(i) Et en fait, 1.a) (resp. 1.b)) entraîne que le lieu régulier (resp. normal) de tout schéma intègre de type fini sur X est ouvert

(ii) Ses fibres sont appelées les fibres formelles (de X ou A) en x.

2.5. Condition 3 : condition de caténarité formelle. — *Pour tout point fermé y d'un sous-schéma fermé irréductible Y de X, le complété*[iii] $\widehat{\mathscr{O}_{Y,y}}$ *est équidimensionnel.*

On dit alors que X est **formellement caténaire**. Par exemple, si X est de dimension 1, X est formellement caténaire.

2.6. Exemple. — Tout anneau local noethérien *complet* est formellement caténaire.

Rappelons que X est dit **caténaire** si toutes les chaînes saturées de fermés irréductibles de X ayant mêmes extrémités ont même longueur, **universellement caténaire**[iv] si tout schéma affine de type fini sur X est caténaire. La caténarité est une notion locale. La terminologie de **caténarité formelle** est alors justifiée par la proposition élémentaire suivante ([ÉGA IV$_2$ 7.1.4]), proposition qui résulte de la fidèle platitude du morphisme de complétion

2.7. Lemme. — *Soit A local noethérien de complété équidimensionnel. Alors*

(i) *A est équidimensionnel et caténaire.*

(ii) *Pour tout idéal I de A, le quotient A/I est équidimensionnel si et seulement si son complété l'est ; en particulier, A/I est formellement caténaire.*

(iii) *En particulier, un schéma affine X noethérien formellement caténaire est caténaire et même universellement caténaire.*

Notons que (iii) découle immédiatement de (i) puisque X est caténaire si et seulement si ses composantes irréductibles le sont. On verra plus bas dans la section 5 que la propriété de caténarité formelle est notamment stable par extension finie d'où l'universelle caténarité annoncée (cf. la preuve de la proposition 7.1 et, pour une réciproque, voir (7.1.1)).

2.8. Exemple. — Soit alors $B \to A$ un morphisme local surjectif d'anneaux noethériens et supposons B de Cohen-Macaulay (par exemple régulier). Comme $\widehat{B}$ est de Cohen-Macaulay, il est équidimensionnel de sorte que A est formellement caténaire d'après (2.7).

(iii) Bien entendu, même si $\mathscr{O}_{Y,y}$ est intègre, son complété n'est en général pas intègre : penser à une courbe nodale.

(iv) Cette dernière notion est utile en théorie de la dimension : si A est intègre universellement caténaire contenue dans B intègre de type fini sur A, on a pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(B)$ au-dessus de $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A)$ la formule

$$\dim B_{\mathfrak{p}} + \deg.\operatorname{tr.}_{k(\mathfrak{q})} k(\mathfrak{p}) = \dim A_{\mathfrak{q}} + \deg.\operatorname{tr.}_A B.$$

Mais, en pratique, on teste plutôt la caténarité formelle qui, comme on le voit juste après, entraîne l'universelle caténarité, et même lui est équivalente (voir (7.1.1) plus bas) !

Regardons ce qui se passe dans le cas complet. Rappelons pour mémoire le théorème de structure de Cohen des anneaux locaux complets noethériens ([ÉGA 0_{IV} 19.8.8]) :

***2.9. Théorème* (Cohen).** — *Soit A un anneau local noethérien complet de corps résiduel k.*

(i) *A est isomorphe à un quotient d'un anneau de séries formelles sur un anneau de Cohen*[v]*. Si A contient un corps, il est isomorphe à un quotient d'un anneau de séries formelles sur k.*

(ii) *Si A est de plus intègre, il existe un sous-anneau B isomorphe à un anneau de séries formelles sur un anneau de Cohen ou un corps*[vi] *de sorte que l'inclusion $B \to A$ soit locale, finie et induise un isomorphisme des corps résiduels.*

Tout anneau local noethérien complet est donc quotient d'un anneau régulier.

2.10. Définition. — Soit X un schéma (resp. $X = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine) noethérien. On dit que X (resp. A) est

— **excellent** si X vérifie 1.a) + 2.a) + 3).
— **quasi-excellent** si X vérifie 1.a) + 2.a).
— **universellement japonais**[vii] si X vérifie 1.b) + 2.c).

2.11. — L'existence d'une classe de schémas stable par extension finie pour laquelle le théorème de désingularisation est vérifié impose de se limiter aux schémas quasi-excellents. Précisément, si tous les schémas intègres et finis Y sur X admettent une désingularisation (au sens de l'existence de $Y' \to Y$ propre et birationnel avec Y' régulier), alors X est quasi-excellent ([ÉGA IV_2 7.9.5])[viii]. Inversement, le théorème de désingularisation d'Hironaka se généralise à tout schéma réduit quasi-excellent de caractéristique nulle ([Temkin, 2008, 3.4.3])[ix]

On regroupe plus bas (11) des exemples de « méchants anneaux ». Commençons par un regard plus positif.

(v) Rappelons ([ÉGA 0_{IV} 19.8.5]) que les anneaux de Cohen C sont les corps de caractéristique nulle et les anneaux de valuation discrète complets d'inégale caractéristique $(0,p)$ non ramifiés. Lorsque le corps résiduel κ de C est parfait, C n'est autre que l'anneau des vecteurs de Witt de κ.
(vi) Voir (4.2) pour une amélioration.
(vii) Ou *Nagata* en anglais, voire *pseudo-géométrique* (chez Nagata notamment).
(viii) Si de plus X peut localement se plonger dans un schéma régulier, alors X vérifie 3) et est donc excellent.
(ix) Ce résultat a été longtemps considéré comme « bien connu des experts » alors que sa preuve, tout à fait non triviale, date de 2008.

3. Exemples immédiats.

3.1. Proposition. — *Un corps, un anneau de Dedekind de corps des fractions* de caractéristique nulle *est excellent.*

Démonstration. — Vérifions qu'un corps est excellent. En effet, une algèbre finie et intègre sur un corps est un corps : les propriétés 1.a), 2.a) et 3) sont donc vérifiées ce qui prouve que tout corps est excellent.

Soit A un anneau de Dedekind de corps des fractions K *de caractéristique nulle* est excellent.

- Vérifions 1.a). Soit donc B intègre finie sur A. Soit B est un corps, auquel cas 1.a) est vérifié, soit A se plonge dans B. Comme K est de caractéristique nulle, B est génériquement étale sur A, prouvant que le lieu régulier de B contient un ouvert non vide (le lieu étale par exemple).
- Pour 2.a), considérons x fermé dans $\mathrm{Spec}(A)$. La fibre formelle non fermée en x est le complété $\widehat{K_x}$ de K pour la valuation définie par x. Comme K est de caractéristique nulle, le corps $\widehat{K_x}$ est séparable sur K d'où 2.a).
- La propriété 3) est claire puisque le complété de A en x est intègre donc équidimensionnel. □

On verra plus bas (11.5) qu'il existe de nombreux anneaux de valuation discrète qui ne sont pas quasi-excellents.

4. L'exemple de base : les anneaux locaux noethériens complets.

Expliquons avec Nagata pourquoi les anneaux locaux noethériens complets sont excellents[(x)].

La propriété 2.a) est tautologique. La caténarité formelle a été vue (2.6). Reste 1.a). Une extension finie d'un anneau complet étant complet, on doit prouver le résultat suivant (cf. [ÉGA IV_2 22.7.6]).

***4.1. Théorème* (Nagata).** — *Si X est local noethérien intègre et complet*[(xi)]*, alors le lieu régulier est ouvert.*

Démonstration. — On va distinguer les cas d'égales et d'inégales caractéristiques.

(x) Ceci permet de construire de nombreux exemples d'anneaux de valuation discrète excellents de caractéristique positive (par complétion de schémas réguliers aux points de hauteur 1).

(xi) D'après (2.2), ceci entraîne que le lieu régulier d'un schéma local noethérien complet est ouvert, qu'il soit intègre ou non.

Cas I : (Cf. [ÉGA 0_{IV} 22.7.6].) Supposons que A contienne un corps et notons k_0 son corps premier (qui est parfait !) de sorte que le corps résiduel k de $A_{\mathfrak{p}}$ est séparable sur k_0 pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. L'anneau $A_{\mathfrak{p}}$ est régulier si et seulement si $A_{\mathfrak{p}}$ est formellement lisse sur k_0 (voir dans ce cas [ÉGA 0_{IV} 19.6.4]). D'autre part, le théorème de structure de Cohen (2.9) assure que A est isomorphe à $k[[T_1, \ldots, T_n]]/I$ de sorte que $\mathfrak{p}$ s'identifie à un idéal de $B = k[[T_1, \ldots, T_n]]$ contenant I. Le *critère jacobien de lissité formelle de Nagata* ([ÉGA 0_{IV} 22.7.3]) assure que $A_{\mathfrak{p}}$ est régulier si et seulement si il existe des k_0-dérivations D_i, $i = 1, \ldots, m$ de B dans B et f_i, $i = 1, \ldots, m$ des éléments engendrant $I_{\mathfrak{p}}$ tels que $\operatorname{dét}(D_i f_j) \notin \mathfrak{p}$. Cette condition étant visiblement ouverte, le théorème suit.

Cas II : Supposons que A est d'inégale caractéristique, et donc de corps des fractions K de caractéristique nulle. D'après le théorème de structure de Cohen (2.9), A contient un sous-anneau régulier (et complet) B faisant de A une B-algèbre de finie. Le corps des fractions L de B est de caractéristique nulle comme K. Quitte à remplacer A par un localisé $A[1/a]$, on peut supposer que B est libre de rang fini sur A de base $y_1, \ldots, y_m$. Mais $\operatorname{Spec}(A) \to \operatorname{Spec}(B)$ est étale en dehors du fermé $d = \operatorname{dét}_{A/B}(\operatorname{Tr}(y_i y_j)) \neq 0$ de $\operatorname{Spec}(B)$, qui est non trivial puisqu'il contient le point générique, l'extension $\operatorname{Frac}(B)/\operatorname{Frac}(A)$ étant séparable — de caractéristique nulle — ! Comme B est régulier, le théorème suit. □

4.2. Remarque. — Ainsi, un anneau de séries formelles sur un corps est excellent.

Notons que la preuve se simplifie si on connaît l'amélioration de Gabber du théorème de structure de Cohen (IV-2.1.1 et IV-4.2.2) : si A noethérien est local complet et intègre, il contient un anneau B isomorphe à un anneau de séries formelles sur un anneau de Cohen ou un corps tel que $\operatorname{Spec}(A) \to \operatorname{Spec}(B)$ est fini et *génériquement étale*. On n'a alors pas besoin de distinguer les caractéristiques des corps de fractions dans la preuve. Mais la preuve de cette amélioration est difficile.

5. Permanence par localisation et extension de type fini

La notion de (quasi) excellence est remarquablement stable. Précisément, on a

5.1. Théorème. — *Toute algèbre de type fini ou plus généralement essentiellement de type fini sur un anneau excellent (resp. quasi-excellent) est excellente (resp. quasi-excellente). En particulier, tout localisé d'algèbre de type fini sur un corps ou sur un anneau de Dedekind ($\mathbf{Z}$ par exemple) de corps des fractions de caractéristique nulle est excellent.*

(Rappelons que, dans ce contexte, un morphisme $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ est dit **essentiellement de type fini** si B est une localisation d'une A-algèbre de type fini par un système multiplicatif.)

Expliquons les grandes lignes de la preuve.

5.2. Condition 1). — Le passage au localisé ne pose pas de problème. Soit B de type fini sur A. Si A vérifie 1.a) ou 1.b), les critères d'ouverture de Nagata ([ÉGA IV_2 6.12.4 et 6.13.7]) entraînent qu'il en est de même de B.

5.3. Condition 2). — C'est la partie la plus difficile de la théorie ([ÉGA IV_2 7.4.4]), entièrement due à Grothendieck. Le point le plus délicat est la localisation :

5.3.1. Théorème. — *Si A vérifie 2.a) (resp. 2.b) ou 2.c)), alors pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, l'anneau $A_\mathfrak{p}$ vérifie 2.a) (resp. 2.b) ou 2.c)), autrement dit les fibres formelles en tout point de $\operatorname{Spec}(A)$ sont géométriquement régulières (resp. géométriquement normales ou géométriquement réduites).*

Démonstration. — La preuve se fait par réduction au cas complet. On se limite à la propriété 2.a), le cas de 2.b) ou 2.c) se traitant de même. Soit $\mathfrak{m}$ maximal contenant $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ et soit B le complété $\mathfrak{m}$-adique de A. Comme $A_\mathfrak{m} \to B$ est fidèlement plat, il existe $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$ au-dessus de $\mathfrak{p}$. Par hypothèse, $A_\mathfrak{m} \to B$ est régulier. Les morphismes réguliers étant stables par localisation, $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{q}$ est régulier. On regarde alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{A_\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\hat{f}} & \widehat{B_\mathfrak{q}} \\ \alpha \uparrow & & \uparrow \beta \\ A_\mathfrak{p} & \xrightarrow{f} & B_\mathfrak{q} \end{array} .$$

Supposons que β soit régulier. Alors, $\hat{f} \circ \alpha$ est régulier comme composé de deux morphismes réguliers. Comme $\hat{f}$ est fidèlement plat (comme morphisme local complété du morphisme plat f), on déduit que α est régulier (exercice ou [ÉGA IV_2 6.6.1]) ce qu'on voulait. On est donc ramené à β, donc au cas complet. La régularité de β résulte alors de

5.3.2. Théorème. — *Soit B un anneau local noethérien complet B. Alors, les fibres formelles de B en $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$ sont géométriquement régulières.*

Ce théorème est le noyau dur de la théorie. On se ramène (2.4) à étudier les fibres formelles génériques. On montre donc dans un premier temps ([ÉGA 0_{IV} 22.3.3]) que si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A local noethérien complet intègre, la fibre formelle générique $\widehat{A_\mathfrak{p}} \otimes_{A_\mathfrak{p}} \operatorname{Frac}(A_\mathfrak{p})$ de $A_\mathfrak{p}$ est formellement lisse sur $\operatorname{Frac}(A_\mathfrak{p}) = \operatorname{Frac}(A)$ en tout point. Dans un second temps, on montre ([ÉGA 0_{IV} 22.5.8]) qu'une algèbre locale noethérienne sur un corps est formellement lisse (xii) si et seulement si elle est géométriquement régulière (xiii). □

Une fois prouvée la permanence par localisation, on peut montrer :

5.3.3. Théorème. — *Soit B une A-algèbre de type fini. Si A vérifie 2.a) (resp. 2.b) ou 2.c)), alors B vérifie 2.a) (resp. 2.b) ou 2.c)).*

La preuve se fait par récurrence sur le nombre de générateurs de B. Grâce à l'invariance par localisation, on se ramène aisément à l'étude des fibres formelles de B en un idéal maximal dans le cas où B engendré par *un* élément et A est complet. La preuve n'est pas facile, mais beaucoup plus simple que celles de ([ÉGA 0_{IV} 22.3.3 et 0.22.5.8]).

5.4. Condition 3).— De même que pour les conditions de type 2), la stabilité par localisation et extension finie résulte comme plus haut ([ÉGA IV$_2$ 7.1.8]) du cas complet, la platitude du morphisme de localisation permettant de descendre du complété à l'anneau — ce n'est pas immédiat malgré tout —. Le cas complet est facile comme on a vu (2.6).

5.5. Application au cas local. — Dans le cas local, la condition d'ouverture du lieu régulier découle de 2.a). Précisons.

5.5.1. Proposition. — (i) *Le lieu régulier d'un anneau local noethérien vérifiant 2.a) est ouvert.*

(ii) *En particulier, un anneau local noethérien est quasi-excellent (resp. excellent) si et seulement s'il vérifie 2.a) (resp. s'il vérifie 2.a) et 3)).*

Démonstration. — Soit $f : X \to Y$ un morphisme fidèlement plat de schémas noethériens à fibres régulières (resp. normales ou réduites). Alors, $\mathscr{O}_x$ est régulier (resp. normal ou réduit) si et seulement si $\mathscr{O}_{f(x)}$ l'est ([ÉGA IV$_2$ 6.4.2, 6.5.1]). Notons $U_R(X)$ l'ensemble des $x \in X$ tel que $R(\mathscr{O}_x)$ est régulier (resp. normal ou réduit). Autrement dit, on a $f^{-1}(U_R(Y)) = U_R(X)$. Or le lieu régulier ou normal d'un anneau complet intègre est ouvert (4.1). De plus, le morphisme de complétion d'un anneau local noethérien A est régulier si et seulement si A vérifie 2.a) d'après (5.3.2). Il suit que 2.a) entraîne 1.a) (resp. 2.b) entraîne 1.b)) dans le cas local. □

(xii) Rappelons qu'une k-algèbre locale B (muni de la topologie adique) est formellement lisse sur k si tout k-morphisme continu d'algèbre $B \to C/I$ avec $I^2 = 0$ se relève continûment à la C-algèbre discrète C.

(xiii) En fait, on n'a visiblement besoin que du sens formellement lisse entraîne géométriquement régulier, qui est le plus facile. Notons que la preuve de l'équivalence a été considérablement simplifiée par Faltings ([Faltings, 1978] ou pour le lecteur non germaniste [Matsumura, 1989, 28.7]).

6. Comparaison avec ÉGA IV : le cas des anneaux universellement japonais

Rappelons la définition usuelle des anneaux universellement japonais ([ÉGA 0_{iv} 23.1.1]).

6.1. Définition. — X est dit

(i) **japonais** s'il est intègre et si la clôture intégrale de A dans toute extension finie[(xiv)] de son corps des fractions est finie sur A[(xv)] ;

(ii) **universellement japonais** si tout anneau intègre qui est extension de type fini de A est japonais[(xvi)].

La définition d'anneau japonais n'est que technique en ce qu'elle ne sert qu'à définir la seule notion véritablement utile (et vérifiable à vrai dire) : celle d'anneau universellement japonais. Cette définition est compatible avec 2.10. Expliquons pourquoi. D'après Nagata, X est universellement japonais au sens de 6.1 si et seulement si X vérifie 1.b) et si tous les quotients intègres des localisés $\mathscr{O}_{X,x}$ en les points fermés $x \in X$ sont japonais ([ÉGA IV_2 7.7.2]). Or, le théorème de Zariski-Nagata ([ÉGA IV_2 7.6.4]) assure que les quotients intègres de $\mathscr{O}_{X,x}$ sont japonais si et seulement si les fibres formelles de $\mathscr{O}_{X,x}$ sont géométriquement réduites[(xvii)]. D'où l'équivalence entre les deux définitions des anneaux universellement japonais.

Si on renforce la condition 2.c) en 2.b) (fibres formelles géométriquement normales), le passage à la clôture intégrale commute à la complétion. Précisément, on a ([ÉGA IV_2 7.6.1 et 7.6.3])

6.2. Proposition. — *Supposons que A local noethérien vérifie 2.b) et soit réduit. Alors, la clôture intégrale A' de A dans son anneau total des fractions est finie sur A et son complété est isomorphe à la clôture intégrale de $\widehat{A}$[(xviii)] dans son anneau total des fractions.*

On déduit l'important critère d'intégrité du complété.

6.3. Corollaire. — *Soit A local noethérien.*

(i) *Supposons A intègre et vérifiant 2.b). Alors, $\widehat{A}$ est intègre si et seulement si A est unibranche (*i.e. *A' local).*

(xiv) On peut se contenter des extensions finies radicielles si l'on veut : exercice ou [ÉGA IV_1 23.1.2].

(xv) Comme module ou comme algèbre : c'est la même chose car la clôture intégrale est entière sur A par construction.

(xvi) Ou, ce qui est équivalent ([ÉGA IV_2 7.7.2]), si tout quotient intègre est japonais.

(xvii) Ou, de façon équivalente, que le complété de toute $\mathscr{O}_{X,x}$-algèbre finie et réduite est réduit. Comme d'habitude, la preuve se fait par réduction au cas complet, et même régulier complet grâce au théorème de structure de Cohen. Le caractère japonais de tels anneaux est garanti par le théorème de Nagata ([ÉGA 0_{IV} 23.1.5]).

(xviii) Qui est réduit puisque A est japonais (cf. note xvii).

(ii) *Supposons A hensélien. Alors A est excellent si et seulement s'il vérifie 2.a). Si A est de plus intègre, il en est de même de son complété.*

Démonstration. — Prouvons (i). Comme A est unibranche, la clôture intégrale A' de A est locale : il en est de même de son complété $\widehat{A'}$. D'après (6.2), on a $\widehat{A'} = (\widehat{A})'$ et donc est normal. Or, un anneau normal et local est intègre. Comme $\widehat{A'}$ contient $\widehat{A}$, le résultat suit.

Prouvons (ii). D'après (5.5.1), on doit seulement se convaincre qu'un anneau local hensélien vérifiant 2.a) vérifie aussi 3), *i.e.* est formellement caténaire. On peut supposer A intègre et on doit prouver que $\widehat{A}$ est équidimensionnel. Mais comme A est hensélien intègre, il est unibranche [ÉGA IV$_4$ 18.8.16], donc $\widehat{A}$ est intègre d'après le premier point, ce qui assure l'équidimensionalité. □

7. Comparaison avec ÉGA IV : le cas des anneaux excellents

La définition des anneaux noethériens excellents de Grothendieck est *a priori* différente de celle donnée ici. Notamment, elle fait intervenir, un peu bizarrement, l'*universelle caténarité* en lieu et place de la *caténarité formelle.* Précisément, elle fait intervenir trois propriétés. Dans cette partie A désigne un anneau noethérien et $X = \mathrm{Spec}(A)$ le schéma affine correspondant.

1ÉGA) : Pour tout quotient intègre B de A et toute extension finie radicielle K' du corps des fractions K de B, il existe une sous-B-algèbre finie B' de K' contenant B, de corps des fractions K' telle que le lieu régulier de $\mathrm{Spec}(B')$ soit un ouvert dense.

2ÉGA) : Les fibres formelles de X en tout point (fermé ou non) sont géométriquement régulières.

3ÉGA) : A est universellement caténaire.

Les anneaux excellents au sens des ÉGA sont les anneaux noethériens vérifiant les trois propriétés précédentes ([ÉGA IV$_2$ 7.8.2]).

Notons tout de suite, ce qui est élémentaire, que l'universelle caténarité de A équivaut à celle des anneaux locaux de $\mathscr{O}_{X,x}$ en tous ses points fermés — ou tous ses points si on préfère — ([ÉGA IV$_2$ 5.6.3]).

Pour que la définition des anneaux excellents de Grothendieck ([ÉGA IV$_2$ 7.8.2]) soit la même que (2.10), on doit prouver la proposition suivante.

7.1. Proposition. — *Pour tout anneau noethérien et $i = 1, 2, 3$, les propriétés i) et i*ÉGA) *sont équivalentes. En particulier, les notions de quasi-excellence et d'excellence de la première partie coïncident avec celles des ÉGA.*

Démonstration. — La condition 1ÉGA) équivaut à 1) d'après [ÉGA IV$_2$ 6.12.4] (seule la partie 1ÉGA) entraîne 1) est délicate même si elle n'utilise pas le critère de régularité de Nagata mais seulement de l'algèbre commutative standard — essentiellement le critère de régularité par fibres et la non dégénérescence de la trace des extensions finies séparables de corps).

Pour l'équivalence de 2) et 2ÉGA), il faut se convaincre que la régularité géométrique des fibres formelles en tout point fermé entraîne la régularité géométrique des fibres formelles en tout point : c'est un cas particulier des propriétés de permanence (5).

Ceci prouve la compatibilité des définitions de la quasi-excellence.

Si X vérifie 3), tous ses anneaux locaux sont formellement caténaires (permanence par localisation, cf. la section 5) et donc sont caténaires (2.7). Comme tout schéma (affine) de type fini sur X vérifie 3) (permanence par extension de type finie, cf. la section 5), on déduit que X est universellement caténaire et donc X vérifie 3ÉGA).

La réciproque est due à Ratliff :

***7.1.1. Proposition* (Ratliff).** — *Un anneau noethérien universellement caténaire est formellement caténaire.*

Précisément, Ratliff prouve ([Ratliff, 1971, 3.12]) que si A est caténaire, $A_{\mathfrak{p}}$ est formellement caténaire dès que $\mathfrak{p}$ n'est pas maximal[xix]. Pour montrer la proposition, on peut donc supposer $\mathfrak{p}$ maximal et A local intègre. Alors, $\mathfrak{p}[X]$ est premier non maximal dans $A[X]$ de sorte que le complété $\mathfrak{p}[X]$-adique $\widehat{A[X]_{\mathfrak{p}[X]}}$ est formellement équidimensionnel. Comme $\widehat{A} \to \widehat{A[X]_{\mathfrak{p}[X]}}$ est local et plat, l'argument de platitude ([ÉGA IV$_2$ 7.1.3]) utilisé plus haut assure que $\widehat{A}$ est équidimensionnel. □

8. Hensélisation et anneaux excellents

Rappelons qu'un morphisme d'anneaux noethériens $A \to B$ est dit **absolument plat** s'il est réduit à fibres discrètes et si les extension résiduelles sont algébriques et séparables. Ou, de façon équivalente, s'il est plat ainsi que le morphisme diagonal $B \otimes_A B \to B$ (cf. [Ferrand, 1972, prop. 4.1] et [Olivier, 1971, 3.1]). Lorsque B est (localement) de type fini sur A, ceci équivaut au fait que B soit étale sur A. En particulier, les extensions résiduelles sont séparables de sorte qu'un tel morphisme est en fait régulier. Par exemple, tout morphisme ind-étale est absolument plat. On a alors le résultat suivant ([Greco, 1976]).

[xix] Dans l'étrange terminologie de l'auteur, c'est la condition depth($\mathfrak{p}$) > 0, ce qui signifie donc que la *dimension* de $A/\mathfrak{p}$ est > 0.

8.1. Théorème. — *Soit $f : A \to B$ un morphisme absolument plat d'anneaux noethériens. Alors*

(i) *Si A est vérifie* 2.a) *(resp.* 2.b) *ou* 2.c)*), B un vérifie* 2.a) *(resp.* 2.b) *ou* 2.c)*)*(xx).
(ii) *Si A est universellement-japonais, B est universellement japonais.*
(iii) *Si A est quasi-excellent, B est quasi-excellent.*
(iv) *Si A est excellent, B est excellent.*
(v) *Si f est fidèlement plat, la réciproque de* i), ii) *et* iii) *est vraie.*
(vi) *Si f est fidèlement plat et B est localement intègre, la réciproque de* iv) *est vraie.*

Comme les morphismes d'hensélisation et de stricte hensélisation sont absolument plats ([ÉGA IV$_4$ 18.6.9 et 18.8.12]) et fidèlement plats (ils sont locaux), on trouve, en particulier, que la quasi-excellence et l'excellence sont stables par hensélisation et hensélisation stricte et que, le caractère quasi-excellent ou universellement japonais d'un anneau local se teste sur l'hensélisé ou l'hensélisé strict. Dans le cas de l'hensélisé, ces résultats étaient connus de Grothendieck ([ÉGA IV$_4$ 18.7]), notamment 18.7.6).

En revanche, on ne peut espérer une propriété de descente de l'excellence comme en vi) sans condition d'intégrité locale (cf. 11).

9. Complétion formelle et anneaux excellents

Soit I un idéal d'un anneau noethérien A contenu dans son radical de Jacobson et $\widetilde{A}$ sa complétion I-adique. On peut se demander si les propriétés d'excellence passent au complété. La réponse est oui en général. Précisément, on a :

9.1. Proposition. — *Soit I un idéal d'un anneau noethérien A contenu dans son radical de Jacobson et $\widetilde{A}$ sa complétion I-adique.*

(i) *Si A est (semi)-local quasi-excellent (resp. excellent), il en est de même de $\widetilde{A}$;*
(ii) *Si A est une $\mathbf{Q}$-algèbre excellente, il en est de même de $\widetilde{A}$.*

La permanence de la quasi-excellence dans le cas (semi)-local, *i.e.* de la régularité géométrique des fibres formelles, est due à Rotthaus ([Rotthaus, 1977]), tandis que celle de l'universelle caténarité est due à Seydi(xxi) (le théorème 1.12 de [Seydi, 1970] prouve qu'un anneau de série-formelles $A[[t_1, \dots, t_n]]$ est universellement caténaire dès que A l'est ; il suffit alors de considérer des générateurs $i_1, \dots, i_n$ de I définissant une surjection $A[[t_1, \dots, t_n]] \twoheadrightarrow \widetilde{A}$). Pour (ii), reste à étudier l'ouverture du lieu

(xx) Ou plus généralement, si A est un $\mathbf{P}$-anneau au sens de Grothendieck ([ÉGA IV$_2$ 7.3]), B est un $\mathbf{P}$-anneau

(xxi) Comme me l'a expliqué Christel Rotthaus (communication privée), si A, B sont locaux tels que $A \subset B \subset \widehat{A}$ et $\widehat{B} = \widehat{A}$, alors l'universelle caténarité de A entraîne celle de B.

régulier dans le. C'est ce qui est fait dans [Brodmann & Rotthaus, 1980], en utilisant le théorème de désingularisation d'Hironaka de façon cruciale. Les techniques de [Brodmann & Rotthaus, 1980] ont d'ailleurs permis de montrer que si le théorème de désingularisation était vrai dans le cas local excellent, toute complétion I-adique d'anneau excellent comme plus haut serait excellente ([Nishimura & Nishimura, 1987]).

En fait, le résultat est général. Plus précisément, Gabber ([Gabber, 2007]) peut remplacer le théorème d'Hironaka par son théorème d'uniformisation (VII-1.1) dans les arguments de [Nishimura & Nishimura, 1987] pour prouver le résultat suivant

***9.2. Théorème* (Gabber).** — *Soit A un anneau noethérien I-adiquement complet. Alors, si A/I est quasi-excellent, A est quasi-excellent.*

On ne peut remplacer quasi-excellent par excellent dans le théorème précédent. En effet, Greco ([Greco, 1982]) a construit un idéal I d'un anneau A intègre de dimension 3, noethérien semi-local I-adiquement complet et séparé qui est quasi-excellent non excellent alors que A/I est excellent. On peut même supposer que A est une $\mathbf{Q}$-algèbre. La construction se fait par pincements d'idéaux maximaux de hauteurs différentes (cf. 11.1). Malgré tout, comme on vient de le voir, la caténarité formelle passe aux complétions partielles ([Seydi, 1970]) de sorte que le complété I-adique d'un anneau excellent A est excellent dès lors que I est contenu dans le radical de Jacobson de A.

10. Approximation d'Artin et anneaux excellents

Rappelons la définition suivante (cf. [Artin, 1969]).

***10.1. Définition* (M. Artin).** — Un anneau local noethérien $(A, \mathfrak{m})$ a la **propriété d'approximation** (AP) si pour toute variété affine X de type fini sur A, l'ensemble $X(A)$ est dense dans $X(\widehat{A})$.

Bien entendu, il revient au même de dire que pour tout X comme plus haut, on a

$$X(\widehat{A}) \neq \varnothing \Rightarrow X(A) \neq \varnothing.$$

Si A vérifie AP, A est certainement hensélien. Mais l'exemple 11.4 prouve qu'il ne suffit pas que A soit hensélien pour qu'il possède la propriété d'approximation. En fait, Rotthaus a observé que l'excellence était une condition nécessaire à l'approximation d'Artin :

***10.2. Lemme* ([Rotthaus, 1990]).** — *Un anneau local noethérien vérifiant AP est hensélien et excellent.*

Soit k un corps de caractéristique nulle muni d'une valuation non triviale à valeurs réelles. Artin a prouvé ([Artin, 1968]) que les anneaux de séries convergentes à coefficients dans k (pas nécessairement complets) ont la propriété d'approximation. Ils sont donc henséliens et excellents [(xxii)].

La situation est maintenant complètement clarifiée grâce aux travaux de Popescu culminant avec le résultat suivant ([Swan, 1998]) :

***10.3. Théorème* (Popescu).** — (i) *Soit $A \to B$ un morphisme régulier d'anneaux noethériens. Alors, B est limite inductive filtrante de A-algèbres lisses.*

(ii) *Tout anneau local noethérien hensélien et excellent satisfait la propriété d'approximation* AP [(xxiii)].

Le fait que i) entraîne ii) est un simple exercice. En effet, si A est quasi-excellent, le morphisme de complétion $A \to \widehat{A}$ est régulier et donc on peut écrire $\widehat{A} = \operatorname{colim} L$ où L est lisse sur A. Soit $X = \operatorname{Spec}(B)$ avec B de type fini et $\hat{a} \in X(\widehat{A})$ d'image $\hat{a}(0) \in X(k)$ où k corps résiduel de A. Il existe donc L lisse sur A tel que $\hat{a}$ provienne de $l \in X(L)$. Comme A est hensélien, il existe $a \in X(A)$ (tel que $a(0) = \hat{a}(0)$) [(xxiv)].

11. Exemples de méchants anneaux noethériens

Soit A un anneau noethérien et $X = \operatorname{Spec}(A)$ le schéma affine correspondant. Il ressortira de cet inventaire que les propriétés désagréables des anneaux du point de vue de l'excellence n'ont en général pas seulement à voir avec la caractéristique > 0 mais peuvent aussi se produire pour des $\mathbf{Q}$-algèbres.

11.1. Caténarité formelle : condition 3). — Regardons d'abord de mauvais anneaux du point de vue de la caténarité formelle.

[(xxii)] Dans le même ordre d'idées, l'anneau $k\{x_1, \dots, x_n\}$ des séries formelles restreintes (séries dont la suite des coefficients tendent vers 0) à coefficients dans un corps valué complet non archimédien k est excellent dès que k est de caractéristique nulle ou que k est de degré fini sur $k^p, p = \operatorname{car}(k)$ ([Greco & Valabrega, 1974]). Le cas général a été obtenu par Kiehl ([Kiehl, 1969] et aussi [Conrad, 1999] pour une preuve et des développements). Ceci répond, partiellement, à une question de Grothendieck ([ÉGA IV_2 7.4.8 B)]). En revanche, si k est valué non archimédien non complet de caractéristique positive tel que le morphisme de complétion $k \to \widehat{k}$ n'est pas séparable, Gabber sait prouver que $k\{x_1\}$ n'est pas excellent.

[(xxiii)] Voir [Spivakovsky, 1999, th. 11.3] pour un énoncé un peu plus général.

[(xxiv)] L'argument n'utilise que la régularité géométrique des fibres — et le caractère hensélien — mais pas la caténarité formelle. Ce n'est pas paradoxal, car un anneau local hensélien est excellent si et seulement si ses fibres formelles sont géométriquement régulières (5.5.1).

11.1.1. La caténarité n'entraîne pas la caténarité formelle.— Dans [ÉGA IV_2 5.6.11], Grothendieck construit un exemple d'anneau local noethérien de dimension 2 intègre, caténaire mais non universellement caténaire, donc non formellement caténaire d'après 7.1.1 (*i.e.* ne vérifiant pas 3)).

Expliquons la construction qui consiste à pincer une surface lisse sur un corps k, de caractéristique nulle si l'on veut, le long de deux points de hauteurs différentes ayant des corps résiduels isomorphes à k.

On part d'un corps k extension transcendante pure de degré infini sur son corps premier par exemple, que l'on peut même supposer être $\mathbf{Q}$. Soit S une surface lisse munie d'un morphisme projectif sur $T = \mathrm{Spec}(k[\tau])$ et $t \in S(T)$. On suppose qu'il existe un point $s \in S(k)$ de la fibre S_0 de $S \to T$ au-dessus de $0 \in T$ qui n'est pas dans l'image de t. Par exemple, on peut prendre $S = \mathrm{Spec}(k[\sigma, \tau])$ avec t la section d'image $\sigma = 0$ et $s = (1, 0)$. Les corps $k(s) = k$ et $k(t) = \mathrm{Frac}(k[\tau])$ sont des extensions transcendantes pures de $\mathbf{Q}$ de même degré (infini) de sorte qu'on peut choisir un isomorphisme de corps $k(s) \simeq k(t)$. Ceci permet de définir le sous-anneau $\mathscr{O}_\Sigma$ de $\mathscr{O}_S$ des fonctions qui coïncident en s et t. On dispose donc d'un morphisme $\pi : S \to \Sigma$ qui envoie s, t sur $\sigma \in \Sigma$. Posons $A = \mathscr{O}_{\Sigma,\sigma}$ et soit B l'anneau de coordonnées de $S \times_\Sigma \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\Sigma,\sigma})$. Par construction, $\dim(B_s) = 2$ et $\dim(B_t) = 1$. Alors, A est noethérien, et B est la normalisation de A et est fini sur A. Comme A est de dimension 2 et intègre il est évidemment caténaire. Si A était universellement caténaire, la formule de dimension (voir note iv) entraînerait $\dim(A) = \dim B_s = \dim B_t$, une contradiction.

On peut même trouver pour tout $n \geq 2$ des anneaux locaux noethériens intègres de dimension n vérifiant 2.a), caténaires non universellement caténaires donc ne vérifiant pas 3) ([Heinzer et al., 2004]).

11.1.2. La caténarité formelle ne se teste pas sur l'hensélisé.— Par des techniques de pincements analogues de surfaces sur k, donc de caractéristique nulle si on veut, comme plus haut, Grothendieck construit en effet un exemple d'anneau local non universellement caténaire (donc non formellement caténaire) dont l'hensélisé est excellent ([ÉGA IV_4 18.7.7]). Quitte à changer de base par la clôture séparable, on s'aperçoit que la caténarité formelle ne se teste pas plus sur l'hensélisé strict, contrairement à la quasi-excellence (8.1).

11.1.3. La caténarité formelle n'entraîne certainement pas 2.a) (ni même 2.c)).— Par exemple, un anneau de valuation discrète A non excellent (cf. la partie 11.5) a une fibre formelle générique non géométriquement régulière (en effet, il est formellement caténaire (2.8) et 2.a) entraîne 1.a) dans le cas local (5.5.1)). Or, cette fibre générique formelle est artinienne dans ce cas (elle ne contient pas l'idéal maximal de $\widehat{A}$) et donc la régularité géométrique équivaut ici à la géométrique réduction.

11.1.4. Il existe des anneaux intègres normaux *non formellement caténaires.*— Ogoma ([Ogoma, 1980]) a construit une **Q**-algèbre locale A intègre *normale* de dimension 3 dont le complété à une composante de dimension 2 et une composante de dimension 3 et donc n'est pas équidimensionnel. Pire, cet anneau n'est même pas caténaire : il possède une infinité de chaînes saturées d'idéaux premiers de longueur 2 ou 3.

11.2. Quasi-excellence : conditions d'ouverture 1.a) et 1.b). — On s'intéresse ici à des anneaux ayant un lieu régulier ou normal non ouvert.

Comme on le verra plus loin (XIX-2.6), Gabber a construit un exemple de schéma, qu'on peut même supposer être un **Q**-schéma, intègre de dimension 1, dont le lieu régulier (ou normal, c'est la même chose ici) contient une infinité de points et en particulier n'est pas ouvert. La construction assure que les fibres formelles sont géométriquement régulières. Comme on est en dimension 1, normalité et régularité coïncident de sorte qu'on a un exemple vérifiant 2.a) et 3) mais pas 1.b).

Dans [Rotthaus, 1979], Rotthaus construit une **Q**-algèbre noethérienne locale intègre de dimension 3 qui est formellement caténaire, universellement japonaise mais dont le lieu régulier n'est pas ouvert.

11.3. Quasi-excellence. Fibres formelles : conditions 2a), 2b) et 2c). — On s'intéresse ici à des anneaux ayant des fibres formelles non géométriquement régulières voire pire.

— Rotthaus construit une **Q**-algèbre locale A noethérienne de dimension 3 régulière (donc formellement caténaire), universellement japonaise mais pas excellente ([Rotthaus, 1979]). Précisément, la fibre formelle au-dessus d'un point de hauteur 1 n'est pas régulière. Ainsi, elle vérifie 2.c), 3) car A régulier mais pas 2.a).

Dans l'exemple d'Ogoma précédent, la fibre formelle générique est connexe non intègre (elle a une composante de dimension 1 et une de dimension 2 qui se coupent), donc non normale. On a donc un exemple de **Q**-algèbre locale (de dimension 3) noethérienne (intègre et normale) ne vérifiant pas 2.b).

On peut descendre d'une dimension : Nagata construit ([Nagata, 1962], ex. 7 de l'appendice A1) une **Q**-algèbre locale B qui est intègre normale, formellement caténaire et de dimension 2 mais dont le complété n'est pas intègre[(xxv)]. D'après 6.2, ceci prouve que B ne vérifie pas 2.b) (mais vérifie 3)).

(xxv) La construction est la suivante : soient x, y algébriquement indépendants sur $\mathbf{Q}$ et $w = \sum_{i>0} a_i x^i \in \mathbf{Q}[[x]]$ transcendant sur $K(x)$. On pose $z_1 = (y+w)^2$ et $z_{i+1} = (z - (y + \sum_{j<i} a_j x^j)^2)/x^i$. Soit A le localisé de $\mathbf{Q}[x, y, z_i, i \geq 1]$ en $(x, y, z_i, i \geq 1)$. Alors, $B = A[X]/(X^2 - z_1)$ est l'exemple cherché. On vérifie facilement que la complétion de A est $\mathbf{Q}[[x, y]]$ de sorte que

— En caractéristique > 0, Rotthaus construit également ([Rotthaus, 1979]) une algèbre locale noethérienne de dimension 2 régulière universellement japonaise mais pas excellente. Dans ce denier cas, comme les fibres formelles sont de dimension < 2, elles ne sont pas non plus géométriquement normales. Ainsi, elle vérifie 2.c), 3) mais pas 2.b).

— En caractéristique nulle, Ferrand et Raynaud ont construit ([Ferrand & Raynaud, 1970], prop. 3.3 et 3.5) une $\mathbf{C}$-algèbre locale noethérienne A intègre de dimension 2 telle que

• le normalisé A' de A est l'anneau des séries convergentes noté $\mathbf{C}\{x, y\}$ (ne pas confondre avec l'hensélisé de $\mathbf{C}[x, y]$) et donc est excellent.

• A n'est pas japonais (en fait, A' n'est pas fini sur A).

• $\widehat{A}$ a des composantes immergées (de sorte que — platitude — la fibre formelle générique a des composantes immergées et donc ne vérifie pas 2.c)).

• Le lieu normal de $A[[T]]$ n'est pas ouvert. D'après [ÉGA IV_2 6.13.5] son lieu régulier n'est donc pas ouvert non plus.

• L'anneau A est formellement caténaire (le spectre de son complété est irréductible). Il en est donc de même de $A[[T]]$ ([Seydi, 1970]).

— Dans [Nagata, 1962], ex. 5 de l'appendice A1, Nagata construit même un anneau local noethérien intègre de dimension 3 (de caractéristique > 0) dont la clôture intégrale n'est même pas noethérienne ; en particulier, cet anneau n'est pas japonais[(xxvi)].

— Pire, à partir d'anneaux construits par Nagata, Seydi construit ([Seydi, 1972]) un anneau noethérien intègre normal A de dimension 3 dont le corps des fractions est de caractéristique nulle et dont le complété n'est pas réduit. En particulier, il est japonais mais pas universellement japonais. Ogoma construit ([Ogoma, 1980]) une $\mathbf{Q}$-algèbre noethérienne normale, donc japonaise, qui n'est ni universellement japonaise ni caténaire.

— Les fibres formelles peuvent être épouvantables, même en dimension 1 : Ferrand et Raynaud construisent un $\mathbf{C}$-schéma local intègre de dimension 1 dont la fibre formelle générique est un schéma artinien qui n'est même pas Gorenstein — donc certainement non réduit — ([Ferrand & Raynaud, 1970], prop. 3.1) : X ne vérifie

$\widehat{B} = \mathbf{Q}[[x, y]][X]/(X^2 - (y + w)^2)$ n'est pas intègre. Comme d'habitude dans ces constructions, c'est le caractère noethérien de A qui pose problème. Une fois ceci acquis, A est régulier de dimension 2 et B normal puisque que Cohen-Macaulay de dimension 2 singulier uniquement à l'origine. Notons que B est formellement caténaire comme quotient d'un régulier.

(xxvi) La construction est du même type que celle d'un anneau de valuation discrète décrite dans la note xxvii dont on reprend les notations. On considère cette fois-ci l'anneau $B = k^p[[X, Y, Z]][k]$ et $d = Y \sum_{i>0} X_i X^i + Z \sum_{i>0} X_{2i+1} X^i$. L'anneau $B[d]$ convient.

pas 2.c). En particulier, X n'est pas universellement japonais (et donc pas quasi-excellent). Bien entendu, X vérifie 1.a) et 3) pour des raisons de dimension.

— Les exemples d'anneaux de valuation discrète non excellents (donc de caractéristique positive) donnent des exemples d'anneaux ne vérifiant pas 2.c) (2.a) et 2.c) sont équivalents en dimension ≤ 1) mais vérifiant 1.a) et 3).

11.4. Remarque. — Nagata a construit ([Nagata, 1962, E3.3]) un anneau de valuation discrète dont la fibre formelle générique est une extension radicielle non triviale de son corps des fractions, donc non excellent[(xxvii)].

On va voir maintenant que de tels anneaux se rencontrent très facilement.

11.5. Méthode systématique de construction d'anneaux non quasi-excellents. — En fait, on peut construire (Orgogozo) de façon systématique de très nombreux anneaux de valuation discrète non quasi-excellents. Précisons[(xxviii)].

11.6. Proposition. — *Soit $k((t))$ le corps des séries de Laurent à coefficients dans un corps k de caractéristique $p > 0$ muni de sa valuation t-adique et L/k une sous-extension de type fini de $k((t))/k$ de degré de transcendance > 1 sur k. Alors, le sous-anneau A de L des éléments de valuation ≥ 0 est un anneau de valuation discrète non excellent.*

Démonstration. — Soit $\bar{L}$ un corps de caractéristique > 0. Le p-rang est la dimension, finie ou non, de $\Omega_{\bar{L}}$, le module des différentielles absolues. C'est aussi $\log_p([\bar{L} : \bar{L}^p])$ où $[\bar{L} : \bar{L}^p]$ est la dimension de $\bar{L}$ sur $\bar{L}^p$ ([ÉGA IV_1 21.3.5]). La remarque clef est que le p-rang croit par extension de corps *séparable* $\bar{K}/\bar{L}$, finie ou non, puisqu'on a dans ce cas un plongement $\bar{K} \otimes_{\bar{L}} \Omega_{\bar{L}} \hookrightarrow \Omega_{\bar{K}}$ ([ÉGA IV_2 20.6.3])

$$[\bar{L} : \bar{L}^p] \leq [\bar{K} : \bar{K}^p]. \tag{11.6.1}$$

(xxvii) Voici la construction : soit k le corps des fractions de $\mathbf{F}_p[X_n, n > 0]$ et K celui de $\widehat{A} = k[[Y]]$. Soit L le sous-corps de $K = k((Y))$ corps des fractions de $A = k^p[[Y]][k]$. Le complété de A est $\widehat{A}$. On montre, et c'est le point délicat, que A est noethérien. L'outil est le critère de Cohen : un anneau semi-local est noethérien si et seulement si les idéaux maximaux sont de type fini et les idéaux de type fini fermés ([Nagata, 1962, 31.8]). Son complété étant régulier, il est lui même régulier donc de valuation discrète (dimension). Soit L le corps des fractions de A. On vérifie facilement que $c = \sum_{n>0} X_n Y^n$, n'est pas dans L. Choisissons une p-base $\{c_i\}$ de K sur L contenant c (ce qui est possible car $c \notin L^p$, cf. [ÉGA IV_1 21.4.3]). Soit K_0 le corps engendré sur L par les c_i distincts de c. L'extension K/K_0 est radicielle de degré p par construction. L'anneau $A \cap K_0$ est un anneau de valuation discrète de complété $k[[Y]]$ de sorte que la fibre formelle générique n'est pas géométriquement réduite.

(xxviii) Cette construction généralise en fait, de façon indépendante, un exemple obtenu par Rotthaus dans [Rotthaus, 1997]

Par ailleurs, si $\bar{L}$ est de *type fini* sur un corps k de p-rang fini, on a ([Bourbaki, **A**, V, § 16, n° 6, cor. 3])

$$[\bar{L} : \bar{L}^p] = p^{\mathrm{deg.tr.}_k(\bar{L})}[k : k^p]. \tag{11.6.2}$$

Plaçons nous dans la situation du lemme. L'anneau A est de valuation discrète par construction et son corps des fractions est L. L'hensélisé A^{h} est local régulier de dimension 1 donc intègre et son corps des fractions $K = \mathrm{Frac}(A^{\mathrm{h}})$ contient $L = \mathrm{Frac}(A)$. Le complété $\widehat{A^{\mathrm{h}}}$ est un anneau de séries formelles $\widehat{K} = k[[\varpi]], \varpi$ uniformisante de A^{h} (comme complété d'une k-algèbre locale régulière de dimension 1) et son corps des fractions $\widehat{K}$ est la fibre générique formelle de $\mathrm{Spec}(\widehat{A^{\mathrm{h}}}) \to \mathrm{Spec}(A^{\mathrm{h}})$.

Supposons que A^{h} soit quasi-excellent (précisément vérifie 2.a) de sorte que l'extension $\widehat{K}/K$ est *séparable.*

On a donc dans ce cas

$$[K : K^p] \leq [\widehat{K} : \widehat{K}^p].$$

Comme $\widehat{K} = k((\varpi))$, on a

$$[\widehat{K} : \widehat{K}^p] = p[k : k^p].$$

On a donc (11.6.1), l'extension K/L étant séparable,

$$[K : K^p] \geq [L : L^p].$$

de sorte que, grâce à (11.6.2), on a

$$p[k : k^p] = [\widehat{K} : \widehat{K}^p] \geq [L : L^p] > p[k : k^p],$$

une contradiction. Ceci interdit à A également d'être quasi-excellent (8.1). □