Astérisque

LUC ILLUSIE

Uniformisation locale première à ℓ

Astérisque, tome 363-364 (2014), Séminaire Bourbaki, exp. nº IX, p. 161-165

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2014__363-364__161_0>

© Société mathématique de France, 2014, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

EXPOSÉ IX

UNIFORMISATION LOCALE PREMIÈRE À ℓ

Luc Illusie

1. Rappel de l'énoncé et premières réductions

Rappelons l'énoncé du théorème d'uniformisation locale première à ℓ (II-4.3.1, III-6.1) :

1.1. Théorème. — *Soient X un schéma noethérien quasi-excellent, Z un fermé rare de X et ℓ un nombre premier inversible sur X. Il existe une famille finie de morphismes $(p_i : X_i \to X)_{i\in I}$, couvrante pour la topologie des ℓ'-altérations (II-2.3) et telle que, pour tout $i \in I$:*

(i) *X_i soit régulier et intègre,*

(ii) *$p_i^{-1}(Z)$ soit le support d'un diviseur à croisements normaux strict.*

Le premier ingrédient essentiel de la démonstration de 1.1 est le résultat suivant, forme faible d'un résultat de de Jong [de Jong, 1997, 2.4] :

1.2. Théorème. — *Soient $f : X \to Y$ un morphisme propre de schémas noethériens excellents intègres, et Z un sous-schéma fermé rare de X. Soit η le point générique de Y. On suppose que X_η est lisse, géométriquement irréductible et de dimension 1, et que Z_η est étale. Il existe alors un groupe fini G, un diagramme commutatif de G-schémas*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{a} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{b} & Y \end{array} ,$$

un diviseur effectif G-équivariant D dans X', et un fermé rare G-équivariant T' de Y' possédant les propriétés suivantes :

(i) *f' est projectif;*

(ii) *G agit trivialement sur X et Y, librement sur $Y' - T'$;*

(iii) *a et b sont des altérations projectives génériquement étales, et $Y'/G \to Y$ (resp. $X'/G \to X$) induit un isomorphisme en η (resp. au point générique de X_η) ;*

(iv) *f' est une courbe nodale, lisse hors de T' ;*

(v) *D est étale sur Y', et contenu dans le lieu lisse de f' ;*

(vi) *$Z' := a^{-1}(Z)$ est contenu dans $D \cup f'^{-1}(T')$.*

Rappelons que dire que f' est une courbe nodale signifie que f' est plat, à fibres géométriques connexes de dimension 1, ayant pour seules singularités des points quadratiques ordinaires.

Il suffit en effet d'appliquer *loc. cit.* au couple (f, Z), avec le groupe G de *loc. cit.* égal à $\{1\}$. Les hypothèses faites sur X_η et Z_η assurent que (f, Z) vérifie les conditions (2.1.1) et (2.1.5) de [de Jong, 1997], et donc que le couple (a, b) vérifie (2.2.1) et (2.2.5) de *loc. cit.*, ce qui implique (iii). Le fermé T' est donné par le fermé noté D dans (*loc. cit.*, 2.5), éventuellement agrandi pour que G opère librement sur $Y' - T'$. Noter que, si Y est séparé, il en est de même de Y', et (ii) entraîne que G opère fidèlement sur X' et Y'.

1.3. — Les premières réductions de la démonstration de 1.1 sont analogues à celles de la démonstration du théorème d'uniformisation locale faible. Il suffit de prouver 1.1 pour X de dimension finie. On raisonne par récurrence sur la dimension de X. Le théorème est connu en dimension ≤ 1 (normalisation). Soit d un entier ≥ 2. Supposons le théorème établi en dimension $< d$. D'après (III-6.2), on peut supposer X local noethérien complet, et même normal. D'après V-3.1.3, quitte à faire une extension finie de X de degré générique premier à ℓ, on peut supposer qu'il existe un diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & X' \\ & & \downarrow f \\ & & Y, \end{array}$$

avec Y local noethérien régulier complet de dimension $d-1$ et f de type fini, à fibres de dimension 1, et un point fermé x' de X' et un fermé rare Z' de X' tels que $f(x')$ soit le point fermé de Y, g induise un isomorphisme de X sur le complété de X' en x', et qu'enfin $Z = g^{-1}(Z')$. Comme X' est excellent, g est régulier. Le changement de base par g préserve régularité, diviseurs à croisements normaux, et familles couvrantes pour la topologie des ℓ'-altérations (II-2.3). On peut donc remplacer X par X', donc, quitte à changer les notations, supposer X intègre de dimension d, muni d'un morphisme de type fini $f : X \to Y$, à fibres de dimension 1. Le problème étant local pour la topologie des ℓ'-altérations, donc *a fortiori* pour la topologie de Zariski, on peut supposer X affine. Compactifiant f, on se ramène à supposer f propre. Quitte à éclater dans X

un sous-schéma fermé ayant Z pour espace sous-jacent, on peut supposer que Z est un diviseur dans X. Le morphisme f n'est plus nécessairement une courbe relative, mais sa fibre générique reste de dimension 1. Soit η le point générique de Y. D'après ([ÉGA IV 4.6.6]) il existe une extension radicielle finie η' de η telle que $(X_{\eta'})_{\mathrm{red}}$ soit géométriquement réduit, et $(Z_{\eta'})_{\mathrm{red}}$ étale sur η'. Quitte à remplacer Y par son normalisé dans η', X par son normalisé dans le corps des fractions de $(X_{\eta'})_{\mathrm{red}}$, et Z par son image inverse réduite, on peut donc supposer que X_η est lisse et que Z_η est étale. Le schéma Y n'est plus nécessairement régulier, mais reste affine, normal, intègre et excellent. Considérons la factorisation de Stein $X \xrightarrow{f_1} Y_1 \xrightarrow{q} Y$ de f : q est fini surjectif, génériquement étale, f_1 est propre et surjectif, et ses fibres géométriques sont connexes. Comme $f_{1\star}\mathscr{O}_X = \mathscr{O}_{Y_1}$ et que X est intègre, Y_1 est intègre également. Quitte à remplacer Y par Y_1 (et f par f_1), on peut donc supposer que la fibre générique de f est lisse, géométriquement connexe, et que Z_η est étale. On se trouve alors dans la situation de 1.2, avec Z un diviseur, et Y affine.

1.4. — Appliquons 1.2 à la situation que nous venons d'obtenir. D'après (iii), le morphisme $X'/G \to X$ est $\mathrm{alt}_{\ell'}$ couvrant. Remplaçant X par X'/G, Z par son image inverse, et Y par Y'/G, et changeant les notations, on peut donc supposer que $X = X'/G$, $Y = Y'/G$. Noter que, comme Y est affine et b, f' projectifs, les actions de G sur X' et Y' sont admissibles, et X'/G et Y'/G sont encore intègres et excellents. Soit H un sous-groupe de ℓ-Sylow de G. Considérons la factorisation

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "f'"] & X'/H \arrow[r, "a_2"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "b_1"] & Y'/H \arrow[r, "b_2"] & Y. \end{tikzcd}$$

Comme a_2 est $\mathrm{alt}_{\ell'}$-couvrant, on peut (utilisant l'admissibilité de l'action de H) remplacer X par X'/H, Z par son image inverse dans X'/H, Y par Y'/H, et enfin G par H, de sorte qu'on peut supposer que G est un ℓ-groupe.

Appliquons l'hypothèse de récurrence au couple $(Y = Y'/G, T := T'/G)$. Il existe une famille finie $\mathrm{alt}_{\ell'}$-couvrante $(Y_i \to Y)_{i \in I}$, avec Y_i régulier connexe, et (l'espace sous-jacent à) $T_i = Y_i \times_Y T$ le support d'un diviseur à croisements normaux strict. Pour chaque $i \in I$, soient Y'_i le normalisé d'une composante irréductible de $Y' \times_Y Y_i$ et $G_i \subset G$ le groupe de décomposition de cette composante. Remplaçant Y par Y_i, Y' par Y'_i, G par G_i, et les autres données par leurs images inverses par $Y_i \to Y$, $Y'_i \to Y'$, et travaillant séparément sur chaque Y_i, on se ramène à supposer que, dans le diagramme de 1.2, on a les propriétés additionnelles suivantes :

$(*)$ $Y = Y'/G$ est affine, régulier, connexe, $T = T'/G$ est un diviseur à croisements normaux strict dans Y, $Y' - T' = Y' \times_Y (Y - T)$ est un revêtement étale galoisien de $Y - T$ de groupe G, Y' est le normalisé de Y dans $Y' - T'$, $X = X'/G$.

2. Log régularité, fin de la démonstration

Nous aurons besoin du résultat suivant, cas particulier d'un théorème de Fujiwara-Kato [Fujiwara & Kato, 1995, 3.1] :

2.1. Proposition. — *Soient Y un schéma noethérien régulier, $T \subset Y$ un diviseur à croisements normaux strict, $V = Y - T$. Munissons Y de la log structure associée au couple (Y, T) (VI-1.4). Alors :*

(i) *Le foncteur de restriction de la catégorie des revêtements Kummer étales de Y dans celle des revêtements étales de V modérément ramifiés le long de T est une équivalence de catégories.*

(ii) *Si Y' est un revêtement Kummer étale de Y, Y' est le normalisé de Y dans $Y' \times_Y V$.*

(iii) *Si V' est un revêtement étale de V, modérément ramifié le long de T, il existe une unique log structure fs sur le normalisé Y' de Y dans V' faisant de Y' un revêtement Kummer étale de Y.*

Il suffit de prouver (i) et (ii). La question est locale pour la topologie étale sur Y. On peut donc supposer Y strictement local, $Y = \operatorname{Spec} A$, de point fermé $y = \operatorname{Spec} k$, et $T = \sum_{1 \le i \le r} \operatorname{div}(t_i)$, où les t_i font partie d'un système régulier de paramètres de A. Le log schéma Y admet la carte ($\overline{M}_y = \mathbf{N}^r \to A$, $e_i \mapsto t_i$). D'après le théorème de structure locale des revêtements Kummer étales (VI-2.2), tout revêtement Kummer étale Y' de Y est somme de revêtements Kummer étale standard, de la forme $Z = Y \times_{\operatorname{Spec} \mathbf{Z}[\mathbf{N}^r]} \operatorname{Spec} \mathbf{Z}[Q]$, où $\mathbf{N}^r \to Q$ est un morphisme de Kummer tel que $nQ \subset \mathbf{N}^r$ pour un entier n premier à la caractéristique de k. On a donc $Q = \mathbf{N}^r \cap L$, pour un sous-groupe L de $\mathbf{Z}^r$ tel que $n[\mathbf{Z}^r : L] = 0$, et $Z = (\operatorname{Spec} A[x_1, \dots, x_r]/(x_1^n - t_1, \dots, x_r^n - t_r))^G$, où $G = \operatorname{Hom}(\mathbf{Z}^r/L, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est un sous-groupe de μ_n^r opérant sur $\operatorname{Spec} A[x_1, \dots, x_r]/(x_1^n - t_1, \dots, x_r^n - t_r)$ de la manière naturelle. Il en résulte que Z est le normalisé de Y dans le revêtement étale $Z \times_Y V$ de V. On en déduit (ii), et la pleine fidélité en (i), par la considération de graphes de morphismes entre revêtements Kummer étales de Y. L'essentielle surjectivité découle du lemme d'Abhyankar ([SGA 1 XIII 5.3]) donnant la structure du groupe fondamental modéré de V, qui implique que le normalisé de Y dans un revêtement étale modéré connexe de V est de la forme Z décrite précédemment.

2.2. — Partons de la situation obtenue à la fin de 1.4. D'après 2.1, compte tenu de $(*)$, il existe sur Y' une unique log structure faisant de Y' un revêtement Kummer étale de Y (muni de la log structure définie par T), galoisien de groupe G. En particulier, le couple (Y', T') est log régulier. D'après (VI-1.9), le couple $(X', f'^{-1}(T') \cup D)$ est log régulier, et pour la log structure correspondante sur X', f' est log lisse. De plus, l'image inverse Z' de Z dans X' est un diviseur contenu dans $D' = f'^{-1}(T') \cup D$.

L'action de G sur X' est modérée (G est un ℓ-groupe), mais pas nécessairement très modérée (VI-3.1). Si elle l'était, le couple $(X = X'/G, D'/G)$ serait alors log régulier (VI-3.2), et l'on pourrait terminer la démonstration de 1.1 comme dans (VII-4), à l'aide de la résolution des singularités des couples log réguliers. On se ramène à ce cas grâce au théorème de modification (VIII-1.1), dont nous rappelons l'énoncé :

2.3. Théorème. — *Soit (X, Z) un couple log régulier (VI-1.4), muni d'une action d'un groupe fini G. On suppose que X est noethérien, séparé, et que l'action de G sur X est modérée et génériquement libre. Soit T le complément du plus grand ouvert G-stable de X où G opère librement. Il existe alors une modification projective G-équivariante $f : X' \to X$ telle que, si $Z' = f^{-1}(Z \cup T)$, le couple (X', Z') soit log régulier, et l'action de G sur X' très modérée.*

2.4. — Le couple (X', D') de 2.2 vérifie les hypothèses sur (X, Z) de 2.3 : (X', D') est log régulier, X' est séparé (car projectif sur Y), l'action de G sur X' est modérée, et libre sur $X' - f'^{-1}(T')$, en particulier génériquement libre. De plus, l'action de G sur X' est admissible. Il existe donc un diagramme commutatif G-équivariant

$$\begin{tikzcd}
(X'', D'') \arrow[r] \arrow[d, "p"] & (X''/G, D''/G) \arrow[d, "q"] \\
(X', D') \arrow[r] & (X, D) = (X'/G, D'/G),
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont les projections canoniques, p est une modification projective (G-équivariante), (X'', D'') est log régulier, avec $X'' - D'' \subset p^{-1}(X' - D')$, et l'action de G sur (X'', D'') est très modérée. D'après VI-3.2, le couple $(X''/G, D''/G)$ est donc log régulier. Appliquons à ce couple le théorème de désingularisation de Kato-Nizioł ([Kato, 1994, 10.3, 10.4], [Nizioł, 2006, 5.7], [Gabber & Ramero, 2013, 9.6.32]) : il existe un morphisme log étale $e : \tilde{X} \to X''/G$, projectif, surjectif et birationnel sur les schémas sous-jacents, avec $\tilde{X}$ régulier, et un diviseur à croisements normaux strict $\tilde{D}$ tels que $\tilde{X} - \tilde{D} = e^{-1}(X''/G - D''/G)$. Alors $\tilde{Z} := (qe)^{-1}(Z)$ a pour support un diviseur contenu dans $\tilde{D}$, donc strictement à croisement normaux. Comme q est une modification, qe en est une également, et 1.1 est démontré.