

Astérisque

JULIEN GRIVAUX

PASCAL HUBERT

**Les exposants de Liapounoff du flot de Teichmüller
[d'après Eskin-Kontsevitch-Zorich]**

Astérisque, tome 361 (2014), Séminaire Bourbaki, exp. n° 1060, p. 43-75

http://www.numdam.org/item?id=AST_2014__361__43_0

© Société mathématique de France, 2014, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**LES EXPOSANTS DE LIAPOUNOFF
DU FLOT DE TEICHMÜLLER
[d'après Eskin-Kontsevich-Zorich]**

par **Julien GRIVAUX & Pascal HUBERT**

Dans ce texte, nous présentons un résultat dû à Eskin, Kontsevich et Zorich [EKZ2] concernant les exposants de Liapounoff du flot de Teichmüller.

1. INTRODUCTION

1.1. Surfaces de translation et 1-formes holomorphes

Nous allons en premier lieu fixer le cadre général (pour des textes introductifs, on renvoie le lecteur aux références suivantes : [MT], [Vi], [Yo1], [Yo2], [Zo4]). Une surface de translation compacte est la donnée d'une 1-forme holomorphe globale non nulle ω sur une surface de Riemann compacte X ⁽¹⁾. Géométriquement, une telle surface se représente comme un polygone dans le plan complexe dont on a identifié par translation des côtés parallèles et de même longueur. La 1-forme ω sur X est induite par dz , et ses zéros sont certains sommets du polygone. De plus, X est munie d'une métrique plate héritée de la métrique plate naturelle du polygone, avec des singularités coniques sur le lieu d'annulation de ω . De manière précise, un zéro d'ordre k correspond à un point conique d'angle $2(k+1)\pi$.

L'aire de X pour la métrique plate est l'aire euclidienne d'un polygone associé, et on a

$$\text{Aire}(X) = \frac{i}{2} \int_X \omega \wedge \bar{\omega}.$$

Enfin le genre g de X est déterminé par la donnée combinatoire $(k_1, \dots, k_r)$ de (X, ω) , qui est la liste des ordres de multiplicités des zéros de ω , *via* la formule

$$\sum_{i=1}^r k_i = 2g - 2.$$

1. Eskin-Kontsevich-Zorich traitent aussi le cas des formes différentielles quadratiques qui est analogue, mais nous nous limiterons aux formes holomorphes pour simplifier l'exposition.

L'exemple de base de surface de translation est le tore plat qui est évidemment une surface de translation sans singularité⁽²⁾, le polygone associé étant un parallélogramme dont les côtés opposés sont identifiés.

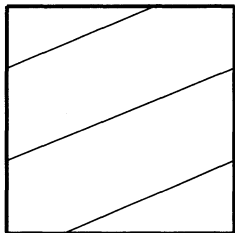


FIGURE 1. Tore plat et flot linéaire.

Pour tout angle θ , le flot linéaire de direction θ est bien défini sur X , et ses propriétés dynamiques sont d'un grand intérêt.

1.2. Espace des modules des 1-formes holomorphes

Un genre g étant fixé, l'espace des modules des 1-formes holomorphes est l'ensemble des surfaces de translation compactes (X, ω) de genre g modulo l'action naturelle des difféomorphismes. Cet espace de modules est naturellement stratifié par les données combinatoires. Pour toute donnée combinatoire $(k_1, \dots, k_r)$ nous noterons $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_r)$ la strate correspondante. On peut montrer que $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_r)$ est une orbifold complexe de dimension $2g + r - 1$ localement modelée sur le groupe de cohomologie relative $H^1(X, \Sigma, \mathbb{C})$, où Σ est le lieu d'annulation de ω .

On rappelle brièvement la construction de coordonnées locales orbifoldes sur $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_r)$. Fixons une base symplectique $(A_i, B_i)_{i=1, \dots, g}$ de $H_1(X, \mathbb{Z})$, et soient $(C_i)_{i=1, \dots, r-1}$ des chemins reliant un zéro fixé de ω à tous les autres. Les coordonnées locales sont les périodes de ω le long de ces chemins, c'est-à-dire les intégrales

$$\int_{A_1} \omega, \dots, \int_{A_g} \omega, \int_{B_1} \omega, \dots, \int_{B_g} \omega, \int_{C_1} \omega, \dots, \int_{C_{r-1}} \omega.$$

Les changements de cartes correspondent à un changement de base symplectique et sont donc linéaires, ce qui entraîne que chaque strate $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_r)$ admet une structure affine. De manière plus précise, dans les coordonnées ci-dessus, une matrice de changement de base est de la forme

$$\begin{pmatrix} U & V \\ 0 & I_{r-1} \end{pmatrix}$$

2. Pour être cohérent avec le reste de la théorie, l'origine du tore est tout de même un point marqué.

où U est dans $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ et V est dans $\mathrm{M}_{2g \times (r-1)}(\mathbb{Z})$. Une telle matrice est évidemment dans $\mathrm{SL}_{2g+r-1}(\mathbb{Z})$. Par conséquent, la mesure de Lebesgue de $\mathbb{C}^{2g+r-1}$ est bien définie globalement sur la strate $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_r)$. Le réseau entier $(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})^{2g+r-1} = H^1(X, \Sigma, \mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ est invariant par changement de cartes ; ce réseau nous fournit une normalisation *naturelle* pour la mesure de Lebesgue : on demande que son covolume soit 1.

Le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ agit de façon naturelle sur $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_r)$. Cette action correspond à l'action linéaire sur les polygones, qui est bien définie au niveau des surfaces de translation et préserve la donnée combinatoire. Dans les coordonnées des périodes introduites dans la section précédente, l'action de toute matrice M de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est diagonale :

$$\begin{aligned} M \cdot \left(\int_{A_1} \omega, \dots, \int_{A_g} \omega, \int_{B_1} \omega, \dots, \int_{B_g} \omega, \int_{C_1} \omega, \dots, \int_{C_{r-1}} \omega \right) \\ = \left(M \cdot \int_{A_1} \omega, \dots, M \cdot \int_{A_g} \omega, M \cdot \int_{B_1} \omega, \dots, M \cdot \int_{B_g} \omega, M \cdot \int_{C_1} \omega, \dots, M \cdot \int_{C_{r-1}} \omega \right). \end{aligned}$$

Cette action est $\mathbb{R}$ -linéaire dans chaque coordonnée complexe (vue comme coordonnée à valeurs dans $\mathbb{R}^2$).

L'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ permet de feuilleter les strates par les orbites, ce feuilletage sera particulièrement important dans la suite. Il est évident par la formule précédente que le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ préserve la mesure de Lebesgue de $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_r)$, ainsi que l'aire des surfaces de translation. Notons $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)$ la sous-variété de codimension réelle un formée des surfaces de translation d'aire 1 et de donnée combinatoire $(k_1, \dots, k_r)$. La mesure de Lebesgue sur $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_r)$ induit une mesure ν sur $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)$. Dans les coordonnées des périodes, la mesure d'un ensemble de $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)$ est celle du cône de sommet l'origine bordé par cet ensemble à un facteur dimensionnel près.

Un sous-groupe à un paramètre de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ joue un rôle fondamental dans toute la suite, c'est le groupe des matrices diagonales

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Le flot associé est le flot de Teichmüller, qui est le flot géodésique pour la métrique de Teichmüller. Un des premiers théorèmes importants concernant ce flot est dû indépendamment à Masur et Veech en 1982 :

THÉOREME 1 ([Ma1], [Ve1]). — *La mesure de Lebesgue ν sur $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)$ est finie. De plus, le flot géodésique de Teichmüller est ergodique sur chaque composante connexe de $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)$.*

Les composantes connexes de $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)$ ont été classifiées par Kontsevich et Zorich dans [KZ2], il y en a au plus 3. Dans le cas des différentielles quadratiques, elles ont été classifiées par Laneeau [La].

REMARQUE 2. — *Dans toute la suite, nous parlerons de strate là où il faudrait parler en toute rigueur de composante connexe de strate, ceci pour ne pas alourdir le texte. La mesure ν dépend de la composante connexe considérée : c'est son support.*

1.3. Fibré de Hodge et cocycle de Kontsevich-Zorich

Étant donnée une surface de Riemann X de genre g , rappelons la définition de la norme de Hodge sur l'espace $H^1(X, \mathbb{R})$. La décomposition de Hodge s'écrit

$$H^1(X, \mathbb{C}) = H^{1,0}(X) \oplus H^{0,1}(X)$$

où $H^{1,0}(X)$ est l'espace vectoriel de dimension g des 1-formes holomorphes sur X et $H^{0,1}(X)$ l'espace vectoriel des 1-formes anti-holomorphes. La forme d'intersection sur $H^1(X, \mathbb{C})$ donnée par

$$\iota(\omega_1, \omega_2) = \frac{i}{2} \int_X \omega_1 \wedge \bar{\omega}_2$$

est définie positive sur le sous-espace $H^{1,0}(X)$ et définie négative sur le sous-espace conjugué $H^{0,1}(X)$. Notons $\phi: H^{1,0}(X) \rightarrow H^1(X, \mathbb{R})$ l'isomorphisme qui à toute forme holomorphe associe la classe de sa partie réelle. C'est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels qui permet de munir $H^1(X, \mathbb{R})$ de la norme de Hodge : si α est dans $H^1(X, \mathbb{R})$, on pose

$$\|\alpha\|_{\text{Hodge}}^2 = \iota(\phi^{-1}(\alpha), \phi^{-1}(\alpha)).$$

On considère maintenant le fibré de Hodge réel au-dessus d'une strate $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_r)$ dont la fibre au-dessus de chaque point (X, ω) est $H^1(X, \mathbb{R})$. Ce fibré de Hodge provient d'un système local de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels, ce qui permet d'identifier localement les fibres voisines entre elles. L'identification se fait grâce à la connexion plate sur le fibré de Hodge associée à ce système local, appelée connexion de Gauß-Manin. Une grande partie de la géométrie du problème est contenue dans le fait que le fibré de Hodge complexe de fibre $H^1(X, \mathbb{C})$ est un fibré plat, mais que le sous-fibré de fibre $H^{1,0}(X)$ qui tient compte de la structure complexe de X ne respecte pas cette structure plate (c'est-à-dire n'est pas invariant par la connexion de Gauß-Manin).

Étant donnée une surface de translation X et une classe de cohomologie α dans $H^1(X, \mathbb{R})$, on souhaite comprendre la croissance de la norme de Hodge $\|\alpha_t\|_{g_t, X}$ quand t tend vers l'infini, où g_t est le flot de Teichmüller et α_t est la classe transportée parallèlement le long du flot à partir de α .

La monodromie de la connexion de Gauß-Manin définit un cocycle : en tout point X de la strate, on dispose d'une représentation du groupe fondamental de la composante connexe de X dans $H^1(X, \mathbb{R})$ qui est bien définie à conjugaison près. Par le théorème d'Ehresmann, l'action d'un élément du groupe fondamental est celle d'un

difféomorphisme orienté sur l'homologie ; c'est donc une matrice symplectique car tout difféomorphisme orienté préserve la forme d'intersection.

Expliquons intuitivement comment obtenir ce cocycle de façon concrète le long des géodésiques du flot de Teichmüller. On fixe un petit ouvert U de la strate dans lequel on peut identifier de manière canonique les espaces de cohomologie $H^1(Y, \mathbb{R})$ entre eux lorsque Y parcourt U . Soient X un point de U et α une classe de cohomologie dans $H^1(X, \mathbb{R})$. On suit par transport parallèle la classe α sous l'action du flot de Teichmüller g_t jusqu'à revenir dans U (ce qui se produit en temps fini pour presque tout X car le flot est ergodique). La classe α_t obtenue dans $H^1(g_t X, \mathbb{R})$ s'identifie de manière canonique à une classe dans $H^1(X, \mathbb{R})$ qui est précisément l'action du cocycle de Kontsevich-Zorich G_t^{KZ} sur la classe α .

1.4. Exposants de Liapounoff du flot de Teichmüller

Comme le flot de Teichmüller est ergodique, on peut appliquer le théorème d'Oseledets au cocycle de Kontsevich-Zorich. Il existe donc des nombres réels $\lambda_1 > \dots > \lambda_k$ et une décomposition

$$H^1(X, \mathbb{R}) = E_1(\omega) \oplus \dots \oplus E_k(\omega)$$

dépendant mesurablement de (X, ω) telle que, si α est dans $E_i(\omega)$, on a

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \log \|G_t^{\text{KZ}}(\alpha)\| = \lambda_i.$$

Il est plus aisé pour la suite de considérer $2g$ exposants de Liapounoff $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{2g}$, chaque exposant étant répété avec une multiplicité correspondant à la dimension de l'espace d'Oseledets associé. Comme le cocycle est symplectique, ces exposants vérifient la relation de symétrie $\lambda_{2g-i+1} = -\lambda_i$. De plus, on montre que $\lambda_1 = 1$ de la manière suivante : le sous-fibré de rang 2 du fibré de Hodge dont la fibre en tout point (X, ω) est le plan réel engendré par $\text{Re } \omega$ et $\text{Im } \omega$ est stable par le flot de Teichmüller. Le cocycle de Kontsevich-Zorich restreint à ce plan n'est autre que l'action linéaire donnée par le flot géodésique de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$, et les exposants de Liapounoff associés sont 1 et -1 . Ces exposants sont extrémaux d'après le théorème de Teichmüller.

Les valeurs des autres exposants sont dans la plupart des cas totalement inconnues. Forni [Fo] a prouvé que λ_g est strictement positif et Avila-Viana [AV] que tous les exposants sont distincts. Ces résultats difficiles sont vrais uniquement dans le cas des strates et pour la mesure ν .

À la suite d'expériences numériques obtenues par l'algorithme de Rauzy-Veech (qui permet de discrétiser le flot de Teichmüller), Kontsevich et Zorich ([Ko], [KZ1]) ont conjecturé vers le milieu des années 90 que la somme des exposants positifs $\lambda_1 + \dots + \lambda_g$ est un nombre rationnel, ce qui est remarquable et *a priori* très surprenant vu la définition des exposants. L'article d'Eskin-Kontsevich-Zorich donne une formule explicite

pour cette somme. Combiné avec des résultats antérieurs, cette formule implique la rationalité de la somme des exposants positifs.

L'étude de ces exposants de Liapounoff se justifie par le fait que le flot de Teichmüller joue le rôle d'opérateur de renormalisation pour les surfaces de translation, ce qui est connu depuis les travaux de Masur et Veech. Le théorème de Kerckhoff, Masur et Smillie [KMS] affirme que pour toute surface de translation, le flot *linéaire* est uniquement ergodique dans presque toute direction. Supposons pour simplifier que le flot vertical est uniquement ergodique, fixons un long morceau d'orbite de ce flot que l'on ferme par un chemin de longueur bornée, et notons γ_t cette courbe fermée. Le théorème ergodique nous assure que la quantité $t^{-1}[\gamma_t]$ converge dans $H_1(X, \mathbb{R})$ ⁽³⁾. Zorich et Forni ([Zo2], [Zo3], [Fo]) ont montré que les déviations par rapport à cette moyenne sont gouvernées par les exposants de Liapounoff décrits ci-dessus.

Notons $(F_i(\omega))_{1 \leq i \leq 2g}$ la filtration décroissante d'Oseledets pour le cocycle de Kontsevich-Zorich agissant sur $H_1(X, \mathbb{R})$. Zorich ([Zo2], [Zo3]) montre que pour une surface de translation générique (X, ω) et tout élément f dans $F_i(\omega) \setminus F_{i+1}(\omega)$, on a

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log |\langle f, \gamma_t \rangle|}{\log t} = \lambda_i$$

lorsque $\lambda_i > 0$ (c'est-à-dire si $i \leq g$). De plus, la quantité $|\langle f, \gamma_t \rangle|$ est bornée si f appartient à F_{g+1} . Ce résultat est utilisé dans Delecroix-Hubert-Lelièvre [DHL] pour comprendre la vitesse de diffusion d'un billard polygonal non compact, appelé modèle windtree. Ici, non seulement l'existence des exposants mais aussi leur valeur est importante.

Pour terminer ces motivations, mentionnons que le fait que λ_g soit strictement positif pour les strates est un élément essentiel de la preuve du théorème d'Avila et Forni [AF] sur le mélange faible des échanges d'intervalles.

1.5. Constantes de Siegel-Veech

Pour énoncer la formule d'Eskin-Kontsevich-Zorich sur la somme des exposants de Liapounoff du flot de Teichmüller, il est nécessaire d'introduire au préalable les constantes de Siegel-Veech.

Rappelons que, sur une surface de translation, on appelle lien de selles un segment géodésique (pour la métrique plate) reliant deux singularités et n'en contenant aucune dans son intérieur. Dans une surface de translation, les orbites périodiques arrivent par familles; elles forment des cylindres bordés par des liens de selles. Pour un cylindre $\mathcal{C}$, on notera $w(\mathcal{C})$ son périmètre et $h(\mathcal{C})$ sa hauteur. L'aire du cylindre est $w(\mathcal{C})h(\mathcal{C})$, son module $\text{Mod}(\mathcal{C})$ est $\frac{h(\mathcal{C})}{w(\mathcal{C})}$.

3. Cette limite s'appelle cycle asymptotique de Schwartzman.

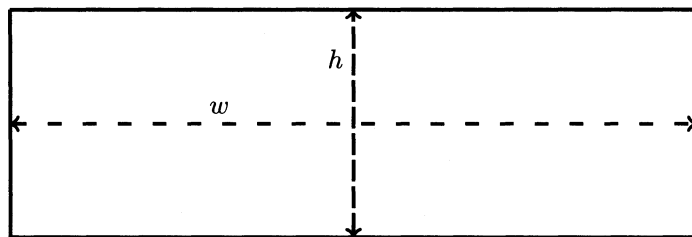


FIGURE 2. Cylindre horizontal (les côtés verticaux sont identifiés).

Pour toute surface de translation (X, ω) et tout réel positif T , notons $N(X, T)$ le nombre de liens de selles de longueur inférieure ou égale à T sur X . Masur [Ma2] montre que cette quantité a une croissance quadratique : il existe une constante $C = C(X) > 1$ telle que, pour tout T positif,

$$C^{-1}T^2 \leq N(X, T) \leq CT^2.$$

On peut se demander si $T^{-2}N(X, T)$ a une limite quand T tend vers l'infini. Dans le cas du tore, il est bien connu que cette limite existe et vaut $6/\pi^2$ (qui est le terme dominant dans le problème du cercle). La question n'est toujours pas résolue pour une surface de translation arbitraire. Néanmoins, Eskin et Masur [EM] montrent qu'il existe une constante $C(\nu)$ telle que pour ν -presque toute surface de la strate $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)$ on a

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} T^{-2} N(X, T) = \pi C(\nu).$$

La constante $C(\nu)$ est appelée constante de Siegel-Veech⁽⁴⁾.

Pour ce qui suit, on va considérer un problème légèrement différent : on s'intéresse au comptage de cylindres *pondérés*, le poids attaché à chaque cylindre étant son aire. Ceci peut être justifié de manière géométrique par le fait que les cylindres sont des géodésiques « épaisses », ils ont donc un poids. Pour tout réel positif R , on pose

$$N_{\text{aire}}(X, R) = \frac{1}{\text{Aire}(X)} \sum_{\substack{\mathcal{C} \subset X \\ w(\mathcal{C}) < R}} \text{Aire}(\mathcal{C}).$$

Comme pour le comptage des liens de selles, on dispose d'une formule de Siegel-Veech : il existe une constante $C_{\text{aire}}(\nu)$ telle que pour ν -presque toute surface de la strate $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_r)$,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} T^{-2} N_{\text{aire}}(X, T) = \pi C_{\text{aire}}(\nu).$$

4. Veech [Ve3] a été le premier à travailler sur ce problème en adaptant aux surfaces de translation des idées développées par Siegel pour étudier les espaces de réseaux.

1.6. Le théorème d'Eskin-Kontsevich-Zorich

Eskin, Kontsevich et Zorich [EKZ2] donnent une formule reliant la somme des exposants de Liapounoff à la constante $C_{\text{aire}}(\nu)$. Avec les notations précédentes, on a :

THÉORÈME 3. — *Étant donnée une composante connexe $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_r)$ de strate de différentielles holomorphes, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ les exposants de Liapounoff positifs du cocycle de Kontsevich-Zorich associé. Alors*

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_g = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^r \frac{k_i(k_i + 2)}{k_i + 1} + \frac{\pi^2}{3} C_{\text{aire}}(\nu).$$

REMARQUE 4. — *Une formule analogue existe pour les formes différentielles quadratiques ; nous renvoyons à l'article original pour plus de détails. Les techniques de preuve sont les mêmes.*

Calculer les constantes de Siegel-Veech n'est pas simple. Une fois les formules d'Eskin-Masur établies, il faut comprendre comment calculer explicitement ces constantes. Eskin, Masur et Zorich [EMZ] donnent, pour les calculer, un algorithme basé sur une étude des dégénérescences des strates à l'infini. La difficulté est de comprendre comment les symétries des dégénérescences influent sur la valeur des constantes. Le travail d'Eskin-Masur-Zorich ramène la question au calcul du volume des strates normalisées $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)$, ce qui fait l'objet d'un travail d'Eskin et Okounkov [EO], lui-même basé sur un résultat de Bloch et Okounkov [BO]. La façon de calculer la somme des exposants de Liapounoff du cocycle de Kontsevich-Zorich est donc bien compliquée ! La rationalité de la somme des exposants positifs s'obtient par le même cheminement : constantes de Siegel-Veech puis volume des strates. Il n'existe pas de preuve plus directe de la rationalité connue à ce jour.

1.7. Autres mesures invariantes sur les strates

Les mêmes questions se posent pour toute mesure de probabilité $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ -invariante sur une sous-orbifold fermée $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ -invariante d'une strate normalisée. La classification des fermés invariants par $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ est loin d'être achevée. Néanmoins, un pas essentiel vient d'être franchi : Eskin et Mirzakhani [EMi] ont annoncé récemment que tous les fermés $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ -invariants connexes sont des sous-variétés affines dans les coordonnées des périodes, la mesure associée étant proportionnelle à la mesure de Lebesgue sur le sous-espace correspondant (on parle alors de mesure algébrique).

Le théorème d'Eskin-Kontsevich-Zorich est valable pour toute mesure de probabilité algébrique $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ -invariante vérifiant une condition technique, qui est toujours satisfaite d'après un résultat d'Avila-Matheus-Yoccoz [AMY]. Ainsi la formule liant somme des exposants de Liapounoff positifs et constantes de Siegel-Veech est vraie pour toute mesure $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ -invariante ; néanmoins la rationalité de la somme des exposants positifs est un problème ouvert en toute généralité. Ce résultat est connu

pour les courbes de Teichmüller, c'est-à-dire pour les orbites fermées sous l'action de $SL_2(\mathbb{R})$. Dans quelques strates en petit genre, Chen et Möller [CM] ont démontré que la valeur de la somme des exposants de Liapounoff positifs est indépendante de la mesure de probabilité fixée. Ceci devient presque toujours faux dès que le genre est assez grand.

1.7.1. Un exemple simple : les surfaces à petits carreaux. — Dans cette section, on s'intéresse à l'exemple des surfaces de translation dont l'orbite est fermée. Un théorème de Smillie [SW] affirme que l'orbite de (X, ω) est fermée si et seulement si le stabilisateur de (X, ω) est un réseau dans $SL_2(\mathbb{R})$. De telles surfaces sont appelées surfaces de Veech car celui-ci fut le premier à les étudier systématiquement en 1989⁽⁵⁾. Le stabilisateur est appelé le groupe de Veech associé à la surface. On appellera courbe de Teichmüller $\mathcal{C} = \Gamma \backslash \mathbb{H} = \Gamma \backslash SL_2(\mathbb{R}) / SO_2(\mathbb{R})$, où Γ est le groupe de Veech de la surface.

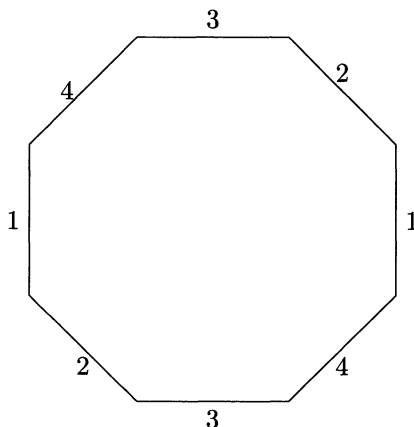


FIGURE 3. Une surface de Veech : l'octogone.

Les surfaces de Veech ne sont classifiées qu'en genre deux par McMullen [Mc1, Mc2, Mc3, Mc4, Mc5, Mc6], le problème de la classification étant totalement ouvert en genre plus grand. Il existe cependant une méthode simple pour construire de telles surfaces. Le tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est une surface de Veech car son stabilisateur est $SL_2(\mathbb{Z})$, qui est un réseau de $SL_2(\mathbb{R})$. Par définition, une surface à petits carreaux est un revêtement fini du tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ramifié uniquement au-dessus de l'origine⁽⁶⁾. De telles surfaces se décomposent en un nombre fini de carrés unités, et elles se décomposent

5. Il montre par exemple que les polygones réguliers avec un nombre pair de côtés sont des surfaces de Veech lorsqu'on identifie les côtés parallèles deux à deux.

6. Les surfaces à petits carreaux peuvent également s'interpréter comme les points des strates dont les coordonnées des périodes sont entières.

en cylindres dans toute direction rationnelle. Il n'est pas très difficile de montrer qu'une surface à petits carreaux est une surface de Veech, et que son groupe de Veech est commensurable à $SL_2(\mathbb{Z})$; on supposera pour simplifier qu'il s'agit d'un sous-groupe de $SL_2(\mathbb{Z})$. Le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ agit sur les surfaces à petits carreaux par son action linéaire, et l'orbite d'une telle surface X est finie; son cardinal est l'indice de son groupe de Veech dans $SL_2(\mathbb{Z})$. Chaque surface X_i de l'orbite de $SL_2(\mathbb{Z}) \cdot X$ est décomposée en cylindres horizontaux de périmètres $w_{i,j}$ et hauteurs $h_{i,j}$.

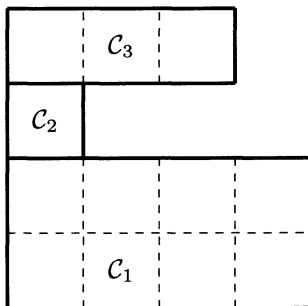


FIGURE 4. Surface à petits carreaux : les côtés verticaux opposés sont identifiés. Il y a 3 cylindres horizontaux de paramètres $(w_1 = 4, h_1 = 2)$, $(w_2 = 1, h_2 = 1)$, $(w_3 = 3, h_3 = 1)$.

Les formules pour les constantes de Siegel-Veech pour les surfaces à petits carreaux sont particulièrement explicites, ce qui permet d'obtenir le résultat suivant :

COROLLAIRE 5. — Si (X, ω) est une surface à petits carreaux de la strate $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_r)$, les exposants de Liapounoff du cocycle de Kontsevich-Zorich sont donnés par la formule :

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_g = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^r \frac{k_i(k_i + 2)}{k_i + 1} + \frac{1}{\#(SL_2(\mathbb{Z}) \cdot X)} \sum_{X_i \in SL_2(\mathbb{Z}) \cdot X} \sum_{\substack{\text{cylindres} \\ \text{horizontaux } C_{ij} \\ \text{avec } X_i = \cup C_{ij}}} \frac{h_{ij}}{w_{ij}}.$$

1.7.2. *Un exemple très explicite : les revêtements cycliques de la sphère.* — Forni-Matheus-Zorich [FMZ] et Eskin-Kontsevich-Zorich [EKZ1] ont calculé tous les exposants de Liapounoff dans le cas des revêtements cycliques de la sphère ramifiés au-dessus de quatre points. Ces revêtements sont obtenus à partir de courbes affines dans $\mathbb{C}^2$ de la forme

$$w^N = (z - z_1)^{a_1} (z - z_2)^{a_2} (z - z_3)^{a_3} (z - z_4)^{a_4}$$

en complétant à l'infini puis en désingularisant. La projection sur la coordonnée z définit un revêtement cyclique à valeurs dans la droite projective qui est ramifié au-dessus des quatre points z_1, z_2, z_3 et z_4 . Un générateur T du groupe de revêtement

est donné dans ces coordonnées par la formule $T(z, w) = (z, \zeta w)$ où $\zeta = \exp(2i\pi/N)$. Dans le seul cas intéressant, le fibré de fibre $H^{1,0}$ associé à cette famille de revêtements cycliques se scinde en somme directe de fibrés en droites holomorphes correspondant aux sous-espaces propres de l'opérateur de monodromie T . Il s'ensuit que le fibré de Hodge réel peut être décomposé en sous-fibrés invariants par la monodromie (et donc plats) de rang 2 ou 4 dont des sections trivialisantes sur un ouvert de Zariski peuvent être explicitement calculées. Sur chaque sous-fibré un seul exposant de Liapounoff est positif. On peut donc dans ce cas très particulier calculer *tous* les exposants, ce sont des nombres rationnels. En suivant la stratégie de la preuve générale du théorème 3, chaque exposant est donné comme l'intégrale de la courbure du fibré correspondant. Le point essentiel de cet exemple est que l'espace de paramètres correspondant aux surfaces est une courbe algébrique (orbifold) compacte. L'intégrale de courbure s'exprime alors comme le degré d'un certain fibré en droites orbifold grâce à une formule de Peters permettant de contrôler les contributions près des points singuliers. Eskin, Kontsevich et Zorich arrivent à calculer explicitement ces degrés et produisent ainsi les valeurs de tous les exposants dans cette situation. Un cas particulièrement fameux est le *Eierlegende Wollmilchsau*, un origami à 8 carreaux qui est un revêtement ramifié de la sphère de genre 3 dont les exposants sont tous nuls sauf le plus grand.

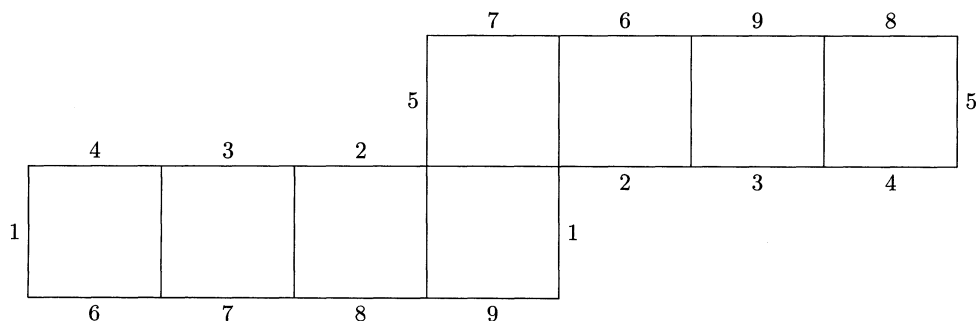


FIGURE 5. *Eierlegende Wollmilchsau* (célèbre animal légendaire allemand pouvant s'apparenter à une poule aux œufs d'or).

1.8. Une autre famille d'exemples plus compliquée

Bouw et Möller [BM] ont construit une famille de surfaces de Veech d'une façon nouvelle et non triviale et ont calculé explicitement une partie des exposants de Liapounoff du cocycle de Kontsevich-Zorich pour cette famille. La famille contient les exemples de Veech (les polygones réguliers). Les méthodes de preuves nécessitent des arguments algébriques supplémentaires que nous ne développerons pas ici.

2. QUELQUES IDÉES DE PREUVES

2.1. Stratégie générale

Nous donnons ici l'idée générale de la preuve, et nous détaillerons dans la suite quelques points importants.

Dans un premier temps, les auteurs rappellent la formule de Kontsevich [Ko], démontrée par Forni [Fo], qui exprime à une constante explicite près la somme des exposants de Liapounoff positifs comme l'intégrale de la courbure du fibré de Hodge dans la direction des disques de Teichmüller.

Dans le cas des courbes de Teichmüller, la famille de courbes peut être compactifiée en rajoutant des courbes éventuellement nodales aux pointes. La forme de courbure du fibré de Hodge est singulière au voisinage des points ajoutés, cependant un résultat de Peters [Pe] montre que les singularités de cette forme sont modérées en un sens défini par Mumford, en particulier elle est intégrable et son intégrale est exactement la première classe de Chern de l'extension de Deligne orbifold de du fibré de Hodge à la courbe compactifiée⁽⁷⁾. Il faut cependant remarquer que cette approche n'implique pas directement un analogue du théorème 3, même si elle prouve la rationalité de la somme des exposants et en donne une interprétation cohomologique.

On ne sait malheureusement pas construire une compactification qui permette de calculer cohomologiquement l'intégrale de la courbure du fibré de Hodge dans le cas général. Pour contourner ce problème, on utilise la stratégie suivante : comme le fibré de Hodge sur un disque de Teichmüller est le poussé en avant du fibré cotangent relatif de la famille de courbes correspondante, le théorème de Riemann-Roch analytique permet de calculer la forme de courbure du fibré de Hodge. Ce calcul produit un terme de torsion analytique faisant intervenir la fonction zêta du laplacien, qui correspond au terme correctif dans la définition de la métrique de Quillen associée. Les auteurs utilisent un théorème de Kokotov et Korotkin [KK], version ad-hoc du théorème de Riemann-Roch analytique, qui permet d'exprimer la courbure du fibré de Hodge le long des disques de Teichmüller en fonction de la fonction zêta du laplacien pour la métrique plate⁽⁸⁾.

L'opérateur de Laplace pour la métrique plate est difficile à étudier, néanmoins près du bord son comportement est proche du laplacien pour la métrique hyperbolique⁽⁹⁾. Comme le dit Hubbard, une surface de Riemann hyperbolique dégénérée est une succession de morceaux de plomberie, reliés entre eux par de grands tuyaux. L'image

7. La structure orbifold de que l'on met sur la courbe de Teichmüller compactifiée tient compte de la monodromie de la connexion de Gauß-Manin aux pointes.

8. Une autre preuve, basée sur un résultat de Fay, est également développée dans l'article.

9. Cette partie nécessite des calculs de géométrie hyperbolique longs et techniques que nous ne reproduisons pas.

signifie que lorsque la métrique hyperbolique dégénère, on dispose à certains endroits de courbes courtes contenues dans de longs anneaux, et le reste se comporte comme une surface compacte à bord. Les auteurs utilisent un résultat de Lundelius [Lu] qui donne une asymptotique de la fonction zêta du laplacien hyperbolique pour une surface dégénérée en fonction des longueurs hyperboliques courtes. Il y a deux types d'anneaux différents pour la métrique plate : les cylindres plats et les anneaux euclidiens (voir dessins 6 et 7). On montre tout d'abord que les anneaux euclidiens ne contribuent pas dans notre calcul. Il faut enfin relier les longueurs des cylindres dégénérées aux constantes de Siegel-Veech. Ayant des estimées fines près du bord, la preuve consiste à faire une sorte d'intégration par parties pour ne faire intervenir que le comportement de la fonction zêta du laplacien pour la métrique plate près du bord. Cette partie utilise les résultats de Eskin-Masur exprimant les constantes de Siegel-Veech à l'aide des voisinage du bord des strates.

Pour conclure, on peut résumer la stratégie de preuve de la manière heuristique suivante : dans le cas des feuilles *algébriques* du feuilletage des strates sous l'action de $SL_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des courbes de Teichmüller, la situation est naturellement compactifiable et la théorie classique des variations de structures de Hodge permet d'interpréter la somme des exposants de Liapounoff de manière cohomologique comme un degré. Pour les feuilles transcendentes ou même pour les strates toutes entières, cette méthode n'est pour l'instant pas applicable⁽¹⁰⁾ et il faut étudier les dégénérescences de variations de structures de Hodge au voisinage du bord d'un point de vue *métrique*, ce qui est beaucoup plus technique et délicat. La rationalité provient de calculs purement métriques, à savoir des asymptotiques du nombre de cylindres de grand module plongés dans des surfaces dégénérées.

2.2. Formule de Kontsevich

Cette formule lie la somme des exposants de Liapounoff positifs à la courbure du fibré de Hodge $\mathcal{H}$, qui est le fibré holomorphe de fibre $H^{1,0}(X)$ au-dessus de chaque surface X . Elle a été annoncée par Kontsevich puis formellement démontrée par Forni. C'est la formule de base de la preuve du théorème 3, nous allons donc l'énoncer puis donner quelques étapes de sa démonstration.

Soit $\Lambda(X)$ la courbure du fibré en droites $\mathcal{H}$ le long des disques de Teichmüller définie par

$$\Lambda(X) = -\frac{1}{4} \Delta_{\text{Teich}} \log \|s\|_{\text{Hodge}}^2$$

10. La transcendance du feuilletage des strates par les disques de Teichmüller est un obstacle technique majeur en vue d'obtenir une éventuelle interprétation cohomologique de l'intégrale de la courbure du fibré de Hodge le long des feuilles.

où s est n'importe quelle section holomorphe locale de $\det \mathcal{H}$ qui ne s'annule pas. La quantité $\Lambda(X)$ est indépendante de s . Si $\omega_1, \dots, \omega_g$ est une base de 1-formes holomorphes dans un voisinage de X , on a

$$\Lambda(X) = -\frac{1}{4} \Delta_{\text{Teich}} \log |\det (\iota(\omega_i, \omega_j))|.$$

THÉORÈME 6 (Kontsevich, Forni). — Avec les notations précédentes, on a la relation

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_g = \int_{\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)} \Lambda(X) d\nu_1(X).$$

où ν_1 est la mesure de probabilité obtenue en divisant ν par son volume.

Pour démontrer cette identité, on utilise le fait bien connu que la somme $\lambda_1 + \dots + \lambda_g$ est l'exposant de Liapounoff maximal pour le cocycle induit sur la g^e puissance extérieure $\Lambda^g H^1(X, \mathbb{R})$. Notons $\mathcal{L}$ la grassmannienne relative des sous-espaces lagrangiens pour le fibré de Hodge et fixons une mesure σ sur $\mathcal{L}$ donnée par une forme volume. La première étape est de remarquer que, pour ν_1 presque tout (X, ω) et pour σ presque tout L dans $\mathcal{L}_X$, si L_t désigne le transport de L par la connexion de Gauß-Manin le long du flot géodésique⁽¹¹⁾,

$$(1) \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_g = \lim_{T \rightarrow +\infty} T^{-1} \log \|L_t\|_{g_t X}.$$

D'après le théorème d'Oseledets, cette équation est satisfaite dès que L n'est pas contenu dans le sous-espace vectoriel $H(\omega)$ associé aux exposants de Liapounoff autres que l'exposant dominant, à savoir $E_2(\omega) \oplus \dots \oplus E_{2g}(\omega)$ avec les notations du §1.4. Or il est bien connu que pour un cocycle symplectique, le sous-espace d'Oseledets associé aux exposants positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ est lagrangien. Ainsi le sous-espace $E_1(\omega) \oplus \dots \oplus E_g(\omega)$ est un élément de $\mathcal{L}_X$ non contenu dans $H(\omega)$. Par conséquent, pour presque tout (X, ω) , l'ensemble des sous-espaces lagrangiens contenus dans $H(\omega)$ est de mesure nulle vu que $\mathcal{L}_X$ est une variété algébrique irréductible. On obtient ainsi (1).

Notons $PH(k_1, \dots, k_r)$ la strate projectivée obtenue en identifiant deux 1-formes multiples l'une de l'autre. L'étape suivante consiste à intégrer la fonction constante $\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \log \|L_t\|_{g_t X}$ sur la strate projectivée $PH(k_1, \dots, k_r)$, puis à effectuer des manipulations formelles (formule de Green, interversion de limites) dues à Forni dont certaines nécessitent des justifications non triviales. Expliquons où l'utilisation de sous-espaces *lagrangiens* intervient.

Comme les strates sont feuilletées par les $GL_2(\mathbb{R})$ -orbites des surfaces de translation, les strates projectivisées sont feuilletées par des disques de Teichmüller, c'est-à-dire par des quotients du plan hyperbolique $SL_2(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R})$. On munit ces disques de la métrique hyperbolique de courbure -4 , ce qui est cohérent avec notre définition du

11. Comme la forme d'intersection est plate, les L_t restent lagrangiens.

flot géodésique introduite précédemment, et on note Δ_{Teich} le laplacien hyperbolique associé sur la strate projectivée. Fixons une base de sections holomorphes locales $\omega_1, \dots, \omega_g$ au voisinage de X ainsi que des bases $v_1(t), \dots, v_g(t)$ de L_t localement constantes en t . Alors la quantité $\Delta_{\text{Teich}} \log \|v_1(t) \wedge \dots \wedge v_g(t)\|_{\text{Hodge}}$ ne dépend pas du choix de $v_1(t), \dots, v_g(t)$; on la note $\Delta_{\text{Teich}} \log \|L\|_{\text{Hodge}}$. Un point beaucoup plus remarquable est que cette quantité ne dépend pas non plus du sous-espace lagrangien initial L en vertu de l'identité

$$(2) \quad \Delta_{\text{Teich}} \log \|L\|_{\text{Hodge}} = -\frac{1}{2} \Delta_{\text{Teich}} \log \left| \det (\iota(\omega_i, \omega_j))_{i,j} \right|.$$

La preuve, qui ne fait intervenir que de l'algèbre multilinéaire élémentaire, est la suivante : si $v_1, \dots, v_g$ est une base de L , le carré de la norme de Hodge de $v_1 \wedge \dots \wedge v_g$ est le déterminant de la matrice de Gram réelle associé aux vecteurs $v_1, \dots, v_g$, soit en utilisant les notations du §1.3

$$\|v_1 \wedge \dots \wedge v_g\|_{\text{Hodge}}^2 = \det (\text{Re } \iota(\phi^{-1}(v_i), \phi^{-1}(v_j)))_{1 \leq i, j \leq g}.$$

Comme L est lagrangien, les coefficients $\iota(\phi^{-1}(v_i), \phi^{-1}(v_j))$ sont réels, donc $\|v_1 \wedge \dots \wedge v_g\|_{\text{Hodge}}^2$ est égal au déterminant de la matrice de Gram *complexe* $(\iota(\phi^{-1}(v_i), \phi^{-1}(v_j)))_{1 \leq i, j \leq g}$. Si on munit $\Lambda_{\mathbb{C}}^g H^{1,0}(X)$ de la norme induite par ι , on a donc

$$\|v_1 \wedge \dots \wedge v_g\|_{\text{Hodge}}^2 = \|\phi^{-1}(v_1) \wedge \dots \wedge \phi^{-1}(v_g)\|_{\Lambda_{\mathbb{C}}^g H^{1,0}(X)}.$$

Notons Ω la forme volume sur $\Lambda_{\mathbb{C}}^{2g} H^1(X, \mathbb{C})$ donnée par la g^e puissance extérieure de la forme symplectique et posons

$$\|v_1 \wedge \dots \wedge v_g\|_{\text{EKZ}}^2 = \frac{|\Omega(v_1 \wedge \dots \wedge v_g \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_g)|^2}{|\Omega(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_g \wedge \bar{\omega}_1 \wedge \dots \wedge \bar{\omega}_g)|}.$$

La quantité $\|\cdot\|_{\text{EKZ}}$ définit après transport par ϕ une norme sur $\Lambda_{\mathbb{R}}^g H^{1,0}(X)^{(12)}$. Comme $\Lambda_{\mathbb{C}}^g H^{1,0}(X)$ est de dimension complexe 1, il existe une constante k indépendante des v_i telle que

$$(3) \quad \|v_1 \wedge \dots \wedge v_g\|_{\text{Hodge}}^2 = k \|v_1 \wedge \dots \wedge v_g\|_{\text{EKZ}}^2$$

et on vérifie facilement que $k = 1$. La formule (2) découle alors directement de (3). Remarquons pour clôturer cette discussion que le terme de courbure $\Lambda(X)$ apparaît naturellement dans la formule (2).

12. Il est important de remarquer que $\|\cdot\|_{\text{EKZ}}$ n'est pas définie positive sur $\Lambda_{\mathbb{R}}^g H^1(X, \mathbb{R})$, ce n'est donc pas une norme mais seulement une pseudo-norme. Ceci montre que la formule (3) ci-après n'est pas valable en général pour des vecteurs $v_1, \dots, v_g$ arbitraires.

Lorsque $\mathcal{C}$ est une courbe de Teichmüller, le théorème devient

$$(4) \quad \lambda_1 + \cdots + \lambda_g = \frac{i \int_{\mathcal{C}} \Theta}{\pi(2g_{\mathcal{C}} - 2 + s_{\mathcal{C}})}$$

où Θ est la 2-forme de courbure du fibré $\det \mathcal{H}$, $g_{\mathcal{C}}$ est le genre de la courbe de Teichmüller⁽¹³⁾ et $s_{\mathcal{C}}$ est le nombre de pointes de $\mathcal{C}$. Dans cette formule le dénominateur est la caractéristique d'Euler-Poincaré, c'est-à-dire l'aire de la surface hyperbolique. Ceci provient du fait que la formule de Kontsevich est obtenue avec une mesure de probabilité. Dans ce cas particulier, on peut exprimer l'intégrale de la courbure comme un degré de fibré, grâce à la formule de Peters

$$\frac{i}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \Theta = \deg \overline{\mathcal{H}}$$

où $\overline{\mathcal{H}}$ est l'extension de Deligne orbifold du fibré de Hodge aux pointes pour une structure orbifold sur $\overline{\mathcal{C}}$ permettant de rendre unipotente la monodromie de la connexion de Gauß-Manin aux pointes. C'est grâce à cette formule que l'on peut calculer tous les exposants de Liapounoff pour les revêtements cycliques de la sphère. En effet dès que l'on dispose d'une sous-structure de Hodge invariante par notre cocycle, la formule de Kontsevich et la formule de Peters s'appliquent *mutatis mutandis*. C'est également l'architecture de preuve utilisée par Bouw et Möller pour calculer des exposants de Liapounoff de courbes de Teichmüller. Dans ces derniers exemples, la stratégie pour casser le fibré de Hodge en morceaux invariants est d'utiliser le fait que le plan engendré par $\operatorname{Re}(\omega)$ et $\operatorname{Im}(\omega)$ est défini sur un corps de nombres, et de faire intervenir l'action du groupe de Galois.

2.3. Déterminant du laplacien et formule de Riemann-Roch analytique

Soient X une surface de Riemann compacte, g une métrique riemannienne lisse sur X , Δ_g le laplacien associé⁽¹⁴⁾ et $(\mu_i)_{i \geq 0}$ le spectre de $-\Delta_g$. La fonction zêta du laplacien Δ_g est définie pour $\operatorname{Re}(s) > 1$ par la formule $\zeta(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i^{-s}$. Les estimations classiques du noyau de la chaleur entraînent l'existence d'un prolongement analytique de la fonction zêta en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec 1 pour seul pôle. Le déterminant du laplacien est défini par, $\det \Delta_g = \exp(-\zeta'(0))$, et correspond formellement au produit infini des μ_i (qui est un produit infini divergent). Pour de plus amples détails, on renvoie le lecteur aux références [BGV, Chap. 2] et [So, Chap. V].

13. Le genre de la courbe de Teichmüller n'a *a priori* rien à voir avec celui de la surface de Veech X qui l'engendre.

14. Nous prenons la convention de signe des analystes pour le laplacien : toutes ses valeurs propres sont négatives.

Comme expliqué précédemment, il va être nécessaire de comparer la métrique hyperbolique et la métrique plate. Pour ce faire, rappelons la formule de Polyakov. Soient g_1 et g_2 deux métriques riemanniennes lisses dans la même classe conforme, et écrivons $g_2 = \exp(2\phi)g_1$ où ϕ est une fonction lisse à valeurs réelles. Alors on a :

$$(5) \quad \log \det \Delta_{g_2} - \log \det \Delta_{g_1} = \frac{1}{12\pi} \left(\int_X \phi \Delta_{g_1} \phi dg_1 - 2 \int_X \phi K_{g_1} dg_1 \right) \\ + \log \text{Aire}_{g_2}(X) - \log \text{Aire}_{g_1}(X).$$

La métrique plate n'est pas lisse aux singularités de la surface de translation, on peut néanmoins définir un déterminant du laplacien relatif. Fixons une surface de translation (X_0, ω_0) dans une strate $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_r)$, et faisons varier (X, ω) dans la même strate. On pose

$$\det \Delta_{\text{plat}}(X, X_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\det \Delta_{\text{plat}, \varepsilon}(X)}{\det \Delta_{\text{plat}, \varepsilon}(X_0)}$$

où $\Delta_{\text{plat}, \varepsilon}(X)$ est une approximation de la métrique plate au niveau des zéros (on ne modifie la métrique que dans un ε -voisinage des zéros par une fonction radiale).

Sur la surface (X, ω) , il y a une unique métrique hyperbolique dans la classe conforme de la métrique plate possédant des pointes aux zéros de la 1-forme ω . La surface de Riemann associée n'est pas compacte, il faut donc aussi régulariser la métrique pour définir le déterminant du laplacien, ce qui conduit à nouveau à un déterminant du laplacien relatif $\det \Delta_{\text{hyp}}(X, X_0)$.

THÉORÈME 7. — *Soit X_0 une surface fixée dans la strate $\mathcal{H}(k_1 \dots k_r)$. Alors, pour tout (X, ω) dans cette strate,*

$$-4\Lambda(X) = \Delta_{\text{Teich}} \log \det \Delta_{\text{plat}}(X, X_0) - \frac{1}{3} \sum_{j=1}^r \frac{k_j(k_j + 2)}{k_j + 1}.$$

Le terme combinatoire est celui du théorème principal, il restera donc à relier $\Delta_{\text{Teich}} \log \det \Delta_{\text{plat}}(X, X_0)$ aux constantes de Siegel-Veech.

Expliquons comment vérifier la formule dans le cas du tore, ce qui est déjà fort instructif. Pour ce faire, on considère la coordonnée τ dans le domaine fondamental de la surface modulaire

$$\text{Im}(\tau) > 0, \quad |\tau| \geq 1, \quad -\frac{1}{2} \leq \text{Re}(\tau) < \frac{1}{2}.$$

Pour tout tore d'aire 1, la formule de Ray-Singer [RS] s'écrit

$$\det \Delta_{\text{plat}} = 4 \text{Im}(\tau) |\eta(\tau)|^4$$

où η est une forme modulaire explicite. Ainsi

$$\Delta_{\text{Teich}} \log \det \Delta_{\text{plat}} = \Delta_{\text{Teich}} \log \text{Im}(\tau)$$

car η est holomorphe. On peut bien sûr calculer dans ce cas $|\det(\iota(\omega_i, \omega_j))|$: il y a une seule forme holomorphe ω de périodes 1 et τ , de sorte que $|\det(\iota(\omega_i, \omega_j))| = \|\omega\|^2 = \text{Im}(\tau)$, ce qui établit la formule souhaitée dans ce cas très simple.

Une manière de prouver le théorème 7 est d'utiliser un théorème de Kokotov et Korotkin [KK] dont l'énoncé est le suivant :

THÉORÈME 8 (Kokotov, Korotkin). — *Pour toute surface de translation (X, ω) et tout point fixé X_0 dans la strate $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_r)$, on a*

$$\det \Delta_{\text{plat}}(X, X_0) = k \cdot \text{Aire}(X, \omega) \det(\text{Im } B) \cdot |\tau(X, \omega)|^2$$

où B est la matrice des périodes secondaires de X et τ est une section holomorphe d'un fibré en droite au-dessus de la strate $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_r)$. De plus, $\tau(X, \omega)$ est homogène en ω de degré

$$p = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^r \frac{k_i(k_i + 2)}{k_i + 1}.$$

On voit clairement que ce théorème est une généralisation de la formule de Ray-Singer.

Comme nous l'avons expliqué auparavant, le théorème 7 est un résultat de type Riemann-Roch analytique. Pour motiver ce théorème, nous allons établir un résultat plus faible (car cohomologique) en appliquant le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch usuel pour des familles de courbes. Ceci permettra d'expliquer de manière cohomologique l'apparition du mystérieux terme combinatoire $\frac{1}{12} \sum_{i=1}^r \frac{k_i(k_i + 2)}{k_i + 1}$.

Soit $\pi: \mathcal{C} \rightarrow B$ une famille holomorphe de surfaces de translation dans la strate $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_r)$ paramétrée par une base B . On dispose d'une section holomorphe globale du fibré projectif $\mathbb{P}(\pi_* \Omega_{\mathcal{C}/B}^1)$ sur B . Cette section peut être interprétée comme une section globale ω partout non nulle de $\pi_* \Omega_{\mathcal{C}/B}^1 \otimes \mathcal{L}^\vee$, où $\mathcal{L}$ est un fibré en droites holomorphe sur B . Quitte à prendre un revêtement fini sur la base, il existe r sections $s_1, \dots, s_r$ de $\mathcal{C}$ telles que si $D_1, \dots, D_r$ sont les images de ces sections, le diviseur d'annulation de ω (en tant que section globale sur $\mathcal{C}$ de $\Omega_{\mathcal{C}/B}^1 \otimes \pi^* \mathcal{L}^\vee$) est $k_1 D_1 + \dots + k_r D_r$. Cela signifie concrètement que chaque forme ω_b définissant la structure de translation de $\mathcal{C}_b$ s'annule aux points marqués $s_1(b), \dots, s_r(b)$ avec multiplicités respectives $k_1, \dots, k_r$. On a donc l'isomorphisme

$$\Omega_{\mathcal{C}/B}^1 \simeq \pi^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{O} \left(\sum_{i=1}^r k_i D_i \right).$$

PROPOSITION 2.1. — *Si $\mathcal{H}$ est le fibré de Hodge $\pi_* \Omega_{\mathcal{C}/B}^1$ sur B ,*

$$c_1(\mathcal{H}) = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^r \frac{k_i(k_i + 2)}{k_i + 1} c_1(\mathcal{L}).$$

Pour prouver ce résultat, on applique le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch pour le morphisme π au faisceau $\mathcal{O}_C$. On a $R^0\pi_*\mathcal{O}_C = \mathcal{O}_B$ et, en utilisant la dualité de Grothendieck relative,

$$R^1\pi_*\mathcal{O}_C \simeq (R^0\pi_*\Omega_{C/B}^1)^\vee \simeq \mathcal{H}^\vee,$$

donc la classe de $R\pi_*\mathcal{O}_C$ dans $K(B)$ est $[\mathcal{O}_B] - [\mathcal{H}^\vee]$. On en déduit l'égalité

$$c_1(\mathcal{H}) = \pi_*(\mathrm{td}_2(\mathrm{T}_{C/B})) = \frac{1}{12}\pi_*(c_1(\mathrm{T}_{C/B})^2).$$

Comme $c_1(\mathrm{T}_{C/B}) = -\pi^*c_1(\mathcal{L}) - \sum_{i=1}^r k_i[D_i]$,

$$\pi_*(c_1(\mathrm{T}_{C/B})^2) = 2 \sum_{i=1}^r k_i c_1(\mathcal{L}) \pi_*[D_i] + \sum_{i=1}^r k_i^2 \pi_*[D_i]^2.$$

Remarquons que $\pi_*[D_i] = \pi_*s_{i*}(1) = 1$. De plus, la suite exacte des différentielles relatives restreinte à D_i entraîne l'égalité $(\Omega_{C/B}^1)_{|D_i} = N_{D_i/X}^*$, donc en identifiant D_i et B , $N_{D_i/X}^{\otimes k_i+1} = \mathcal{L}^\vee$. On en déduit

$$\pi_*[D_i]^2 = \pi_*(s_{i*}(1) \cdot [D_i]) = \pi_*s_{i*}s_i^*[D_i] = c_1(N_{D_i/X}) = -\frac{c_1(\mathcal{L})}{k_i+1}$$

d'où la formule souhaitée

$$\pi_*(c_1(\mathrm{T}_{C/B})^2) = \sum_{i=1}^r \left(2k_i - \frac{k_i^2}{k_i+1} \right) c_1(\mathcal{L}) = \sum_{i=1}^r \frac{k_i(k_i+2)}{k_i+1} c_1(\mathcal{L}).$$

2.4. Compactification et théorèmes de Rafi

On veut comprendre ce qui se passe lorsque les surfaces de Riemann dégénèrent, il faut donc définir une compactification adaptée à la situation. On peut faire cela en termes algébriques, ce qui correspond à la compactification classique de Deligne-Mumford. Topologiquement, on rajoute pour compactifier des surfaces de Riemann dont certaines courbes ont été pincées. Il est cependant difficile de comprendre algébriquement la géométrie plate à l'infini. Nous allons maintenant développer un point de vue topologique dû à Rafi ([Ra1, Ra2]) permettant de bien exprimer la géométrie plate dans la compactification.

Tout d'abord, on rappelle que la surface de translation (X, ω) est munie de la métrique plate associée mais aussi de la métrique hyperbolique se trouvant dans la même classe conforme et possédant des pointes aux zéros de la 1-forme holomorphe ω . Hors d'un compact de l'espace des modules des surfaces de Riemann de genre g , on sait exactement localiser les géodésiques courtes. Deux géodésiques *hyperboliques* courtes ne peuvent s'intersecter, donc leur nombre est borné par $3g - 3 + r$ où g est le genre et r le nombre de zéros. Pour δ assez petit, notons $\Gamma(\delta)$ l'ensemble des géodésiques de longueur au plus δ . Sur une surface de Riemann de volume fini, une courbe δ -courte est l'âme d'un anneau de grand module. Il faut par contre noter que de telles courbes ne sont en général pas géodésiques pour la métrique plate.



FIGURE 6. Deux tores sont recollés le long d'un lien de selles. Les côtés des carrés sont identifiés, les liens de selles sont identifiés suivant a et b . Le lien de selles est beaucoup plus court que le côté du carré, la courbe représentée par un cercle est courte. On voit en gris l'anneau de grand module qui l'entoure.



FIGURE 7. Cylindre plat de grand module, les côtés verticaux sont identifiés. La courbe en pointillés est courte.

Au niveau plat, il y a deux possibilités, décrites sur les figures 6 et 7 : cet anneau est ou bien un cylindre plat, ou bien un anneau euclidien. Pour γ courbe simple fermée non périphérique, on considère son représentant géodésique pour la métrique *plate*, il est unique sauf si γ est l'âme d'un cylindre. On découpe alors la surface X le long des représentants géodésiques de $\Gamma(\delta)$, et on ôte complètement les cylindres plats dont l'âme est dans $\Gamma(\delta)$. Une composante connexe du complémentaire de ces cylindres est appelée δ -épaisse. Étant donnée une telle composante Y , on obtient en découpant le long des représentants plats de $\Gamma(\delta)$ une sous-surface à bord $\hat{Y}$, appelée par Rafi représentant plat de Y , qui a le même type d'homotopie que Y . Il y a ici une

subtilité que nous passerons sous silence : la sous-surface $\hat{Y}$ peut dégénérer sous forme de graphe (il faut alors considérer qu'elle vient avec un voisinage infinitésimal pour que le discours reste correct). Rafi [Ra1], [Ra2] définit la taille $\lambda(\hat{Y})$ d'une sous-surface à bord Y comme étant la longueur plate minimale d'une courbe fermée essentielle non périphérique dans $\hat{Y}$. Il montre le théorème suivant :

THÉOREME 9 (Rafi). — *Il existe une constante C qui dépend uniquement de δ et de la topologie de X telle que, pour toute courbe α essentielle contenue dans $\hat{Y}$, on ait*

$$C^{-1} \lambda(\hat{Y}) \ell_{\text{hyp}}(\alpha) \leq \ell_{\text{flat}}(\alpha) \leq C \lambda(\hat{Y}) \ell_{\text{hyp}}(\alpha).$$

De plus,

$$\frac{1}{2} \lambda(\hat{Y}) \leq \text{Diam}(\hat{Y}) \leq C \lambda(\hat{Y})$$

où $\text{Diam}(\hat{Y})$ est le diamètre de $\hat{Y}$.

Ce théorème signifie que la taille est le bon invariant numérique pour comparer longueur plate et longueur hyperbolique. Ce résultat de Rafi est le pas essentiel pour obtenir l'énoncé sur la compactification. Celui-ci affirme que lorsqu'une suite de surfaces de translation converge vers une surface de Riemann stable, sur une partie épaisse, quitte à prendre une sous-suite, les 1-formes convergent vers une 1-forme non nulle à condition de renormaliser par la taille⁽¹⁵⁾. Comme le suggère la figure 8 l'exemple classique consiste à coller ensemble deux tores plats d'aire respective 1 et ε avec ε tendant vers 0. Sur la partie droite de la figure 8 la forme limite est nulle si on ne renormalise pas. Par contre, la métrique hyperbolique est bien sûr invariante par homothétie.

Le théorème suivant exprime précisément ce comportement :

THÉOREME 10. — *Soit (X_τ, ω_τ) une suite de surfaces de translation dans une strate $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_r)$ telle que (X_τ) converge vers une surface de Riemann stable X_∞ . Considérons une composante irréductible $Y_{\infty,j}$ de X_∞ , soient $Y_{\tau,j}$ la composante épaisse correspondante dans X_τ et $\lambda(Y_{\tau,j})$ la taille de son représentant plat. Notons $\omega_{\tau,j} = \lambda(Y_{\tau,j})^{-1} \omega_\tau$. Alors une sous-suite de $(\omega_{\tau,j})_\tau$ restreinte à $\hat{Y}_{\tau,j}$ converge vers une 1-forme méromorphe non nulle ω_j sur (le représentant plat de) $Y_{\infty,j}$. Les zéros et pôles de ω_j sont les limites de ceux de $\omega_{\tau',j}$ et éventuellement les nœuds.*

La démonstration de ce théorème n'est pas difficile une fois admis le théorème de Rafi. À quelques détails près, il faut construire une triangulation de $Y_{\tau,j}$ par liens de selles de longueur bornée après avoir renormalisé par la taille. Ceci s'obtient par récurrence vu que le diamètre de $Y_{\tau,j}$ est contrôlé par la taille. On a alors un ensemble

15. Si on ne renormalise pas, on peut très facilement imaginer une partie de la surface stable où la forme limite est nulle.

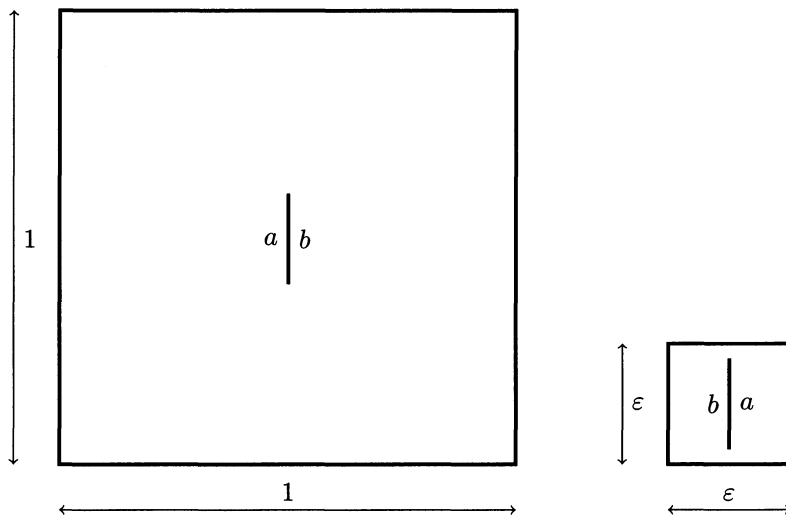


FIGURE 8. Deux tores recollés le long d'un lien de selles, celui de droite est d'aire beaucoup plus petite que celui de gauche.

compact de structures plates (vu que les longueurs des arêtes de la triangulation sont bornées), il suffit alors de prendre une limite de ces structures.

2.5. Déterminant du laplacien près du bord et théorème de Lundelius

Comme nous l'avons déjà expliqué, une idée fondamentale est d'établir un lien entre le déterminant relatif du laplacien pour la métrique plate et pour la métrique hyperbolique. Eskin, Kontsevich et Zorich donnent une estimée sur la différence entre ces deux quantités et montrent que leurs valeurs au bord de l'espace des modules sont équivalentes, même si elles sont toutes deux non bornées. Dans toute la suite, nous notons $\ell_{\text{plat}}(S)$ la longueur du plus petit lien de selles sur une surface de translation S . Le résultat est le suivant :

THÉORÈME 11. — *Soient (X, ω) une surface de translation et X_0 un point base dans la même strate que X . Alors*

$$|\log \det \Delta_{\text{plat}}(X, X_0) - \log \det \Delta_{\text{hyp}}(X, X_0)| = O(|\log \ell_{\text{plat}}(X)|).$$

Dans l'article original, les auteurs produisent des estimées explicites. Les constantes sont universelles et ne dépendent que du genre, du nombre de zéros et de la surface de référence X_0 .

Un théorème de Lundelius [Lu] donne un développement asymptotique de $\log \det \Delta_{\text{hyp}}$ lorsqu'un certain nombre de courbes dégénèrent.

THÉOREME 12 (Lundelius). — *Soient (C_τ) une famille de surfaces hyperboliques de volume fini, de type topologique fixé, qui tend vers une courbe stable C_∞ , et C_0 une surface de référence de même type topologique que C_τ . Alors*

$$-\log |\det \Delta_{\text{hyp}}(C_\tau, C_0)| = \sum_k \frac{\pi^2}{3\ell_{\tau,k}} + O(-\log \ell_{\text{hyp}}(C_\tau)) + O(1)$$

lorsque τ tend vers l'infini, où $\ell_{\tau,k}$ sont les longueurs des géodésiques hyperboliques pincées et $\ell_{\text{hyp}}(C_\tau)$ est la longueur hyperbolique de la plus petite géodésique sur C_τ .

Ce théorème est une généralisation de résultats de Wolpert [Wo] et d'Osgood, Phillips et Sarnak [OPS] dans le cas compact. Une étape de la preuve du théorème 3 consiste à combiner le théorème 11 avec le théorème de Lundelius pour obtenir un développement asymptotique de la fonction zêta de Δ_{plat} . Les auteurs prouvent le théorème suivant :

THÉOREME 13. — *Pour toute strate $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_r)$, il existe une constante M telle que*

$$-\log |\det \Delta_{\text{plat}}(X, X_0)| = \frac{\pi}{3} \sum_{\substack{\text{cylindres } \mathcal{C} \\ \text{avec } h_{\mathcal{C}}/w_{\mathcal{C}} \geq M}} \frac{h_{\mathcal{C}}}{w_{\mathcal{C}}} + O(-\log \ell_{\text{plat}}(S))$$

où $h_{\mathcal{C}}$ est la hauteur du cylindre $\mathcal{C}$, $w_{\mathcal{C}}$ sa circonférence et X_0 une surface de référence dans la strate $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_r)$.

Les démonstrations de ces théorèmes sont très techniques, calculatoires et développées sur plusieurs dizaines de pages, nous n'allons évidemment pas les détailler. Nous donnons simplement quelques repères qui aideront le lecteur à comprendre la structure de la preuve.

La première idée est la formule de Polyakov (5) qui permet d'exprimer la différence

$$\log \det \Delta_{\text{plat}}(S, S_0) - \log \det \Delta_{\text{hyp}}(S, S_0)$$

sous forme intégrale. Nous avons expliqué plus haut que l'on considère des déterminants relatifs en régularisant les métriques (plates et hyperboliques) aux voisinage des zéros. Il faut donc comprendre la contribution de ces points. C'est l'objet de la partie 6 de l'article qui est essentiellement calculatoire. Ensuite, il faut tirer profit du théorème 10 et estimer

$$\log \det \Delta_{\text{plat}}(S, S_0) - \log \det \Delta_{\text{hyp}}(S, S_0)$$

lorsque les surfaces dégénèrent. On obtient alors une version forte du théorème 11. Pour passer du théorème de Lundelius au théorème 13, il faut montrer que la contribution des anneaux euclidiens est négligeable et que $|\log \ell_{\text{hyp}}| = O(|\log \ell_{\text{plat}}|)$. Le lemme clé est ici la relation entre module et longueur de géodésique.

LEMME 14. — *Si A est un cylindre de module M , il existe une unique géodésique pour sa métrique hyperbolique dont la longueur hyperbolique est π/M .*

Ceci est totalement classique⁽¹⁶⁾. Lorsqu'un cylindre de grand module est contenu dans une surface hyperbolique, on a approximativement le même résultat pour la métrique hyperbolique de la surface. La subtilité est que la métrique hyperbolique du cylindre n'est pas la même que celle de la surface ambiante. Les estimées précises sont dues à Masur, Minsky et Wolpert. Pour les cylindres plats, la circonférence du cylindre est donc approximativement la longueur de la géodésique hyperbolique correspondante. Par contre, pour les anneaux, la longueur de la géodésique hyperbolique est de l'ordre du logarithme de la longueur plate de la courbe correspondante. Ainsi, la contribution des anneaux est comprise dans le terme d'erreur en $O(|\log \ell_{\text{plat}}(S)|)$.

2.6. Déterminant du laplacien et constantes de Siegel-Veech

La dernière partie importante de l'article (Section 9) prouve le théorème suivant :

THÉORÈME 15. — *Soient $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_r)$ une strate de 1-formes holomorphes, ν_1 la mesure normalisée de Masur-Veech associée et $C_{\text{aire}}(\nu)$ la constante de Siegel-Veech correspondante. Alors*

$$\int_{\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)} \Delta_{\text{Teich}} \log \Delta_{\text{plat}}(X, X_0) d\nu_1(X) = -\frac{4}{3}\pi^2 C_{\text{aire}}(\nu)$$

où X_0 est n'importe quelle surface de référence dans la strate.

Ce résultat combiné avec le théorème de Riemann-Roch analytique donne bien entendu le résultat principal.

Donnons tout d'abord une idée heuristique du lien entre les deux membres de l'égalité ci-dessus. En utilisant la formule de Green, le terme de gauche se réécrit comme une intégrale sur un voisinage du bord de la strate. Vu le théorème 13, le terme dominant est une intégrale sur les cylindres de grands modules. Les constantes de Siegel-Veech mesurent elles aussi la contribution de (certains) cylindres de grands modules. On compte donc intuitivement la même chose. Essayons d'expliquer cela un peu plus précisément.

Rappelons tout d'abord la formule classique de Siegel-Veech [Ve3], ainsi que quelques faits dus à Eskin-Masur [EM] utilisant les constantes de Siegel-Veech.

Soient (X, ω) une surface de translation, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact et $V(X)$ l'ensemble des vecteurs d'holonomie des liens de selles sur

16. On pourra voir le livre de Hubbard [Hu] où les calculs de géométrie hyperbolique sont fort bien présentés.

une surface de translation $X^{(17)}$, c'est-à-dire les vecteurs $\int_{\gamma} \omega$ où γ parcourt l'ensemble des liens de selles sur X . On définit la transformée de Siegel-Veech de f par la formule

$$\hat{f}(X) = \sum_{v \in V(X)} f(v) ;$$

$\hat{f}$ est bien définie car $V(X)$ est un ensemble discret et f est à support compact.

LEMME 16 (Formule de Siegel-Veech). — *Il existe une constante $\hat{c}(\nu)$ telle que, pour tout f continue à support compact sur $\mathbb{R}^2$,*

$$\int_{\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)} \hat{f}(X) d\nu_1 = \hat{c}(\nu) \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy.$$

D'après [EM], la constante $\hat{c}(\nu)$ est exactement celle qui intervient dans l'asymptotique quadratique du nombre de liens de selles sur une surface générique. De plus, la formule est aussi valable pour des fonctions plus générales, comme par exemple les fonctions caractéristiques de boules.

La démonstration de la formule est très simple. L'application

$$f \mapsto \int_{\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)} \hat{f}(X) d\nu_1$$

est une forme linéaire continue positive, donc une mesure. Comme $V(X)$ est équivariant sous l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, cette mesure est invariante par cette action. C'est donc une combinaison de la mesure de Dirac en $(0, 0)$ et de la mesure de Lebesgue. On voit, en testant sur des fonctions *ad hoc*, que c'est un multiple de la mesure de Lebesgue, d'où le résultat.

Voici un exemple d'application de cette formule :

LEMME 17. — *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\nu_1 \{ (X, \omega) \text{ telles que } \ell_{\mathrm{plat}}(X) < \varepsilon \} \leq C\varepsilon^2.$$

Nous donnons une idée de la preuve car elle est simple et instructive. Notons $N(X, L)$ le nombre de liens de selles de longueur au plus L . On rappelle que cette quantité croît quadratiquement quand L tend vers l'infini, regardons son comportement quand L tend vers 0. La formule de Siegel-Veech appliquée à la fonction indicatrice de la boule de $\mathbb{R}^2$ centrée en 0 de rayon ε nous dit que

$$\int_{\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)} N(X, \varepsilon) d\nu_1(X) = \hat{c}(\nu) \pi \varepsilon^2$$

où $\hat{c}(\nu)$ est la constante de Siegel-Veech du problème de comptage des liens de selles. Vu que, lorsque $\ell_{\mathrm{plat}}(X) < \varepsilon$ on a $N(X, \varepsilon) > 1$, on obtient le résultat du lemme.

17. $V(X)$ peut aussi être l'ensemble des vecteurs d'holonomie des âmes des cylindres sur X .

Une conséquence de ce lemme est que, pour tout $\beta < 2$, $\ell_{\text{plat}}^{-\beta}$ est intégrable. Eskin-Masur montrent également le résultat suivant :

THÉORÈME 18 (Eskin-Masur). — *Pour tout β tel que $1 < \beta < 2$ et pour tout ε assez petit, on a*

$$N(X, \varepsilon) = O(\ell_{\text{plat}}(X)^{-\beta}).$$

La preuve de ce résultat ([EM, Th. 5.1]) est nettement plus délicate que celle du lemme 17.

Nous allons maintenant expliquer deux lemmes simples qui donnent un aperçu de la stratégie de preuve du théorème 15. Fixons un réel K qui sera toujours supposé suffisamment grand, et notons $\text{Cyl}_K(X)$ l'ensemble des cylindres de modules au moins K sur X . Pour K assez grand, les cylindres de module au moins K sont disjoints (car les géodésiques hyperboliques associées sont simultanément courtes). Ainsi $\text{Cyl}_K(X)$ contient au plus $3g - 3 + r$ éléments. On définit

$$\ell_K(X) = \min\{w(C), C \in \text{Cyl}_K(X)\}.$$

On donnera 1 comme valeur à $\ell_K(X)$ lorsque l'ensemble est vide. Il est bien clair que

$$\ell_K(X) \geq \ell_{\text{plat}}(X)$$

vu qu'un cylindre plat est bordé par des liens de selles. Soit χ_ε la fonction caractéristique de l'ensemble des surfaces de translation (X, ω) tels que $\ell_K(X) \geq \varepsilon$. On définit en premier lieu une fonction auxiliaire qui sert à régulariser. Soit $\eta: \text{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction régulière positive $\text{SO}_2(\mathbb{R})$ invariante telle que $\int_{\text{SL}_2(\mathbb{R})} \eta(g) dg = 1$, de support contenu dans la couronne des éléments g tels que $1/2 < \|g\| < 2$. La norme sur $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ est la norme induite par la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$. On définit

$$f_\varepsilon(X) = \int_{\text{SL}_2(\mathbb{R})} \eta(g) \chi_\varepsilon(gX) dg.$$

La fonction f_ε satisfait les propriétés suivantes :

$$(1) \quad f_\varepsilon(X) = 0 \text{ si } \ell_K(X) \leq \varepsilon/2$$

$$(2) \quad f_\varepsilon(X) = 1 \text{ si } \ell_K(X) \geq 2\varepsilon$$

(3) f_ε est régulière le long des disques de Teichmüller et son gradient ainsi que son laplacien sont bornés indépendamment de ε .

Autrement dit, le gradient de f_ε est concentré sur une couronne

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \{X \text{ tel que } \varepsilon/2 \leq \ell_K(X) \leq 2\varepsilon\}$$

qui est bien sûr un voisinage du bord et $f_\varepsilon(X)$ tend vers 1 lorsque ε tend vers 0.

Posons

$$\psi^K(X) = \sum_{C \in \text{Cyl}_K(X)} (\text{Mod}(C) - K).$$

Par construction, la fonction ψ^K est une fonction continue et régulière par morceaux. Pour se rapprocher un peu du problème de comptage intervenant dans la définition des constantes de Siegel-Veech, il est important de ne considérer que les cylindres qui sont parallèles à celui dont l'âme est la plus courte. On note $\widetilde{\text{Cyl}}_K(X)$ l'ensemble de ces cylindres et on pose

$$\tilde{\psi}^K(X) = \sum_{C \in \widetilde{\text{Cyl}}_K(X)} (\text{Mod}(C) - K).$$

Les fonctions ψ^K et $\tilde{\psi}^K$ ont un comportement analogue près du bord. Ce point est technique mais important : c'est exactement à ce niveau que l'hypothèse de régularité de la mesure intervient dans la preuve générale. Pour les strates, Eskin-Masur-Zorich montrent que l'ensemble des surfaces qui ont deux liens de selles non homologues de longueur au plus ε est de mesure ε^4 . Le lemme 17 dit que l'ensemble des surfaces avec un lien de selles de longueur au plus ε a une mesure au plus de l'ordre de ε^2 . Ainsi des surfaces génériques proches du bord ont uniquement des liens de selles courts parallèles. On montre alors :

LEMME 19. — *Avec les notations précédentes, on a*

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)} \Delta_{\text{Teich}} \log \Delta_{\text{plat}}(X, X_0) d\nu_1 \\ = \frac{\pi}{3} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)} \nabla_{\text{Teich}} \tilde{\psi}^K(X) \cdot \nabla_{\text{Teich}} f_\varepsilon d\nu_1. \end{aligned}$$

Donnons un schéma de preuve pour comprendre comment interviennent les arguments introduits plus haut. Posons $f = \log \Delta_{\text{plat}}(X, X_0)$ pour simplifier les notations. Par la formule de Green, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)} \Delta_{\text{Teich}} f d\nu_1 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)} f_\varepsilon \Delta_{\text{Teich}} f d\nu_1 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)} f \Delta_{\text{Teich}} f_\varepsilon d\nu_1. \end{aligned}$$

On utilise ici le théorème 13 pour estimer f pour obtenir le développement

$$f(X) = -\frac{\pi}{3} \psi^K(X) + O(\log(\ell_{\text{plat}}(X))).$$

Rappelons que $\Delta_{\text{Teich}} f_\varepsilon$ est borné et que son support est contenu dans la couronne $\mathcal{A}_\varepsilon$. D'après le lemme 17 et le fait que $\ell_K(X) \geq \ell_{\text{plat}}(X)$, on a $\nu_1(\mathcal{A}_\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$. De plus, le lemme pré-cité entraîne que la fonction $X \rightarrow \log(\ell_{\text{plat}}(X))$ est intégrable sur $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)$. Ainsi, en appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)} |\log \ell_{\text{plat}}| \Delta_{\text{Teich}} f_\varepsilon = 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)} \Delta_{\text{Teich}} \log \Delta_{\text{plat}}(X, X_0) d\nu_1 \\ = \frac{\pi}{3} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)} \nabla_{\text{Teich}} \psi^K(X) \cdot \nabla_{\text{Teich}} f_\varepsilon d\nu_1. \end{aligned}$$

Reste à comparer ψ^K et $\tilde{\psi}^K$ au voisinage du bord, ce qui se fait sans mal avec le discours précédent.

Nous passons maintenant au second lemme qui exprime la constante de Siegel-Veech sous forme intégrale. Notons $\text{Cyl}(X, \varepsilon)$ les cylindres plats sur X qui ont une âme de longueur plate entre $\varepsilon/2$ et ε .

LEMME 20. — *Si on pose*

$$\tilde{N}_{\text{aire}}^K(X, \varepsilon) = \sum_{C \in \widetilde{\text{Cyl}}_K(X) \cap \text{Cyl}(X, \varepsilon)} \text{Aire}(C)$$

on a

$$C_{\text{aire}}(\nu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4}{3\pi\varepsilon^2} \int_{\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)} \tilde{N}_{\text{aire}}^K(X, \varepsilon) d\nu_1(X).$$

Montrons le résultat en remplaçant $\widetilde{\text{Cyl}}_K$ par Cyl_K , ce qui ne change presque rien. Notons $\hat{N}_{\text{aire}}(X, \varepsilon)$ la contribution d'une couronne, c'est-à-dire $N_{\text{aire}}(X, \varepsilon) - N_{\text{aire}}(X, \varepsilon/2)$. Une fois de plus, la formule de Siegel-Veech nous permet d'écrire $C_{\text{aire}}(\nu)$ sous forme intégrale : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(6) \quad C_{\text{aire}}(\nu) = \frac{4}{3\pi\varepsilon^2} \int_{\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)} \hat{N}_{\text{aire}}(X, \varepsilon) d\nu_1(X).$$

Si C est un cylindre dans $\text{Cyl}(X, \varepsilon) \setminus \text{Cyl}_K(X)$,

$$\text{Aire}(C) = \frac{h}{w} \times w^2 < K\varepsilon^2.$$

Par le théorème 18, $N(X, \varepsilon) = O(\ell_{\text{plat}}(X)^{-\beta})$ pour $1 < \beta < 2$, donc

$$\hat{N}_{\text{aire}}(X, \varepsilon) - N_{\text{aire}}^K(X, \varepsilon) \leq \kappa K\varepsilon^2 \ell_{\text{plat}}(X)^{-\beta}$$

où κ est une constante indépendante de ε . On intègre cette inégalité sur l'ensemble des surfaces de translation (X, ω) telles que $\ell(X) < \varepsilon$. Pour le membre de gauche cela revient à intégrer sur la strate tout entière. Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)} (\hat{N}_{\text{aire}}(X, \varepsilon) - N_{\text{aire}}^K(X, \varepsilon)) d\nu_1(X) \\ \leq \kappa K \int_{\{(X, \omega) \mid \ell_{\text{plat}}(X) < \varepsilon\}} \ell_{\text{plat}}(X)^{-\beta} d\nu_1(X). \end{aligned}$$

L'intégrabilité de $\ell_{\text{plat}}^{-\beta}$ et le lemme 17 impliquent que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_r)} (\hat{N}_{\text{aire}}(X, \varepsilon) - N_{\text{aire}}^K(X, \varepsilon)) d\nu_1(X) = 0.$$

Dans l'équation (6), on peut donc remplacer $\hat{N}_{\text{aire}}(X, \varepsilon)$ par $N_{\text{aire}}^K(X, \varepsilon)$ ce qui prouve le lemme.

Pour conclure, on voit bien que les lemmes 19 et 20 permettent de rapprocher la moyenne de $\Delta_{\text{Teich}} \log \det \Delta_{\text{flat}}$ et la constante de Siegel-Veech C_{aire} . Quelques efforts supplémentaires et pas mal de technique sont nécessaires pour obtenir une preuve complète du théorème 15.

Remerciements. — Nous remercions tout d'abord les auteurs qui ont répondu à nos questions avec beaucoup de patience et de gentillesse. Ce texte n'aurait pas vu le jour sans C. Boissy et E. Lanneau, merci à eux deux. Nous remercions enfin G. Merlet, J.H. Hubbard, E. Russ et C. Soulé pour des discussions fort utiles.

RÉFÉRENCES

- [AF] A. AVILA & G. FORNI – « Weak mixing for interval exchange transformations and translation flows », *Ann. of Math. (2)* **165** (2007), no. 2, p. 637–664.
- [AMY] A. AVILA, C. MATHEUS & J.-C. YOCOZ – « $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ -invariant probability measures on the moduli spaces of translation surfaces are regular », *Geom. Funct. Anal.* **23** (2013), no. 6, p. 1705–1729.
- [AV] A. AVILA & M. VIANA – « Simplicity of Lyapunov spectra: proof of the Zorich-Kontsevich conjecture », *Acta Math.* **198** (2007), no. 1, p. 1–56.
- [BGV] N. BERLINE, E. GETZLER & M. VERGNE – *Heat kernels and Dirac operators*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [BO] S. BLOCH & A. OKOUNKOV – « The character of the infinite wedge representation », *Adv. Math.* **149** (2000), no. 1, p. 1–60.
- [BM] I. I. BOUW & M. MÖLLER – « Teichmüller curves, triangle groups, and Lyapunov exponents », *Ann. of Math. (2)* **172** (2010), no. 1, p. 139–185.
- [CM] D. CHEN & M. MÖLLER – « Nonvarying sums of Lyapunov exponents of Abelian differentials in low genus », *Geom. Topol.* **16** (2012), no. 4, p. 2427–2479.
- [DHL] V. DELECROIX, P. HUBERT & S. LELIÈVRE – « Diffusion for the wind-tree model », arXiv:1107.1810, 2011.

- [EKZ1] A. ESKIN, M. KONTSEVICH & A. ZORICH – « Lyapunov spectrum of square-tiled cyclic covers », *J. Mod. Dyn.* **5** (2011), no. 2, p. 319–353.
- [EKZ2] ———, « Sum of Lyapunov exponents of the Hodge bundle with respect to the Teichmüller geodesic flow », à paraître dans *Publ. Math. IHÉS*.
- [EM] A. ESKIN & H. MASUR – « Asymptotic formulas on flat surfaces », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **21** (2001), no. 2, p. 443–478.
- [EMZ] A. ESKIN, H. MASUR & A. ZORICH – « Moduli spaces of abelian differentials: the principal boundary, counting problems, and the Siegel-Veech constants », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2003), no. 97, p. 61–179.
- [EMi] A. ESKIN & M. MIRZAKHANI – « Invariant and stationary measures for the $SL_2(\mathbb{R})$ action on moduli spaces », preprint arXiv 1302.3320.
- [EO] A. ESKIN & A. OKOUNKOV – « Asymptotics of numbers of branched coverings of a torus and volumes of moduli spaces of holomorphic differentials », *Invent. Math.* **145** (2001), no. 1, p. 59–103.
- [Fo] G. FORNI – « Deviation of ergodic averages for area-preserving flows on surfaces of higher genus », *Ann. of Math. (2)* **155** (2002), no. 1, p. 1–103.
- [FMZ] G. FORNI, C. MATHEUS & A. ZORICH – « Square-tiled cyclic covers », *J. Mod. Dyn.* **5** (2011), no. 2, p. 285–318.
- [Hu] J. H. HUBBARD – *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics I. Teichmüller theory* (With contributions by Adrien Douady, William Dunbar, Roland Roeder, Sylvain Bonnot, David Brown, Allen Hatcher, Chris Hruska and Sudeb Mitra. With forewords by William Thurston and Clifford Earle), Matrix Editions, Ithaca, 2006.
- [KMS] S. KERCKHOFF, H. MASUR & J. SMILLIE – « Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials », *Ann. of Math. (2)* **124** (1986), no. 2, p. 293–311.
- [KK] A. KOKOTOV & D. KOROTKIN – « Tau-functions on spaces of abelian differentials and higher genus generalizations of Ray-Singer formula », *J. Differential Geom.* **82** (2009), no. 1, p. 35–100.
- [Ko] M. KONTSEVICH – « Lyapunov exponents and Hodge theory », in *The mathematical beauty of physics (Saclay, 1996)*, Adv. Ser. Math. Phys., vol. 24, World Scientific, River Edge, 1997, p. 318–332.
- [KZ1] ———, « Lyapunov exponents and Hodge theory », in *The mathematical beauty of physics (Saclay, 1996)*, Adv. Ser. Math. Phys., vol. 24, World Scientific, River Edge, 1997, p. 318–332.
- [KZ2] M. KONTSEVICH & A. ZORICH – « Connected components of the moduli spaces of Abelian differentials with prescribed singularities », *Invent. Math.* **153** (2003), no. 3, p. 631–678.

- [Kr] R. KRIKORIAN – « Déviations de moyennes ergodiques, flots de Teichmüller et cocycle de Kontsevich-Zorich (d'après Forni, Kontsevich, Zorich...) », in *Séminaire Bourbaki*, vol. 2003/2004, Astérisque, vol. 299, Soc. Math. France, Paris, 2005, exp. n° 927, p. 59–93.
- [La] E. LANNEAU – « Connected components of the strata of the moduli spaces of quadratic differentials », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **41** (2008), no. 1, p. 1–56.
- [Lu] R. E. LUNDELIUS – « Asymptotics of the determinant of the Laplacian on hyperbolic surfaces of finite volume », *Duke Math. J.* **71** (1993), no. 1, p. 211–242.
- [Ma1] H. MASUR – « Interval exchange transformations and measured foliations », *Ann. of Math. (2)* **115** (1982), no. 1, p. 169–200.
- [Ma2] ———, « The growth rate of trajectories of a quadratic differential », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **10** (1990), no. 1, p. 151–176.
- [MT] H. MASUR & S. TABACHNIKOV – « Rational billiards and flat structures », in *Handbook of dynamical systems 1A*, North-Holland, Amsterdam, 2002, p. 1015–1089.
- [Mc1] C. T. MCMULLEN – « Billiards and Teichmüller curves on Hilbert modular surfaces », *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), no. 4, p. 857–885.
- [Mc2] ———, « Teichmüller geodesics of infinite complexity », *Acta Math.* **191** (2003), no. 2, p. 191–223.
- [Mc3] ———, « Dynamics of $SL_2(\mathbb{R})$ over moduli space in genus two », *Ann. of Math. (2)* **165** (2007), no. 2, p. 397–456.
- [Mc4] ———, « Teichmüller curves in genus two : discriminant and spin », *Math. Ann.* **333** (2005), no. 1, p. 87–130.
- [Mc5] ———, « Teichmüller curves in genus two : the decagon and beyond », *J. reine angew. Math.* **582** (2005), p. 173–199.
- [Mc6] ———, « Teichmüller curves in genus two : torsion divisors and ratios of sines », *Invent. Math.* **165** (2006), no. 3, p. 651–672.
- [OPS] B. OSGOOD, R. PHILLIPS & P. SARNAK – « Extremals of determinants of Laplacians », *J. Funct. Anal.* **80** (1988), no. 1, p. 148–211.
- [Pe] C. A. M. PETERS – « A criterion for flatness of Hodge bundles over curves and geometric applications », *Math. Ann.* **268** (1984), no. 1, p. 1–19.
- [Po] A. M. POLYAKOV – « Quantum geometry of fermionic strings », *Phys. Lett. B* **103** (1981), no. 3, p. 211–213.

- [Ra1] K. RAFI – « A characterization of short curves of a Teichmüller geodesic », *Geom. Topol.* **9** (2005), p. 179–202.
- [Ra2] ———, « Thick-thin decomposition for quadratic differentials », *Math. Res. Lett.* **14** (2007), no. 2, p. 333–341.
- [RS] D. B. RAY & I. M. SINGER – « Analytic torsion for complex manifolds », *Ann. of Math. (2)* **98** (1973), p. 154–177.
- [SW] J. SMILLIE & B. WEISS – « Characterizations of lattice surfaces », *Invent. Math.* **180** (2010), no. 3, p. 535–557.
- [So] C. SOULÉ – *Lectures on Arakelov geometry*, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 33, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992, with the collaboration of D. Abramovich, J.-F. Burnol and J. Kramer.
- [Ve1] W. A. VEECH – « Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps », *Ann. of Math. (2)* **115** (1982), no. 1, p. 201–242.
- [Ve2] ———, « Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards », *Invent. Math.* **97** (1989), no. 3, p. 553–583.
- [Ve3] ———, « Siegel measures », *Ann. of Math. (2)* **148** (1998), no. 3, p. 895–944.
- [Vi] M. VIANA – « Dynamics of interval exchange maps and Teichmüller flows », preprint, 2007.
- [Wo] S. A. WOLPERT – « Asymptotics of the spectrum and the Selberg zeta function on the space of Riemann surfaces », *Comm. Math. Phys.* **112** (1987), no. 2, p. 283–315.
- [Yo1] J.-C. YOCOZ – « Continued fraction algorithms for interval exchange maps: an introduction », in *Frontiers in number theory, physics, and geometry I*, Springer, Berlin, 2006, p. 401–435.
- [Yo2] ———, « Échanges d'intervalles et surfaces de translation », in *Séminaire Bourbaki, vol. 2007/2008*, Astérisque, vol. 326, Soc. Math. France, Paris, 2009, exp. n° 996, p. 387–409.
- [Zo1] A. ZORICH – « Finite Gauss measure on the space of interval exchange transformations. Lyapunov exponents », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **46** (1996), no. 2, p. 325–370.
- [Zo2] ———, « Deviation for interval exchange transformations », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **17** (1997), no. 6, p. 1477–1499.
- [Zo3] ———, « How do the leaves of a closed 1-form wind around a surface? », in *Pseudoperiodic topology*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 197, Amer. Math. Soc., Providence, 1999, p. 135–178.

- [Zo4] A. ZORICH – « Flat surfaces », in *Frontiers in number theory, physics, and geometry I*, Springer, Berlin, 2006, p. 437–583.

Julien GRIVAUX & Pascal HUBERT

Université d'Aix-Marseille

Centre de Mathématiques et Informatique (CMI)

Technopôle Château-Gombert

39, rue F. Joliot Curie

13453 Marseille Cedex 13

France

E-mail : `jgrivaux@math.cnrs.fr`

E-mail : `pascal.hubert@univ-amu.fr`