

# *Astérisque*

PIERRE CARTIER

**Nouveaux développements sur les valeurs des caractères des groupes symétriques; méthodes combinatoires [d'après V. Féray, ...]**

*Astérisque*, tome 361 (2014), Séminaire Bourbaki, exp. n° 1071, p. 373-396

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_2014\\_\\_361\\_\\_373\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_2014__361__373_0)

© Société mathématique de France, 2014, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

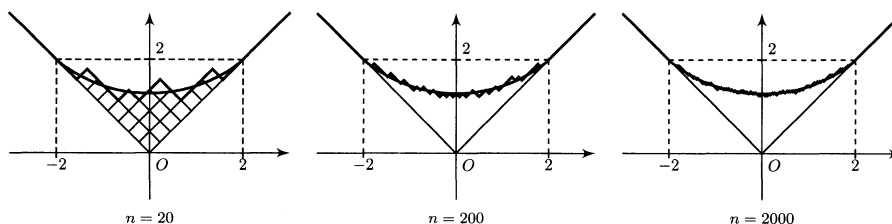
**NOUVEAUX DÉVELOPPEMENTS SUR LES VALEURS DES  
CARACTÈRES DES GROUPES SYMÉTRIQUES;  
MÉTHODES COMBINATOIRES**  
[d'après V. Féray, ...]

par **Pierre CARTIER**

**INTRODUCTION**

Il est difficile d'innover dans un sujet aussi vénérable que l'étude des caractères des groupes symétriques. L'ouverture a été faite dans l'article fondateur de Frobenius [A2] en 1900, suivi par Schur [A11] en 1901, et par Young [A13] en 1928. On dispose aujourd'hui d'un bon nombre d'excellents exposés d'ensemble [A5, A6, A8, A9, A10, A12].

Les travaux dont nous allons parler ont leur origine dans l'École de Saint-Petersbourg (autrefois Leningrad) : Kerov, Vershik, Olshanski, Ivanov, Okunkov... Leur motivation initiale était l'étude des *représentations factorielles du groupe symétrique*  $S_\infty$ , réunion de la suite des groupes symétriques  $S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_n \subset S_{n+1} \subset \dots$ . Il s'agissait d'un exemple emblématique des méthodes d'algèbres d'opérateurs dans les espaces de Hilbert. En un sens convenable, il faut passer à la limite sur les diagrammes de Young de taille croissante. Il apparut vite que cela revenait à étudier la forme limite de diagrammes de Young aléatoires ; voici une illustration d'une simulation numérique sur des tableaux de taille 20, 200, puis 2000. La courbe limite se dessine très nettement.



Une autre source d'inspiration est venue des *probabilités non commutatives*. Le cadre est le suivant :

- un espace de Hilbert séparable  $\mathcal{H}$  ;
- une algèbre de von Neumann  $A$  d'opérateurs bornés dans  $\mathcal{H}$  (stable par l'adjonction  $x \mapsto x^*$  et fermée pour la topologie faible de la dualité entre  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  et l'espace  $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$  des opérateurs à trace) ;
- un état  $\mathbb{E}$  sur  $A$  (forme linéaire faiblement continue, positive  $\mathbb{E}(x^*x) \geq 0$ , telle que  $\mathbb{E}(1) = 1$ ).

Lorsque l'algèbre  $A$  est *commutative*, on est ramené au cas probabiliste usuel : un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , avec  $A = L^\infty(\Omega, \mathbb{P})$  agissant par multiplication sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathbb{P})$ , et  $\mathbb{E}[f] = \int_\Omega f d\mathbb{P}$  pour  $f$  dans  $A$ .

Vers 1970, Voiculescu a entrepris l'étude du cas fourni par l'algèbre de von Neumann engendrée par un *groupe libre*  $G$  agissant par la représentation régulière dans l'espace  $\ell^2(G)$ . Voiculescu a découvert que les générateurs du groupe libre satisfont à une propriété qui se réduit dans le cas des probabilités commutatives à l'indépendance stochastique. Ce nouveau domaine fut baptisé : « *probabilités libres* ». Les moments et les cumulants classiques des variables aléatoires se généralisent en « *cumulants libres* » qui font intervenir la combinatoire des « *partitions non-croisées* ». Le petit miracle est que ces partitions non-croisées correspondent aux factorisations minimales  $\gamma_k = \tau\sigma$  d'une permutation circulaire  $\gamma_k$  dans le groupe symétrique  $S_k$  (cf. section 2.3.4). Ces factorisations minimales vont à leur tour se décrire au moyen des cartes biparties unicellulaires (cf. section 2.1.2). *Ces cartes seront le thème central des méthodes combinatoires décrites à la section 2.*

Si  $\lambda$  est une partition de  $n$ , et  $\chi^\lambda$  le caractère de  $S_n$  correspondant à  $\lambda$ , on considère les valeurs normalisées des caractères

$$\text{Ch}_k(\lambda) := \frac{n!}{(n-k)!} \frac{\chi^\lambda(\gamma_k)}{\chi^\lambda(1)}$$

pour  $n \geq k$ . Utilisant les méthodes de probabilités libres, Biane [C1] a étudié le comportement asymptotique de  $\text{Ch}_k(\lambda)$  quand  $n$  croît, et que le nombre de lignes et de colonnes de  $\lambda$  est d'ordre  $O(\sqrt{n})$ . La clé est fournie par les homothéties : identifiant  $\lambda$  à une région  $D_\lambda$  du plan  $\mathbb{R}^2$ , l'homothétie de rapport  $t$  ( $t \geq 1$  entier) transforme  $D_\lambda$  en  $D_{h_t(\lambda)}$  pour une partition  $h_t(\lambda)$  de  $nt^2$ . Biane prouve que la limite

$$R_{k+1}(\lambda) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Ch}_k(h_t \lambda) / t^{k+1}$$

existe, et il l'interprète en termes de cumulants libres. En particulier  $R_2(\lambda)$  est la taille  $|\lambda|$  de  $\lambda$ .

Il est remarquable que les quantités  $\text{Ch}_k(\lambda)$  et  $R_k(\lambda)$  sont *polynomiales* : introduisant les coordonnées multirectangulaires  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  (cf. section 1.1.5) de  $\lambda$ , on a des expressions polynomiales en  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ . De plus, il existe des formules universelles liant les  $\text{Ch}_k$  et les  $R_k$  : voici un échantillon

$$\begin{aligned}\text{Ch}_1 &= R_2 \\ \text{Ch}_2 &= R_3 \\ \text{Ch}_3 &= R_4 + R_2 \\ \text{Ch}_4 &= R_5 + 5 R_3 \\ \text{Ch}_5 &= R_6 + 15 R_4 + 5 R_2^2 + 8 R_2 \\ \text{Ch}_6 &= R_7 + 35 R_5 + 35 R_2 R_3 + 84 R_3.\end{aligned}$$

Dans [C2], p. 199, Biane<sup>(1)</sup> donne les valeurs de  $\text{Ch}_7$  à  $\text{Ch}_{11}$ . Il y a une graduation naturelle par le degré total en les variables  $p_1, p_2, \dots; q_1, q_2, \dots$ . Alors  $R_k$  est homogène de degré  $k$ , et le terme de plus haut degré de  $\text{Ch}_k$  est  $R_{k+1}$ , de degré  $k+1$  (cf. section 2.3.3). L'estimation asymptotique de Biane [C1], p. 127, résulte facilement des relations entre les  $R_k$  et les  $\text{Ch}_k$ .

D'une manière générale, Kerov écrit  $\text{Ch}_k$  sous la forme d'un polynôme (de Kerov)

$$K_k(R_2, R_3, \dots, R_{k+1}),$$

et la table ci-dessus suggère la *conjecture de Kerov* : les coefficients de  $K_k$  sont des entiers positifs. Cela a été prouvé récemment par V. Féray [B2] par utilisation de méthodes combinatoires de la théorie des graphes et des cartes. C'est ce que nous allons essayer d'expliquer en suivant ses exposés du cours Peccot 2013 au Collège de France.

## 1. LE GROUPE SYMÉTRIQUE

### 1.1. Notations et préliminaires

1.1.1. — Le *groupe symétrique*  $S_n$  est le groupe des permutations de l'ensemble  $[n]$  des entiers  $1, 2, \dots, n$ . On fait la convention  $[0] = \emptyset$ , d'où  $S_0 = (1)$ . L'élément unité d'un groupe est toujours noté 1. Pour  $1 \leq k \leq n$ , on identifie  $S_k$  à un sous-groupe de  $S_n$ , en faisant correspondre à la permutation  $\sigma$  de  $[k]$  la permutation de  $[n]$  qui fixe tous les éléments de  $[n] \setminus [k]$ . On note  $\gamma_k$  le cycle  $(12 \dots k)$ , vu comme élément de  $S_k$ , donc aussi de  $S_n$  pour  $n \geq k$ .

---

1. Ce que nous notons  $\text{Ch}_k$  est désigné par  $\Sigma_k$  dans Biane, *loc. cit.*

1.1.2. — Une *composition*  $c$  d'un entier  $n \geq 1$  est une suite  $(c_1, \dots, c_k)$  d'entiers strictement positifs de somme  $c_1 + \dots + c_k$  égale à  $n$ . Une *partition*  $\lambda$  de  $n$  est une composition à l'ordre près des éléments, et on peut toujours la normaliser de sorte que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0.$$

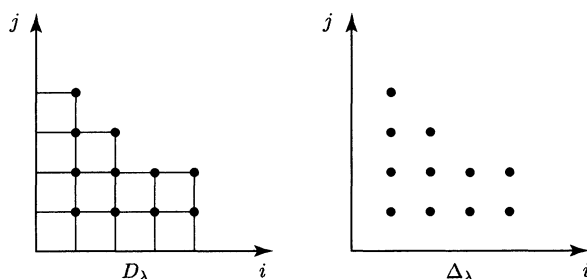
La *longueur* de  $\lambda$ , notée  $\ell(\lambda)$ , est  $k$ ; la *taille* de  $\lambda$ , notée  $|\lambda|$ , est la somme  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k$ . La relation  $|\lambda| = n$  s'écrit aussi souvent  $\lambda \vdash n$ . On est parfois amené à compléter une partition par une suite infinie de zéros. Une *composition* d'un ensemble  $X$  est une suite  $(C_1, \dots, C_k)$  de sous-ensembles non vides, deux à deux disjoints, de  $X$ , de réunion  $X$ . Une *partition*  $\Pi$  de  $X$  est un ensemble de parties non vides de  $X$ , deux à deux disjoints, de réunion  $X$ .

1.1.3. — Les partitions de  $n$  paramétrisent les classes de conjugaison des éléments  $\pi$  de  $S_n$ ; le *type cyclique* de  $\pi$  est la partition  $\lambda$  de  $n$ , soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ , telle que  $\pi$  se compose de cycles de longueurs  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ . Les partitions paramétrisent aussi les représentations irréductibles de  $S_n$  (cf. section 1.2). Pour une partition  $\lambda$  de  $n$ , on note  $\rho^\lambda$  la représentation irréductible correspondante de  $S_n$ ,  $\chi^\lambda$  son *caractère*, et  $\psi^\lambda := \chi^\lambda / \chi^\lambda(1)$  le *caractère normalisé*. Le *degré*  $d_\lambda = \chi^\lambda(1)$  est la dimension de l'espace de la représentation  $\rho^\lambda$ .

1.1.4. — Décrivons les *diagrammes de Young*. Si  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  est une partition de  $n$ , on note  $\Delta_\lambda$  l'ensemble des couples  $(i, j)$  d'entiers tels que

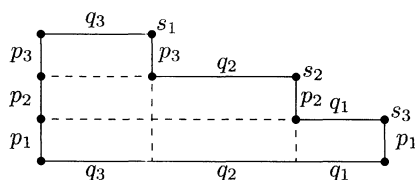
$$1 \leq j \leq k, \quad 1 \leq i \leq \lambda_j.$$

À tout couple  $(i, j)$  on associe le carré  $D_{i,j} = [i-1, i] \times [j-1, j]$  de côté 1 dans  $\mathbb{R}^2$ , dont le sommet nord-est est  $(i, j)$ ; on note aussi  $D_\lambda$  la réunion des carrés  $D_{i,j}$  pour  $(i, j)$  dans  $\Delta_\lambda$  (voir les figures dans le cas de la partition  $\lambda = (4, 4, 2, 1)$  de taille 11).



Le cardinal  $|\Delta_\lambda|$  de  $\Delta_\lambda$  et l'aire  $|D_\lambda|$  de  $D_\lambda$  sont égaux à  $|\lambda|$ . Sur le dessin de  $\Delta_\lambda$ , les lignes et les colonnes sont évidentes. Les longueurs des lignes sont  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ ; celles des colonnes forment une partition  $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_\ell)$  de  $n$ , dite *duale* de  $\lambda$ .

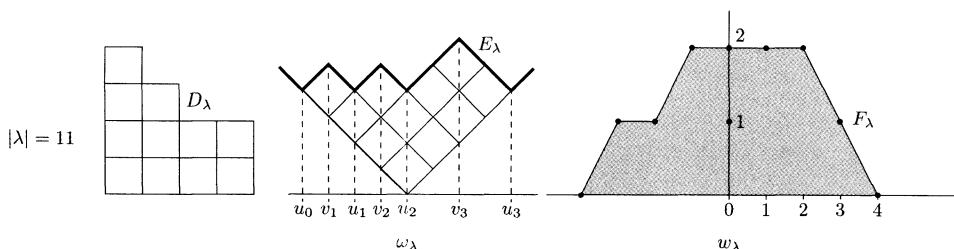
1.1.5. — Si  $p, q$  sont des entiers strictement positifs, on note  $p \times q$  le diagramme rectangulaire formé de  $p$  lignes de longueur  $q$ , et de  $q$  colonnes de longueur  $p$ . Plus généralement, si  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  sont des compositions de même longueur  $m \geq 1$ , le diagramme  $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$  se compose de  $p_j$  lignes de longueur  $q_j + q_{j+1} + \cdots + q_m$  pour  $1 \leq j \leq m$ , et de  $q_j$  colonnes de longueur  $p_1 + \cdots + p_j$ . Il y a en tout  $p_1 + \cdots + p_m$  lignes et  $q_1 + \cdots + q_m$  colonnes. Toute partition  $\lambda$  de  $n$  s'écrit de manière unique sous la forme  $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ ; le diagramme  $\Delta_\lambda$  est alors la réunion de rectangles  $p_i \times q_j$  pour  $1 \leq i \leq j \leq m$ . La taille de la partition  $\lambda$  (ou du diagramme correspondant) est alors  $|\lambda| = \sum_{i \leq j} p_i q_j$ . Notre stratégie sera d'exprimer divers invariants associés à un tableau de Young comme polynômes en les *coordonnées multi-rectangulaires*  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ .



1.1.6. — Venons-en à la *notation russe*<sup>(2)</sup>. Le domaine polygonal  $E_\lambda$  est déduit de  $D_\lambda$  par la transformation linéaire  $(x, y) \mapsto (x - y, x + y)$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Il existe une unique application continue  $\omega_\lambda$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui a les propriétés suivantes :

- on a  $\omega_\lambda(x) = |x|$  pour  $|x|$  assez grand ;
- la fonction  $\omega_\lambda$  est linéaire par morceaux, et sa pente est égale à  $+1$  ou  $-1$  ;
- le domaine  $E_\lambda$  est défini par les inégalités

$$|x| \leq y \leq \omega_\lambda(x).$$



2. Ce que nous venons de décrire est la notation « française ». La notation « anglo-saxonne » utilise le symétrique de  $D_\lambda$  par rapport à l'axe horizontal.

1.1.7. — Si  $\lambda$  correspond aux compositions  $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$  de même longueur  $m$ , il existe une suite de nombres entiers de la forme

$$u_0 < v_1 < u_1 < \cdots < u_{m-1} < v_m < u_m$$

qui sont les abscisses des points anguleux de la fonction  $\omega_\lambda$ . La suite  $u_0, u_1, \dots, u_m$  décrit les minima locaux de la fonction  $\omega_\lambda$ , et  $v_1, \dots, v_m$  les maxima locaux. Ce sont les *coordonnées entrelacées* de  $\lambda$ , et l'on a les lois de transformation

$$u_0 = -(p_1 + \cdots + p_m), \quad u_j = v_j + p_{m-j+1}, \quad v_j = u_{j-1} + q_{m-j+1} \quad (1 \leq j \leq m)$$

d'où l'on déduit  $u_0 + \cdots + u_m = v_1 + \cdots + v_m$ .

1.1.8. — Au lieu de la fonction  $\omega_\lambda$ , on peut introduire la fonction  $w_\lambda(x) = \frac{1}{2}(\omega_\lambda(x) - |x|)$ , et le domaine  $F_\lambda$  défini par les inégalités

$$0 \leq y \leq w_\lambda(x)$$

dans  $\mathbb{R}^2$ . L'aire de  $F_\lambda$  est définie par l'intégrale

$$|F_\lambda| = \int_{-\infty}^{+\infty} w_\lambda(x) dx = \int_{F_\lambda} dx dy;$$

elle est égale à  $|\lambda|$ . Il nous sera utile d'introduire des « moments »

$$\begin{aligned} t_k(\lambda) &= k(k-1) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-2} w_\lambda(x) dx \\ &= k(k-1) \int_{F_\lambda} x^{k-2} dx dy \\ &= \frac{k(k-1)}{2} \int_{E_\lambda} x^{k-2} dx dy, \end{aligned}$$

d'où  $t_2(\lambda) = 2|\lambda|$ . Dans les coordonnées entrelacées, on a

$$t_k(\lambda) = u_0^k + \cdots + u_m^k - v_1^k - \cdots - v_m^k.$$

1.1.9. — On a déjà introduit les homothéties  $h_t$  de rapport  $t > 0$  entier. On a aussitôt les relations

$$\begin{aligned} D_{h_t \lambda} &= h_t(D_\lambda) \\ \omega_{h_t \lambda}(x) &= t \omega_\lambda(x/t) \\ w_{h_t \lambda}(x) &= t w_\lambda(x/t), \end{aligned}$$

et la relation d'homogénéité pour les moments

$$t_k(h_t \lambda) = t^k t_k(\lambda).$$

Enfin, l'homothétie  $h_t$  transforme  $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$  en  $t\mathbf{p} \times t\mathbf{q}$ , donc les coordonnées entrelacées de  $h_t \lambda$  sont  $tu_0 < tv_1 < tu_1 < \dots$ .

## 1.2. Représentations irréductibles du groupe symétrique

**1.2.1. Symétriseur de Young.** — Soient  $n \geq 1$  un entier et  $\lambda$  une partition de  $n$ . L'ensemble  $\Delta_\lambda$  de sommets est de taille  $n$ ; nous noterons  $S(\lambda)$  le groupe des permutations de  $\Delta_\lambda$ . Un tableau de Young est une bijection  $T$  de  $[n]$  sur  $\Delta_\lambda$ ; autrement dit, une numérotation des éléments de  $\Delta_\lambda$ , ou des carrés correspondants de  $D_\lambda$  (voir la figure) :

9			
5	10		
3	7	8	11
1	2	4	6

Le tableau est *standard* lorsque les nombres dans les carrés vont en croissant de gauche à droite dans chaque ligne et de bas en haut dans chaque colonne, ce qui est le cas dans la figure ci-dessus. Le choix d'un tableau  $T$  définit un isomorphisme  $\varphi_T$  de  $S_n$  sur  $S(\lambda)$ .

On introduit deux sous-groupes  $C(\lambda)$  et  $L(\lambda)$  de  $S(\lambda)$ , formés des permutations de  $\Delta_\lambda$  qui transforment chaque colonne (ligne) en elle-même. Notons  $\varepsilon(\sigma)$  la signature d'une permutation  $\sigma \in S(\lambda)$ , et  $e_\sigma$  l'élément de base correspondant dans l'algèbre du groupe  $\mathbb{C}(S(\lambda))$ . On définit deux éléments  $a_\lambda$  et  $b_\lambda$  de  $\mathbb{C}(S(\lambda))$  par les formules

$$a_\lambda = \sum_{\sigma \in L(\lambda)} e_\sigma, \quad b_\lambda = \sum_{\sigma \in C(\lambda)} \varepsilon(\sigma) e_\sigma,$$

et le *symétriseur de Young* est  $C_\lambda = a_\lambda b_\lambda$ .

**1.2.2.** — On note  $I_\lambda$  l'idéal à gauche de  $\mathbb{C}(S(\lambda))$  engendré par  $C_\lambda$ , et  $\rho^\lambda(\sigma)$  la restriction à  $I_\lambda$  de la multiplication à gauche par  $e_\sigma$  dans  $\mathbb{C}(S(\lambda))$ . On a remarqué qu'un tableau  $T$  de forme  $\lambda$  définit un isomorphisme  $\varphi_T$  de  $S_n$  sur  $S(\lambda)$ , qui permet de transporter  $C(\lambda)$ ,  $L(\lambda)$ ,  $a_\lambda$ ,  $b_\lambda$ ,  $C_\lambda$ ,  $I_\lambda$ ,  $\rho^\lambda$  sur des objets  $C(T)$ ,  $L(T)$ ,  $a_T$ ,  $b_T$ ,  $C_T$ ,  $I_T$ ,  $\rho^T$  associés à  $S_n$ . La représentation  $(\rho^T, I_T)$  de  $S_n$  ne dépend à isomorphisme près que de  $\lambda$ .

### THÉORÈME 1.1 (Frobenius-Schur)

a) Pour tout tableau de Young  $T$  de taille  $n$ , la représentation  $(\rho^T, I_T)$  de  $S_n$  est irréductible.

b) Toute représentation irréductible de  $S_n$  est isomorphe à l'une des représentations  $(\rho^T, I_T)$ .

c) Deux représentations  $(\rho^T, I_T)$  et  $(\rho^{T'}, I_{T'})$  sont isomorphes si et seulement si les tableaux  $T$  et  $T'$  correspondent à la même partition  $\lambda$  de  $n$ .

Pour chaque partition  $\lambda$ , on choisira une fois pour toutes un tableau standard de forme  $\lambda$ , par exemple celui où la première ligne comporte les nombres 1 à  $\lambda_1$ , la



seconde les nombres  $\lambda_1 + 1$  à  $\lambda_1 + \lambda_2$ , etc. . . et l'on paramétrisera les représentations de  $S_n$  par les partitions  $\lambda$  de  $n$ .

1.2.3. — Soit  $P$  l'ensemble des couples  $(i, j)$  d'entiers strictement positifs, muni de la relation d'ordre produit

$$(i, j) \geq (k, \ell) \Leftrightarrow i \geq k \text{ et } j \geq \ell.$$

Une partie  $H$  de  $P$  est dite *héréditaire* si avec tout élément  $(i, j)$  elle contient tous les éléments  $(k, \ell)$  tels que  $(i, j) \geq (k, \ell)$ . L'application  $\lambda \mapsto \Delta_\lambda$  est une bijection de l'ensemble des partitions de  $n$  sur l'ensemble des parties héréditaires à  $n$  éléments de  $P$ .

Si  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux partitions, on écrit  $\lambda \leq \mu$  si  $\Delta_\lambda$  est contenu dans  $\Delta_\mu$ . Si l'on prolonge toute partition par une suite infinie de 0, la relation  $\lambda \leq \mu$  signifie que l'on a  $\lambda_k \leq \mu_k$  pour tout entier  $k \geq 1$ .

Un tableau de Young standard  $T$  de taille  $n$  peut être vu comme une application injective  $\varphi : [n] \rightarrow P$ . Les applications en question sont caractérisées par le fait que l'ensemble  $\varphi([k]) = \{\varphi(1), \dots, \varphi(k)\}$  est héréditaire pour  $1 \leq k \leq n$ . D'après la remarque précédente, un tableau standard  $T$  de forme  $\lambda$  correspond à une suite croissante de partitions

$$\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)} \leq \dots \leq \lambda^{(n)} = \lambda$$

avec  $n = |\lambda|$  et  $k = |\lambda^{(k)}|$ .

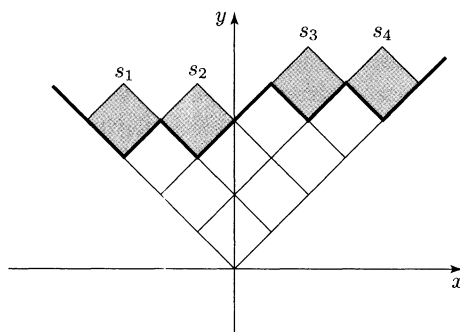
1.2.4. — Venons-en à la règle de branchement. Soit  $\lambda$  une partition de  $n$ . La restriction à  $S_{n-1}$  de la représentation  $\rho^\lambda$  de  $S_n$  est canoniquement isomorphe à la somme directe des représentations  $\rho^\mu$  de  $S_{n-1}$ , où  $\mu$  parcourt l'ensemble des partitions de  $n-1$  telles que  $\mu \leq \lambda$ .

Par une itération facile, on voit que l'espace  $I_\lambda$  a une base indexée par les suites croissantes  $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)} \leq \dots \leq \lambda^{(n)} = \lambda$  de partitions, c'est-à-dire par les tableaux de Young standard de forme  $\lambda$  (cf. section 1.2.3).

Pour décrire les partitions  $\mu$  de  $n-1$  telles que  $\mu \leq \lambda$ , le plus commode est d'utiliser les coordonnées multi-rectangulaires  $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m$ . Il y a  $m$  possibilités, obtenues en supprimant de  $\Delta_\lambda$  l'un des  $m$  points  $s_1, \dots, s_m$  définis par

$$s_j = (q_{m-j+1} + q_{m-j+2} + \dots + q_m, p_1 + p_2 + \dots + p_{m-j+1})$$

pour  $1 \leq j \leq m$  (ou le carré correspondant de  $D_\lambda$ ). Dans la représentation russe, ceci correspond aux  $m$  maxima locaux d'abscisses  $v_1, \dots, v_m$ .



1.2.5. — Nous allons donner une autre description des représentations de  $S_n$ , à l'aide des éléments  $J_k$  introduits par Jucys et Murphy en 1974. Rappelons qu'on plonge les groupes symétriques les uns dans les autres

$$S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_n \subset S_{n+1} \subset \cdots ;$$

on nomme  $S_\infty$  la réunion (ou limite inductive) de ces groupes, d'où une situation analogue pour les algèbres de groupes

$$\mathbb{Q}(S_1) \subset \mathbb{Q}(S_2) \subset \cdots \subset \mathbb{Q}(S_n) \subset \mathbb{Q}(S_{n+1}) \subset \cdots \subset \mathbb{Q}(S_\infty).$$

Voici la définition des  $J_k$

$$J_1 := 0, \quad J_2 := (12), \quad J_3 := (13) + (23), \dots, \quad J_k := \sum_{i=1}^{k-1} (ik), \dots$$

où  $(ij)$  est la transposition de  $i$  et  $j$ . On voit que  $J_k$  appartient à  $\mathbb{Q}(S_k)$  et commute aux éléments de  $\mathbb{Q}(S_{k-1})$ ; par suite, les  $J_k$  commutent deux à deux.

Il est immédiat que, dans toute représentation unitaire  $(\rho, V)$  de  $S_n$ , les opérateurs  $\rho(J_1), \dots, \rho(J_n)$  sont hermitiens et commutent deux à deux, donc se diagonalisent simultanément. De plus, l'algèbre engendrée par  $J_1, \dots, J_n$  dans  $\mathbb{Q}(S_n)$  est assez grosse pour qu'on ait le résultat suivant : si  $\rho$  est irréductible, le sous-espace de  $V$  défini par les relations  $\rho(J_k)v = c_k v$  pour  $1 \leq k \leq n$  est de dimension  $\leq 1$ . On peut donc indexer une base de  $V$  par des systèmes de valeurs propres  $c_1, \dots, c_n$  : c'est la stratégie bien connue des « nombres quantiques » en physique quantique.

Explicitement, pour la représentation  $\rho^\lambda$  de  $S_n$  associée à la partition  $\lambda$  de  $n$ , on a la base  $(e_T)$  de l'espace  $I_\lambda$  indexée par les tableaux standard  $T$  de forme  $\lambda$ , et l'on a

$$\rho^\lambda(J_k) e_T = c(T(k)) e_T \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n.$$

Rappelons que le tableau  $T$  est une suite  $T(1), \dots, T(n)$  d'éléments de  $P$  et  $c$  est l'application  $(i, j) \mapsto i - j$  de  $P$  dans  $\mathbb{Z}$  :  $c(i, j)$  est le contenu de la boîte  $(i, j)$ . On

peut donc paramétrer la base de  $I_\lambda$ , sous la forme  $e(c_1, \dots, c_n)$ , au moyen des suites  $c_1 = c(T(1)), \dots, c_n = c(T(n))$  vérifiant la condition suivante :

(TS) Soit  $k \in [n]$ . Soit  $\alpha_i$  le nombre de fois que  $i$  apparaît dans la suite  $c_1, \dots, c_k$ . On a alors

$$\alpha_0 \geq \alpha_{-1} \geq \alpha_{-2} \geq \alpha_{-3} \geq \dots, \quad \alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \dots.$$

Rappelons que le groupe  $S_n$  est engendré par les transpositions  $s_k = (k, k+1)$  pour  $1 \leq k < n$ . L'action de ces générateurs dans la représentation  $\rho^\lambda$  se décrit ainsi <sup>(3)</sup> :

- si  $c_{k+1} = c_k \pm 1$ , on a  $\rho^\lambda(s_k) e(c_1, \dots, c_n) = \pm e(c_1, \dots, c_n)$  ;
- si  $|c_{k+1} - c_k| \geq 2$ ,  $\rho^\lambda(s_k)$  laisse fixe le plan ayant pour base le vecteur  $e = e(c_1, \dots, c_n)$  et le vecteur  $e'$  déduit de  $e$  par échange de  $c_k$  et  $c_{k+1}$  ; il y agit par la matrice  $\begin{pmatrix} u & 1+u \\ 1-u & -u \end{pmatrix}$  avec  $u = (c_{k+1} - c_k)^{-1}$ .

Utilisant la présentation bien connue du groupe  $S_n$  par les relations

$$\begin{cases} s_k^2 = 1 \\ s_k s_\ell = s_\ell s_k & \text{si } |k - \ell| \geq 2 \\ s_k s_{k+1} s_k = s_{k+1} s_k s_{k+1}, \end{cases}$$

on peut vérifier que les opérateurs  $\rho^\lambda(s_k)$ , définis comme ci-dessus sur un espace ayant pour base <sup>(4)</sup> les vecteurs  $e(c_1, \dots, c_n)$ , correspondant à la relation (TS), définissent bien une représentation du groupe  $S_n$  (pour tout corps de coefficients de caractéristique 0). L'avantage de cette construction est qu'elle s'applique presque telle quelle aux représentations de l'algèbre de Hecke  $\mathcal{H}_q(S_n)$ .

1.2.6. — Les éléments de Jucys-Murphy permettent de donner une description particulièrement attrayante de la *règle de branchement*. Soient  $\lambda$  une partition de  $n$ ,  $\rho^\lambda$  la représentation de  $S_n$  correspondante, et  $u_0 < v_1 < u_1 < \dots < v_m < u_m$  les coordonnées entrelacées de  $\lambda$ . L'opérateur  $\rho^\lambda(J_n)$  a pour valeurs propres  $v_1, \dots, v_m$  ; notons  $V_1, \dots, V_m$  les sous-espaces propres correspondants. Alors, pour  $1 \leq j \leq m$ , l'espace  $V_j$  est stable pour  $S_{n-1}$ , et correspond à la représentation irréductible  $\rho^{\mu(j)}$  de  $S_{n-1}$ , où  $\mu(j)$  est la partition de  $n-1$  obtenue en supprimant le point  $s_j$  de  $\Delta_\lambda$  (cf. section 1.2.4). Noter aussi que  $v_j$  est le contenu du point  $s_j$ .

## 2. MÉTHODES COMBINATOIRES

### 2.1. Graphes et cartes bipartis

2.1.1. — Un *graphe biparti*  $G$  se compose d'un ensemble  $V$  de sommets, muni d'une composition  $(V_\circ, V_\bullet)$  (les éléments de  $V_\circ$  sont de couleur blanche, et ceux de  $V_\bullet$  de

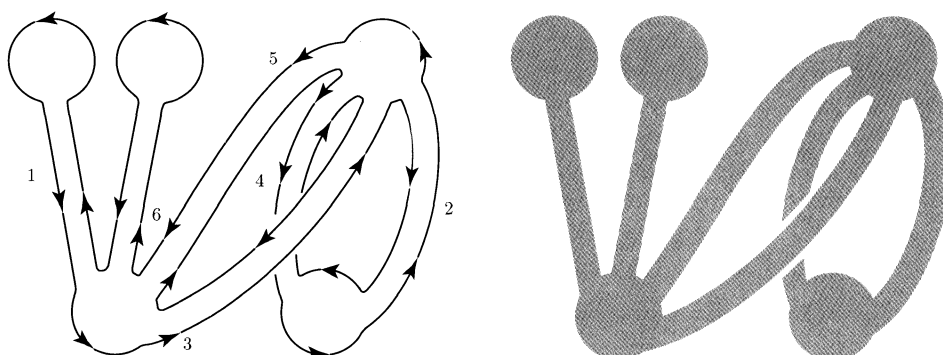
3. Vu les conditions imposées, on a toujours  $c_k \neq c_{k+1}$ .

4. Chaque suite  $(c_1, \dots, c_n)$  décrit un tableau de Young standard, et l'on doit se restreindre à ceux de forme  $\lambda$ .

couleur noire), d'un ensemble  $E$  d'arêtes, et de deux applications  $s : E \rightarrow V_\circ$ ,  $b : E \rightarrow V_\bullet$ . On dit que l'arête  $e$  joint le sommet blanc  $s(e)$  au sommet noir  $b(e)$ . Il est commode d'introduire pour chaque arête  $e$  une arête opposée  $\bar{e}$ , obtenue en échangeant les deux extrémités de  $e$ . On note  $\bar{E}$  l'ensemble de ces arêtes  $\bar{e}$ . Par exemple, si  $\lambda$  est une partition de  $n$ , on définit un graphe biparti  $G_\lambda$  dont  $\Delta_\lambda$  est l'ensemble des arêtes, les sommets blancs (noirs) correspondant aux lignes (colonnes), et l'arête  $(i, j) \in \Delta_\lambda$  joignant la ligne  $j$  à la colonne  $i$ . Tous les graphes considérés seront finis, c'est-à-dire que les ensembles  $V$  et  $E$  sont finis.

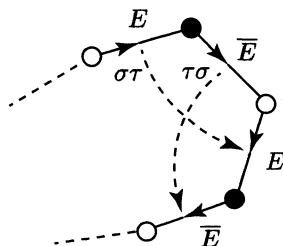
2.1.2. — Une *carte bipartie*  $M$  est un graphe biparti  $G$  sans sommet isolé<sup>(5)</sup> et muni, pour chaque sommet  $v$ , d'un ordre cyclique sur l'ensemble  $E_v$  des arêtes adjacentes à  $v$ ; un tel ordre cyclique définit sur  $E_v$  une permutation circulaire  $\gamma_v$  (et réciproquement). La donnée de la partition  $(E_v)_{v \in V_\circ}$  et des permutations circulaires  $\gamma_v$  équivaut, *via* la décomposition en cycles, à la donnée d'une permutation  $\sigma$  de  $E$ . De même, au moyen des sommets noirs, on décrit une autre permutation  $\tau$  de  $E$ . Autrement dit, une carte bipartie est la représentation combinatoire d'une paire de permutations  $\sigma, \tau$  d'un ensemble fini  $E$ ; on la notera  $M_{\sigma, \tau}$ .

Il est bon d'introduire une représentation géométrique. À chaque sommet  $v$ , nous associons un disque orienté  $D_v$  dont le bord  $\partial D_v$  est disséqué en une famille d'arcs de mêmes longueurs, indexée par  $E_v$ , de sorte que  $\gamma_v$  corresponde à une rotation d'angle  $2\pi/|E_v|$  dans le sens positif. À chaque arête  $e$ , on associe un rectangle orienté  $R_e$  dont le bord est composé des arêtes  $e$  (orientée du blanc vers le noir),  $\bar{e}$  (orientée en sens inverse) et les deux arcs orientés correspondent aux disques  $D_{s(e)}$  et  $D_{b(e)}$  associés à ses extrémités. On recolle ensuite les disques  $D_v$  et les rectangles  $R_e$ , de manière compatible avec les orientations, et l'on obtient une surface  $S(M)$  (voir figure).



5. Autrement dit, les applications  $s : E \rightarrow V_\circ$  et  $b : E \rightarrow V_\bullet$  sont *surjectives*.

Le bord  $\partial S(M)$  de cette surface se compose d'arcs orientés indexés par  $E \sqcup \bar{E}$ , de sorte que deux arcs adjacents ne soient pas tous deux dans  $E$ , ou tous deux dans  $\bar{E}$ . La décomposition de ce bord en composantes connexes  $\Gamma_\alpha$  correspond à la décomposition en cycles de  $\sigma\tau$  : dans  $\Gamma_\alpha$ , un arc sur deux est dans  $E$  et la permutation circulaire associée à  $\sigma\tau$  fait passer d'un arc dans  $E$  au suivant dans  $E$  dans le sens de l'orientation.



En échangeant les rôles de  $E$  et  $\bar{E}$ , on a la décomposition en cycles de  $\tau\sigma$ .

Il revient au même de supposer que le graphe  $G(M)$  sous-jacent à  $M$  et la surface  $S(M)$  soient connexes. Le bord  $\partial S(M)$  n'est pas toujours connexe, mais on le supposera désormais connexe. Ceci revient à supposer que  $\sigma\tau$  et  $\tau\sigma$  ont un seul cycle. On dit dans ce cas que la carte est *unicellulaire*. Si l'on choisit de plus une arête  $e_1$  (la racine), et qu'il y ait  $k$  arêtes, il existe une numérotation  $e_1, \dots, e_k$  des arêtes et une seule, telle que  $\tau\sigma$  soit égal au cycle  $\gamma_k = (12 \dots k)$ .

En résumé, les factorisations  $\gamma_k = \tau\sigma$  dans  $S_k$  correspondent bijectivement aux cartes biparties unicellulaires enracinées à  $k$  arêtes.

2.1.3. — Il est bien connu que, dans un graphe connexe à  $k$  arêtes, le nombre des sommets est au plus égal à  $k + 1$ , et les arbres sont les graphes connexes à  $k$  arêtes et  $k + 1$  sommets. Si l'on note  $C(\sigma)$  l'ensemble des cycles d'une permutation  $\sigma$ , dans la carte associée à une factorisation  $\gamma_k = \tau\sigma$  il y a  $|C(\sigma)|$  sommets blancs et  $|C(\tau)|$  sommets noirs, d'où l'inégalité

$$|C(\sigma)| + |C(\tau)| \leq k + 1,$$

sur laquelle nous reviendrons à la section 2.3.3. Nous dirons que la factorisation  $\gamma_k = \tau\sigma$  est *minimale* si l'on a égalité dans la relation précédente. Noter aussi que dans un arbre à racine noire, les sommets noirs sont ceux qui sont à distance paire de la racine ; de la sorte, le coloriage des sommets est automatique.

On a donc un corollaire du résultat ci-dessus : les factorisations minimales  $\gamma_k = \tau\sigma$  correspondent aux arbres plans enracinés à  $k$  arêtes et  $k + 1$  sommets<sup>(6)</sup>. La surface associée à un tel arbre est homéomorphe à un disque.

6. On a choisi plus haut pour racine d'une carte une des arêtes. Ceci est conforme aux conventions pour les arbres plans, si l'on prend pour arête privilégiée  $e_1$  la plus à gauche pointant vers le sommet racine supposé noir.

## 2.2. Calcul des caractères

2.2.1. — Précisons d'abord ce qu'on entend par *série formelle à une infinité de variables*  $x_i$  ( $i \in I$ ). Un monôme  $x^\alpha = \prod_{i \in I} x_i^{\alpha_i}$  correspond à une application  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{N}$  telle que l'ensemble des  $i$  avec  $\alpha_i \neq 0$  soit fini. Une série formelle est une combinaison linéaire de la forme  $\sum_{\alpha \in M} c_\alpha x^\alpha$ , où les  $c_\alpha$  appartiennent à l'anneau de base  $K$ , et où  $M$  est l'ensemble des monômes (« une infinité de monômes dont chacun ne dépend que d'un nombre fini de variables »).

2.2.2. — Soit  $G$  un graphe biparti, avec l'ensemble des sommets  $V = V_\circ \sqcup V_\bullet$ . À toute application <sup>(7)</sup>  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{N}^*$  on associe le monôme  $m_\varphi$

$$m_\varphi = \prod_{v \in V_\circ} p_{\varphi(v)} \prod_{w \in V_\bullet} q_{\varphi(w)}$$

en les variables  $p_1, p_2, \dots, q_1, q_2, \dots$ . On désigne par  $N_G$  la série formelle dans  $\mathbb{Z}[[p_1, p_2, \dots, q_1, q_2, \dots]]$  somme des monômes  $m_\varphi$  pour toutes les applications  $\varphi$  *croisantes* au sens suivant : s'il existe une arête allant du sommet blanc  $v$  au sommet noir  $w$ , on a  $\varphi(v) \leq \varphi(w)$ . Cette série  $N_G$  ne dépend que du *graphe réduit*  $G_{\text{red}}$  obtenu en identifiant deux arêtes ayant les mêmes extrémités.

2.2.3. — Soient  $G$  un graphe biparti, et  $\lambda$  une partition de taille  $|\lambda| = n$ . On a défini le graphe biparti  $G_\lambda$  à la section 2.1.1. La notion de *morphisme de graphes bipartis* est évidente : un morphisme  $\Phi$  du graphe biparti  $G = (V_\circ, V_\bullet, E)$  dans le graphe biparti  $G' = (V'_\circ, V'_\bullet, E')$  se compose de trois applications

$$\Phi_\circ : V_\circ \rightarrow V'_\circ, \quad \Phi_\bullet = V_\bullet \rightarrow V'_\bullet, \quad \Phi_e : E \rightarrow E'$$

rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} V_\circ & \xleftarrow{s} & E & \xrightarrow{b} & V_\bullet \\ \Phi_\circ \downarrow & & \Phi_e \downarrow & & \Phi_\bullet \downarrow \\ V'_\circ & \xleftarrow{s'} & E' & \xrightarrow{b'} & V'_\bullet \end{array}$$

On note alors  $N_G(\lambda)$  le nombre de morphismes de  $G$  dans  $G_\lambda$ . Ce nombre ne dépend que du graphe réduit  $G_{\text{red}}$  associé à  $G$ .

2.2.4. — Voici le lien entre ces deux définitions : si le diagramme de Young  $\Delta_\lambda$  est de la forme  $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ , avec deux compositions  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$  et  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m)$ , on a

$$N_G(\lambda) = N_G(p_1, p_2, \dots, p_m, 0, 0, \dots; q_1, q_2, \dots, q_m, 0, 0, \dots).$$

7. Rappelons que  $\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers  $n \geq 0$ , et  $\mathbb{N}^*$  celui des entiers  $n \geq 1$ .

**Exemples :**

- on a  $N_G(p \times q) = p^{|V_\circ|} q^{|V_\bullet|}$  pour tout graphe biparti  $G$ ;
- si  $\lambda = p \times q$ , on a

$$N_{\bullet}(\lambda) = \sum_{i \leq j} p_i q_j = |\lambda|;$$

- on a  $N_{\bullet} = \sum p_i p_j q_k q_\ell$ , la somme étant étendue aux systèmes tels que  $i \leq k$ ,  $j \leq k$ ,  $j \leq \ell$ .

2.2.5. — Fixons un entier  $k \geq 1$ . Si  $\lambda$  est une partition d'un entier  $n \geq k$ , on considère  $S_k$  comme un sous-groupe de  $S_n$ , et donc la valeur  $\chi^\lambda(\pi)$  du caractère irréductible  $\chi^\lambda$  de  $S_n$  en l'élément  $\pi$  de  $S_k$  est bien définie. On utilise la normalisation suivante, due à Kerov et Olshanski [B5]

$$\text{Ch}_\pi(\lambda) = \frac{n!}{(n-k)!} \chi^\lambda(\pi) / \chi^\lambda(1).$$

Comme la valeur des caractères en un élément  $\pi$  ne dépend que de la partition  $\mu$  décrivant la décomposition en cycles de  $\pi$ , on écrira  $\text{Ch}_\mu(\lambda)$  pour  $\text{Ch}_\pi(\lambda)$ ; on a pour paramètres la partition  $\mu$  de  $k$ , fixée, et la partition  $\lambda$  de  $n$ , variable. La normalisation ci-dessus a pour effet que  $\text{Ch}_\mu(p \times q)$  va être représenté comme un polynôme en  $p_1, \dots, p_m; q_1, \dots, q_m$ . Le point de départ est la formule de Stanley [B7]

$$\text{Ch}_\pi(p \times q) = \sum_{\sigma\tau=\pi} \varepsilon(\tau) p^{|C(\sigma)|} q^{|C(\tau)|},$$

qu'il s'agit de généraliser.

2.2.6. — Soient  $\sigma$  et  $\tau$  dans  $S_k$ . D'après la construction de la section 2.1.2, on associe à  $\sigma, \tau$  une carte bipartie  $M_{\sigma, \tau}$  décrite ainsi :

- l'ensemble  $V_\circ$  des sommets blancs est l'ensemble  $C(\sigma)$  des cycles de  $\sigma$ ;
- de même, on a  $V_\bullet = C(\tau)$ ;
- l'ensemble des arêtes est donné par  $E = [k]$ ;
- la source  $s(i)$  d'une arête  $i \in [k]$  est le cycle de  $\sigma$  contenant  $i$ , et de même  $b(i)$  est le cycle de  $\tau$  contenant  $i$ .

On note  $G_{\sigma, \tau}$  le graphe biparti réduit associé à  $M_{\sigma, \tau}$ . Les sommets blancs (resp. noirs) sont les cycles de  $\sigma$  (resp.  $\tau$ ), et il y a une arête joignant  $c_1 \in C(\sigma)$  à  $c_2 \in C(\tau)$  si et seulement si  $c_1 \cap c_2$  est non-vide. On écrit  $N_{\sigma, \tau}$  pour  $N_{G_{\sigma, \tau}}$ ; c'est une série formelle à coefficients entiers en les variables  $p_1, p_2, \dots; q_1, q_2, \dots$ .

2.2.7. — Voici maintenant le résultat central de V. Féray [B3], conjecturé préalablement par R. Stanley [B7]. La version que nous en donnons, aussi bien pour l'énoncé que pour la démonstration, suit l'article [C3] publié par Féray en collaboration avec Śniady.

THÉORÈME 2.1. — Soient  $\pi$  un élément de  $S_k$  et  $\lambda$  une partition d'un entier  $n \geq k$ . On a

$$\text{Ch}_\pi(\lambda) = \sum_{\tau\sigma=\pi} \varepsilon(\tau) N_{\sigma,\tau}(\lambda)$$

(somme sur  $\sigma, \tau$  dans  $S_k$ ).

La démonstration comporte plusieurs étapes.

1) Rappelons la définition du symétriseur de Young

$$C_\lambda = \sum \varepsilon(\tau) e_{\sigma\tau};$$

on a choisi un tableau  $T$  de forme  $\lambda$ ,  $\sigma$  parcourt le groupe  $L(T)$  et  $\tau$  le groupe  $C(T)$ . Si l'on pose  $\alpha_\lambda := n!/d_\lambda$  (où  $d_\lambda$  est le degré de la représentation  $\rho^\lambda$  de  $S_n$  associée à  $\lambda$ ), on a  $C_\lambda^2 = \alpha_\lambda C_\lambda$ , donc  $p_\lambda := \alpha_\lambda^{-1} C_\lambda$  est un idempotent, et l'espace de la représentation  $\rho^\lambda$  est  $\mathbb{C}(S_n) \cdot p_\lambda$ . Il en résulte que la valeur  $\chi^\lambda(\pi)$  du caractère  $\chi^\lambda$  de  $\rho^\lambda$  est la trace de l'opérateur  $x \mapsto e_\pi x p_\lambda$  dans  $\mathbb{C}(S_n)$ . Un calcul facile donne

$$n! \chi^\lambda(\sigma)/d_\lambda = \sum_{\tau\sigma=\pi} \varepsilon(\tau) \tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda)$$

pour tout  $\pi$  dans  $S_n$ . La sommation est étendue aux factorisations de  $\pi$  dans  $S_n$ , et  $\tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda)$  est le nombre de tableaux  $T$  de forme  $\lambda$  tels que  $\sigma \in L(T)$  et  $\tau \in C(T)$ . Autrement dit, on compte les bijections de  $[n]$  sur  $\Delta_\lambda$  qui se déduisent d'un isomorphisme du graphe biparti  $G_{\sigma,\tau}$  sur le graphe biparti  $G_\lambda$  associé à  $\lambda$ .

2) Il y a deux restrictions dans la formule précédente : tout d'abord  $k = n$ , et  $N_{\sigma,\tau}(\lambda)$  est remplacé par  $\tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda)$ . Pour traiter le cas  $k < n$ , on note que  $\frac{n!}{(n-k)!}$  est le nombre d'applications injectives  $\theta : [k] \rightarrow [n]$ , que toute application de ce type transforme un élément  $\sigma$  de  $S_k$  en une permutation de  $\theta([k])$  que l'on prolonge en un élément  $\sigma_\theta$  de  $S_n$  qui fixe les éléments de  $[n] \setminus \theta([k])$ . La somme  $\sum_\theta e_{\sigma_\theta}$  appartient au centre de l'algèbre de groupe  $\mathbb{C}(S_n)$ , et donne un scalaire dans toute représentation irréductible de  $S_n$  (« lemme de Schur »)<sup>(8)</sup>.

3) On obtient alors la relation

$$(4) \quad \text{Ch}_\pi(\lambda) = \sum_{\pi=\tau\sigma} \varepsilon(\tau) \tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda)$$

où  $\tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda)$  compte les applications injectives  $f$  de  $[k]$  dans  $\Delta_\lambda$  qui définissent un morphisme de graphes bipartis de  $G_{\sigma,\tau}$  dans  $G_\lambda$ . Il faut se débarrasser de l'hypothèse

8. Voir à la section 2.3.2 un raisonnement analogue.



que  $f$  est injective. Or la somme qui nous intéresse  $\sum_{\pi=\tau\sigma} \varepsilon(\tau) N_{\sigma,\tau}(\lambda)$  peut aussi s'écrire

$$\sum_{f,\sigma,\tau} \varepsilon(\tau)$$

avec les conditions

- $\sigma \in S_k, \tau \in S_k, \tau\sigma = \pi$  ;
- $f$  est une application de  $[k]$  dans  $\Delta_\lambda$  ;
- $f(i)$  et  $f(\sigma(i))$  sont dans la même ligne pour tout  $i$  ;
- $f(i)$  et  $f(\tau(i))$  sont dans la même colonne pour tout  $i$ .

Montrons que la contribution pour une fonction  $f$  non injective fixée est nulle : en effet, si l'on a  $a \neq b$  et  $f(a) = f(b)$ , à toute factorisation  $\pi = \tau\sigma$  comme ci-dessus, on en fait correspondre une autre  $\pi = \tau'\sigma'$  avec  $\sigma' = (ab) \cdot \sigma, \tau' = \tau \cdot (ab)$  et comme  $(ab)$  est une transposition, on a  $\varepsilon(\tau') = -\varepsilon(\tau)$ , et les termes de la somme sur  $\sigma, \tau$  s'annulent par paires.

### 2.3. L'algèbre $\Lambda$ et les polynômes de Kerov

2.3.1. — Nous définissons le degré d'un polynôme ou d'une série formelle en les  $p_i$  et les  $q_i$  en donnant le degré 1 à  $p_i$  et à  $q_i$ . Ayant choisi un anneau commutatif  $K$  de coefficients, nous noterons  $\Phi_s$  (ou  $\Phi_s(K)$ ) le module des séries formelles en les  $p_i$  et les  $q_i$  homogènes de degré  $s$ . La somme directe des  $\Phi_s$  (pour  $s$  entier  $\geq 0$ ) sera notée  $\Phi$  ou  $\Phi(K)$ .

Pour tout graphe biparti  $G$  à  $s$  sommets, la série  $N_G$  est somme de monômes de degré  $s$ , donc appartient à  $\Phi_s(\mathbb{Z})$ . Le théorème de Féray, décrit à la section 2.2.7, s'écrit  $\text{Ch}_\mu = \sum_{\tau\sigma=\pi} \varepsilon(\tau) N_{G_{\sigma,\tau}}$  ( $\mu$  partition de  $k$ , correspondant à la décomposition en cycles de  $\pi \in S_k$ , avec  $\sigma, \tau$  parcourant  $S_k$ ) ; il montre que les  $\text{Ch}_\mu$  appartiennent à  $\Phi$ . Nous noterons  $\Lambda(K)$  (ou  $\Lambda$ ) le sous- $K$ -module de  $\Phi(K)$  engendré par les « caractères »  $\text{Ch}_\mu$  pour toutes les partitions  $\mu$ .

2.3.2. — Il est immédiat que si un graphe biparti  $G$  est réunion disjointe de deux sous-graphes bipartis  $G'$  et  $G''$  on aura  $N_G = N_{G'} \cdot N_{G''}$ . On peut aussi montrer que le produit de deux  $\text{Ch}_\mu$  appartient encore à  $\Lambda(K)$ , donc que  $\Lambda(K)$  est une  $K$ -algèbre commutative. Féray le démontre dans l'exemple  $\text{Ch}_2 \cdot \text{Ch}_2$  ; vu sa définition, on a

$$\begin{aligned} \text{Ch}_2(\lambda) &= n(n-1) \psi^\lambda((12)) \\ &= \sum \psi^\lambda((ij)) = \psi^\lambda \left( \sum_{i \neq j} (ij) \right) \end{aligned}$$

la somme portant sur les couples  $i, j$  avec  $i \neq j$  dans  $[n]$ . L'élément  $\sum_{i \neq j} (ij)$  appartient au centre de l'algèbre  $K(S_n)$ . De plus  $\psi^\lambda$  est multiplicatif sur ce centre. Par un calcul dans ce centre, on trouve l'identité

$$\text{Ch}_2 \cdot \text{Ch}_2 = \text{Ch}_{22} + 4 \text{Ch}_3 + 2 \text{Ch}_{11}.$$

Noter que  $\text{Ch}_\mu$  n'est pas un élément homogène de  $\Phi$  car le terme  $N_{\sigma,\tau}$  correspondant à une factorisation  $\pi = \tau\sigma$  est homogène de degré  $|C(\sigma)| + |C(\tau)|$ .

2.3.3. — Examinons ce point de plus près. Pour toute permutation  $\sigma$  de  $S_k$ , posons  $|\sigma| = k - |C(\sigma)|$  où  $|C(\sigma)|$  représente le nombre de cycles de  $\sigma$ . On sait que l'on a  $|\sigma| = 1$  pour une transposition  $(ij)$ , qu'on a  $|1| = 0$  et plus généralement que  $|\sigma|$  est le nombre minimal de facteurs dans une décomposition  $\sigma = t_1 \dots t_\ell$  en produit de transpositions. On en déduit aussitôt  $|\pi| \leq |\sigma| + |\tau|$  si  $\pi = \tau\sigma$  dans  $S_k$ , d'où

$$|C(\sigma)| + |C(\tau)| \leq |C(\pi)| + k.$$

Si  $\mu$  est le type cyclique de  $\pi$ , on a  $k = |\mu|$  et  $|C(\pi)|$  est le nombre de parts (ou longueur)  $\ell(\mu)$  de  $\mu$ . Conclusion :  $\text{Ch}_\mu$  est somme de termes homogènes de degrés  $\leq |\mu| + \ell(\mu)$ . De plus, les relations  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{|\sigma|}$ ,  $\varepsilon(\tau) = (-1)^{|\tau|}$ ,  $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$  montrent que tous les termes du développement de  $\text{Ch}_\mu$  sont homogènes de degré  $|\mu| + \ell(\mu) - 2\ell$  avec  $\ell \geq 0$  entier. Lorsque  $\mu = k$  a une seule part, cela correspond au cas où  $\pi$  est conjugué à la permutation circulaire  $\gamma_k$ , et l'on a  $\text{Ch}_k(\lambda) = \frac{n!}{(n-k)!} \chi^\lambda(\gamma_k) / \chi^\lambda(1)$  pour toute partition  $\lambda$  de taille  $n \geq k$ . D'après ce qui précède,  $\text{Ch}_k$  est somme de termes homogènes de degrés  $\leq k + 1$ . On notera  $R_{k+1}$  le terme homogène de plus haut degré  $k + 1$  de  $\text{Ch}_k$ .

2.3.4. — D'après ce qu'on a vu en 2.3.2,  $R_{k+1}$  est la somme des termes  $\varepsilon(\tau) N_{\sigma,\tau}$  correspondant aux factorisations  $\tau\sigma = \gamma_k$  pour lesquelles  $|C(\sigma)| + |C(\tau)| = k + 1$ ; autrement dit, le graphe connexe  $\tilde{G}_{\sigma,\tau}$  sous-jacent à la carte  $M_{\sigma,\tau}$  possède  $k$  arêtes et  $k + 1$  sommets; il est donc réduit (sans arête multiple) et c'est un arbre, enraciné, plan, comme on l'a vu à la section 2.1.3. En conclusion, on a (avec une détermination facile du signe)

$$R_\ell = \sum_T (-1)^{n_0(T)+1} N_T,$$

où la somme est étendue à tous les arbres plans enracinés  $T$  à  $\ell$  sommets,  $\ell - 1$  arêtes et  $n_0(T)$  sommets blancs (voir [C3]).

**Exemples :**

$$R_2 = N_{\uparrow}$$

$$R_3 = N_{\uparrow \downarrow} - N_{\uparrow \uparrow}$$

$$R_4 = N_{\uparrow \uparrow \downarrow} + N_{\uparrow \downarrow \downarrow} - N_{\uparrow \uparrow \uparrow}$$

Notons aussi qu'on a

$$\text{Ch}_1 = R_2, \quad \text{Ch}_2 = R_3, \quad \text{Ch}_3 = R_4 + R_2.$$

De manière générale, pour obtenir les termes de plus haut degré de  $\text{Ch}_\mu$ , pour une partition  $(\mu_1, \dots, \mu_\ell)$  de  $k$ , on doit s'intéresser aux décompositions  $\pi = \tau\sigma$  minimales, c'est-à-dire pour lesquelles  $|C(\sigma)| + |C(\tau)| = |C(\pi)| + k$ . On les obtient comme

suit : si  $\pi$  est décomposé en cycles  $\gamma_1, \dots, \gamma_\ell$  de longueurs respectives  $k_1, \dots, k_\ell$  (avec  $k_1 + \dots + k_\ell = k$ ), on choisit des *décompositions minimales*  $\gamma_i = \tau_i \sigma_i$  dans  $S_{k_i}$ , et l'on pose  $\tau = \tau_1 \dots \tau_\ell$ ,  $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_\ell$ . Ceci prouve que le terme de plus haut degré de  $\text{Ch}_\mu$  est  $\prod_{i=1}^\ell R_{\mu_i+1}$  (et ce degré est  $|\mu| + \ell(\mu)$ ). En plus, ces deux polynômes ont même parité (comme on l'a vu à la section 2.3.3), donc leur différence est de degré  $\leq |\mu| + \ell(\mu) - 2$ .

2.3.5. — Il résulte des travaux de Kerov, Olshanski, Ivanov et Biane (voir [B5], [C1] et [C4]) que  $\Lambda$  est l'algèbre des polynômes en  $R_2, R_3, \dots$ . Par suite, on peut écrire

$$\text{Ch}_k = K_k(R_2, R_3, \dots)$$

où l'on a introduit le polynôme de Kerov  $K_k$  à coefficients entiers. Le résultat suivant a été conjecturé par Kerov en 2000, prouvé par Féray en 2009 dans [B2].

THÉORÈME 2.2. — *Le polynôme de Kerov a des coefficients entiers positifs.*

Nous allons donner un aperçu de la démonstration.

2.3.6. — Commençons par énoncer le *principe d'inclusion-exclusion cyclique*. Soit  $G$  un graphe biparti réduit (sans arête double), et soit  $E$  l'ensemble de ses arêtes. Soit  $C$  un cycle orienté dans  $G$ , et soit  $E_C$  l'ensemble des arêtes de  $C$  orientées d'un sommet blanc vers un sommet noir ; cela constitue la moitié des arêtes. On a alors la relation

$$(IE) \quad \sum_{F \subset E_C} (-1)^{|F|} N_{G \setminus F} = 0,$$

où  $G \setminus F$  désigne le graphe  $G$  dont on a supprimé les arêtes appartenant à  $F$ . Pour faire la démonstration, on peut oublier le reste du graphe, et se ramener au cas où  $G$  est un cycle biparti (c'est-à-dire de longueur paire avec un coloriage adapté). Illustrons l'exemple typique d'un cycle de longueur 4 ; on a la relation

$$N_{G_0} - N_{G_1} - N_{G_2} + N_{G_3} = 0$$

pour les graphes

$$G_0 = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} \quad G_1 = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array} \quad G_2 = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \end{array} \quad G_3 = \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array}$$

On a à considérer des sommes de monômes  $p_i p_j q_k q_\ell$  (où on a numéroté les sommets blancs par  $i, j$  et les noirs par  $k, \ell$ ). Chacun des graphes correspond à un système d'inégalités, et l'analyse est facile. Le cas général est analogue.

En corollaire, on a un algorithme pour réduire toute série de la forme  $N_G$ , donc aussi les  $\text{Ch}_\mu$ , en polynômes à coefficients entiers en les  $N_T$ , où  $T$  est un arbre plan, enraciné.

En fait, on peut faire mieux. Considérons un graphe biparti  $G = (V_\circ, V_\bullet, E)$  muni d'une composition  $(V_\circ^1, \dots, V_\circ^\ell)$  de  $V_\circ$ , et d'une composition  $(V_\bullet^1, \dots, V_\bullet^\ell)$  de  $V_\bullet$ , de sorte que l'ensemble des arêtes est la partie  $E$  de  $V_\circ \times V_\bullet$  réunion des  $V_\circ^i \times V_\bullet^j$

pour  $1 \leq i \leq j \leq \ell$ . Si l'on pose  $c_o(i) = |V_o^i|$  et  $c_\bullet(i) = |V_\bullet^i|$ , le graphe est défini à isomorphisme près par les deux compositions  $\mathbf{c}_o = (c_o(1), \dots, c_o(\ell))$  et  $\mathbf{c}_\bullet = (c_\bullet(1), \dots, c_\bullet(\ell))$ . Ce n'est autre que le graphe  $G_\lambda$  associé à la partition  $\lambda = \mathbf{c}_o \times \mathbf{c}_\bullet$  (cf. section 2.1.1). On notera  $N(\mathbf{c}_o, \mathbf{c}_\bullet)$  la série  $N_G$  correspondante.

On montre alors sur la définition explicite des séries  $N_G(p_1, p_2, \dots; q_1, q_2, \dots)$  que les séries  $N(\mathbf{c}_o, \mathbf{c}_\bullet)$  sont linéairement indépendantes. De plus, par utilisation de la relation (IE) pour les cycles de longueur 4, on peut exprimer les séries  $N_G$  (donc aussi  $\text{Ch}_\mu, \text{Ch}_k, R_k$ ) dans la base formée des  $N(\mathbf{c}_o, \mathbf{c}_\bullet)$  avec des coordonnées entières.

2.3.7. — Pour achever la démonstration, nous aurons besoin de la notion de *graphe expenseur de type  $\nu$* , où  $\nu = (\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_r)$  est une partition. Soient donc  $G$  un graphe biparti, et  $h$  une fonction définie sur l'ensemble  $V_o$  à valeurs entières  $\geq 2$ . On suppose que le multi-ensemble  $h(V_o)$  (i.e. la famille de ces entiers avec répétition éventuelle) se réarrange en la partition  $\nu$ .

On dira que le graphe décoré  $(G, h)$  est *expenseur* si la propriété suivante est vérifiée :

*Pour toute partie  $V$  de  $V_o$ , non vide, contenue dans une composante connexe de  $G$ , et distincte d'elle, on a  $|V| + n(V) > \sum_{v \in V} h(v)$ , où  $n(V)$  est le nombre de sommets noirs connectés à un sommet blanc dans  $V$ .*

Dolega, Féray et Śniady montrent dans [B1] que le coefficient du monôme  $R_{\nu_1} \dots R_{\nu_r}$  dans le polynôme de Kerov  $K_k(R_2, R_3, \dots)$  est égal au nombre de cartes biparties, unicellulaires, enracinées, avec  $k$  arêtes, munies d'une décoration  $h$  de type  $\nu$  sur les sommets blancs, qui en fasse un graphe expenseur. Ce coefficient est donc un entier positif.

La notion de graphe expenseur n'est pas nouvelle (voir [B4] pour une revue). La démonstration suppose un bon soin dans le contrôle des signes.

2.3.8. — En conclusion, on peut formuler le théorème 2.1 de la manière suivante. Pour tout entier  $k \geq 1$ , notons  $\mathcal{M}_k$  l'ensemble des cartes biparties, avec  $k$  arêtes dont une marquée, unicellulaires<sup>(9)</sup>. On note  $\mathcal{T}_k$  le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_k$  constitué des arbres planaires, enracinés, avec  $k$  arêtes (donc  $k + 1$  sommets). On a alors

$$\begin{aligned} \text{Ch}_k &= (-1)^k \sum_{M \in \mathcal{M}_k} (-1)^{|V_o(M)|} N_{G(M)} \\ R_{k+1} &= (-1)^k \sum_{T \in \mathcal{T}_k} (-1)^{|V_o(T)|} N_{G(T)} \end{aligned}$$

en notant  $G(M)$  le graphe réduit associé à  $M$ , et de même pour  $G(T)$ .

9. C'est-à-dire avec un bord connexe.

Comme  $\text{Ch}_k$  a  $R_{k+1}$  pour terme de plus haut degré, l'algèbre  $\Lambda$  est aussi l'algèbre de polynômes  $K[\text{Ch}_1, \text{Ch}_2, \dots]$ , mais la graduation n'est pas compatible. Comme  $R_{\mu_1+1} \dots R_{\mu_\ell+1}$  est le terme de plus haut degré de  $\text{Ch}_\mu$  pour  $\mu = (\mu_1 \geq \dots \geq \mu_\ell)$ , on voit aussi que les séries  $\text{Ch}_\mu$  forment une base de l'algèbre  $\Lambda$ .

## 2.4. Évaluations asymptotiques

Les formules exactes données pour les valeurs des caractères redonnent facilement les formules asymptotiques sur les diagrammes de Young, telles qu'elles ont été découvertes en 1977 par Kerov et Vershik dans [C6] et par Logan et Schepp dans [C7].

2.4.1. — Notons  $\mathcal{Y}_n$  l'ensemble des partitions de  $n$  (ou des diagrammes de Young de taille  $n$ ). Rappelons la formule bien connue en théorie des groupes

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_n} d_\lambda \chi^\lambda(\pi) = \begin{cases} |S_n| = n! & \text{si } \pi = 1 \\ 0 & \text{si } \pi \neq 1. \end{cases}$$

Faisant  $\pi = 1$ , on a donc  $\sum_\lambda d_\lambda^2 = n!$ , d'où une mesure de probabilité  $\mathcal{P}_n$  sur  $\mathcal{Y}_n$  attribuant la probabilité  $\mathcal{P}_n(\lambda) := d_\lambda^2/n!$  au point  $\lambda$  (« mesure de Plancherel »). De plus, la moyenne sur  $\mathcal{Y}_n$  de la fonction  $\lambda \mapsto \psi^\lambda(\pi) = \chi^\lambda(\pi)/d_\lambda$  est égale à  $\delta_{\pi,1}$ .

2.4.2. — Introduisons l'espace fonctionnel  $\mathcal{L}$  formé des applications  $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui satisfont aux deux conditions :

- il existe  $A > 0$  tel que  $\omega(x) = |x|$  pour  $|x| > A$  ;
- $\omega$  est 1-lipschitzienne, c'est-à-dire qu'on a l'inégalité  $|\omega(x) - \omega(y)| \leq |x - y|$  pour  $x, y$  réels.

On le munit de la distance

$$d(\omega, \omega') = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\omega(x) - \omega'(x)|.$$

Cette formule a un sens car la fonction  $x \mapsto \omega(x) - |x|$  est continue et bornée pour  $\omega \in \mathcal{L}$ . Noter aussi que toute fonction  $\omega \in \mathcal{L}$  a presque partout une dérivée  $\omega'$  et qu'on a  $-1 \leq \omega'(x) \leq 1$  pour presque tout  $x$ .

D'après le théorème d'Ascoli, pour tout  $A > 0$ , le sous-espace  $\mathcal{L}_A$  de  $\mathcal{L}$ , formé des fonctions  $\omega$  telles que  $\omega(x) = |x|$  lorsque  $|x| > A$ , est compact ; par suite, l'espace métrique  $\mathcal{L}$  est réunion des sous-espaces métriques compacts  $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_3 \subset \dots$ . Autrement dit, l'intégration à la Lebesgue fonctionne parfaitement dans l'espace  $\mathcal{L}$ .

2.4.3. — Nous allons d'abord *recalibrer* les fonctions  $\omega_\lambda$  introduites à la section 1.1.6. Pour toute partition  $\lambda$  de  $n$ , posons<sup>(10)</sup>

$$\bar{\omega}_\lambda(x) = n^{-1/2} \omega_\lambda(n^{1/2} x).$$

10. Intuitivement, cela revient à dessiner le diagramme de Young (en version russe) avec des petits carrés de côté  $\sqrt{\frac{2}{n}}$ , d'où  $n$  carrés d'aire  $2/n$ . Cela revient à multiplier les coordonnées rectangulaires  $p_i, q_i$  par  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ .

Alors l'aire de la région de  $\mathbb{R}^2$  définie par les inégalités

$$|x| \leq y \leq \bar{\omega}_\lambda(x)$$

est égale à 2, *indépendamment de  $n$* . Il est clair aussi que la fonction  $\bar{\omega}_\lambda$  appartient à  $\mathcal{L}$ . L'image par l'application  $\bar{\omega}^{(n)} : \lambda \mapsto \bar{\omega}_\lambda$  de  $\mathcal{Y}_n$  dans  $\mathcal{L}$  de la loi de probabilité  $\mathcal{P}_n$  sur  $\mathcal{Y}_n$  est une loi de probabilité  $\Pi_n$  sur  $\mathcal{L}$ .

Par ailleurs, on définit un élément  $\Omega$  de  $\mathcal{L}$  par la formule

$$\Omega(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \geq 2 \\ \frac{2}{\pi} \left[ x \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + (4 - x^2)^{1/2} \right] & \text{si } |x| \leq 2. \end{cases}$$

Soit aussi  $\delta_\Omega$  la masse unité au point  $\Omega$  de  $\mathcal{L}$ .

2.4.4. — Voici maintenant le théorème asymptotique de Kerov, Vershik, Logan et Schepp :

THÉORÈME 2.3. — *Dans l'espace métrique  $\mathcal{L}$ , la suite des mesures de probabilité  $\Pi_n$  tend vers  $\delta_\Omega$ .*

Employons un langage plus pittoresque : considérons pour  $n \geq 1$  une partition aléatoire  $\lambda^{(n)}$  de taille  $n$ , choisie selon la loi de probabilité  $\mathcal{P}_n$  sur  $\mathcal{Y}_n$ . Faisons subir à la courbe aléatoire  $C_n : y = \omega_{\lambda^{(n)}}(x)$  dans  $\mathbb{R}^2$  une homothétie de rapport  $n^{-1/2}$  (qui la ramène dans une région finie). Soit  $\bar{C}_n$  la courbe aléatoire obtenue. Alors en probabilité, la courbe  $\bar{C}_n$  tend vers la courbe  $C_\infty$  définie par  $y = \Omega(x)$  (voir la figure donnée dans l'introduction).

2.4.5. — Voici quelques points saillants de la démonstration. Il faut d'abord s'assurer que la suite des mesures  $\Pi_n$  est « tendue » (*tight* en anglais international !). Autrement dit, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une partie compacte de la forme  $\mathcal{L}_A$  telle que  $\Pi_n(\mathcal{L}_A) \geq 1 - \varepsilon$  pour tout  $n \geq 1$ . Il faut ensuite s'assurer que pour tout  $A > 0$  et toute fonction continue  $F$  sur  $\mathcal{L}_A$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{L}_A} F \cdot d\Pi_n = F(\Omega).$$

Pour cela, on peut utiliser le théorème de Stone-Weierstrass qui exprime toute fonction continue  $F$  sur l'espace compact  $\mathcal{L}_A$  comme limite uniforme de polynômes en une suite séparante de fonctions continues sur  $\mathcal{L}_A$ .

C'est le moment d'introduire les moments  $t_k$  (pour  $k \geq 2$ ) de la section 1.1.8 ; la théorie des moments montre que c'est une suite séparante. On utilise alors les faits suivants :

a) Une relation algébrique

$$t_k = \frac{1}{k} \sum_{r=1}^k \binom{k}{r} \sum_{\ell_1 + \dots + \ell_r = k} R_{\ell_1} R_{\ell_2} \dots R_{\ell_r}$$

qui permet de naviguer de la suite  $(R_2, R_3, \dots)$  à la suite  $(t_2, t_3, \dots)$  et *vice-versa*.

Dans la théorie des probabilités libres, c'est la formule reliant les moments  $t_k$  d'une variable aléatoire à ses cumulants libres  $R_k$ .

b) L'homogénéité des  $R_k$  permet de montrer que l'on a (avec l'abus de notation  $h_{1/\sqrt{n}}$  pour les homothéties)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} R_2(h_{1/\sqrt{n}} \lambda) &= 1 && \text{(calcul d'aire)} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} R_k(h_{1/\sqrt{n}} \lambda) &= 0 && \text{pour } k \geq 3.\end{aligned}$$

c) Les moments de la fonction  $\Omega$  étant définis par

$$t_k(\Omega) = \int_{-2}^2 \frac{1}{2} (\Omega(x) - |x|) x^{k-2} dx,$$

la fonction  $\Omega$  est caractérisée par les valeurs

$$\begin{cases} t_{2k}(\Omega) = (2k-1)/(k!)^2 \\ t_{2k+1}(\Omega) = 0. \end{cases}$$

Ces relations équivalent à  $R_2(\Omega) = 1$ ,  $R_k(\Omega) = 0$  pour  $k \geq 3$ , en utilisant la formule de a) pour définir  $R_k(\Omega)$ . Mais le calcul de limite dans b) s'écrit  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_k(h_{1/\sqrt{n}} \lambda) = R_k(\Omega)$  pour tout  $k \geq 2$ , d'où une formule analogue pour les moments.

**Remerciements.** — Tout d'abord à Valentin Féray, qui m'a communiqué ses notes de cours, et Victor Rabiet pour le prêt de ses fichiers, en particulier ceux des figures. Les auditeurs du Séminaire Chevalley à Paris-Diderot ont servi de cobayes. Enfin, une fois encore, l'assistance experte et souriante de Cécile Gourgues, pour la saisie, ne m'a pas fait défaut.

## RÉFÉRENCES

### A. REPRÉSENTATIONS DES GROUPES FINIS, ET EN PARTICULIER SYMÉTRIQUES

- [A0] *Combinatoire et représentations du groupe symétrique (Strasbourg, 1976)* – Lecture Notes in Math., vol. 579, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [A1] N. BOURBAKI – *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitre 8. Modules et anneaux semi-simples*, 2<sup>e</sup> éd., Springer-Verlag, Berlin, 2012.
- [A2] F. G. FROBENIUS – « Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe », *Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin* (1900), p. 516–534.
- [A3] W. FULTON & J. HARRIS – *Representation theory: a first course*, Grad. Texts in Math., vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991.

- [A4] W. FULTON – *Young tableaux*, London Math. Soc. Stud. Texts, vol. 35, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [A5] G. D. JAMES – *The representation theory of the symmetric groups*, Lecture Notes in Math., vol. 682, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [A6] G. D. JAMES & A. KERBER – *The representation theory of the symmetric group*, Encycl. Maths. and Appl., vol. 16, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, 1981.
- [A7] D. KNUTSON –  *$\lambda$ -rings and the representation theory of the symmetric group*, Lecture Notes in Math., vol. 308, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [A8] I. G. MACDONALD – *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2<sup>e</sup> éd., Oxford Math. Monogr., Oxford Univ. Press, 1995.
- [A9] G. DE B. ROBINSON – *Representation theory of the symmetric group*, Univ. Toronto Press, 1961.
- [A10] B. E. SAGAN – *The symmetric group*, Wadsworth, Pacific Grove, 1991.
- [A11] I. SCHUR – « Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen », in *Gesammelte Abhandlungen. Band 1*, Springer-Verlag, Berlin, 1973, p. 1–72.
- [A12] H. WEYL – *The classical groups*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1997.
- [A13] A. YOUNG – « On quantitative substitutional analysis III », *Proc. London Math. Soc.* **28** (1928), p. 255–292.

## B. MÉTHODES COMBINATOIRES POUR LES CARACTÈRES

- [B1] M. DOŁĘGA, V. FÉRAY & P. ŚNIADY – « Explicit combinatorial interpretation of Kerov character polynomials as numbers of permutation factorizations », *Adv. Math.* **225** (2010), no. 1, p. 81–120.
- [B2] V. FÉRAY – « Combinatorial interpretation and positivity of Kerov's character polynomials », *J. Algebraic Combin.* **29** (2009), no. 4, p. 473–507.
- [B3] ———, « Stanley's formula for characters of the symmetric group », *Ann. Comb.* **13** (2010), no. 4, p. 453–461.
- [B4] S. HOORY, N. LINIAL & A. WIGDERSON – « Expander graphs and their applications », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **43** (2006), no. 4, p. 439–561.
- [B5] S. KEROV & G. OLSHANSKI – « Polynomial functions on the set of Young diagrams », *C. R. Acad. Sci. Paris* **319** (1994), no. 2, p. 121–126.
- [B6] A. RATTAN – « Stanley's character polynomials and coloured factorisations in the symmetric group », *J. Combin. Theory Ser. A* **115** (2008), no. 4, p. 535–546.



- [B7] R. STANLEY – « A conjectured combinatorial interpretation and irreducible character values of the symmetric group », arXiv:math.CO/0606467, 2006.

### C. DIAGRAMMES DE GRANDE TAILLE

- [C1] P. BIANE – « Representations of symmetric groups and free probability », *Adv. Math.* **138** (1998), no. 1, p. 126–181.
- [C2] ———, « Characters of symmetric groups and free cumulants », in *Asymptotic combinatorics with applications to mathematical physics (St. Petersburg, 2001)*, Lecture Notes in Math., vol. 1815, Springer-Verlag, Berlin, 2003, p. 185–200.
- [C3] V. FÉRAY & P. ŚNIA DY – « Asymptotics of characters of symmetric groups related to Stanley character formula », *Ann. of Math. (2)* **173** (2011), no. 2, p. 887–906.
- [C4] V. IVANOV & G. OLSHANSKI – « Kerov's central limit theorem for the Plancherel measure on Young diagrams », in *Symmetric functions 2001: surveys of developments and perspectives*, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., vol. 74, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002, p. 93–151.
- [C5] S. KEROV – « The asymptotics of interlacing sequences and the growth of continual Young diagrams », *Zap. Nauchn. Sem. S.-Petersburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* **205** (1993), p. 21–29, 179.
- [C6] S. KEROV & A. VERSHIK – « Asymptotics of the Plancherel measure of the symmetric group and the limiting form of Young tableaux », *Sov. Math. Dokl.* **18** (1977), p. 527–531.
- [C7] B. F. LOGAN & L. A. SHEPP – « A variational problem for random Young tableaux », *Advances in Math.* **26** (1977), no. 2, p. 206–222.
- [C8] A. OKOUNKOV – « Random matrices and random permutations », *Internat. Math. Res. Notices* (2000), no. 20, p. 1043–1095.

Pierre CARTIER

CNRS

Institut Mathématique de Jussieu (Paris)  
et I.H.É.S.

35, route de Chartres  
91440 Bures-sur-Yvette  
France

E-mail : [cartier@ihes.fr](mailto:cartier@ihes.fr)