

Astérisque

CYRIL LECUIRE

**Modèles et laminations terminales [d'après Minsky
et Brock-Canary-Minsky]**

Astérisque, tome 361 (2014), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 1068, p. 299-323

http://www.numdam.org/item?id=AST_2014__361__299_0

© Société mathématique de France, 2014, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MODÈLES ET LAMINATIONS TERMINALES [d'après Minsky et Brock-Canary-Minsky]

par Cyril LECUIRE

INTRODUCTION

En paraphrasant Minsky, on peut dire que la conjecture des laminations terminales répond à la question suivante : est-ce qu'une variété hyperbolique de dimension 3 dont le groupe fondamental est de type fini est uniquement déterminée par sa géométrie asymptotique ? Les travaux sur les invariants de bouts initiés d'une part par Ahlfors et Bers et d'autre part par Thurston permettent, d'une certaine façon, de quantifier cette géométrie asymptotique et de donner un énoncé précis à cette conjecture.

Jetons un coup d'œil à ces invariants. Soit N une variété hyperbolique de dimension 3 dont le groupe fondamental est de type fini. C'est-à-dire que N est une variété de dimension 3 orientable munie d'une métrique riemannienne complète dont toutes les courbures scalaires sont égales à -1 . D'après la conjecture dite de sagesse, prouvée par Agol et Calegari-Gabai ([Ag] et [CG]), N est homéomorphe à l'intérieur d'une variété compacte M . Pour simplifier, supposons que N n'a pas de pointes paraboliques. Dans ce cas, comme nous le verrons dans la section 1.1, les bouts de N sont en correspondance avec les composantes de ∂M . Ces bouts sont classés en deux types auxquels sont associés deux types d'invariants. À un bout *géométriquement fini* (voir partie 1 pour les définitions) est associée une structure conforme sur la composante de ∂M correspondante et à un bout *géométriquement infini* est associée une lamination géodésique (elle aussi sur la composante correspondante de ∂M). La collection des structures conformes et des laminations géodésiques ainsi produites par les bouts de N constitue ce qu'on appelle les *invariants de bouts de N* . Remarquons que ces invariants vivent sur ∂M , on peut donc comparer les invariants de bouts de deux variétés hyperboliques différentes pourvu qu'elles soient homéomorphes à l'intérieur de la même variété compacte. On dit que deux telles variétés ont *le même type topologique*. La conjecture des laminations terminales (qui est désormais un théorème), énoncée par Thurston ([Th2]), se formule de la manière suivante.

THÉORÈME 0.1 (Théorème des laminations terminales). — *Une variété hyperbolique dont le groupe fondamental est de type fini est uniquement déterminée par son type topologique et ses invariants de bouts.*

En d'autres termes, deux variétés hyperboliques N et N' qui sont homéomorphes et ont les mêmes invariants de bouts sont isométriques (par une isométrie dans la classe d'homotopies de l'homéomorphisme entre N et N').

Un certain nombre de cas particuliers ont été traités par Minsky ([Mi1], [Mi2], [Mi3]) et une preuve pour toutes les variétés indécomposables est donnée dans [Mi4] et [BCM1]. Les arguments pour le cas général sont désormais connus et largement acceptés bien que l'article correspondant soit encore en cours de rédaction. Bowditch a donné une preuve différente bien que suivant le même schéma général ([Bow3], [Bow4] et [Bow5]), c'est-à-dire que sa preuve repose aussi sur la construction d'une variété modèle (qui est différente de celle de Minsky). Une approche différente, au sens où elle n'introduit pas de variété modèle, a été annoncée dans [BB1].

Dans cet exposé, nous allons essayer de donner aux lecteurs des éléments pour comprendre comment obtenir des informations sur la géométrie d'une variété hyperbolique à partir de ses invariants de bouts et à quoi peut servir le type d'informations ainsi acquises. Après avoir défini les bouts et leurs invariants, nous expliquerons des résultats de Minsky et Bowditch qui font le lien entre des propriétés géométriques d'une variété hyperbolique et ses invariants de bouts. Ceci nous conduira naturellement à expliquer, dans un cas simple, la construction de la variété modèle de Minsky. Nous présenterons ensuite un certain nombre de résultats dont les preuves utilisent cette variété modèle ou des variantes.

1. BOUTS DES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES DE DIMENSION 3

Dans cette première partie, nous allons définir les bouts des variétés hyperboliques, leurs types et leurs invariants. Nous décrirons ensuite deux exemples classiques pour illustrer ces concepts et nous conclurons par un aperçu de la preuve du théorème des laminations terminales.

1.1. Bouts relatifs aux pointes paraboliques

En suivant Bonahon ([Bon]), nous allons partir de la définition de Freudenthal (voir [Fr]) d'un bout d'un espace topologique X . Un bout b de X est une famille d'ouverts connexes $(U_i)_{i \in I}$ avec les propriétés suivantes :

- (1) Pour tout i , U_i est de frontière compacte mais n'est pas relativement compacte.
- (2) Pour tous i et j , il existe k tel que U_k est contenu dans $U_i \cap U_j$.
- (3) La famille $(U_i)_{i \in I}$ est maximale pour les propriétés 1 et 2.

On munit l'union de X et de l'ensemble de ses bouts d'une topologie en prenant pour voisinage d'un bout $b = (U_i)_{i \in I}$ la famille des ouverts $U_i \cup b$. Par abus de langage on appellera voisinage du bout b dans X chacun des ouverts U_i .

Nous noterons $\mathbb{H}^3$ l'espace hyperbolique de dimension 3, *i.e.* l'unique variété hyperbolique simplement connexe de dimension 3. Le revêtement universel de toute variété hyperbolique N de dimension 3 est isométrique à $\mathbb{H}^3$. Le choix d'une telle isométrie induit une représentation $\rho : \pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$. On déduit du lemme de Margulis ([KM]) qu'il existe une collection $\rho(\pi_1(M))$ -invariante d'horoboules dans $\mathbb{H}^3$ qui sont deux à deux disjointes et « centrées » aux points fixes des isométries paraboliques de $\rho(\pi_1(M))$. La projection de chacune de ses horoboules sur N est un *voisinage d'une pointe parabolique*. Un tel voisinage est homéomorphe au produit d'une demi-ligne $(0, \infty)$ avec soit un tore de dimension 2, soit un anneau ouvert. La réunion de ces voisinages des pointes dans N est appelée la *partie cuspidale* de N et son complémentaire la *partie non-cuspidale*, que nous noterons N_0 . Un bout de N relatif aux pointes paraboliques est un bout de la partie non-cuspidale N_0 . Dans la suite nous considérerons uniquement des bouts relatifs aux pointes paraboliques et nous les appellerons simplement bouts de N .

Un *cœur* pour une variété M (non-compacte) de dimension 3 est une sous-variété $C \subset M$ telle que l'inclusion $C \hookrightarrow M$ est une équivalence d'homotopie. Lorsque le groupe fondamental de M est de type fini, un théorème de Scott ([Sc]) garantit l'existence d'un cœur compact. Un tel cœur compact n'est pas unique mais McCullough, Miller et Swarup ([MMS]) ont démontré que deux cœurs compacts différents sont homéomorphes. Remarquons que deux tels cœurs ne sont cependant pas nécessairement isotopes, par exemple un cœur compact dans un bretzel ouvert peut être noué.

Pour une variété hyperbolique N , un *cœur compact relatif (aux pointes paraboliques)* $C \subset N_0$ est un cœur compact qui est bien positionné vis-à-vis des pointes paraboliques, c'est-à-dire que l'inclusion $(C, C \cap \partial N_0) \hookrightarrow (N_0, \partial N_0)$ est une équivalence d'homotopie. L'existence d'un cœur compact relatif a été démontrée par McCullough ([Mc]).

Étant donné un cœur compact relatif C , chaque composante de $N_0 - C$ est un voisinage d'un bout de N . On a ainsi une correspondance biunivoque entre les bouts de N et les composantes de $N_0 - C$ (voir [Bon]) et donc entre les bouts de N et les composantes de $\partial C - (C \cap \partial N_0)$.

Un bout de N est *topologiquement sage* s'il a un voisinage homéomorphe à $S \times (0, \infty)$, S étant une surface de type fini. Dans les années 70, Marden a conjecturé qu'une variété hyperbolique N dont le groupe fondamental est de type fini est homéomorphe à l'intérieur d'une variété compacte. Cette conjecture, dite de sagesse, a été résolue indépendamment par Agol et Calegari-Gabai ([Ag] et [CG]). Il s'ensuit

que tous les bouts d'une variété hyperbolique dont le groupe fondamental est de type fini sont topologiquement sages.

Soit N une variété hyperbolique de volume infini dont le groupe fondamental est de type fini. D'après ce qu'on vient de voir, N est homéomorphe à l'intérieur d'une variété compacte M . De plus N possède un cœur compact relatif C homéomorphe à M . Ceci nous permet de plonger $\partial C - (C \cap \partial N_0)$ dans ∂M et d'obtenir une correspondance biunivoque entre les bouts de N et des sous-surfaces disjointes de ∂M de façon que chaque bout b est homéomorphe à $S \times (0, \infty)$, S étant la sous-surface de M correspondant au bout b .

Un bout de N est *géométriquement fini* s'il a un voisinage qui ne rencontre aucune géodésique fermée. Si tout voisinage d'un bout b rencontre une géodésique fermée alors b est *géométriquement infini*. Dans les deux sections qui suivent nous allons définir les invariants associés à chacun de ces types de bouts.

1.2. Invariants des bouts géométriquement finis

Un groupe kleinien est un sous-groupe discret de $PSL(2, \mathbb{C})$. Comme $PSL(2, \mathbb{C})$ est le groupe des isométries de $\mathbb{H}^3$ qui préservent l'orientation, toute variété hyperbolique est isométrique au quotient de $\mathbb{H}^3$ par un groupe kleinien sans torsion et, réciproquement, le quotient de $\mathbb{H}^3$ par un groupe kleinien sans torsion est une variété hyperbolique. Dans la suite nous supposons par défaut que les groupes kleinien que nous considérons sont sans torsion, de covolume infini et ne sont pas abéliens.

Prenons pour $\mathbb{H}^3$ le modèle de la boule unité ouverte $\text{int}(B^3) \subset \mathbb{R}^3$. L'ensemble limite Λ_Γ d'un groupe kleinien Γ est l'adhérence dans $S_\infty^2 = \partial B^3$ (la sphère à l'infini) de l'orbite d'un point de $\text{int}(B^3)$. Le domaine de discontinuité Ω_Γ de Γ est le complémentaire dans S_∞^2 de Λ_Γ . Un élément de $PSL(2, \mathbb{C})$ (ou *transformation de Möbius*) est à la fois une isométrie de $\mathbb{H}^3$ qui préserve l'orientation et une transformation conforme de $S_\infty^2 = \hat{\mathbb{C}}$. Le groupe kleinien Γ agit donc sur S_∞^2 par transformations conformes. Cette action est proprement discontinue sur Ω_Γ . Il s'ensuit que le quotient Ω_Γ/Γ est une surface de Riemann. D'après un théorème d'Ahlfors ([Ah]), si Γ est de type fini, alors Ω_Γ/Γ est une union finie de surfaces de type fini. On peut voir Ω_Γ/Γ comme le bord à l'infini $\partial_\infty N$ de la variété quotient $N = \mathbb{H}^3/\Gamma$.

Le cœur convexe $C(\Gamma)$ de la variété quotient $\mathbb{H}^3/\Gamma$ est le quotient de l'enveloppe convexe $E(\Lambda_\Gamma)$ de l'ensemble limite de Γ . Il n'est pas très difficile de montrer qu'un bout de $\mathbb{H}^3/\Gamma$ est géométriquement fini si et seulement s'il a un voisinage disjoint de $C(\Gamma)$. De plus on peut choisir un cœur compact relatif C_0 de façon à ce que $\partial C(\Gamma) \cap N_0$ soit une réunion de composantes connexes de l'adhérence de $\partial C_0 - \partial N_0$. On a ainsi une correspondance biunivoque entre les bouts géométriquement finis de $\mathbb{H}^3/\Gamma$ et les composantes connexes de $\partial C(\Gamma)$.

Notons $\mathcal{V}_\epsilon \subset \mathbb{H}^3$ l'ensemble des points de $\mathbb{H}^3$ à distance au plus ϵ de $E(\Lambda_\Gamma)$; cet ensemble est strictement convexe et pour ϵ petit, son quotient $\mathcal{V}_\epsilon/\Gamma$ est homéomorphe au cœur convexe $C(\Gamma)$ (si Γ n'est pas fuchsien). De la stricte convexité de $\mathcal{V}_\epsilon$ on déduit que chaque point de Ω_Γ est le « centre » (*i.e.* le point de contact avec S_∞^2) d'une horoboule qui est tangente à $\mathcal{V}_\epsilon$ en un (unique) point. L'application qui envoie chaque point de Ω_Γ sur cet unique point de tangence fournit un homéomorphisme Γ -équivariant entre Ω_Γ et $\partial\mathcal{V}_\epsilon$. On en déduit un homéomorphisme entre Ω_Γ/Γ et $\partial C(\Gamma) \hookrightarrow C_0$. Ainsi à chaque bout géométriquement fini de la variété quotient est associée une structure conforme sur une composante de $\partial C(\Gamma) \hookrightarrow C_0$ appelée *structure conforme à l'infini*.

1.3. Invariants des bouts géométriquement finis

L'invariant associé à un bout géométriquement fini est une lamination géodésique. Commençons par définir un tel objet.

Soit S une surface munie d'une métrique hyperbolique complète de volume fini. Une *lamination géodésique* $L \subset S$ est un fermé qui est réunion disjointe de géodésiques complètes plongées dans S . Une géodésique complète plongée contenue dans L est une *feuille* de L . L'exemple le plus simple de lamination géodésique est une géodésique fermée simple mais, génériquement, l'intersection d'une lamination géodésique et d'un arc est un ensemble de Cantor. Une lamination géodésique L est minimale si toute feuille de L est dense dans L . Toute lamination géodésique est la réunion d'un nombre fini de laminations minimales et de feuilles isolées.

Ainsi définie, une lamination géodésique dépend de la métrique choisie sur S . Le lemme classique suivant permet de s'abstraire de cette dépendance.

LEMME 1.1. — *Soient s_1 et s_2 deux métriques hyperboliques complètes d'aires finies sur S . Alors il existe un homéomorphisme naturel entre l'espace des laminations géodésiques pour la métrique s_1 et l'espace des laminations géodésiques pour la métrique s_2 (ces deux espaces étant munis de la topologie de Hausdorff).*

Un bout de N est *simplement dégénéré* s'il a un voisinage U homéomorphe à $S \times (0, \infty)$ et s'il existe une suite de surfaces $f_n : S \rightarrow U$ hyperboliques (*i.e.* la métrique sur S induite par f_n est hyperbolique) qui sort de tout compact et telle que $f_n(S)$ est homotope à $S \times \{0\}$. Thurston, Bonahon et Canary ([Th1], [Bon], [Ca]) ont montré que tout bout topologiquement sage et géométriquement infini est simplement dégénéré. En combinant ce résultat avec la résolution de la conjecture de sagesse mentionnée plus haut, on déduit qu'un bout géométriquement infini d'une variété hyperbolique dont le groupe fondamental est de type fini est simplement dégénéré. Pour un tel bout, on considère une suite $c_n \subset S$ de courbes fermées simples telle que la longueur de $f_n(c_n)$ est bornée (l'existence d'une telle suite de courbes est garantie par le lemme de Bers, [Be]). On extrait ensuite une sous-suite de manière que c_n converge pour la topologie de Hausdorff. La limite de $\{c_n\}$ est une lamination géodésique qui contient

une unique sous-lamination minimale λ_b . Bonahon ([Bon]) a montré que λ_b ne dépend pas du choix de la suite c_n . Il s'agit donc d'un invariant du bout b que l'on appelle la *lamination terminale de b* . Remarquons que le fait que l'image de f_n sort de tout compact entraîne que λ_b remplit la surface S au sens où chaque composante de $S - \lambda_b$ est soit simplement connexe, soit un anneau, voisinage d'une pointe de S ; on dit que λ_b est *arationnelle*.

Soit N une variété hyperbolique de dimension 3 qui est homéomorphe à l'intérieur d'une variété compacte M . Chaque bout de N a un voisinage de la forme $S \times (0, \infty)$ où S est une sous-surface de ∂M et un invariant lui est associé qui est soit une structure conforme sur S , soit une lamination géodésique arationnelle sur S .

On appelle *invariants de bouts de N* la collection des structures conformes à l'infini des bouts géométriquement finis de N et des laminations terminales des bouts géométriquement infinis.

1.4. Décomposition « épaisse-fine »

Dans la suite il sera utile au lecteur de savoir ce qu'est un tube de Margulis. Comme les sections précédentes contenaient essentiellement des définitions maintenant classiques, le moment paraît opportun pour présenter la décomposition « épaisse-fine » des variétés hyperboliques.

Soient N une variété hyperbolique complète et x un point de N . Le *rayon d'injectivité* $\text{inj}_N(x)$ de x dans N est le rayon de la plus grande boule ouverte de N centrée en x qui est isométrique à une boule de $\mathbb{H}^3$. La partie ϵ -épaisse $N^{\geq \epsilon}$ de N est l'ensemble des points en lesquels le rayon d'injectivité est supérieur à ϵ et la partie ϵ -fine $N^{\leq \epsilon}$, l'ensemble des points en lesquels il est inférieur à ϵ . D'après le lemme de Margulis, il existe une constante ϵ_n qui dépend de la dimension n de N , appelée constante de Margulis, telle que pour tout $\epsilon \leq \epsilon_n$ chaque composante de la partie ϵ -fine de N est ou bien un voisinage d'une pointe parabolique ou bien un voisinage régulier d'une géodésique fermée de longueur inférieure à ϵ . Un tel voisinage d'une géodésique fermée est appelé un *tube de Margulis*.

Lorsque N est de dimension 3, un tube de Margulis peut être paramétré par une paire $(\lambda, r) \in (\mathbb{C}, \mathbb{R})$ avec $\text{Re } \lambda > 0$ et $r > 0$, de la façon suivante : $\mathbb{T}(\lambda, r)$ est le quotient d'un r -voisinage dans $\mathbb{H}^3$ d'une géodésique L par une isométrie hyperbolique d'axe L et de distance de translation complexe λ . On appellera r la *profondeur* du tube.

1.5. Deux exemples

Nous allons présenter deux exemples classiques pour illustrer les deux types de bouts. Pour ces deux exemples, on notera S une surface compacte sans bord de genre supérieur à 2.

Considérons une représentation $\rho : \pi_1(S) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R}) \subset PSL(2, \mathbb{C})$, fidèle et discrète. Une telle représentation est dite fuchsienne. La variété quotient $N_\rho = \mathbb{H}^3 / \rho(\pi_1(S))$ est homéomorphe à $S \times \mathbb{R}$ et son cœur convexe $C(\rho)$ est une surface totalement géodésique homéomorphe à S . On en déduit que N_ρ a deux bouts géométriquement finis. Ces deux bouts ont la même structure conforme à l'infini (modulo changement d'orientation) qui est donnée par la surface hyperbolique $\mathbb{H}^2 / \rho(\pi_1(S))$.

Pour le deuxième exemple, on considère un difféomorphisme $\psi : S \rightarrow S$ qui est pseudo-Anosov, c'est-à-dire que pour toute courbe fermée simple $c \subset S$, la famille $\{\psi^n(c) | n \in \mathbb{Z}\}$ contient une infinité de classes d'homotopie (cf. [Th4], voir aussi [Ot]). Notons T_ψ le tore d'application de ψ , i.e. la variété quotient de $S \times [0, 1]$ par la relation $(x, 0) \sim (\psi(x), 1)$, $\forall x \in S$. D'après le théorème d'hyperbolisation de Thurston ([Th3], voir aussi [Ot]), T_ψ admet une métrique hyperbolique complète, i.e. il existe une (unique d'après le théorème de rigidité de Mostow [Mo]) variété hyperbolique N_ψ homéomorphe à T_ψ . La métrique hyperbolique de N_ψ se relève au revêtement cyclique $S \times \mathbb{R} \rightarrow T_\psi$ en une métrique hyperbolique complète sur $S \times \mathbb{R}$. Notons N la variété hyperbolique ainsi produite. Par définition, N est homéomorphe à $S \times \mathbb{R}$. Comme N_ψ n'a pas de paraboliqes, N n'en a pas non plus et elle a donc deux bouts b^+ et b^- dont des voisinages sont $S \times (0, \infty)$ et $S \times (0, -\infty)$ respectivement. Choisissons une courbe fermée simple $c \subset S$ que nous plongeons dans N_ψ par l'intermédiaire de l'inclusion $S = S \times \{\frac{1}{2}\} \subset N_\psi$ et notons c^* la géodésique de N_ψ dans la classe d'homotopie de c . Considérons la suite $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset N$ des relevés successifs de c^* , c_n est homotope à $\psi^n(c)$ dans $N_\psi \approx S \times \mathbb{R}$. Chaque voisinage de b^+ contient tous les c_n pour n assez grand tandis que chaque voisinage de b^- contient tous les c_n pour $-n$ assez grand. On en déduit que les deux bouts de N sont géométriquement infinis et que leurs laminations terminales sont des points d'accumulation de $\{\psi^n(c)\}$ pour $n \rightarrow +\infty$ et $n \rightarrow -\infty$. De tels points d'accumulation sont appelés laminations *stable* et *instable* de ψ .

1.6. Bref aperçu de la preuve

Insistons un peu sur ce qu'il faut surtout retenir des sections 1.1, 1.2 et 1.3. Soit N une variété hyperbolique de dimension 3 dont le groupe fondamental est de type fini. D'après [Ag] et [CG], N est homéomorphe à l'intérieur d'une variété compacte à bord M . À chaque parabolique de N , on associe un anneau ou un tore sur ∂M , on obtient ainsi une sous-surface $P \subset \partial M$. Chaque composante connexe de $\partial M - P$ correspond à un bout de N auquel est associé un invariant, une structure conforme si le bout est géométriquement fini ou une lamination géodésique si le bout est géométriquement infini. La collection de ces invariants ainsi définis sur $\partial M - P$ forme les invariants de bouts de N .

Rappelons que le théorème des laminations terminales nous dit qu'une variété hyperbolique dont le groupe fondamental est de type fini est uniquement déterminée

par son type topologique et ses invariants de bouts. Nous allons maintenant décrire le schéma général de la preuve de Brock-Canary-Minsky.

Dans le cas d'une variété de volume fini, il n'y a pas de bouts (relatifs aux pointes paraboliques) et donc pas d'invariants de bouts. La conjecture est alors résolue par le théorème de rigidité de Mostow-Prasad ([Mo], [Pr]).

Le cas d'une variété N géométriquement finie, *i.e.* dont tous les bouts sont géométriquement finis, découle de la théorie des déformations développée notamment par Ahlfors, Bers, Kra, Marden et Maskit (voir [BK] pour une vue d'ensemble de ces résultats).

La preuve du théorème 0.1 dans le cas général fait appel à deux ingrédients : la construction d'une variété modèle à partir des invariants de bouts et un théorème de rigidité de Sullivan ([Sul]) dont on utilise la version qui suit.

THÉORÈME 1.2. — *Soient deux groupes kleinien Γ et Γ' . Un homéomorphisme quasiconforme qui conjugue Γ et Γ' et qui est conforme sur le domaine de discontinuité de Γ est une transformation de Möbius.*

Une variété modèle M_ν est une variété de dimension 3, dotée d'une métrique riemannienne par morceaux et d'une structure conforme à l'infini, qui ne dépend que des invariants de bouts ν (et du type topologique) de la variété N que l'on considère. C'est une variété modèle pour N s'il existe un homéomorphisme bilipschitzien $f : M_\nu \rightarrow N$ qui s'étend en une application conforme à l'infini.

Si on admet l'existence de variétés modèles, la preuve du théorème des laminations terminales tient en quelques lignes. Étant données deux variétés hyperboliques N et N' qui ont le même type topologique et les mêmes invariants de bouts ν , on a, d'après [Mi7], [BCM1] et [BCM2], une variété modèle M_ν commune aux deux. On en déduit un homéomorphisme bilipschitzien $h : N \rightarrow N'$. De plus h s'étend en une application conforme de $\partial_\infty N$ vers $\partial_\infty N'$. Tout relevé $\tilde{h}$ de h à $\tilde{N} = \mathbb{H}^3$ s'étend en une application quasiconforme et équivariante de S_∞^2 qui est conforme sur le domaine de discontinuité de N . On déduit alors du théorème de rigidité de Sullivan (théorème 1.2) que h est isotope à une isométrie, ce qui permet de conclure.

2. INVARIANTS DE BOUTS ET GÉOMÉTRIE DES VARIÉTÉS

Dans cette partie nous allons évoquer un certain nombre de relations entre les invariants de bouts d'une variété et sa géométrie. Ensuite nous expliquerons la construction de la variété modèle de Minsky et de l'application bilipschitzienne sur un exemple simple. Aussi bien la description des relations entre invariants de bouts et géométrie que la construction de la variété modèle se font par l'intermédiaire du complexe des courbes que nous allons tout de suite définir.

2.1. Le complexe des courbes

Le complexe des courbes introduit par Harvey ([Har]) joue un rôle majeur dans la preuve de la conjecture des laminations terminales, aussi bien dans les arguments de Brock-Minsky-Canary que dans ceux de Bowditch. Remarquons que ce complexe est aussi très utile pour l'étude des groupes modulaires des surfaces de Riemann.

Pour simplifier l'exposé, nous allons seulement définir le 1-squelette du complexe des courbes que l'on appelle le graphe des courbes.

Soit S une surface de type fini de caractéristique d'Euler négative qui n'est pas une sphère à 3 trous. On autorise ici les surfaces à bord. Un sommet du graphe des courbes est une classe d'homotopie de courbes simples qui ne peuvent pas être homotopées dans une pointe de S ni dans une composante de ∂S (on dit que ces courbes sont *non-périphériques*). Deux sommets distincts sont reliés par une arête si les classes d'homotopies correspondantes peuvent être réalisées par des courbes d'intersection minimales (*i.e.* avec deux points d'intersection si l'intérieur de S est une sphère à 4 trous, un point d'intersection si l'intérieur de S est un tore percé et disjointes si S est une autre surface, cf. Figure 1). On fait de ce graphe un espace de longueurs en fixant la longueur de chaque arête à 1. L'espace métrique ainsi obtenu est le *graphe des courbes*. Remarquons que le graphe des courbes n'est pas localement compact.

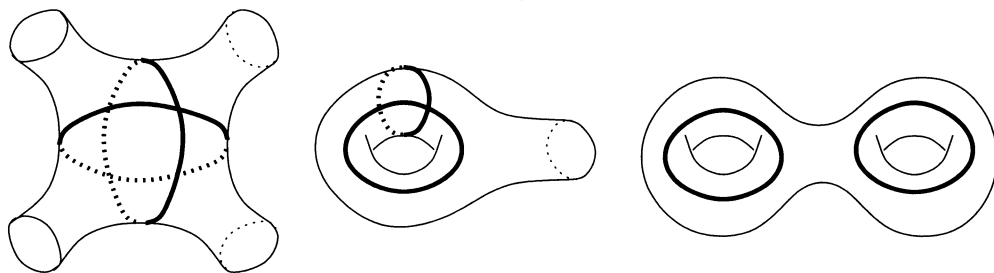


FIGURE 1. 2 sommets adjacents dans les graphes des courbes de différentes surfaces.

Masur et Minsky dans [MM1] ont montré que le graphe des courbes est hyperbolique au sens de Gromov (voir aussi [Bow1]), c'est-à-dire que les triangles géodésiques sont uniformément finis. Un espace hyperbolique a un bord à l'infini bien défini et Klarreich ([Kl], voir aussi [Ham]) a démontré que le bord à l'infini du graphe des courbes est homéomorphe à l'espace des laminations géodésiques arationnelles muni de la topologie de Thurston. Il a été démontré par Gabai ([Ga]) que le bord à l'infini du graphe des courbes est connexe par arc (voir aussi [LS]).

2.2. Le théorème de la borne *a priori*

Le théorème de la borne *a priori* permet de déduire des invariants de bouts une collection de courbes de longueurs bornées.

Dans cette section, pour simplifier les énoncés, nous allons prendre un exemple. Soit N une variété hyperbolique de dimension 3 qui est homéomorphe à un fibré en droites $S \times \mathbb{R}$ sur une sphère à 5 trous S . Cette variété est homéomorphe à l'intérieur de $\hat{S} \times [0, 1]$ où $\hat{S}$ est une sphère de laquelle on a retiré cinq disques ouverts disjoints. On supposera que chaque composante de $\partial\hat{S} \times [0, 1]$ correspond à une pointe parabolique et que N n'a pas d'autres pointes paraboliques. La variété N ainsi définie a deux bouts que nous supposerons géométriquement infinis, on dit qu'une telle variété (homéomorphe à un fibré en droites sur une surface et qui a précisément 2 bouts qui sont tous deux géométriquement infinis) est *doublement dégénérée*. Les invariants de bouts de N sont deux laminations géodésiques arationnelles distinctes ν^+ et ν^- sur S . Dans des notes d'exposés ([Mi6]), Minsky a détaillé la construction de la variété modèle M_ν et d'une application lipschitzienne $M_\nu \rightarrow N$ pour cet exemple.

Pour énoncer le théorème de la borne *a priori*, il faut introduire le concept de hiérarchie dans le graphe des courbes, concept sur lequel nous reviendrons dans quelques lignes. Pour commencer nous allons en présenter une version simplifiée qui, dans le cas de l'exemple décrit ci-dessus, s'énonce de la façon suivante :

THÉORÈME 2.1 (Théorème de la borne *a priori*, version allégée). — *Il existe une constante B telle pour tout sommet c du graphe des courbes $\mathcal{G}(S)$ qui se trouve sur une géodésique joignant ν^+ à ν^- , la longueur de la géodésique fermée de N dans la classe d'homotopie de c est inférieure à B .*

Ce résultat est vrai en général (*i.e.* pour toute surface S de caractéristique d'Euler négative qui n'est pas une sphère à 3 trous) si on remplace « géodésique » par « géodésique tendue » et si on ajoute que L dépend de S . Remarquons également que, le graphe des courbes n'étant pas localement compact, l'existence d'une géodésique joignant ν^+ à ν^- ne se déduit pas directement de son hyperbolicité. Des résultats d'existence et de finitude des géodésiques (tendues) joignant deux points idéaux ont été démontrés dans [MM2] et dans [Bow1]. Dans le cas de la sphère à 5 trous, ces résultats nous disent qu'il y a un nombre fini de géodésiques joignant ν^+ et ν^- .

Grâce au théorème 2.1, nous obtenons, en partant des invariants de bouts, une collection de courbes de longueurs bornées dans N . En fait, le théorème 2.1 est lié aux invariants de bouts simplement du fait que ces invariants ont, en quelque sorte, une longueur bornée. Pour expliquer cette idée plus avant, énonçons une généralisation du théorème 2.1.

THÉORÈME 2.2 ([Bow2, Théorème 1.5]). — *Soient $L > 0$ une sous-surface compacte (et essentielle) Y de S et deux sommets c^+ , c^- de $\mathcal{G}(Y)$ tels que des courbes fermées de N dans les classes d'homotopie des composantes de ∂Y , de c^+ et de c^- , ont des longueurs inférieures à L . Alors il existe une constante $B > 0$ qui ne dépend que*

de L telle que pour tout sommet c du graphe des courbes $\mathcal{G}(Y)$ qui se trouve sur une géodésique joignant c^+ à c^- , la longueur de la géodésique fermée de N dans la classe d'homotopie de c est inférieure à B .

À nouveau, ce résultat est vrai en général si on remplace « géodésique » par « géodésique tendue » et si on ajoute que B dépend aussi de S .

On a vu précédemment que ν^+ et ν^- sont les limites de suites $\{c_n^+\}$ et $\{c_n^-\}$ de courbes fermées simples qui sont représentées dans N par des géodésiques de longueurs bornées. Comme on peut choisir pour la borne sur leur longueur une constante qui ne dépend que de S , le théorème 2.1 se déduit du théorème 2.2 par passage à la limite en prenant $Y = S$.

Le théorème 2.1 fournit une collection de géodésiques de longueurs bornées dans N . Nous allons utiliser le théorème 2.2 sur des sous-surfaces pour trouver encore plus de courbes dans N qui ont une longueur bornée.

Soit $g \subset \mathcal{G}(S)$ une géodésique joignant ν^+ à ν^- . Choisissons un sommet c de $\mathcal{G}(S)$ sur cette géodésique et notons c^+ et c^- ses voisins dans g . Par définition, c^+ et c^- sont contenus dans la composante Y_c du complémentaire de c qui est une sphère à 4 trous (l'autre composante est une sphère à 3 trous). Le théorème 2.1 nous fournit une borne supérieure sur la longueur des géodésiques de N dans les classes d'homotopie de c , c^+ et c^- . Notons g_c une géodésique de $\mathcal{G}(Y_c)$ joignant c^+ à c^- ; on appellera *géodésique subordonnée à g en c* une telle géodésique. Le théorème 2.2 nous fournit alors une borne supérieure pour la longueur des géodésiques de N dans les classes d'homotopie des sommets de g_c .

En construisant pour chaque sommet c de g une géodésique g_c subordonnée à g en c , *i.e.* une géodésique de $\mathcal{G}(Y_c)$ qui joint les voisins de c , on obtient ce que Masur et Minsky appellent une hiérarchie (voir Figure 2). Comme on vient de le voir, les théorèmes 2.1 et 2.2 nous fournissent une borne supérieure pour la longueur de la géodésique de N dans la classe d'homotopie de chaque sommet de cette hiérarchie. Ceci est en fait la conclusion du théorème de la borne *a priori* ([Mi6, §6] et [Mi7, Lemma 7.9]) dont l'énoncé 2.1 n'était qu'une version édulcorée.

Lorsque S est une surface de caractéristique d'Euler plus petite que celle d'une sphère à 5 trous, la construction d'une hiérarchie est plus élaborée (voir [MM2] et [Mi7]) mais la conclusion du théorème de la borne *a priori* est la même (*i.e.* les longueurs des géodésiques dans les classes d'homotopie des sommets d'une hiérarchie sont uniformément bornées).

2.3. Projection sur les sous-surfaces et courbes courtes

Toujours dans le but d'illustrer les liens entre les invariants de bouts de N et leur géométrie, nous allons maintenant expliquer comment ces invariants permettent de repérer les géodésiques qui sont courtes. Pour cela il nous faut définir les projections sur les sous-surfaces.

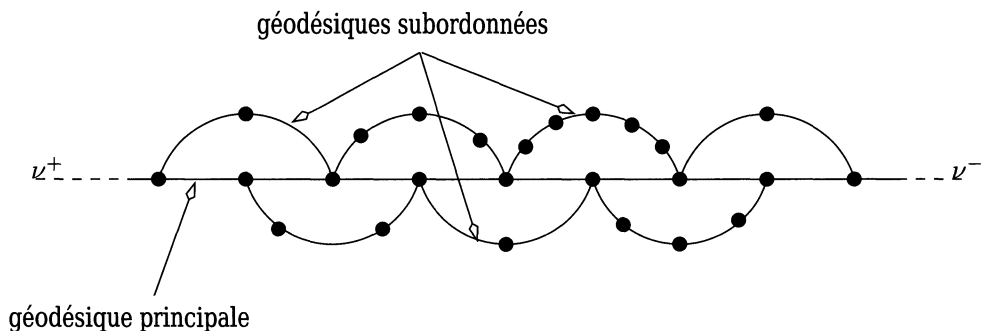


FIGURE 2. Hiérarchie.

Soit S une surface munie d'une métrique hyperbolique complète de volume fini. Soient $Y \subset S$ une surface compacte à bord totalement géodésique qui n'est pas un pantalon et $c \subset S$ une géodésique simple fermée qui intersecte transversalement au moins une composante de ∂Y . Prenons une composante k de $c \cap Y$ et notons $\mathcal{V}$ un petit voisinage dans S de la réunion de k et des composantes de ∂F qui contiennent les points de ∂k (il y a une ou deux telles composantes). Chaque composante de $\partial \mathcal{V} \cap Y$ est une courbe fermée simple contenue dans Y . Chacune de ces courbes, si elle est non-périphérique, définit un sommet du graphe des courbes $\mathcal{G}(Y)$, nous appellerons ces courbes des projections de c sur $\mathcal{G}(Y)$. Bien qu'on puisse avoir beaucoup de telles courbes, il n'est pas difficile de voir que le nombre de points d'intersection entre deux projections de c sur $\mathcal{G}(Y)$ est inférieur à 4. Il s'ensuit que leur distance dans $\mathcal{G}(Y)$ est au plus 9 ([MM1, Lemma 2.1]). L'ensemble des projections de c sur $\mathcal{G}(Y)$ a donc un diamètre uniformément borné.

Les deux résultats suivants vont nous montrer comment, par le biais des projections sur les sous-surfaces, les invariants de bouts permettent de connaître les courbes courtes d'une variété hyperbolique. Fixons d'abord quelques notations. Étant données une surface S et une représentation fidèle et discrète $\rho : \pi_1(S) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$, nous noterons $\mathcal{G}(\rho, L)$ l'ensemble des courbes fermées simples sur S dont les représentants géodésiques dans $\mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(S))$ ont une longueur inférieure à L . On peut voir $\mathcal{G}(\rho, L)$ comme un ensemble de sommets du graphe des courbes. Étant donnée une sous-surface $Y \subset S$ essentielle de S , nous noterons $\text{diam}_Y(\mathcal{G}(\rho, L))$ le diamètre de l'ensemble des projections sur $\mathcal{G}(Y)$ des éléments de $\mathcal{G}(\rho, L)$ qui intersectent Y de manière non triviale. Le résultat suivant montre qu'une sous-surface Y , sur laquelle la projection de $\mathcal{G}(\rho, L)$ a un grand diamètre, a un bord de petite longueur.

THÉORÈME 2.3 ([Mi4]). — *Étant données une surface S et des constantes $\epsilon > 0$ et $L > 0$, il existe $K > 0$ tel que, si $\rho : \pi_1(S) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ est une représentation fidèle*

et discrète et $Y \subset S$ est une sous-surface essentielle, alors :

$$\text{diam}_Y(\mathcal{G}(\rho, L)) \geq K \Rightarrow \ell_\rho(\partial Y) \leq \epsilon.$$

Dans cet énoncé on a utilisé la notation suivante : pour une courbe fermée $c \subset S$, $\ell_\rho(c)$ est la longueur dans la variété quotient $N_\rho = \mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(S))$ de l'unique géodésique fermée dans la classe d'homotopie de c .

Le résultat suivant est une sorte de réciproque au théorème 2.3. Étant donnée une sous-surface $Y \subset S$ essentielle de S , on définit les projections d'une lamination géodésique ν sur $\mathcal{G}(F)$ comme on a défini les projections d'une courbe fermée simple. On note $\Pi_Y(\nu) \subset \mathcal{G}(Y)$ l'ensemble des projections de ν sur Y . Pour deux courbes fermées simples ou deux laminations $\nu, \mu \subset S$ et une sous-surface essentielle $Y \subset S$, on note $d_Y(\mu, \nu) = \text{diam}(\Pi_Y(\mu) \cup \Pi_Y(\nu))$. D'après Minsky ([Mi5]), on a :

THÉORÈME 2.4 ([Mi5]). — *Soient $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ une représentation fidèle et discrète doublement dégénérée dont les invariants de bouts sont ν^+ et ν^- et $K > 0$ une constante. Il existe une constante $\epsilon > 0$ qui ne dépend que de K et du type topologique de S telle que, si $c \subset S$ est une courbe fermée simple, alors :*

$$\sup_Y(d_Y(\nu^+, \nu^-)) \leq K \Rightarrow \ell_\rho(c) \geq \epsilon,$$

le supremum étant pris sur toutes les sous-surfaces dont le bord contient c et pour lesquelles $d_Y(\nu^+, \nu^-)$ est défini.

Remarquons que, pour que ce théorème soit correct, on doit définir $d_Y(\nu^+, \nu^-)$ aussi dans le cas où Y est un anneau. Nous renvoyons le lecteur à [MM2] pour cette définition.

D'après [Bon], si une courbe de $N \approx S \times \mathbb{R}$ est très courte alors elle se projette sur S en une courbe fermée simple. On déduit alors des théorèmes 2.3 et 2.4 qu'une géodésique de N est très courte si et seulement si elle borde une surface sur laquelle les projections de ν^+ et ν^- sont très éloignées. Si on revient à l'exemple de la section précédente dans lequel S est une sphère à 5 trous, on déduit du théorème 2.4 et du théorème 2.5 ci-dessous que si une courbe est suffisamment courte dans N alors c'est un sommet de toute hiérarchie entre ν^+ et ν^- .

THÉORÈME 2.5 (Image de la géodésique bornée, [MM2, Theorem 3.1]). — *Si Y est une sous-surface essentielle de S et g est une géodésique dans $\mathcal{G}(S)$ dont tous les sommets intersectent Y de manière non triviale, alors la projection de l'image de g sur $\mathcal{G}(Y)$ a un diamètre uniformément borné.*

2.4. Géodésiques subordonnées et régions produits

Dans cette dernière section portant sur les liens entre les invariants de bouts de N et sa géométrie, nous allons montrer comment des géodésiques subordonnées dans la hiérarchie sont associées à de grandes « régions produit » de la variété N .

Soient S une surface de type fini et N une variété hyperbolique homéomorphe à $S \times R$. Considérons une suite $\{c_n\}$ de sommets de $\mathcal{G}(S)$ et $B > 0$ tels que, pour tout n , la géodésique c_n^* de N dans la classe d'homotopie de c_n a une longueur inférieure à B . Comme un compact de N ne contient qu'un nombre fini de géodésiques fermées de longueur inférieure à B la suite $c_n^* \subset N$ finit par sortir de tout compact. En particulier, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $d(c_n^*, c_N^*) \rightarrow \infty$. Avec un argument de passage à la limite, on peut obtenir une version plus quantitative de cette observation ([BB1, Proposition 8.16]) :

PROPOSITION 2.6. — *Étant données une surface S de type fini et des constantes L, D , il existe $N > 0$ telle que toute représentation fidèle et discrète $\rho : \pi_1(S) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ a la propriété suivante : un compact $K \subset N_\rho$ de diamètre inférieur à D intersecte au plus N classes distinctes d'homotopie de lacets de longueurs inférieures à L .*

Reprenons l'exemple de la section 2.2. C'est-à-dire que N est une variété doublement dégénérée qui est homéomorphe à un fibré en droites $S \times \mathbb{R}$ sur une sphère à 5 trous. À nouveau on notera ν^+, ν^- les laminations terminales de N . Soit $g \subset \mathcal{G}(S)$ une géodésique joignant ν^+ et ν^- .

En combinant la proposition 2.6 avec le théorème de la borne *a priori* (théorème 2.2), on va expliquer comment une hiérarchie entre ν^+ et ν^- permet de décrire la géométrie de certains morceaux de N . Considérons un sommet c d'une géodésique g joignant ν^+ à ν^- dans $\mathcal{G}(S)$. Notons c^+ et c^- les deux sommets voisins de c dans g et Y_c la composante connexe de $S - c$ qui les contient. Supposons que c^+ est très loin de c^- dans $\mathcal{G}(Y_c)$, c'est-à-dire qu'une géodésique g_c subordonnée à g en c a beaucoup de sommets. D'après le théorème 2.3, la géodésique $c^* \subset N$ dans la classe d'homotopie de c est très courte, en particulier elle est au cœur d'un tube de Margulis très profond. D'après le théorème 2.2 et la proposition 2.6, parmi les géodésiques de N dans les classes d'homotopie des nombreux sommets de g_c , il y en a (au moins) deux qui sont très éloignées dans N ; appelons-les a^* et b^* . Notons U la réunion d'un tube de Margulis autour de c^* et de voisinages des pointes de N .

On construit une surface F_a immergée dans un voisinage de a^* (ou d'un tube de Margulis autour de a^* si a^* est courte) telle que F_a est homotope à H et que le bord de F_a est contenu dans ∂U (par exemple à partir d'une surface plissée). On construit de la même manière une surface F_b avec les mêmes propriétés vis-à-vis de b^* . Comme a^* est loin de b^* , F_a est loin de F_b . On en déduit qu'il existe entre F_a , F_b et ∂U une sous-variété de grand diamètre homéomorphe à $Y_c \times I$.

On voit ainsi qu'à chaque géodésique subordonnée suffisamment longue est associée une sous-variété de N qui est homéomorphe à $Y \times I$ (Y étant une sphère à 4 trous) et a un grand diamètre.

2.5. Une variété modèle

Pour construire une variété modèle à partir des invariants de N , on utilise la hiérarchie évoquée plus haut et des briques élémentaires. Nous allons à nouveau nous placer dans le cas de notre exemple où N est une variété hyperbolique de dimension 3 doublement dégénérée qui est homéomorphe à un fibré en droite sur une sphère à 5 trous $S \times \mathbb{R}$ et suivre [Mi6] dans la construction de la variété modèle.

Le squelette du modèle est une hiérarchie entre ν^+ et ν^- dont la construction a été évoquée dans la section précédente. Rappelons que dans le cas d'une sphère à 5 trous, elle est constituée d'une géodésique principale joignant ν^+ à ν^- et de géodésiques subordonnées : pour chaque sommet c de la géodésique principale g , si on note c^+ et c^- les deux sommets voisins de c dans g et Y_c la composante connexe de $S - c$ qui les contient, une géodésique g_c subordonnée à g en c est une géodésique de Y_c qui joint c^+ à c^- . En choisissant une géodésique g entre ν^+ et ν^- et une géodésique subordonnée pour chacun des sommets de g , on obtient une hiérarchie h entre ν^+ et ν^- (Figure 2). À chaque arête d'une géodésique subordonnée, on va associer une brique élémentaire et on va ensuite coller ces briques les unes aux autres.

Dans le cas de notre exemple, la brique élémentaire, que suivant Minsky nous appellerons bloc, est définie comme suit. Notons H une sphère de laquelle on a ôté quatre disques ouverts (H est donc une surface compacte à bord). Soient d^+, d^- , deux courbes sur H qui s'intersectent en deux points (comme sur la figure 1, dessin de gauche) et D^+, D^- des voisinages réguliers de d^+ et d^- . Un bloc B est homéomorphe à $H \times [-1, 1] - (D^+ \times [\frac{1}{2}, 1] \cup D^- \times (-\frac{1}{2}, -1])$. Le bord d'un tel bloc se décompose en 4 pantalons « horizontaux » (les composantes connexes de $(H - D^+) \times \{1\}$ et $(H - D^-) \times \{-1\}$) et 4 anneaux. On choisit une métrique sur la brique élémentaire B qui vérifie les deux propriétés suivantes :

- Chacun des pantalons sur le bord de B est isométrique à un pantalon hyperbolique dont chaque composante de bord a une longueur égale à 1.
- Chacun des anneaux sur le bord de B est euclidien et les cercles géodésiques sur cet anneau ont une longueur égale à 1.

Dans la suite nous schématiserons un bloc comme sur la figure 3 ; les 4 segments horizontaux qui sont épaissis sur la figure correspondent aux 4 pantalons.

Soient h une hiérarchie entre ν^+ et ν^- et c un sommet de la géodésique principale de h . Soient s^+, s^- deux sommets adjacents de la géodésique g_c subordonnée à g en c . On associe un bloc B_s à l'arête s de g_c qui joint s^+ à s^- et on fixe un homéomorphisme de Y_c vers l'intérieur de H qui envoie s^+ sur d^+ et s^- sur d^- . Deux blocs sont collés l'un à l'autre en identifiant des pantalons horizontaux de l'un avec des pantalons horizontaux de l'autre suivant les schémas de la figure 4 (les deux arêtes épaissies dans la hiérarchie correspondent aux deux blocs qui sont recollés sous chaque schéma).

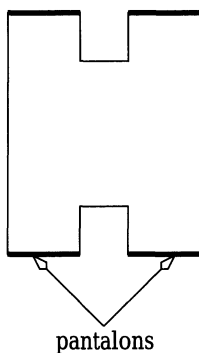


FIGURE 3. Schéma d'un bloc.

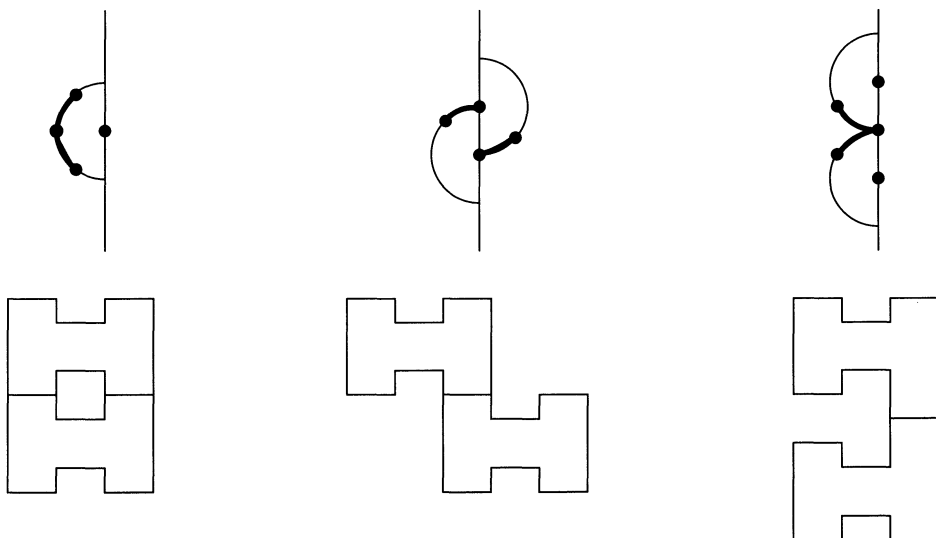


FIGURE 4. Recollement de blocs.

On obtient ainsi une variété $M_\nu[0]$ munie d'une métrique riemannienne par morceaux. Remarquons que le choix de la métrique sur B permet de garantir que les recollements de blocs peuvent être réalisés par des isométries et que les composantes de $\partial M_\nu[0]$ sont des tores et des anneaux euclidiens dont une longueur a pour longueur 1. La variété $M_\nu[0]$ ainsi obtenue est naturellement homéomorphe à un produit $S \times \mathbb{R}$ duquel ont été retirés les voisinages de courbes correspondant aux sommets de la hiérarchie et les fibres au-dessus de voisinages des pointes de S . En particulier on a un plongement naturel $M_\nu[0] \hookrightarrow S \times R$. La construction de la hiérarchie permet

de garantir qu'une courbe c n'apparaît qu'une seule fois (cf. [Mi6]) et donc que deux tores différents dans le bord de $M_\nu[0]$ ne sont pas homotopes dans $S \times \mathbb{R}$.

On remplit ensuite chacun des tores qui composent le bord de $M_\nu[0]$ par un tube de Margulis $\mathbb{T}(\lambda, r)$ (cf. Section 1.4). Remarquons que le plongement naturel de $M_\nu[0]$ dans $S \times \mathbb{R}$ fixe les méridiens de chacune des composantes de $\partial M_\nu[0]$. Ceci garantit que pour chaque tore T_c (correspondant au sommet c de la hiérarchie) dans le bord de $M_\nu[0]$, il y a une unique paire (λ, r) pour laquelle T_c peut être remplie par un tube de Margulis $\mathbb{T}_c = \mathbb{T}(\lambda, r)$.

Le variété ainsi obtenue est homéomorphe à $\hat{S} \times \mathbb{R}$, $\hat{S}$ étant une sphère dont on a ôté 5 disques ouverts. Pour conclure la construction, on colle par une isométrie une pointe parabolique le long de chaque composante de $\partial \hat{S} \times \mathbb{R}$. On obtient ainsi la variété modèle M_ν .

Pour le cas plus général d'un produit en droite sur une surface de type fini, la construction est essentiellement la même, mais la hiérarchie est plus complexe et il y a deux types de blocs. Dans le cas général d'une variété hyperbolique dont le groupe fondamental est de type fini, on construit une variété modèle pour un voisinage de chacun des bouts, ce qui est suffisant puisque le complémentaire des bouts est compact.

2.6. L'application lipschitzienne

Nous allons maintenant expliquer la construction de l'application bilipschitzienne $f : M_\nu \rightarrow N$ en nous concentrant sur le rôle des résultats des sections 2.2, 2.3 et 2.4 et en passant sur de nombreux détails. Cette construction, commencée dans [Mi7] et achevée dans [BCM1], conduit au théorème suivant :

THÉORÈME 2.7. — *Soient S une surface compacte et N une variété hyperbolique homéomorphe à $S \times \mathbb{R}$ dont la collection des invariants de bouts est ν . Il existe une application bilipschitzienne $f : M_\nu \rightarrow N$.*

Dans la section précédente, nous avons défini un modèle M_ν pour la variété N que nous avons pris comme exemple dans de nombreuses sections de cet exposé. Par construction on a un homéomorphisme naturel $f : M_\nu \rightarrow N$ à partir duquel nous allons maintenant construire une application bilipschitzienne.

Le bord de chaque bloc se décompose en 4 pantalons. Notons P un de ces pantalons ; chaque composante de ∂P correspond à un sommet de la hiérarchie. On change f par une homotopie de façon qu'elle envoie chaque composante de ∂P sur le bord d'un tube de Margulis autour de la géodésique correspondante ou sur la géodésique correspondante si elle n'est pas courte. D'après le théorème 2.1, l'image de chaque composante de ∂P a une longueur uniformément bornée. En utilisant ce fait et des outils développés par Thurston ([Th1], une surface plissée en l'occurrence), on change f de façon que sa restriction à P est uniformément lipschitzienne (*i.e.* la constante ne dépend pas de P). On fait de même pour chaque pantalon sur le bord de chaque

bloc. À nouveau en utilisant des résultats et outils dus à Thurston, on change ensuite f de façon à ce que sa restriction à chaque bloc soit uniformément lipschitzienne.

On a ainsi obtenu une application (propre et de degré 1, cf. [Mi7]) $f : M_\nu \rightarrow N$ dont la restriction à $M_\nu[0]$ est lipschitzienne et telle que $f(M_\nu[0])$ est contenu dans la partie ϵ -épaisse pour une constante ϵ qui ne dépend que de S .

On utilise ensuite l'observation suivante : un tube $T_c = T(\lambda, r) \subset M_\nu$ est très profond si et seulement si la géodésique $c^* \subset N$ correspondante est très courte. En effet, d'après les théorèmes 2.3 et 2.4, c^* est très courte si et seulement si c borde une surface S sur laquelle la distance entre les projections de ν^+ et de ν^- est grande. D'un autre côté, r est grand si et seulement si un méridien sur le bord de T_c est très long. Ceci se produit dans deux cas : lorsque le bord de T_c intersecte de nombreux blocs ou lorsque le méridien tourne de nombreuses fois autour de la longitude de longueur 1. Dans les deux cas on déduit de la construction de la hiérarchie qu'il existe une sous-surface de S bordée par c sur laquelle la projection de ν^+ est loin de la projection de ν^- .

Cette observation nous permet d'étendre f aux tubes de Margulis les moins profonds de M_ν en une application lipschitzienne. On se retrouve ainsi avec une application $f : M_\nu \rightarrow N$ qui envoie précisément les tubes de Margulis les plus profonds de M_ν sur les tubes de Margulis les plus profonds de N (tout cela est bien évidemment quantifié dans [Mi7]) et est lipschitzienne sur le reste de M_ν .

L'étape suivante consiste à changer f de façon que sa restriction au complémentaire des tubes les plus profonds de M_ν soit bilipschitzienne sur son image. Pour cela, on a besoin de faire un peu de topologie, en utilisant en particulier les travaux d'Anderson-Canary ([AC]), pour obtenir une application qui ne tourne pas autour des tubes de Margulis et on a surtout besoin de montrer que f préserve suffisamment bien l'ordre des blocs de M_ν . Ce dernier point est obtenu en développant des arguments apparentés à ceux présentés dans la section 2.4.

Pour finir, on montre qu'une application dont la restriction à la « partie épaisse » de M_ν est bilipschitzienne peut être étendue en une application bilipschitzienne $f : M_\nu \rightarrow N$.

3. D'AUTRES RÉSULTATS ET D'AUTRES MODÈLES

Dans cette dernière partie, nous allons présenter des corollaires du théorème des laminations terminales et de sa preuve. Nous évoquerons aussi d'autres résultats dont les preuves utilisent la variété modèle de Minsky ou des variantes.

3.1. Déformations des groupes kleinien

Soit S une surface fermée (*i.e.* compacte sans bord) de genre supérieur à 2. L'espace des déformations kleinien de $\pi_1(S)$ que nous noterons $AH(S)$ est l'espace des classes de conjugaison de représentations fidèles et discrètes $\pi_1(S) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$. C'est aussi l'espace des variétés hyperboliques homéomorphes à $S \times \mathbb{R}$. Cet espace est muni de la topologie quotient de la topologie compacte ouverte sur $\text{hom}(\pi_1(S), PSL(2, \mathbb{C}))$ qui est appelée *topologie algébrique*. On sait (cf. [BK, Exposé 4], [Mr] et [Su2]) que l'intérieur de $AH(S)$ est homéomorphe à $\mathcal{T}(S) \times \mathcal{T}(S)$ ($\mathcal{T}(S)$ désignant l'espace de Teichmüller de S), l'homéomorphisme étant donné par les structures conformes à l'infini. Par contre la topologie de l'ensemble $AH(S)$ tout entier reste mystérieuse. Par exemple, jusqu'à la résolution de la conjecture des laminations terminales, on ne savait pas montrer que $AH(S)$ est la fermeture de son intérieur. Cette question est connue sous le nom de conjecture de densité de Bers-Sullivan-Thurston. Désormais on a la réponse suivante :

THÉORÈME 3.1 ([BCM1]). — *Soit S une surface fermée de genre $g \geq 2$, alors $AH(S)$ est la fermeture de son intérieur.*

La preuve de ce théorème utilise la résolution de la conjecture de sagesse ([Bon] dans ce cas), un résultat de compacité qui généralise le théorème de la limite double ([Th3], voir aussi [Ot]) et le théorème des laminations terminales. La même question se pose pour tout groupe kleinien de type fini et sa résolution est l'objet des articles [NS] et [Oh].

La topologie de $AH(S)$ n'est pas bien comprise notamment parce qu'elle est compliquée. Par exemple Bromberg ([Bm]) et Magid ([Mg]) ont montré que $AH(S)$ n'est pas localement connexe. Comme on a essayé de l'illustrer dans les sections 2.2, 2.3 et 2.4, les travaux de Minsky autour de la conjecture des laminations terminales permettent de tirer des informations géométriques sur une variété en partant de ses invariants de bouts. En particulier, dans certains cas, ils offrent la possibilité de déterminer les invariants de bouts et donc la limite d'une suite $\{\rho_n\} \subset AH(S)$ (cf. [BBCM2]). Tel est le cas d'une suite dont la limite est quasiconformément rigide : une représentation fidèle et discrète $\rho : \pi_1(S) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ est *quasiconformément rigide* si elle n'a pas de déformations quasiconformes, *i.e.* toute représentation qui est conjuguée à ρ par une application quasiconforme est conjuguée à ρ par une transformation de Möbius.

THÉORÈME 3.2 ([BBCM1]). — *Soient S une surface fermée de genre $g \geq 2$ et ρ un point quasiconformément rigide de $AH(S)$. Alors $AH(S)$ est localement connexe en ρ .*

Un autre exemple d'application de ce type d'idées se trouve dans les travaux d'Ohshika et Soma ([OS]) qui ont étudié les limites géométriques des groupes quasifuchsien en utilisant des variétés modèles, légèrement différentes de celles de Minsky.

3.2. Rigidité et application de Cannon-Thurston

Le théorème de rigidité suivant est un autre corollaire du théorème des laminations terminales et de sa preuve.

THÉORÈME 3.3 ([BCM1]). — *Si deux représentations $\rho_1, \rho_2 \in AH(S)$ sont conjuguées par un homéomorphisme ϕ de $\hat{\mathbb{C}}$ qui préserve l'orientation, alors elles sont quasiconformément conjuguées. De plus, si ϕ est conforme sur $\Omega(\rho_1)$, alors il est conforme.*

Pour prouver ce théorème on commence par construire un homéomorphisme quasi-conforme $\psi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ qui conjugue ρ_2 à une représentation ρ'_2 qui a la même structure conforme à l'infini que ρ_1 (avec le théorème de Riemann mesurable [AB]). On montre ensuite que les laminations terminales de ρ_1 et ρ'_2 peuvent être « lues » dans leurs ensembles limites. L'homéomorphisme $\psi \circ \phi$ force alors $\rho'_2(\pi_1(S))$ à avoir les mêmes laminations terminales que $\rho_1(\pi_1(S))$. Le théorème des laminations terminales permet de conclure.

L'argument qui permet de montrer que $\rho'_2(\pi_1(S))$ et $\rho_1(\pi_1(S))$ ont les mêmes laminations terminales est apparenté aux résultats de Mahan ([Mh2]) sur les applications de Cannon-Thurston. Mentionnons tout d'abord un résultat d'existence d'une telle application qui va nous permettre d'introduire sa définition.

THÉORÈME 3.4 ([Mh1]). — *Soit S une surface fermée de genre $g \geq 2$ et soit $\rho : \pi_1(S) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ une représentation fidèle et discrète. Alors il existe une application équivariante et continue du bord à l'infini (au sens de Gromov) de $\pi_1(S)$ vers l'ensemble limite de ρ .*

L'application $\partial_\infty \pi_1(S) \rightarrow \Lambda_\rho$ ainsi obtenue est appelée une application de Cannon-Thurston (la première application de ce type ayant été construite dans [CT]). Elle est reliée aux laminations terminales par le fait suivant ([Mh2]) : elle identifie les points correspondant aux extrémités des relevés des feuilles des laminations terminales de ρ . Ceci donne un sens plus précis à l'idée que l'on peut « lire » les laminations terminales dans les ensembles limites.

Pour montrer l'existence d'applications de Cannon-Thurston et leurs propriétés, Mahan modifie la variété modèle de Minsky en « électrocutant » les tubes de Margulis les plus profonds. C'est-à-dire qu'il change la métrique sur ces tubes de façon que les géodésiques passent autour des tubes au lieu de pénétrer profondément à l'intérieur. Il utilise ensuite des propriétés de cette nouvelle variété modèle pour montrer le théorème 3.4.

L'application de Cannon-Thurston a également d'autres utilités que de faire le lien entre les laminations terminales et la structure de l'ensemble limite. Par exemple son existence permet de montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 3.5 ([Mh1]). — *Soit Γ un groupe kleinien de type fini dont l'ensemble limite Λ_Γ est connexe. Alors Λ_Γ est localement connexe.*

3.3. Volume des variétés hyperboliques de dimension 3

Nous allons conclure cet exposé sur l'utilisation des variétés modèles qui paraît la plus naturelle : l'étude du volume des variétés hyperboliques de dimension 3. Par exemple, le modèle de Minsky permet de résoudre une conjecture de McMullen qui prédit que le volume de la partie épaisse du cœur convexe d'un groupe kleinien croît exponentiellement.

Étant donnée une surface orientable S de type fini, on définit $d(S) = -\chi(S)$ si S est de genre nul et $d(S) = -\chi(S) - 1$ si S est de genre non nul. On a le théorème suivant :

THÉORÈME 3.6 ([BCM1]). — *Si $\rho : \pi_1(S) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ est une représentation fidèle et discrète et $N = \mathbb{H}^3 / \rho(\pi_1(S))$, alors pour tout x dans la partie ϵ_1 -épaisse du cœur convexe C_N , on a :*

$$\text{volume}(B_R^{>\epsilon_1}(x)) \leq cR^{d(S)}$$

pour une constante c qui ne dépend que du type topologique de S .

Pour prouver ce théorème, Brock, Canary et Minsky montrent (dans [BCM1]) que l'inégalité est vraie dans la variété modèle.

Dans un registre différent, Brock a utilisé un « modèle simplicial » pour établir des liens entre la métrique de Weil-Petersson (introduite dans [We]) et le volume des variétés hyperboliques de dimension 3 ([Bc2] et [Bc3]). Il s'agit d'un modèle purement combinatoire qui n'est pas muni d'une métrique mais qui décrit néanmoins certaines propriétés géométriques de la variété qu'il modélise. En l'occurrence il permet de majorer son volume. Remarquons également que ce modèle est basé sur le graphe des pantalons qui est généralement différent du graphe des courbes.

Pour terminer, nous porterons à l'attention du lecteur les travaux en cours de Brock-Minsky-Namazi-Souto qui, à partir de la variété modèle de Minsky, construisent des variétés modèles pour les variétés hyperboliques compactes de dimension 3.

RÉFÉRENCES

- [Ag] I. AGOL – « Tameness and hyperbolic 3-manifolds », prépublication, 2004.
- [Ah] L. AHLFORS – « Finitely generated Kleinian groups », *Amer. J. Math.* **86** (1964), p. 413–429.
- [AB] L. AHLFORS & L. BERS – « Riemann's mapping theorem for variable metrics », *Ann. of Math. (2)* **72** (1960), p. 385–404.

- [AC] J. W. ANDERSON & R. D. CANARY – « Cores of hyperbolic 3-manifolds and limits of Kleinian groups », *Amer. J. Math.* **118** (1996), no. 4, p. 745–779.
- [Be] L. BERS – « An inequality for Riemann surfaces », in *Differential geometry and complex analysis*, Springer, Berlin, 1985, p. 87–93.
- [BK] L. BERS & I. KRA (éds.) – *A crash course on Kleinian groups*, Lecture Notes in Math., vol. 400, Springer-Verlag, Berlin, 1974.
- [Bon] F. BONAHO – « Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3 », *Ann. of Math. (2)* **124** (1986), no. 1, p. 71–158.
- [Bow1] B. H. BOWDITCH – « Intersection numbers and the hyperbolicity of the curve complex », *J. Reine Angew. Math.* **598** (2006), p. 105–129.
- [Bow2] ———, « Length bounds on curves arising from tight geodesics », *Geom. Funct. Anal.* **17** (2007), no. 4, p. 1001–1042.
- [Bow3] ———, « Geometric models for hyperbolic 3-manifolds », prépublication.
- [Bow4] ———, « End invariants of hyperbolic 3-manifolds », prépublication.
- [Bow5] ———, « The ending lamination theorem », prépublication.
- [Bc1] J. F. BROCK – « Continuity of Thurston’s length function », *Geom. Funct. Anal.* **10** (2000), no. 4, p. 741–797.
- [Bc2] ———, « The Weil-Petersson metric and volumes of 3-dimensional hyperbolic convex cores », *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), no. 3, p. 495–535 (electronic).
- [Bc3] ———, « Weil-Petersson translation distance and volumes of mapping tori », *Comm. Anal. Geom.* **11** (2003), no. 5, p. 987–999.
- [BB1] J. F. BROCK & K. BROMBERG – « Geometric inflexibility and 3-manifolds that fiber over the circle », *J. Topol.* **4** (2011), no. 1, p. 1–38.
- [BBCM1] J. F. BROCK, K. BROMBERG, R. D. CANARY & Y. N. MINSKY – « Local topology in deformation spaces of hyperbolic 3-manifolds », *Geom. Topol.* **15** (2011), no. 2, p. 1169–1224.
- [BBCM2] ———, « Convergence properties of end invariants », prépublication, arXiv:1208.3983.
- [BCM1] J. F. BROCK, R. D. CANARY & Y. N. MINSKY – « The classification of Kleinian surface groups, II : The ending lamination conjecture », *Ann. of Math. (2)* **176** (2012), no. 1, p. 1–149.
- [BCM2] ———, « The classification of finitely-generated Kleinian groups », en préparation.
- [Bm] K. BROMBERG – « The space of Kleinian punctured torus groups is not locally connected », *Duke Math. J.* **156** (2011), no. 3, p. 387–427.

- [CG] D. CALEGARI & D. GABAI – « Shrinkwrapping and the taming of hyperbolic 3-manifolds », *J. Amer. Math. Soc.* **19** (2006), no. 2, p. 385–446.
- [Ca] R. D. CANARY – « Ends of hyperbolic 3-manifolds », *J. Amer. Math. Soc.* **6** (1993), no. 1, p. 1–35.
- [CT] J. W. CANNON & W. P. THURSTON – « Group invariant Peano curves », *Geom. Topol.* **11** (2007), p. 1315–1355.
- [Fr] H. FREUDENTHAL – « Über die Enden topologischer Räume und Gruppen », *Math. Zeit.* **33** (1932), p. 692–713.
- [Ga] D. GABAI – « Almost filling laminations and the connectivity of ending lamination space », *Geom. Topol.* **13** (2009), no. 2, p. 1017–1041.
- [Ham] U. HAMENSTÄDT – « Train tracks and the Gromov boundary of the complex of curves », in *Spaces of Kleinian groups*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 329, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006, p. 187–207.
- [Har] W. J. HARVEY – « Boundary structure of the modular group », in *Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference*, Ann. of Math. Stud., vol. 97, Princeton Univ. Press, Princeton, 1981, p. 245–251.
- [Jo] T. JØRGENSEN – « On discrete groups of Möbius transformations », *Amer. J. Math.* **98** (1976), no. 3, p. 739–749.
- [KM] D. KAZHDAN & G. MARGULIS – « A proof of Selberg’s conjecture », *Math. USSR Sb.* **4** (1968), p. 147–152.
- [KI] E. KLARREICH – « The boundary at infinity of the curve complex and the relative Teichmüller space », prépublication.
- [LS] C. J. LEININGER & S. SCHLEIMER – « Connectivity of the space of ending laminations », *Duke Math. J.* **150** (2009), no. 3, p. 533–575.
- [Mg] A. D. MAGID – « Deformation spaces of Kleinian surface groups are not locally connected », *Geom. Topol.* **16** (2012), no. 3, p. 1247–1320.
- [Mr] A. MARDEN – « The geometry of finitely generated kleinian groups », *Ann. of Math. (2)* **99** (1974), p. 383–462.
- [MM1] H. A. MASUR & Y. N. MINSKY – « Geometry of the complex of curves I. Hyperbolicity », *Invent. Math.* **138** (1999), no. 1, p. 103–149.
- [MM2] ———, « Geometry of the complex of curves II. Hierarchical structure », *Geom. Funct. Anal.* **10** (2000), no. 4, p. 902–974.
- [MMS] D. MCCULLOUGH, A. MILLER & G. A. SWARUP – « Uniqueness of cores of noncompact 3-manifolds », *J. London Math. Soc. (2)* **32** (1985), no. 3, p. 548–556.
- [Mc] D. MCCULLOUGH – « Compact submanifolds of 3-manifolds with boundary », *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **37** (1986), no. 147, p. 299–307.

- [Mi1] Y. N. MINSKY – « Teichmüller geodesics and ends of hyperbolic 3-manifolds », *Topology* **32** (1993), no. 3, p. 625–647.
- [Mi2] ———, « On rigidity, limit sets, and end invariants of hyperbolic 3-manifolds », *J. Amer. Math. Soc.* **7** (1994), no. 3, p. 539–588.
- [Mi3] ———, « The classification of punctured-torus groups », *Ann. of Math. (2)* **149** (1999), no. 2, p. 559–626.
- [Mi4] ———, « Kleinian groups and the complex of curves », *Geom. Topol.* **4** (2000), p. 117–148 (electronic).
- [Mi5] ———, « Bounded geometry for Kleinian groups », *Invent. Math.* **146** (2001), no. 1, p. 143–192.
- [Mi6] ———, « Combinatorial and geometrical aspects of hyperbolic 3-manifolds », Lecture notes from the Workshop on Kleinian Groups and Hyperbolic 3-Manifolds (Warwick, England), sept. 2001.
- [Mi7] ———, « The classification of Kleinian surface groups I. Models and bounds », *Ann. of Math. (2)* **171** (2010), no. 1, p. 1–107.
- [Mh1] M. MJ – « Cannon-Thurston maps for surface groups », prépublication, arXiv:math/0607509.
- [Mh2] ———, « Ending laminations and Cannon-Thurston maps », prépublication, arXiv:1002.0996.
- [Mo] G. D. MOSTOW – « Quasi-conformal mappings in n -space and the rigidity of hyperbolic space forms », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1968), no. 34, p. 53–104.
- [NS] H. NAMAZI & J. SOUTO – « Non-realizability and ending laminations : proof of the density conjecture », *Acta Math.* **209** (2012), no. 2, p. 323–395.
- [Oh] K. OHSHIKA – « Realising end invariants by limits of minimally parabolic, geometrically finite groups », *Geom. Topol.* **15** (2011), no. 2, p. 827–890.
- [OS] K. OHSHIKA & T. SOMA – « Geometry and topology of geometric limits I », prépublication, arXiv:1002.4266.
- [Ot] J.-P. OTAL – *Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3*, Astérisque, vol. 235, Soc. Math. France, Paris, 1996.
- [Pr] G. PRASAD – « Strong rigidity of $\mathbf{Q}$ -rank 1 lattices », *Invent. Math.* **21** (1973), p. 255–286.
- [Sc] G. P. SCOTT – « Compact submanifolds of 3-manifolds », *J. London Math. Soc. (2)* **7** (1973), p. 246–250.
- [Sul] D. SULLIVAN – « On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions », in *Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference*, Ann. of Math. Stud., vol. 97, Princeton Univ. Press, Princeton, 1981, p. 465–496.

- [Su2] D. SULLIVAN – « Quasiconformal homeomorphisms and dynamics II. Structural stability implies hyperbolicity for Kleinian groups », *Acta Math.* **155** (1985), no. 3-4, p. 243–260.
- [Th1] W. P. THURSTON – « The topology and geometry of 3-manifolds », notes de cours, Princeton Univ., 1976-79.
- [Th2] ———, « Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **6** (1982), no. 3, p. 357–381.
- [Th3] ———, « Hyperbolic structures on 3-manifolds I. Deformation of acylindrical manifolds », *Ann. of Math. (2)* **124** (1986), no. 2, p. 203–246.
- [Th4] ———, « On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **19** (1988), no. 2, p. 417–431.
- [We] A. WEIL – « Modules des surfaces de Riemann », in *Séminaire Bourbaki*, vol. 1957/58, Astérisque, vol. 4, Soc. Math. France, Paris, 1995, exp. n° 168, p. 413–419.

Cyril LECUIRE

Université Paul Sabatier

Institut de Mathématiques de Toulouse

118 route de Narbonne

31062 Toulouse Cedex 4

France

E-mail : `lecuire@math.univ-toulouse.fr`