

Astérisque

AST

**Sur les Conjectures de Gross et Prasad. I -
Pages préliminaires**

Astérisque, tome 346 (2012), p. III-XI

http://www.numdam.org/item?id=AST_2012__346__R1_0

© Société mathématique de France, 2012, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

346

ASTÉRISQUE

2012

SUR LES CONJECTURES DE GROSS ET PRASAD. I

W. T. GAN, B. H. GROSS, D. PRASAD & J.-L. WALDSPURGER

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Wee Teck Gan

Department of Mathematics, University of California at San Diego, 9500 Gilman Drive, La Jolla, 92093
wgan@math.ucsd.edu

Benedict H. Gross

Department of Mathematics, Harvard University, Cambridge, MA 02138
gross@math.harvard.edu

Dipendra Prasad

School of Mathematics, Tata Institute of Fundamental Research, Colaba, Mumbai-400005, India
dprasad@math.tifr.res.in

Jean-Loup Waldspurger

Institut de Mathématiques de Jussieu-CNRS, 2 place Jussieu, 75005 Paris, France
waldspur@math.jussieu.fr

Classification mathématique par sujet (2000). — 22E50, 22E55, 11F70, 11R39, 11S37.

Mots-clefs. — Conjectures de Gross-Prasad, conjecture locale de Gross-Prasad, correspondance thêta, groupes classiques, groupes métaplectiques, groupes spéciaux orthogonaux, groupes unitaires, L -valeur centrale critique, lois de branchement, multiplicité 1, nombres de racines locales, représentations tempérées, supercuspidales de profondeur zéro.

SUR LES CONJECTURES DE GROSS ET PRASAD

Wee Teck GAN, Benedict H. GROSS, Dipendra PRASAD
& Jean-Loup WALDSPURGER

Abstract. — Il y a environ 20 ans, Gross et Prasad ont proposé une conjecture pour déterminer la restriction d'une représentation irréductible admissible du groupe $G = SO(n)$ sur un corps local à un sous-groupe de la forme $G' = SO(n-1)$. La conjecture affirme que, étant donnée une paire de L -paquets génériques de G et G' , il existe un unique accouplement non-trivial, à un facteur scalaire près, entre exactement un membre de chaque paquet, où on a le droit de faire varier G et G' parmi leurs formes intérieures. Par ailleurs, les membres des L -paquets qui réalisent l'accouplement sont déterminés par une formule explicite où interviennent des signes locaux d'équations fonctionnelles. Pour les corps locaux non-archimédiens cette conjecture a été démontrée par Waldspurger et Mœglin, à l'aide de diverses méthodes de la théorie locale des représentations. La formule de Plancherel y joue un rôle primordial. Il est également une conjecture globale pour les représentations automorphes, ce qui intervient la valeur centrale critique de fonctions L .

Ce volume est le premier de deux numéros d'*Astérisque* consacrés à la conjecture et à sa démonstration. Le premier tome contient deux longs articles de Gan, Gross, et Prasad, qui formulent des versions de la conjecture originale de Gross et Prasad pour des paires plus générales de groupes classiques y compris métaplectique, et qui donnent des exemples pour des groupes unitaires de petite dimension, et pour des représentations avec une ramification limitée. Le deuxième tome contient deux articles de Waldspurger : un article court qui déduit la conjecture locale de multiplicité un pour les paires $(SO(n), SO(n-1))$ des résultats de Aizenbud-Gourevitch-Rallis-Schiffmann sur les groupes orthogonaux, et un article plus long qui termine la première partie de la démonstration de la conjecture de Gross-Prasad : la formule d'intégrale de Waldspurger qui relie les dimensions des espaces d'accouplements à l'analyse harmonique sur les groupes est généralisée du cas où les deux représentations sont supercuspidales au cas de représentations tempérées.

Résumé (On the conjectures of Gross and Prasad.) — About 20 years ago Gross and Prasad formulated a conjecture determining the restriction of an irreducible admissible representation of the group $G = SO(n)$ over a local field to a subgroup of the

form $G' = SO(n-1)$. The conjecture stated that for a given pair of generic L -packets of G and G' , there is a unique non-trivial pairing, up to scalars, between precisely one member of each packet, where G and G' are allowed to vary among inner forms; moreover, the relevant members of the L -packets are determined by an explicit formula involving local root numbers. For non-archimedean local fields this conjecture has now been proved by Waldspurger and Mœglin, using a variety of methods of local representation theory; the Plancherel formula plays an important role in the proof. There is also a global conjecture for automorphic representations, which involves the central critical value of L -functions.

This volume is the first of two volumes devoted to the conjecture and its proof for non-archimedean local fields. It contains two long articles by Gan, Gross, and Prasad, formulating extensions of the original Gross-Prasad conjecture to more general pairs of classical groups including metaplectic groups, and providing examples for low rank unitary groups and for representations with restricted ramification. It also includes two articles by Waldspurger: a short one deriving the local multiplicity one conjecture for special orthogonal groups from the results of Aizenbud-Gourevitch-Rallis-Schiffmann on orthogonal groups, and a long one completing the first part of the proof of the Gross-Prasad conjecture by extending an integral formula relating multiplicities in the restriction problem to harmonic analysis from supercuspidal representations (which appeared in *Compositio Mathematica* in 2010) to general tempered representations here.

TABLE DES MATIÈRES

Wee Teck Gan, Benedict H. Gross & Dipendra Prasad — <i>Symplectic local root numbers, central critical L-values, and restriction problems in the representation theory of classical groups</i>		1
1. Introduction		1
Acknowledgments		5
2. Classical groups and restriction of representations		5
3. Selfdual and conjugate-dual representations		7
4. The centralizer and its group of components		13
5. Local root numbers		15
6. Characters of component groups		20
7. L -groups of classical groups		23
8. Langlands parameters for classical groups		27
9. Vogan L -packets - Desiderata		31
10. Vogan L -packets for the classical groups		33
The General Linear Group $G = \mathrm{GL}(V)$		33
The Symplectic Group $G = \mathrm{Sp}(V)$		34
The Odd Special Orthogonal Group $G = \mathrm{SO}(V)$, $\dim(V) = 2n + 1$...		34
The Even Special Orthogonal Group $G = \mathrm{SO}(V)$, $\dim(V) = 2n$, disc(V) = d		34
The Odd Unitary Group $G = \mathrm{U}(V)$, $\dim V = 2n + 1$		35
The Even Unitary Group $G = \mathrm{U}(V)$, $\dim V = 2n$		36
11. Vogan L -packets for the metaplectic group		36
12. The representation ν of H and generic data		42
Orthogonal and Hermitian Cases (Bessel Models)		43
Symplectic and Skew-Hermitian Cases (Fourier-Jacobi Models)		46
Remarks		51
13. Bessel and Fourier-Jacobi models for $\mathrm{GL}(n)$		52
Bessel Models for $\mathrm{GL}(n)$		53
Fourier-Jacobi models for $\mathrm{GL}(n)$		54
14. Restriction Problems and Multiplicity One Theorems		55
Remarks		57

15. Uniqueness of Bessel Models	57
Remarks	62
16. Uniqueness of Fourier-Jacobi Models	62
17. Local Conjectures	66
$G = \mathrm{SO}(V) \times \mathrm{SO}(W)$, $\dim W^\perp$ odd	67
$G = \mathrm{U}(V) \times \mathrm{U}(W)$, $\dim W^\perp$ odd	67
$G = \widetilde{\mathrm{Sp}}(V) \times \mathrm{Sp}(W)$ or $\mathrm{Sp}(V) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$, $\dim W^\perp$ even	68
$G = \mathrm{U}(V) \times \mathrm{U}(W)$, $W \subset V$ skew-hermitian and $\dim W \equiv \dim V \equiv 1$ mod 2	68
$G = \mathrm{U}(V) \times \mathrm{U}(W)$, $W \subset V$ skew-hermitian, $\dim W \equiv \dim V \equiv 0$ mod 2	69
18. Compatibilities of local conjectures	69
19. Reduction to basic cases	74
20. Variant of the local conjecture	75
21. Unramified parameters	77
22. Automorphic forms and L -functions	80
23. Global Restriction Problems	83
24. Global conjectures: central values of L -functions	86
Remarks	87
25. Global L -parameters and Multiplicity Formula	90
The Langlands-Arthur Conjecture	90
Example 1	97
Example 2	97
26. Revisiting the global conjecture	97
27. The first derivative	100
References	105
Wee Teck Gan, Benedict H. Gross & Dipendra Prasad — <i>Restrictions of representations of classical groups: examples</i>	111
1. Introduction	111
Acknowledgments	112
2. Discrete series parameters	113
3. Depth zero supercuspidals	115
4. Branching laws for $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$	120
5. Branching laws for $\mathrm{U}_n(\mathbb{F}_q)$	122
6. Langlands-Vogan packets for small unitary groups	127
7. Theta correspondence	132
Working hypothesis	134
8. Endoscopic packets and theta correspondence	135
9. Skew-hermitian case: $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$	140
10. Restriction from $\mathrm{U}(2)$ to $\mathrm{U}(1)$	141
11. Theta correspondence for $\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(2)$	144

12. Trilinear forms for $U(2)$	147
13. Restriction from $U(3)$ to $U(2)$: endoscopic case	153
14. Restriction from $U(3)$ to $U(2)$: stable case	156
15. A global argument	160
Proof of Theorem 15.1	162
16. A finer global argument	165
References	168
Jean-Loup Waldspurger — Une formule intégrale reliée à la conjecture locale de Gross-Prasad, 2^e partie : extension aux représentations tempérées	171
Introduction	171
1. Notations et rappels	175
1.1. Notations générales	175
1.2. Mesures	177
1.3. Représentations induites, opérateurs d'entrelacement	178
1.4. Caractères pondérés	179
1.5. Le R -groupe	180
1.6. La formule de Plancherel-Harish-Chandra	182
2. Fonctions très cuspidales	183
2.1. Un lemme d'annulation	183
2.2. Caractères pondérés et fonctions très cuspidales	185
2.3. Induction de quasi-caractères	186
2.4. Intégrales orbitales pondérées invariantes	191
2.5. Fonctions cuspidales et quasi-caractères	192
2.6. Les deux quasi-caractères associés à une fonction très cuspidale ..	193
2.7. Fonctions cuspidales et fonctions très cuspidales	195
3. Majorations pour le groupe linéaire GL_k	195
3.1. Le groupe linéaire	195
3.2. Une majoration	196
3.3. Un lemme auxiliaire	196
3.4. Preuve de la proposition 3.2	199
3.5. Modèles de Whittaker et intégrales de coefficients	200
3.6. Quelques égalités d'intégrales	201
3.7. Propriétés des fonctionnelles de Whittaker	205
4. Majorations pour un groupe spécial orthogonal	206
4.1. Les groupes spéciaux orthogonaux	206
4.2. Espaces quadratiques compatibles	207
4.3. Les résultats	208
4.4. Preuve de la majoration 4.3(1)	210
4.5. Majoration d'une intégrale unipotente, cas $r \geq 2$	210
4.6. Majoration d'une intégrale unipotente, cas $r = 1$	216
4.7. Preuve de 4.3(3)	217
4.8. Majoration d'intégrales doubles sur $U(F)$	218

4.9. Comparaison de Ξ^G et Ξ^H	221
4.10. Preuve des relations 4.3(4) et 4.3(5)	222
4.11. Majoration d'une intégrale de fonctions d'Harish-Chandra, cas $r = 0$	223
4.12. Majoration d'une intégrale de fonctions d'Harish-Chandra, cas $r > 0$	227
4.13. Preuve de la relation 4.3(2)	231
4.14. Preuve de la relation 4.3(7)	232
4.15. Preuve de la relation 4.3(8)	233
4.16. Preuve de la relation 4.3(6)	235
5. Entrelacements tempérés	235
5.1. Définition des entrelacements tempérés	235
5.2. Induction d'entrelacements tempérés	236
1 ^{re} étape : un résultat de convergence	237
2 ^e étape : l'implication $\mathcal{L}_{\bar{\pi},\rho} = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_{\pi,\rho} = 0$ quand $k \leq r$	237
3 ^e étape : l'implication $\mathcal{L}_{\bar{\pi},\rho} \neq 0 \Rightarrow \mathcal{L}_{\pi,\rho} \neq 0$ quand $k \leq r$	239
4 ^e étape : l'implication $\mathcal{L}_{\bar{\pi},\rho} = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_{\pi,\rho} = 0$ quand $k > r$	239
5 ^e étape : l'implication $\mathcal{L}_{\bar{\pi},\rho} \neq 0 \Rightarrow \mathcal{L}_{\pi,\rho} \neq 0$ quand $k > r$	249
5.3. Variable d'induction et entrelacements tempérés	250
5.4. Le cas des induites réductibles	252
5.5. Le cas $r = 0$: majoration des entrelacements	253
5.6. Le cas $r = 0$: tout entrelacement est tempéré	261
5.7. Tout entrelacement est tempéré	263
6. Expression spectrale de la limite d'une intégrale	264
6.1. Le théorème	264
6.2. Utilisation de la formule de Plancherel	265
6.3. Apparition des entrelacements tempérés	266
6.4. Une première approximation	270
6.5. Rappels sur les termes constants faibles des coefficients des représentations tempérées	272
6.6. Changement de fonction de troncature	274
6.7. Utilisation des calculs spectraux d'Arthur	284
6.8. Simplification de $\Phi(g')$	288
6.9. Evaluation d'une limite	291
6.10. Preuve du théorème 6.1	294
7. Une formule intégrale calculant la multiplicité ; application	296
7.1. Le théorème principal	296
7.2. Multiplicités géométriques pour les quasi-caractères et induction ..	297
7.3. Fonctions cuspidales sur les groupes spéciaux orthogonaux	304
7.4. Pseudo-coefficients	305
7.5. Une conséquence du théorème	305
7.6. Le cas du groupe linéaire	306
7.7. Début de la preuve ; le cas où π est induite	307

7.8. Comparaison de deux limites	308
7.9. Fin de la preuve	310
7.10. Conséquence pour la conjecture locale de Gross-Prasad	310
Références	311
Jean-Loup Waldspurger — <i>Une variante d'un résultat de Aizenbud, Gourevitch, Rallis et Schiffmann</i>	313
Références	318