AST

Sur les Conjectures de Gross et Prasad. I - Pages préliminaires

Astérisque, tome 346 (2012), p. III-XI

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2012__346__R1_0>

346

ASTÉRISQUE

2012

SUR LES CONJECTURES DE GROSS ET PRASAD. I

W. T. GAN, B. H. GROSS, D. PRASAD & J.-L. WALDSPURGER

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Wee Teck Gan
Department of Mathematics, University of California at San Diego, 9500 Gilman Drive, La Jolla, 92093
wgan@math.ucsd.edu

Benedict H. Gross
Department of Mathematics, Harvard University, Cambridge, MA 02138
gross@math.harvard.edu

Dipendra Prasad
School of Mathematics, Tata Institute of Fundamental Research, Colaba, Mumbai-400005, India
dprasad@math.tifr.res.in

Jean-Loup Waldspurger
Institut de Mathématiques de Jussieu-CNRS, 2 place Jussieu, 75005 Paris, France
waldspur@math.jussieu.fr

***Classification mathématique par sujet* (2000).** — 22E50, 22E55, 11F70, 11R39, 11S37.

Mots-clefs. — Conjectures de Gross-Prasad, conjecture locale de Gross-Prasad, correspondence thêta, groupes classiques, groupes métaplectiques, groupes spéciaux orthogonaux, groupes unitaires, L-valeur centrale critique, lois de branchement, multiplicité 1, nombres de racines locales, représentations tempérées, supercuspidales de profondeur zéro.

SUR LES CONJECTURES DE GROSS ET PRASAD

Wee Teck GAN, Benedict H. GROSS, Dipendra PRASAD
& Jean-Loup WALDSPURGER

Abstract. — Il y a environ 20 ans, Gross et Prasad on proposé une conjecture pour déterminer la restriction d'une représentation irréductible admissible du groupe $G = SO(n)$ sur un corps local à un sous-groupe de la forme $G' = SO(n-1)$. La conjecture affirme que, étant donnée une paire de L-paquets génériques de G et G', il existe un unique accouplement non-trivial, à un facteur scalaire près, entre exactement un membre de chaque paquet, où on a le droit de faire varier G et G' parmi leurs formes intérieures. Par ailleurs, les membres des L-paquets qui réalisent l'accouplement sont déterminés par une formule explicite où interviennent des signes locaux d'équations fonctionnelles. Pour les corps locaux non-archimédiens cette conjecture a été démontrée par Waldspurger et Mœglin, à l'aide de diverses méthodes de la théorie locale des représentations. La formule de Plancherel y joue un rôle primordial. Il est également une conjecture globaux pour les représentations automorphes, ce qui interviennent la valeur centrale critique de fonctions L.

Ce volume est le premier de deux numéros d'*Astérisque* consacrés à la conjecture et à sa démonstration. Le premier tome contient deux longs articles de Gan, Gross, et Prasad, qui formulent des versions de la conjecture originale de Gross et Prasad pour des paires plus générales de groupes classiques y compris métaplectique, et qui donnent des exemples pour des groupes unitaires de petite dimension, et pour des représentations avec une ramification limitée. Le deuxième tome contient deux articles de Waldspurger : un article court qui déduit la conjecture locale de multiplicité un pour les paires $(SO(n), SO(n-1))$ des résultats de Aizenbud-Gourevitch-Rallis-Schiffmann sur les groupes orthogonaux, et un article plus long qui termine la première partie de la démonstration de la conjecture de Gross-Prasad : la formule d'intégrale de Waldspurger qui relie les dimensions des espaces d'accouplements à l'analyse harmonique sur les groupes est généralisée du cas où les deux représentations sont supercuspidales au cas de représentations tempérées.

***Résumé* (On the conjectures of Gross and Prasad.)** — About 20 years ago Gross and Prasad formulated a conjecture determining the restriction of an irreducible admissible representation of the group $G = SO(n)$ over a local field to a subgroup of the

form $G' = SO(n-1)$. The conjecture stated that for a given pair of generic L-packets of G and G', there is a unique non-trivial pairing, up to scalars, between precisely one member of each packet, where G and G' are allowed to vary among inner forms; moreover, the relevant members of the L-packets are determined by an explicit formula involving local root numbers. For non-archimedean local fields this conjecture has now been proved by Waldspurger and Mœglin, using a variety of methods of local representation theory; the Plancherel formula plays an important role in the proof. There is also a global conjecture for automorphic representations, which involves the central critical value of L-functions.

This volume is the first of two volumes devoted to the conjecture and its proof for non-archimedean local fields. It contains two long articles by Gan, Gross, and Prasad, formulating extensions of the original Gross-Prasad conjecture to more general pairs of classical groups including metaplectic groups, and providing examples for low rank unitary groups and for representations with restricted ramification. It also includes two articles by Waldspurger: a short one deriving the local multiplicity one conjecture for special orthogonal groups from the results of Aizenbud-Gourevitch-Rallis-Schiffmann on orthogonal groups, and a long one completing the first part of the proof of the Gross-Prasad conjecture by extending an integral formula relating multiplicities in the restriction problem to harmonic analysis from supercuspidal representations (which appeared in *Compositio Mathematica* in 2010) to general tempered representations here.

TABLE DES MATIÈRES