Astérisque

PIERRE COLMEZ

Invariants $\mathcal{L}$ et dérivées de valeurs propres de Frobenius

Astérisque, tome 331 (2010), p. 13-28

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2010__331__13_0>

© Société mathématique de France, 2010, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Astérisque
331, 2010, p. 13–28

INVARIANTS $\mathscr{L}$ ET DÉRIVÉES DE VALEURS PROPRES DE FROBENIUS

par

Pierre Colmez

Résumé. — Nous donnons une formule pour l'invariant-$\mathscr{L}$ de Fontaine-Mazur d'une représentation semi-stable de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ en termes de dérivées de valeurs propres de Frobenius. Combinée avec des résultats de Stevens et de Kisin, cette formule fournit une nouvelle démonstration de l'égalité des invariants-$\mathscr{L}$ de Fontaine-Mazur et Coleman attachés aux formes modulaires.

***Abstract* ($\mathscr{L}$-invariants and Frobenius eigenvalues derivatives).** — We give a formula for Fontaine-Mazur's $\mathscr{L}$-invariant attached to a 2-dimensional semi-stable representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ in terms of derivatives of eigenvalues of Frobenius. Combined with results of Stevens and Kisin, this gives a new proof of the equality between Fontaine-Mazur's and Coleman's $\mathscr{L}$-invariants attached to modular forms.

Introduction

0.1. Invariants $\mathscr{L}$ de formes modulaires. — Si f est une forme primitive de poids k_0 pair et niveau N divisible par p, vecteur propre pour [1] T_p pour la valeur propre $p^{k_0/2-1}$, la fonction L p-adique de f a un zéro supplémentaire en $s = k_0/2$. Mazur, Tate et Teitelbaum [**20**] ont conjecturé [2] l'existence d'un invariant $\mathscr{L}(f)$ ne dépendant de f que « localement en p », tel que l'on ait [3]

$$L_p'(f, k_0/2) = \mathscr{L}(f) \cdot L(f, k_0/2).$$

Si $k_0 = 2$ et si les coefficients de Fourier de f sont rationnels, il correspond à f une courbe elliptique E, définie sur $\mathbf{Q}$, ayant mauvaise réduction multiplicative déployée

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11S**, 11F**.
Mots clefs. — Représentation semi-stable, famille de représentations.

[1] Il s'agit de l'opérateur T_p de niveau N divisible par p, c'est-à-dire l'opérateur U_p d'Atkin-Lehner.
[2] Le lecteur pourra consulter [**9**] pour une introduction plus détaillée.
[3] Pour que la formule ci-dessous ait un sens, il faut considérer L_p comme à valeurs dans le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel engendré par les périodes de f.

© Astérisque 331, SMF 2010

en p. D'après le théorème d'uniformisation de Tate, il existe alors $q \in \mathbf{Q}_p^*$ de valuation non nulle, tel que E soit isomorphe, en tant que variété rigide, à $\mathbf{G}_m/q^{\mathbf{Z}}$, et on a $\mathscr{L}(f) = \frac{\log q}{v_p(q)}$. Dans le cas général, deux définitions de l'invariant $\mathscr{L}(f)$ ont été proposées : l'une par Coleman [**3**] et l'autre par Fontaine et Mazur [**19**]. L'invariant $\mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f)$ de Coleman est défini via la théorie de l'intégration p-adique de Coleman et l'invariant $\mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f)$ de Fontaine-Mazur est défini via le (φ, N)-module filtré de la restriction à un groupe de décomposition en p de la représentation galoisienne V_f associée à f. On dispose des résultats suivants :

Théorème 0.1 **(Stevens).** — $L_p'(f, k_0/2) = \mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f) \cdot L(f, k_0/2)$.

Théorème 0.2 **(Kato-Kurihara-Tsuji).** — $L_p'(f, k_0/2) = \mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f) \cdot L(f, k_0/2)$.

Théorème 0.3 **(Coleman-Iovita).** — $\mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f) = \mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f)$.

Le théorème de Coleman-Iovita est bien évidemment une conséquence des théorèmes de Stevens et de Kato-Kurihara-Tsuji, mais leur démonstration [**5**], qui se fait en déformant une courbe modulaire sur une famille de $\mathbf{P}^1$, est bien plus directe que celle obtenue en utilisant ces deux théorèmes.

La démonstration de Kato-Kurihara-Tsuji (non rédigée, mais voir [**8, 22**]) repose sur la construction, par Kato [**17**], d'un système d'Euler pour la représentation V_f dont l'image par l'exponentielle de Perrin-Riou [**21**] redonne la fonction $L_p(f, s)$ (la démonstration de ce dernier fait repose sur la loi de réciprocité explicite de Kato [**16**] dont la démonstration est très délicate).

La démonstration de Stevens en poids quelconque est une généralisation de celle qu'il avait obtenue avec Greenberg [**15**] en poids 2 ; elle repose sur les familles de formes modulaires p-adiques et leurs fonctions L. Coleman a construit [**4**], en interpolant [(4)] des formes modulaires classiques, une famille analytique de formes modulaires p-adiques f_x, pour $x \in \mathscr{X}$, où $\mathscr{X}$ est une boule de $\mathbf{C}_p$ contenant k_0, avec $f_{k_0} = f$. Cette famille est propre pour tous les opérateurs de Hecke et les valeurs propres dépendent analytiquement de $x \in \mathscr{X}$; c'est en particulier le cas de la valeur propre a_p de T_p. Le lien entre $\mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f)$ et a_p est le suivant (cf. [**26**]).

Théorème 0.4 **(Stevens).** — $\mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f) = -2a_p(k_0)^{-1} \cdot a_p'(k_0)$.

Dans cet article, nous démontrons (cf. th. 0.5 et cor. 0.7) une formule analogue pour l'invariant $\mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f)$ en utilisant la famille de représentations galoisiennes attachée à la famille des f_x.

(4) Si $k \in \mathbf{N}$ est un élément de $\mathscr{X}$ tel que $v_p(a_p(k)) < k - 1$, alors f_k est une forme modulaire classique de poids k et conducteur N.

0.2. Familles analytiques de représentations galoisiennes de dimension 2

Soit S une algèbre de Tate, i.e. un quotient d'une algèbre $\mathbf{Q}_p\{X_1,\dots,X_n\}$ de séries convergeant sur la boule unité fermée. L'espace analytique $\mathscr{X}$ associé à S est l'ensemble des morphismes continus de S dans $\mathbf{C}_p$, la topologie sur $\mathscr{X}$ étant celle de la convergence faible. Si $x \in \mathscr{X}$, on note E_x l'adhérence dans $\mathbf{C}_p$ du sous-corps engendré par l'image de S par x. Si E est un sous-corps de $\mathbf{C}_p$, on définit $\mathscr{X}(E)$ comme l'ensemble des $x \in \mathscr{X}$ vérifiant $E_x \subset E$. On voit un élément s de S comme une fonction analytique sur $\mathscr{X}$, en posant $s(x) = x(s)$.

Soit V une S-représentation de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (i.e. un S-module libre de rang 2 muni d'une action S-linéaire continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$). Choisissons une base v_1, v_2 de V sur S et notons $A_\sigma \in \mathbf{GL}_2(S)$ la matrice de $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ dans cette base. Si $x \in \mathscr{X}$, on note V_x la E_x-représentation de dimension 2, pour laquelle la matrice de $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est $A_\sigma(x)$. La fonction $x \mapsto A_\sigma(x)$ étant analytique, la famille de représentations V_x, pour $x \in \mathscr{X}$, définie par V, est « analytique » et V est une *famille analytique de représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension* 2.

Soit $\psi_1 : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{Q}_p$ le caractère (additif) non ramifié de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ normalisé par $\psi_1(\sigma) = 1$ si σ induit le frobenius $x \mapsto x^p$ sur $\overline{\mathbf{F}}_p$. Soit $\psi_2 : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{Q}_p$ le logarithme du caractère cyclotomique. Comme ψ_1, ψ_2 forment une base de $\mathrm{Hom}(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{Q}_p)$, il existe $\delta, \kappa \in S$ tels que, quel que soit $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on ait

$$\log(\det A_\sigma) = \delta \cdot \psi_1(\sigma) + \kappa \cdot \psi_2(\sigma).$$

Notre résultat principal est l'énoncé peu appétissant suivant :

Théorème 0.5. — *Supposons que V a un poids de Hodge-Tate*[5] *nul, et qu'il existe $\alpha \in S$ tel que $(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \widehat{\otimes} V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \varphi=\alpha}$ soit localement libre de rang 1 sur $\mathscr{X}$.*

Alors, si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, si $x_0 \in \mathscr{X}(E)$ est tel que V_{x_0} soit semi-stable d'invariant de Fontaine-Mazur égal à $\mathscr{L} \in E$ et poids de Hodge-Tate 0 *et $\kappa(x_0) \leqslant -1$, la forme différentielle*

$$\frac{d\alpha}{\alpha} - \frac{1}{2}\mathscr{L} \cdot d\kappa + \frac{1}{2} d\delta$$

s'annule en x_0.

Remarque 0.6. — (i) Le terme $d\delta$ pouvant s'éliminer en tordant par un caractère non ramifié, le théorème ci-dessus montre que l'invariant $\mathscr{L}$ de Fontaine-Mazur s'exprime

(5) Il s'agit des poids de Hodge-Tate κ_1, κ_2 fournis par la théorie de Sen [**24, 25**] ; ils vivent *a priori* dans une extension quadratique (car on est en dimension 2) de S et, si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, si $x \in \mathscr{X}(E)$ est tel que V_x est de Hodge-Tate (considérée comme $\mathbf{Q}_p$-représentation de dimension $2 \cdot [E{:}\mathbf{Q}_p]$), alors $\kappa_1(x)$ et $\kappa_2(x)$ sont des entiers et les poids de Hodge-Tate de V_x sont $\kappa_1(x)$ et $\kappa_2(x)$ avec multiplicité $[E{:}\mathbf{Q}_p]$. L'hypothèse selon laquelle l'un des poids de Hodge-Tate est nul implique que l'autre est égal à κ.

simplement en termes de la dérivée logarithmique de la valeur propre de frobenius par rapport au poids de Hodge-Tate, ce qui semble, *a priori*, assez surprenant. En fait, c'est un reflet de la géométrie de l'espace des représentations *triangulines* [**11**]. (Une E-représentation de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est trianguline s'il existe un caractère continu $\delta : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to E^*$ et $\alpha \in E^*$ tels que $(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \varphi=\alpha} \neq 0$.)

(ii) La démonstration repose sur un calcul de cohomologie galoisienne dans les anneaux de Fontaine. Le principe consiste à bouger la filtration sur $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(\mathrm{End}(V_{x_0}))$ pour se ramener à $\kappa(x_0) = -1$. Dans ce cas, la représentation V_{x_0} est une extension de $\mathbf{Q}_p(-1)$ par $\mathbf{Q}_p$ dont la classe dans $H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{Q}_p(1))$ est contrôlée par l'invariant $\mathscr{L}$; on peut alors faire tous les calculs explicitement en utilisant un peu de théorie locale du corps de classes. Cette technique consistant à bouger la filtration pour se ramener à des représentations plus simples a été introduite par Fontaine [**14**] et utilisée avec profit dans [**13**] pour démontrer la conjecture « faiblement admissible implique admissible ».

(iii) La formule « galoisienne » du théorème ci-dessus a un avatar « automorphe » (cf. [**11**]) faisant intervenir l'invariant $\mathscr{L}$ de Breuil [**2**] défini en termes de représentations unitaires de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. On passe d'une formule à l'autre via la correspondance de Langlands locale p-adique pour la série principale unitaire [**12**] pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, mais le calcul est nettement plus facile du côté automorphe. Ce calcul a joué un rôle non négligeable dans la conception de [**10**] dont [**11**] et [**12**] sont issus.

Revenons à la famille analytique de formes modulaires construite par Coleman. On peut interpoler (cf. [**6**]) les représentations galoisiennes p-adiques associées aux formes classiques f_k, pour $k \in \mathbf{Z} \cap \mathscr{X}$ vérifiant $v_p(a_p(k)) < k - 1$, pour construire une S-représentation V de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$, où S est l'algèbre de Tate des fonctions analytiques sur $\mathscr{X}$. En particulier, on a $V_{k_0} = V_f$.

Les poids de Hodge-Tate de V_x sont 0 et $1 - x$ et la représentation $\det V_x$ se factorise à travers une extension finie de $\mathbf{Q}(\zeta_{p^\infty})$. Par ailleurs, Saito [**23**] a montré que, si f_x est une forme classique, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V_x)^{\varphi=a_p(x)} \neq 0$, et Kisin [**18**] a montré que la représentation V vérifiait les conditions du théorème avec $\alpha = a_p$. On peut donc appliquer le théorème, avec $x_0 = k_0$, $\alpha = a_p$, $\kappa(x) = 1 - x$, $\delta(x) = 0$ et $\mathscr{L} = \mathscr{L}(V_{k_0}) = \mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f)$ pour en déduire le résultat suivant :

Corollaire 0.7. — $\mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f) = -2a_p(k_0)^{-1} \cdot a_p'(k_0)$.

Finalement, en comparant le corollaire ci-dessus avec le résultat de Stevens, on obtient une nouvelle démonstration du théorème de Coleman-Iovita.

Corollaire 0.8. — $\mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f) = \mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f)$.

1. Cohomologie galoisienne des anneaux de Fontaine

Dans tout le reste de l'article, E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et on s'intéresse aux E-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, c'est-à-dire aux E-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action E-linéaire continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

1.1. Anneaux de Fontaine. — Soient $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{st}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ les anneaux de Fontaine et soient

$$\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E} = E \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}, \quad \mathbf{B}_{\mathrm{st},E} = E \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_{\mathrm{st}} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_{\mathrm{dR},E} = E \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}.$$

On étend l'action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ en une action E-linéaire sur $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$. De même, on étend l'action de φ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ en une action E-linéaire sur $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ et l'action de N sur $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ en une action E-linéaire sur $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$. Finalement, on définit la filtration $(\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E})_{i\in\mathbf{Z}}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$ en tensorisant par E la filtration $(\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR}})_{i\in\mathbf{Z}}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$. On a alors $\mathbf{B}^{N=0}_{\mathrm{st},E} = \mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$ et l'inclusion de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$ induit la *suite exacte fondamentale*

$$0 \to E \to \mathbf{B}^{\varphi=1}_{\mathrm{cris},E} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^0_{\mathrm{dR},E} \to 0.$$

Soit t le $2i\pi$ p-adique de Fontaine. C'est un élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$ sur lequel $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit par multiplication par le caractère cyclotomique, et on a $\varphi(t) = pt$, $Nt = 0$ et $t^j\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E} = \mathbf{B}^{i+j}_{\mathrm{dR},E}$ si $i, j \in \mathbf{Z}$.

1.2. Cohomologie galoisienne. — Si M est un $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$-module et si $i \in \mathbf{N}$, on note $H^i(M)$ le i-ième groupe de cohomologie continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ à valeurs dans M. Si $j \in \mathbf{Z}$, on note $M(j)$ le module M tordu par la puissance j-ième du caractère cyclotomique.

Proposition 1.1. — (i) *On a* $H^0(\mathbf{C}_p) = H^1(\mathbf{C}_p) = \mathbf{Q}_p$ *et* $H^i(\mathbf{C}_p(j)) = 0$ *si* $j \neq 0$ *ou si* $i \geqslant 2$.

(ii) *Si* $a \leqslant b \in \mathbf{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, *alors* $H^0(\mathbf{B}^a_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^b_{\mathrm{dR},E}) = H^1(\mathbf{B}^a_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^b_{\mathrm{dR},E}) = 0$ *si* $a > 0$ *ou si* $b \leqslant 0$ (avec la convention $\mathbf{B}^{-\infty}_{\mathrm{dR},E} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$ et $\mathbf{B}^{+\infty}_{\mathrm{dR},E} = 0$).

Démonstration. — Le (i) est dû à Tate [**27**] et le (ii) s'en déduit par dévissage et passage à la limite en utilisant l'isomorphisme $\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^{i+1}_{\mathrm{dR},E} \cong E \otimes \mathbf{C}_p(i) \cong \mathbf{C}_p(i)^{[E:\mathbf{Q}_p]}$.

1.3. Le module U_1 et son H^1. — Si $i \in \mathbf{N}$, soit $U_i = \mathbf{B}^{N^{i+1}=0,\varphi=p^{i-1}}_{\mathrm{st},E}$. Alors N induit, quel que soit $i \in \mathbf{N}$, la suite exacte

$$0 \to \mathbf{B}^{\varphi=p^i}_{\mathrm{cris},E} \to U_{i+1} \xrightarrow{N} U_i \to 0.$$

Proposition 1.2. — *L'application naturelle*

$$H^1(E) \to \ker\left(H^1(U_1) \xrightarrow{N} H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})\right)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — La suite exacte $0 \to E(-1) \to U_0 \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{-1} \to 0$ et l'annulation de $H^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{-1})$ et $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{-1})$ permettent de montrer que l'application naturelle de $H^1(E(-1))$ dans $H^1(U_0)$ est un isomorphisme. Comme par ailleurs les extensions non triviales de E par $E(-1)$ ne sont pas semi-stables [**1**], cela implique que l'application naturelle de $H^1(U_0)$ dans $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})$ est injective. D'où l'égalité

$$\ker\big(H^1(U_1) \xrightarrow{N} H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})\big) = \ker\big(H^1(U_1) \xrightarrow{N} H^1(U_0)\big).$$

Maintenant, comme N induit la suite exacte $0 \to \mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=1} \to U_1 \to U_0 \to 0$ et comme $H^0(U_0) = U_0 \cap E = 0$, on obtient $\ker(H^1(U_1) \xrightarrow{N} H^1(U_0)) = H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=1})$. Finalement, la suite exacte $0 \to E \to \mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=1} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{0} \to 0$ et l'annulation de $H^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{0})$ et $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{0})$ montrent que l'application naturelle de $H^1(E)$ dans $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=1})$ est un isomorphisme, ce qui permet de conclure.

2. E-(φ, N)-modules filtrés

2.1. Définitions et rappels

1. E-(φ, N)-modules. — Un *E-(φ, N)-module* D est un E-espace vectoriel muni d'actions E-linéaires de φ et N avec la relation de commutation $N\varphi = p\varphi N$.

Si D est E-(φ, N)-module de dimension finie sur E, on définit l'invariant $t_N(D)$ par la formule $t_N(D) = v_p(\det \varphi)$, et on note $\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D)$ le $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=1}$-module

$$\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes D)^{\varphi=1, N=0}.$$

Si D_1 et D_2 sont deux E-(φ, N)-modules, on fait de $D_1 \otimes_E D_2$ un E-(φ, N)-module en faisant agir φ et N sur $D_1 \otimes_E D_2$ par $\varphi \otimes \varphi$ et $N \otimes 1 + 1 \otimes N$ respectivement.

2. Filtrations. — Une *filtration* $\mathrm{Fil} = (\mathrm{Fil}^j D)_{j \in \mathbf{Z}}$ sur un E-espace vectoriel D est une collection de sous-E-espaces vectoriels $\mathrm{Fil}^j D$, pour $j \in \mathbf{Z}$, avec $\mathrm{Fil}^{j+1} D \subset \mathrm{Fil}^j D$ quel que soit $j \in \mathbf{Z}$, $\cap_{j \in \mathbf{Z}} \mathrm{Fil}^j D = 0$ et $\cup_{j \in \mathbf{Z}} \mathrm{Fil}^j D = D$. Les entiers j pour lesquels $\mathrm{Fil}^j D / \mathrm{Fil}^{j+1} D \neq 0$ s'appellent les *degrés de la filtration.*

Si D_1 et D_2 sont deux E-espaces vectoriels munis de filtrations Fil_1 et Fil_2, et si D_1 ou D_2 est de dimension finie, alors $\mathrm{Fil}^j(D_1 \otimes_E D_2) = \sum_{j_1+j_2=j} \mathrm{Fil}_1^{j_1} D_1 \otimes_E \mathrm{Fil}_2^{j_2}$ est une filtration sur $D_1 \otimes_E D_2$.

Si $\mathrm{Fil} = (\mathrm{Fil}^j D)_{j \in \mathbf{Z}}$ est une filtration sur un E-espace vectoriel D de dimension finie, on définit l'invariant $t_H(D, \mathrm{Fil})$ par la formule

$$t_H(D, \mathrm{Fil}) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} j \, \dim_E(\mathrm{Fil}^j D / \mathrm{Fil}^{j+1} D)$$

et on note $\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil})$ le $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{+}$-module

$$\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E} \otimes D)/\mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E} \otimes D).$$

3. E-(φ, N)-modules filtrés. — Un *E-(φ, N)-module filtré* (D, Fil) est un E-(φ, N)-module D muni d'une filtration. Un tel module est dit *admissible*, s'il est de dimension finie, si φ est inversible, si $t_H(D, \mathrm{Fil}) = t_N(D)$ et si $t_H(D', \mathrm{Fil}) \leqslant t_N(D')$ pour tout sous-E-(φ, N)-module D' de D muni de la filtration induite. Si (D, Fil) est un E-(φ, N)-module filtré admissible, on note $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D, \mathrm{Fil})$ le noyau de la flèche naturelle de $\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D)$ dans $\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil})$ induite par l'inclusion de $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$.

$\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ est naturellement muni d'une structure de E-(φ, N)-module filtré, la filtration étant induite par celle de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$. Si V est une E-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, le E-espace vectoriel $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}$ hérite de la structure de E-(φ, N)-module filtré de $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$. On a de plus $\dim_E \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) \leqslant \dim_E V$ et on dit que V est *semi-stable* si $\dim_E \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = \dim_E V$.

On dispose du résultat suivant [**7, 13**] :

Théorème 2.1. — (i) *Si V est une E-représentation semi-stable de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ est un E-(φ, N)-module filtré admissible et l'application naturelle de $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E V$ est un isomorphisme commutant aux actions de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, φ, N et respectant les filtrations, et on a $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)) = V$.*

(ii) *Si (D, Fil) est un E-(φ, N)-module filtré admissible, alors $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D, \mathrm{Fil})$ est une représentation semi-stable de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, la suite*

$$0 \to \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D, \mathrm{Fil}) \to \mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D) \to \mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}) \to 0$$

est exacte, l'application naturelle de $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D, \mathrm{Fil})$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E D$ est un isomorphisme commutant aux actions de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, φ, N et respectant les filtrations, les poids de Hodge-Tate de $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D, \mathrm{Fil})$ sont les opposés des degrés de Fil, *et on a $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D, \mathrm{Fil})) = (D, \mathrm{Fil})$.*

(iii) *De plus, les équivalences de catégories $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}$ définies ci-dessus commutent aux produits tensoriels.*

3. La représentation $W_{\mathscr{L},i}$

3.1. E-(φ, N)-modules filtrés admissibles de dimension 2. — Soit $\alpha \in E$ vérifiant $2v_p(\alpha) \in \mathbf{N}$, et soit $i = 2v_p(\alpha) + 1$. Soit D_α le E-(φ, N)-module défini par

$$D_\alpha = E \cdot e_1 \oplus E \cdot e_2, \quad \varphi(e_1) = p\alpha e_1, \ \varphi(e_2) = \alpha e_2, \quad Ne_1 = e_2, \ Ne_2 = 0.$$

Si $\mathscr{L} \in E$, on note $\mathrm{Fil}_{\mathscr{L}}$ la filtration sur D_α définie par

$$\mathrm{Fil}^j_{\mathscr{L}} D_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i, \\ E \cdot (e_1 + \mathscr{L} e_2) & \text{si } 0 < j \leqslant i, \\ D_\alpha & \text{si } j \leqslant 0. \end{cases}$$

Le E-(φ, N) module filtré $(D_\alpha, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L}})$ est admissible et la représentation $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D_\alpha, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L}})$ est une E-représentation semi-stable non cristalline de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de poids de Hodge-Tate 0 et $-i$. Réciproquement, toute E-représentation V semi-stable non cristalline de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de poids de Hodge-Tate 0 et $-i$, est isomorphe à $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D_\alpha, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L}})$ pour un unique couple $(\alpha, \mathscr{L})$ avec $2v_p(\alpha) + 1 = i$; l'invariant $\mathscr{L}$ est *l'invariant de Fontaine-Mazur* de V.

3.2. Le E-(φ, N)-module filtré $(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i})$. — Soit $D = E \cdot f_1 \oplus E \cdot f_2 \oplus E \cdot f_3$ le (φ, N)-module défini par :

$$\varphi(f_1) = pf_1,\ \varphi(f_2) = f_2,\ \varphi(f_3) = p^{-1}f_3, \quad Nf_1 = 2f_2,\ Nf_2 = f_3,\ Nf_3 = 0.$$

Si $\mathscr{L} \in E$, soient

$$g_{\mathscr{L},1} = f_1 + 2\mathscr{L}f_2 + \mathscr{L}^2 f_3, \quad g_{\mathscr{L},2} = f_2 + \mathscr{L}f_3, \quad g_{\mathscr{L},3} = f_3,$$

et, si $i \in \mathbf{N} - \{0\}$, soit $\mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i}$ la filtration sur D donnée par

$$\mathrm{Fil}^j_{\mathscr{L},i} D = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i, \\ E \cdot g_{\mathscr{L},1} & \text{si } 0 < j \leqslant i, \\ E \cdot g_{\mathscr{L},1} \oplus E \cdot g_{\mathscr{L},2} & \text{si } -i < j \leqslant 0, \\ D & \text{si } j \leqslant -i. \end{cases}$$

Le (φ, N)-module filtré $(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i})$ est admissible et on note $W_{\mathscr{L},i}$ la représentation $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i})$.

Un petit calcul montre que, si $2v_p(\alpha) + 1 = i$, alors $(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i})$ est le carré symétrique de $(D_\alpha, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L}})$ tordu par $\det(D_\alpha, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L}})^{-1}$, et donc est le (φ, N)-module filtré des endomorphismes de trace nulle de $(D_\alpha, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L}})$. On obtient donc le résultat suivant :

Proposition 3.1. — *Si V est une représentation semi-stable non cristalline de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de poids de Hodge-Tate 0 et $-i$, avec $i > 0$, alors* $\mathrm{End}^0(V) \cong W_{\mathscr{L},i}$.

Remarque 3.2. — Le E-(φ, N)-module filtré $(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i})$ est autodual, et il est facile de voir que tout E-(φ, N)-module filtré autodual, de dimension 3, avec $N \neq 0$, est isomorphe à $(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i})$ pour un unique couple $(i, \mathscr{L})$ de $(\mathbf{N} - \{0\}) \times E$.

3.3. Le module $\mathrm{Hom}(W_{\mathscr{L},i}, U_1)$

Proposition 3.3. — *On a $\mathbf{B}^{\varphi=1}_{\mathrm{cris},E} \otimes W_{\mathscr{L},i} = \mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D)$ quel que soit $i \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — C'est un résultat général sur les E-(φ, N)-modules filtrés admissible : si (D, Fil) est un tel module, l'application naturelle de $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D, \mathrm{Fil})$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes D$ est un isomorphisme commutant à φ et N (th. 2.1 (ii)) et donc

$$\mathbf{B}^{\varphi=1}_{\mathrm{cris},E} \otimes \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D, \mathrm{Fil}) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D, \mathrm{Fil}))^{\varphi=1, N=0} = (\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes D)^{\varphi=1, N=0} = \mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D).$$

Si $j = 1, 2, 3$, on note $\pi_j : \mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes D \to \mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ l'application définie par

$$x = \pi_1(x)f_1 + \pi_2(x)f_2 + \pi_3(x)f_3.$$

Lemme 3.4. — *Si $x \in \mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D) \subset \mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes D$, alors*

$$\pi_3(x) \in U_2, \quad \pi_2(x) = -N\pi_3(x) \in U_1 \quad \text{et} \quad \pi_1(x) = \frac{1}{2}N^2\pi_3(x) \in U_0.$$

Démonstration. — C'est une simple traduction des conditions $\varphi(x) = x$ et $Nx = 0$.

Proposition 3.5. — *Si $i \in \mathbf{N}$, et si $j = 1, 2, 3$, alors $\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(W_{\mathscr{L},i}, U_{3-j})$ est de dimension 1 sur E, et la restriction de π_j à $W_{\mathscr{L},i}$ en est une base.*

Démonstration. — $\oplus_{j=1}^{3}\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(W_{\mathscr{L},i}, U_{3-j}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(W_{\mathscr{L},i}, \mathbf{B}_{\mathrm{st}}) = \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(W^*_{\mathscr{L},i})$ est injective, et donc $\sum_{j=1}^{3}\dim_E \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(W_{\mathscr{L},i}, U_{3-j}) \leqslant \dim_E W^*_{\mathscr{L},i} = 3$. Pour conclure, il suffit donc de prouver qu'aucun des π_i n'est identiquement nul sur $W_{\mathscr{L},i}$, ce qui suit du fait que l'application naturelle $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E W_{\mathscr{L},i} \to \mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E D$ est un isomorphisme d'après le (ii) du th. 2.1.

4. La représentation $W_{\mathscr{L},1}$ et sa cohomologie galoisienne

4.1. Éléments de théorie du corps de classes locale. — Si $\alpha \in \mathbf{Q}_p^*$, on note (α) la classe de α dans $H^1(\mathbf{Q}_p(1))$ fournie par la théorie de Kummer.

Si t est le $2i\pi$ p-adique de Fontaine, soit $v \in \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=p}$ tel que $\frac{v}{t} \in \mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=1}$ ait pour image $\frac{1}{t}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^0$. Alors v est bien déterminé à addition près d'un élément de la forme at, avec $a \in E$. Si $\alpha \in \mathbf{Q}_p^*$ est de valuation nulle (i.e. si $\alpha \in \mathbf{Z}_p^*$), alors $(\alpha) \in H^1(\mathbf{Q}_p(1))$ est la classe du cocycle $\sigma \mapsto (\sigma - 1)(\log \alpha \cdot v)$.

Soit u le $\log p$ p-adique de Fontaine. C'est un élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ vérifiant

(i) $u \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^1$,

(ii) $\varphi(u) = pu$ et $Nu = -1$,

(iii) $\sigma(u) - u \in \mathbf{Q}_p t$ et la classe de $\sigma \mapsto \sigma(u) - u$ dans $H^1(\mathbf{Q}_p(1))$ est égale à (p).

Le E-espace vectoriel $H^1(E(1)) = E \otimes H^1(\mathbf{Q}_p(1))$ admet comme base les images des cocycles $\sigma \mapsto \sigma(u) - u$ et $\sigma \mapsto \sigma(v) - v$; on utilise cette base pour mettre $H^1(E(1))$ en bijection avec E^2 en envoyant le cocycle $\sigma \mapsto (\sigma - 1) \cdot (b_1 u + b_2 v)$ sur (b_1, b_2).

Le E-espace vectoriel $H^1(E)$ est aussi de dimension 2 ; il admet comme base les caractères ψ_1, ψ_2 de l'introduction. L'accouplement $H^1(\mathbf{Q}_p) \times H^1(\mathbf{Q}_p(1)) \to \mathbf{Q}_p$, défini via le cup-produit $H^1(\mathbf{Q}_p) \times H^1(\mathbf{Q}_p(1)) \to H^2(\mathbf{Q}_p(1))$, en utilisant l'isomorphisme $H^2(\mathbf{Q}_p(1)) \cong \mathbf{Q}_p$ de la théorie du corps de classes locale, induit par E-linéarité un accouplement $\langle\ ,\ \rangle : H^1(E) \times E^2 \to E$. Comme $\psi_1 \cup (\alpha) = -v_p(\alpha)$ et $\psi_2 \cup (\alpha) = \log_p \alpha$, si $\alpha \in \mathbf{Q}_p^*$, l'accouplement $\langle\ ,\ \rangle$ est donné par la formule

$$\langle a_1\psi_1 + a_2\psi_2, (b_1, b_2)\rangle = -a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

4.2. La représentation $W_{\mathscr{L},1}$

Lemme 4.1. — *$W_{\mathscr{L},1}$ est le E-espace vectoriel engendré par v_1, v_2 et v_3, avec*

$$v_1 = tf_3, \quad v_2 = (u - \mathscr{L}v)f_3 - f_2 \quad \text{et} \quad v_3 = \frac{(u-\mathscr{L}v)^2}{2t} f_3 - \frac{u-\mathscr{L}v}{t} f_2 + \frac{1}{2t} f_1.$$

Démonstration. — L'inclusion $E\cdot v_1 \oplus E\cdot v_2 \oplus E\cdot v_3 \subset W_{\mathscr{L},1}$ se démontre en utilisant le fait que $\frac{u}{t} \in \mathbf{B}^0_{\mathrm{dR}}$ et $\frac{v-1}{t} \in \mathbf{B}^0_{\mathrm{dR}}$; on en déduit l'égalité pour des raisons de dimension.

Corollaire 4.2. — (i) *$W_{\mathscr{L},1}$ admet une filtration croissante par des sous-représentations $0 = W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset W_3 = W_{\mathscr{L},1}$, avec $W_i = \oplus_{j\leqslant i} E\cdot v_j$.*

(ii) *$W_1 \cong E(1)$.*

(iii) *la représentation W_2 est une extension de E par $E(1)$ dont la classe dans $H^1(E(1)) \cong E^2$ est $(1, \mathscr{L})$.*

(iv) *Le quotient W' de $W_{\mathscr{L},1}$ par W_1 est isomorphe à $W_2(-1)$.*

Proposition 4.3. — *Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle sur $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ à valeurs dans $W_{\mathscr{L},1}$ dont l'image dans $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})$ par l'application $N\circ\pi_2$ est nulle. Alors il existe $c \in W_{\mathscr{L},1}$ et $\gamma_1, \gamma_2 \in E$, uniques, tels que $\pi_2(c_\sigma) = \gamma_1\psi_1(\sigma) + \gamma_2\psi_2(\sigma) + (\sigma - 1)\cdot\pi_2(c)$, pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et on a $\gamma_1 = \mathscr{L}\gamma_2$.*

Démonstration. — L'application $\pi_2 : W_{\mathscr{L},1} \to U_1$ envoie v_1 sur 0, v_2 sur -1 et v_3 sur $\frac{u-\mathscr{L}v}{t}$; elle se factorise donc à travers W' et l'image de $H^1(W_{\mathscr{L},1})$ dans $H^1(U_1)$ est donc incluse dans celle de $H^1(W')$. Maintenant, l'application $N : U_1 \to U_0$, composée avec π_2, induit la suite exacte $0 \to E \to W' \to E(-1) \to 0$ et, en passant à la cohomologie galoisienne, la suite exacte $0 \to H^1(E) \to H^1(W') \to H^1(E(-1)) \to 0$. Comme les extensions de E par $E(-1)$ ne sont pas de de Rham et donc, a fortiori, pas cristallines, l'application de $H^1(E(-1))$ dans $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E})$ induite par l'appartenance de t^{-1} à $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$, est injective. On en déduit que l'inclusion de E dans W' induit un isomorphisme de $H^1(E)$ sur $\ker(H^1(W') \xrightarrow{N} H^1(U_0))$. Ceci nous permet de montrer l'existence de c, γ_1 et γ_2 ainsi que l'unicité de γ_1 et γ_2.

Par ailleurs, la suite exacte $0 \to E(1) \to W_{\mathscr{L},1} \to W' \to 0$ induit, en passant à la cohomologie galoisienne, des applications de connexion $H^i(W') \to H^{i+1}(E(1))$. La restriction de ces applications de connexion au sous-groupe $H^i(E)$ de $H^i(W')$ est donnée par le cup-produit avec la classe δ de l'extension de E par $E(1)$ induite par $W_2 \subset W_{\mathscr{L},1}$. Comme l'image de $H^1(W_{\mathscr{L},1})$ dans $H^1(W')$ est le noyau de l'application de connexion $H^1(W') \to H^2(E(1))$, on voit que $a\psi_1 + b\psi_2 \in H^1(E) \subset H^1(W')$ est dans l'image de $H^1(W_{\mathscr{L},1})$ si et seulement si $(a\psi_1 + b\psi_2)\cup\delta = 0$. Finalement, en utilisant le fait que l'image de δ dans $H^1(E(1)) \cong E^2$ est $(1, \mathscr{L})$, et la formule ci-dessus pour le cup-produit, on en déduit le résultat.

5. Cohomologie galoisienne de $W_{\mathscr{L},i}$

Proposition 5.1. — *L'image de $H^1(W_{\mathscr{L},i})$ dans $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D))$ ne dépend pas de i.*

Démonstration. — On utilise la suite exacte (th. 2.1 (ii))

$$0 \to W_{\mathscr{L},i} \to \mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D) \to \mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i}) \to 0$$

pour se ramener à montrer que le noyau de l'application de $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D))$ dans $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i}))$ ne dépend pas de i. Pour comparer ce noyau pour i quelconque et $i = 1$, introduisons le $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR},E}$-module $M = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E} \otimes D)/(\mathrm{Fil}^0_{\mathscr{L},i} \cap \mathrm{Fil}^0_{\mathscr{L},1})$. Comme

$$\mathrm{Fil}^0_{\mathscr{L},i}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E} \otimes D) = \mathbf{B}^{-i}_{\mathrm{dR},E} \cdot g_{1,\mathscr{L}} \oplus \mathbf{B}^0_{\mathrm{dR},E} \cdot g_{2,\mathscr{L}} \oplus \mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E} \cdot g_{3,\mathscr{L}},$$

on a

$$\mathrm{Fil}^0_{\mathscr{L},i}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E} \otimes D) \cap \mathrm{Fil}^0_{\mathscr{L},1}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E} \otimes D) = \mathbf{B}^{-1}_{\mathrm{dR},E} \cdot g_{1,\mathscr{L}} \oplus \mathbf{B}^0_{\mathrm{dR},E} \cdot g_{2,\mathscr{L}} \oplus \mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E} \cdot g_{3,\mathscr{L}};$$

on en déduit les suites exactes

$$0 \to (\mathbf{B}^1_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E}) \cdot g_{3,\mathscr{L}} \to M \to \mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},1}) \to 0,$$
$$0 \to (\mathbf{B}^{-i}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^{-1}_{\mathrm{dR},E}) \cdot g_{1,\mathscr{L}} \to M \to \mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i}) \to 0.$$

Par ailleurs, comme

$$H^0(\mathbf{B}^1_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E}) = H^0(\mathbf{B}^{-i}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^{-1}_{\mathrm{dR},E}) = H^1(\mathbf{B}^1_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E}) = H^1(\mathbf{B}^{-i}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^{-1}_{\mathrm{dR},E}) = 0,$$

les applications naturelles de $H^1(M)$ dans $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},1}))$ et $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i}))$ sont des isomorphismes et donc les noyaux des applications de $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D))$ dans $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},1}))$ et $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i}))$ coïncident tous les deux avec le noyau de l'application de $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D))$ dans $H^1(M)$. Ceci permet de conclure.

Proposition 5.2. — *Soit $w \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(W_{\mathscr{L},i}, U_1)$. Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle sur $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, à valeurs dans $W_{\mathscr{L},1}$, dont l'image dans $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})$ par l'application $N \circ w$ est nulle. Alors il existe $c \in U_1$ et $\gamma_1, \gamma_2 \in E$, uniques, tels que $w(c_\sigma) = \gamma_1\psi_1(\sigma) + \gamma_2\psi_2(\sigma) + \sigma(c) - c$, pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et on a $\gamma_1 = \mathscr{L}\gamma_2$.*

Démonstration. — L'existence de c, γ_1, γ_2 et l'unicité de γ_1, γ_2 sont des conséquences de la prop. 1.2. De plus, comme $\mathrm{Hom}_G(W_{\mathscr{L},i}, U_1)$ est un-E-espace vectoriel de dimension 1 engendré par π_2 d'après la prop. 3.5, on peut supposer que $w = \pi_2$, ce que nous ferons. La prop. 5.1 montre que l'image par π_2 de $H^1(W_{\mathscr{L},i})$ dans $H^1(U_1)$ ne dépend pas de i, ce qui permet d'utiliser la proposition 4.3 pour montrer que $\gamma_1 = \mathscr{L}\gamma_2$, et conclure.

6. Démonstration du résultat principal

Passons à la démonstration du théorème 0.5. Comme il s'agit d'un énoncé portant sur les dérivées à l'ordre 1, il suffit de traiter le cas $S = E[z]/z^2$. On se retrouve dans la situation suivante :

(i) V est une $(E[z]/z^2)$-représentation de dimension 2 ;

(ii) la E-représentation $V_0 = V/zV$ est semi-stable, de poids de Hodge-Tate 0 et $-i$, avec $i > 0$, et $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V_0) \cong D_{\alpha_0,\mathscr{L}}$, avec $2v_p(\alpha_0) + 1 = i$;

(iii) il existe $a \in E$ tel que le $(E[z]/z^2)$-module $(\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E} \otimes_E V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p},\varphi=\alpha_0(1+az)}$ soit libre de rang 1.

Choisissons une base v_1, v_2 de V sur $E[z]/z^2$ et écrivons la matrice B_σ de $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ dans cette base sous la forme $B_\sigma = (I + z(\delta_\sigma I + U_\sigma))A_\sigma$, avec $A_\sigma \in \mathbf{GL}_2(E)$, $\delta_\sigma \in E$ et $U_\sigma \in \mathbf{M}_2(E)$ de trace nulle. Si $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ désignent les images de v_1 et v_2 modulo z, alors A_σ est la matrice de σ dans la base $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ de V_0. Par ailleurs, on a

$$\log(\det B_\sigma) = \log(\det A_\sigma) + 2z\delta_\sigma$$

et donc $\sigma \mapsto \log(\det A_\sigma)$ et $\sigma \mapsto \delta_\sigma$ sont des caractères additifs de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et il existe [6] d_1, d_2 et $\delta_1, \delta_2 \in E$ tels que $\log(\det A_\sigma) = d_1\psi_1(\sigma) + d_2\psi_2(\sigma)$ et $\delta_\sigma = \delta_1\psi_1(\sigma) + \delta_2\psi_2(\sigma)$, quel que soit $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Dans les notations du théorème 0.5, on a $\delta = d_1 + 2\delta_1 z$, $\kappa = d_2 + 2\delta_2 z$ et $\alpha = \alpha_0(1 + az)$, et on est ramené à démontrer la formule suivante :

Proposition 6.1. — $a = \mathscr{L}\delta_2 - \delta_1$.

Soit $\overline{e}_1 = x_1\overline{v}_1 + x_2\overline{v}_2$ engendrant $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V_0)^{\varphi=p\alpha_0}$, et soit $\overline{e}_2 = N\overline{e}_1 = y_1\overline{v}_1 + y_2\overline{v}_2$. Ceci fait de $\overline{e}_2$ un générateur de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V_0)^{\varphi=\alpha_0}$, et $\overline{e}_1 + \mathscr{L}\overline{e}_2 \in \mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E} \otimes_E V_0$ par définition de l'invariant $\mathscr{L}$. Comme $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ forment une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V_0)$, la matrice $M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ est inversible dans $\mathbf{M}_2(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})$ et vérifie $M^{-1}A_\sigma\sigma(M) = I$ quel que soit $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Soient $e_1 = x_1v_1 + x_2v_2$ et $e_2 = Ne_1 = y_1v_1 + y_2v_2$. Comme M est inversible, e_1, e_2 forment une base de $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E V$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E S$. La matrice de σ dans cette base est alors

$$M^{-1}B_\sigma\sigma(M) = I + z(\delta_\sigma I + M^{-1}U_\sigma M).$$

Par ailleurs, un calcul brutal montre que, si l'on pose

$$U_\sigma = \begin{pmatrix} u_{1,\sigma} & u_{3,\sigma} \\ u_{2,\sigma} & -u_{1,\sigma} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad c_\sigma = \frac{2u_{1,\sigma}x_1x_2 - u_{2,\sigma}x_1^2 + u_{3,\sigma}x_2^2}{2(x_1y_2 - x_2y_1)},$$

[6] On a d'ailleurs $d_2 = -i$.

alors

$$M^{-1}U_\sigma M = \begin{pmatrix} Nc_\sigma & N^2c_\sigma \\ -2c_\sigma & -Nc_\sigma \end{pmatrix}.$$

Comme $z^2 = 0$, le fait que $\sigma \mapsto M^{-1}B_\sigma\sigma(M)$ soit un 1-cocycle à valeurs dans $\mathbf{GL}_2(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E S)$ implique que $\sigma \mapsto M^{-1}U_\sigma M$ est un 1-cocycle à valeurs dans $\mathbf{M}_2(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})$, et que $\sigma \mapsto c_\sigma$ est un 1-cocycle à valeurs dans $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$; la formule ci-dessus montre que ce 1-cocycle est en fait à valeurs dans U_2 et donc que le 1-cocycle $\sigma \mapsto Nc_\sigma - \delta_\sigma$ est à valeurs dans U_1.

Lemme 6.2. — *L'application naturelle* $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V_0)$ *est surjective et* $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ *est égal à* $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=\alpha_0(1+az)}$.

Démonstration. — La multiplication par z induit la suite exacte suivante de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$-modules

$$0 \to V_0 \to V \to V_0 \to 0.$$

En tensorisant par $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$ et en prenant les invariants sous $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on en déduit la suite exacte

$$0 \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V_0) \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V_0).$$

Or $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V_0)$ est de dimension 1 sur E, alors que $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ contient $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=\alpha_0(1+az)}$ qui est, par hypothèse, de dimension 2 sur E ; cela permet de conclure.

Lemme 6.3. — *Les cocycles* $\sigma \mapsto N^2c_\sigma$ *et* $\sigma \mapsto -\delta_\sigma + Nc_\sigma$ *se trivialisent dans* $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$.

Démonstration. — D'après le lemme 6.2, il existe g dans $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ ayant pour image $\overline{e}_2$ dans $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V_0)$, et il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ tels que

$$g = e_2 + z(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2).$$

Comme

$$\sigma(e_1) = e_1 + z\big((\delta_\sigma + Nc_\sigma)\cdot e_1 - 2c_\sigma \cdot e_2\big) \quad \text{et} \quad \sigma(e_2) = e_2 + z\big(N^2c_\sigma \cdot e_1 + (\delta_\sigma - Nc_\sigma)\cdot e_2\big),$$

et comme $z^2 = 0$, on obtient, quel que soit $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$,

$$\begin{aligned} 0 = \sigma(g) - g &= \sigma(e_2) - e_2 + z\big(\sigma(\lambda_1)\sigma(e_1) - \lambda_1 e_1 + \sigma(\lambda_2)\sigma(e_2) - \lambda_2 e_2\big) \\ &= z\Big(N^2c_\sigma \cdot e_1 + (\delta_\sigma - Nc_\sigma)\cdot e_2 + (\sigma(\lambda_1) - \lambda_1)\cdot e_1 + (\sigma(\lambda_2) - \lambda_2)\cdot e_2\Big), \end{aligned}$$

et donc $N^2c_\sigma = \sigma(-\lambda_1) - (-\lambda_1)$ et $Nc_\sigma - \delta_\sigma = \sigma(\lambda_2) - \lambda_2$. Ceci permet de conclure.

Corollaire 6.4. — *Il existe* $\lambda \in U_1$ *et* $\gamma_1, \gamma_2 \in E$ *tels que, pour tout* $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, *on ait*

$$Nc_\sigma = \gamma_1\psi_1(\sigma) + \gamma_2\psi_2(\sigma) + \sigma(\lambda) - \lambda.$$

Démonstration. — Cela suit de la proposition 1.2.

La proposition 6.1 est alors une conséquence immédiate de la proposition suivante, ce qui permet de terminer la démonstration du théorème 0.5.

Proposition 6.5. — *On a les relations suivantes :*

(i) $\gamma_2 = \delta_2$;

(ii) $a = \gamma_1 - \delta_1$;

(iii) $\gamma_1 = \mathscr{L}\gamma_2$.

Démonstration. — (i) On a

$$\sigma(\lambda_2) - \lambda_2 = Nc_\sigma - \delta_\sigma = (\gamma_1 - \delta_1)\psi_1(\sigma) + (\gamma_2 - \delta_2)\psi_2(\sigma) + \sigma(\lambda) - \lambda.$$

Soit $\omega \in W(\overline{\mathbf{F}}_p)$ vérifiant $\varphi(\omega) - \omega = 1$. Comme φ engendre topologiquement le groupe de Galois de l'extension maximale non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$, et comme ψ_1 est normalisé par $\psi(\varphi) = 1$, on a $\sigma(\omega) - \omega = \psi_1(\sigma)$ et

$$(\gamma_2 - \delta_2)\psi_2(\sigma) = (\sigma - 1) \cdot (\lambda_2 - \lambda - (\gamma_1 - \delta_1)\omega),$$

quel que soit $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Comme l'extension de $\mathbf{Q}_p$ par $\mathbf{Q}_p$ définie par ψ_2 n'est pas de Hodge-Tate, et donc pas semi-stable, on a $\gamma_2 - \delta_2 = 0$ et $\lambda_2 = \lambda + (\gamma_1 - \delta_1)\omega + \mu$, avec $\mu \in E$.

(ii) Comme $g \in \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, et comme $Ne_1 = e_2$ et $Ne_2 = 0$, on a

$$0 = Ng = z(N\lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_1 \cdot e_2 + N\lambda_2 \cdot e_2).$$

Ceci implique en particulier $\lambda_1 = -N\lambda_2 = -N\lambda \in U_0$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda_1) = p^{-1}\lambda_1, \quad \varphi(\lambda_2) &= \lambda_2 + (\gamma_1 - \delta_1),\\ \varphi(g) = \varphi(e_2 + z(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2)) &= \alpha_0\big(e_2 + z(\lambda_1 e_1 + (\lambda_2 + (\gamma_1 - \delta_1))e_2\big)\\ &= \alpha_0(1 + (\gamma_1 - \delta_1)z)g,\end{aligned}$$

et donc $a = \gamma_1 - \delta_1$, d'après le lemme 6.2.

(iii) Si $\overline{v}_1^*, \overline{v}_2^*$ est la base de V_0^* duale de $\overline{v}_1, \overline{v}_2$, l'application E-linéaire de V_0^* dans $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$, qui envoie $\overline{v}_1^*$ sur x_1 et $\overline{v}_2^*$ sur x_2 commute à l'action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. La formule explicite (cf. ci-avant) pour c_σ montre donc que le cocycle $\sigma \mapsto Nc_\sigma$ est l'image dans U_1 d'un cocycle à valeurs dans $(\mathrm{Sym}^2 V_0^*) \otimes (\det V_0^*)^{-1} \cong W_{\mathscr{L},i}$. Par ailleurs, le cocycle $\sigma \mapsto N^2 c_\sigma$ se trivialisant dans $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ d'après le lemme 6.3, la proposition 5.2 permet de montrer que $\gamma_1 = \mathscr{L}\gamma_2$, ce qui permet de conclure.

Références

[1] S. Bloch & K. Kato – *L*-functions and Tamagawa numbers of motives, in *The Grothendieck Festschrift, Vol. I*, Progr. Math., vol. 86, Birkhäuser, 1990, p. 333–400.

[2] C. Breuil – Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée, ce volume.

[3] R. F. COLEMAN – A p-adic Shimura isomorphism and p-adic periods of modular forms, in *p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (Boston, MA, 1991)*, Contemp. Math., vol. 165, Amer. Math. Soc., 1994, p. 21–51.

[4] ———, p-adic Banach spaces and families of modular forms, *Invent. Math.* **127** (1997), p. 417–479.

[5] R. F. COLEMAN & A. IOVITA – Hidden structures on semi-stable curves, ce volume.

[6] R. F. COLEMAN & B. MAZUR – The eigencurve, in *Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 254, Cambridge Univ. Press, 1998, p. 1–113.

[7] P. COLMEZ – Espaces de Banach de dimension finie, *J. Inst. Math. Jussieu* **1** (2002), p. 331–439.

[8] ———, La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique, *Astérisque* **294** (2004), p. 251–319.

[9] ———, Zéros supplémentaires de fonctions L p-adiques de formes modulaires, in *Algebra and number theory*, Hindustan Book Agency, 2005, p. 193–210.

[10] ———, Série principale unitaire pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et représentations triangulines de dimension 2, prépublication `http://people.math.jussieu.fr/~colmez/triangulines.pdf`, 2007.

[11] ———, Représentations triangulines de dimension 2, *Astérisque* **319** (2008), p. 213–258.

[12] ———, La série principale unitaire de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, *Astérisque* **330** (2010), p. 213–262.

[13] P. COLMEZ & J.-M. FONTAINE – Construction des représentations p-adiques semi-stables, *Invent. Math.* **140** (2000), p. 1–43.

[14] J.-M. FONTAINE – Exposé à Orsay, 1998.

[15] R. GREENBERG & G. STEVENS – p-adic L-functions and p-adic periods of modular forms, *Invent. Math.* **111** (1993), p. 407–447.

[16] K. KATO – Generalized explicit reciprocity laws, *Adv. Stud. Contemp. Math. (Pusan)* **1** (1999), p. 57–126.

[17] ———, p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms, *Astérisque* **295** (2004), p. 117–290.

[18] M. KISIN – Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture, *Invent. Math.* **153** (2003), p. 373–454.

[19] B. MAZUR – On monodromy invariants occurring in global arithmetic, and Fontaine's theory, in *p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (Boston, MA, 1991)*, Contemp. Math., vol. 165, Amer. Math. Soc., 1994, p. 1–20.

[20] B. MAZUR, J. T. TATE & J. TEITELBAUM – On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer, *Invent. Math.* **84** (1986), p. 1–48.

[21] B. PERRIN-RIOU – Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local, *Invent. Math.* **115** (1994), p. 81–161.

[22] ———, Quelques remarques sur la théorie d'Iwasawa des courbes elliptiques, in *Number theory for the millennium, III (Urbana, IL, 2000)*, A K Peters, 2002, p. 119–147.

[23] T. SAITO – Modular forms and p-adic Hodge theory, *Invent. Math.* **129** (1997), p. 607–620.

[24] S. SEN – Continuous cohomology and p-adic Galois representations, *Invent. Math.* **62** (1980/81), p. 89–116.

[25] ———, An infinite-dimensional Hodge-Tate theory, *Bull. Soc. Math. France* **121** (1993), p. 13–34.

[26] G. STEVENS – Coleman's $\mathscr{L}$-invariant and families of modular forms, ce volume.

[27] J. T. TATE – p-divisible groups, in *Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966)*, Springer, 1967, p. 158–183.

P. COLMEZ, CNRS, Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : colmez@math.jussieu.fr