Astérisque

JEAN-MARIE TRÉPREAU

# Discrimination analytique des difféomorphismes résonnants de $(\mathbb{C}, 0)$ et réflexion de Schwarz

*Astérisque*, tome 284 (2003), p. 271-319

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2003__284__271_0>

© Société mathématique de France, 2003, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

*Astérisque*
**284**, 2003, p. 271–319

# DISCRIMINATION ANALYTIQUE DES DIFFÉOMORPHISMES RÉSONNANTS DE $(\mathbb{C}, 0)$ ET RÉFLEXION DE SCHWARZ

*par*

Jean-Marie Trépreau

*à Jean-Michel Bony,*
*pour son 60$^e$ anniversaire*

***Résumé.*** — Nous montrons que des arguments géométriques très simples, basés sur la réflexion de Schwarz, permettent souvent de décider si deux paires d'arcs analytiques tangents en $0 \in \mathbb{C}$ sont analytiquement équivalentes au voisinage de 0. Nous en déduisons la construction de familles nombreuses de germes, formellement mais non analytiquement conjugués, de difféomorphismes analytiques résonnants de $(\mathbb{C}, 0)$.

***Abstract* (Resonant diffeomorphisms of $(\mathbb{C}, 0)$ and the Schwarz reflection).** — We show that simple geometric arguments, based on the Schwarz reflection, allow in many cases to decide whether two pairs of tangent analytic arcs at $0 \in \mathbb{C}$ are conformally equivalent in a small neighborhood of 0. As an application, we exhibit big families of germs of analytic resonant diffeomorphisms of $(\mathbb{C}, 0)$, which are formally, but not analytically conjugate.

## Introduction

**Paires d'arcs analytiques tangents...**— On s'intéresse à la classification analytique des paires $(A, B)$, où $A$ et $B$ sont deux germes, *tangents* en $0 \in \mathbb{C}$, d'arcs analytiques réguliers.

Deux telles paires, soit $(A, B)$ et $(C, D)$, sont *équivalentes* s'il existe un germe en 0 de difféomorphisme holomorphe $\phi$ (on dira plutôt *un difféomorphisme analytique de* $(\mathbb{C}, 0)$), tel que :

$$\phi(A) = C, \quad \phi(B) = D.$$

Elles sont *formellement équivalentes* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un difféomorphisme analytique $\phi_n$ de $(\mathbb{C}, 0)$, tel que $\phi_n(A)$ et $\phi_n(B)$ soient respectivement tangents à $C$ et à $D$, à des ordres $\geqslant n$.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 30 C 35, 30 D 05, 37 F 99.
***Mots clefs.*** — Réflexion de Schwarz, transformations conformes, paires d'arcs analytiques.

© Astérisque 284, SMF 2003

Notons $S_A$ la réflexion de Schwarz par rapport à un arc analytique régulier $A$. À la paire $(A, B)$, on associe son *indicateur* :

$$f = S_A \circ S_B.$$

C'est un difféomorphisme analytique de $(\mathbb{C}, 0)$, tangent à l'identité. Il est évident que les indicateurs de deux paires équivalentes sont (analytiquement) conjugués.

La classification formelle des paires a été faite par Kasner [**15**]. Il apparaît que les paires $(A, B)$ dont l'indicateur appartient à une classe de conjugaison formelle donnée, s'il en existe, se répartissent en une ou deux classes d'équivalence formelle, selon que l'ordre de contact entre les deux arcs $A$ et $B$ est impair ou pair.

Nakai [**19**] a montré que les paires analytiques, dont l'indicateur appartient à une classe de conjugaison analytique donnée, se répartissent en une, deux, ou quatre classes d'équivalence analytique, selon les cas.

**...et difféomorphismes tangents à l'identité.** — Un difféomorphisme analytique de $(\mathbb{C}, 0)$, tangent à l'identité, possède deux invariants formels, l'ordre de tangence et un nombre complexe, son *résidu*. Dans [**6**], publié en 1939, Birkhoff montre que deux germes, formellement conjugués, ne sont pas (analytiquement) conjugués en général. Mieux, il construit un système complet d'invariants analytiques, en associant à tout difféomorphisme analytique $f$ de $(\mathbb{C}, 0)$, tangent à l'identité, un couple $(g, h) \in \mathcal{G} \times \mathcal{H}$ de fonctions, qu'il appelle les « fonctions de connexion » du germe $f$ ; $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont des espaces parfaitement définis de fonctions holomorphes. Birkhoff montre que deux germes sont conjugués si et seulement s'ils ont les mêmes fonctions de connexion. Il pose aussi le problème de la synthèse : est-ce que tout $(g, h) \in \mathcal{G} \times \mathcal{H}$ est le couple des fonctions de connexion d'un difféomorphisme analytique de $(\mathbb{C}, 0)$, tangent à l'identité ? Cet article a été oublié [(1)].

Écalle [**12**], Malgrange [**18**] et Voronin [**27**] ont retrouvé les résultats de Birkhoff et résolu le problème de la synthèse. L'usage aujourd'hui est de parler des *invariants d'Écalle-Voronin*.

La classification analytique des germes de difféomorphismes tangents à l'identité est donc un problème résolu. Compte tenu de la relation entre paires d'arcs analytiques tangents et difféomorphismes, la classification analytique de ces paires trouve aussi sa solution.

**Une construction géométrique d'invariants analytiques.** — Notre point de vue, dans cet article, est différent. Rappelons d'abord que les invariants d'Écalle-Voronin ne se laissent pas facilement calculer !

Nous pensons démontrer qu'on gagne, pour étudier une paire d'arcs tangents, à ne pas se ramener à l'étude de son indicateur ; et même, que pour trouver des invariants

(1) Jean-Pierre Ramis a retrouvé « par hasard » cet article fondamental en 1995. Je le remercie de m'avoir donné des détails sur cette découverte.

analytiques d'un difféomorphisme, *qui soit un indicateur de paire*, on a avantage à étudier la paire. Mentionnons que les indicateurs de paires sont rares parmi les difféomorphismes tangents à l'identité : il y a des obstructions formelles (un indicateur de paire a un résidu imaginaire pur), mais surtout des obstructions analytiques [**19**] qui s'écrivent en terme des invariants d'Écalle-Voronin.

Venons-en à la description de la méthode (la méthode de la réflexion) que nous proposons. Soit $(A, B)$ une paire d'arcs tangents en $0 \in \mathbb{C}$, soit $f$ son indicateur. Il s'agit de trouver des invariants analytiques de la paire $(A, B)$ qui, éventuellement, permettent de montrer qu'elle n'est pas équivalente à une autre paire donnée.

Concernant le difféomorphisme $f$ de $(\mathbb{C}, 0)$, tangent à l'identité, nous utilisons le fait bien connu qu'il existe un voisinage épointé de 0 qui est recouvert par la réunion des bassins d'attraction de 0, respectivement pour $f$ et $f^{-1}$. Soit $\Delta$ un domaine tel que $0 \in \partial\Delta$, que $f$ soit définie et injective sur $\Delta$ et que $f(\Delta) \subset \Delta$.

Pour tout $n \geqslant 0$, on définit les arcs analytiques $A_n$ et $B_n$ en prolongeant analytiquement, autant qu'il est possible dans $\Delta \cup \{0\}$, les germes d'arcs $f^{(n)}(A)$ [(2)] et $f^{(n)}(B)$. Alors, tout événement géométrique (une intersection, un point singulier...), dont la définition fait intervenir la famille des courbes $A_n$, $B_n$, $n \geqslant 0$, donne lieu à un événement du même type dans $f(\Delta)$, à la translation près des indices. Tout événement de ce type est donc *asymptotique*; il concerne en fait les germes de $A$ et $B$ en 0. Il peut permettre la discrimination analytique des paires.

**Un exemple.** — La Figure 1 devrait illustrer le caractère « évident » de la méthode de la réflexion. Chaque sous-figure représente une ellipse $A$, une tangente $B$ à cette ellipse et le reflet $B_1$ de $B$ par $A$. Dans (a), $A$ est un cercle; la figure obtenue est bien classique. Dans (b)–(f), $A$ n'est pas un cercle. Dans (b) et (f), le point de contact est un des sommets de $A$. Les trois paires (a), (b) et (f) sont formellement équivalentes. Les deux paires (c) et (e) le sont aussi. On montre facilement que, *si l'excentricité de l'ellipse $A$ est assez petite (par exemple, voir Lemme 5.8, si elle est inférieure à* $0,55$), la figure de l'ellipse et de l'intersection de l'ellipse pleine avec $B_1$ est asymptotique.

La différence entre (a), (b) et (f) est spectaculaire; celle entre (c) et (e) aussi. *À l'œil*, on obtient le fait que les trois paires (a), (b) et (f) appartiennent à des classes analytiques distinctes.

Il y a mieux : l'angle au point double de $B_1$ dans (d)–(f), les angles aux intersections de $B_1$ avec $A$ dans (b)–(f), sont aussi des invariants des germes $(A, B)$. On peut ainsi obtenir, *à l'œil et au compas,* la discrimination entre des paires de ce type, obtenues en faisant varier l'excentricité, choisie assez petite, et le point de contact de la tangente. La Figure 2 donne un exemple de cela.

(2) Dans cet article, $f^{(n)}$ désignera toujours l'itéré de $f$ à l'ordre $n$; par exemple $f^{(2)} = f \circ f$... On notera souvent $f^{-1}$ au lieu de $f^{(-1)}$

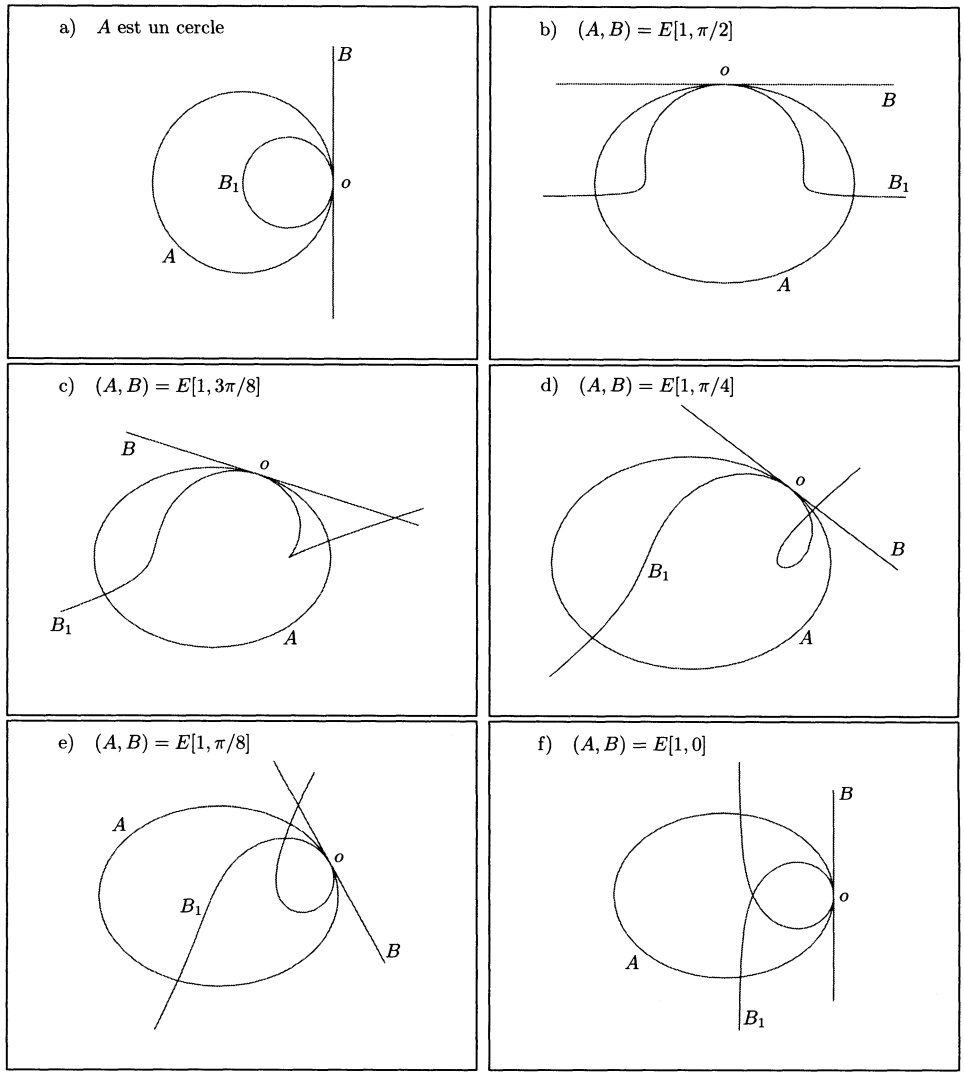


FIGURE 1. Le reflet d'une tangente par une ellipse

**Contenu et plan de l'article.** — Le cœur de l'article est constitué des Chapitres 3, 4 et 5, dans lesquels la méthode de la réflexion est appliquée. Ils peuvent être parcourus, pour la plus grande part, indépendamment du Chapitre 2. Pour simplifier, nous ne considérons dans ces chapitres que des paires d'arcs tangents à l'ordre 1, appelées *paires de type* 2, mais la méthode s'applique à des ordres de contact plus grands, avec quelques complications dues à la forme du bassin d'attraction du point

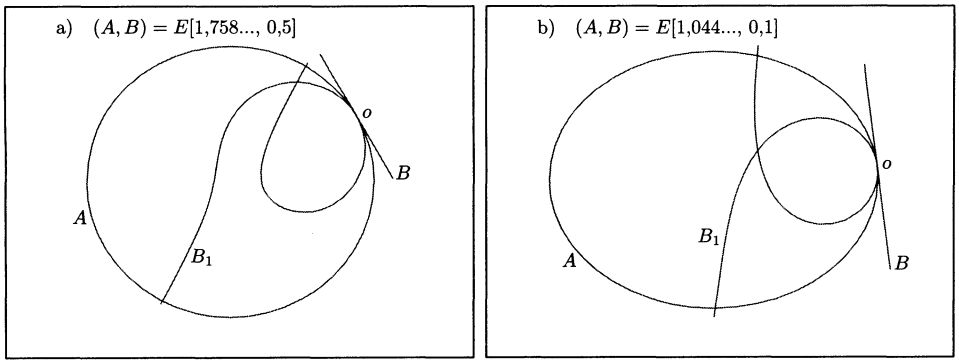


FIGURE 2. Deux paires formellement équivalentes qu'on discrimine au compas

fixe de l'indicateur quand l'ordre de contact est plus grand que 2 (la fleur de Leau a alors plus de pétales).

Dans le Chapitre 1, nous rappelons la définition de la réflexion de Schwarz et nous posons le problème des paires d'arcs. Nous introduisons l'indicateur d'une paire et la suite des paires engendrées.

Dans le Chapitre 2, nous rappelons la relation entre la classification des paires d'arcs et celle des difféomorphismes, dans le cas plus simple des paires de type 2.

Dans le Chapitre 3, nous appliquons la méthode de la réflexion à des paires d'arcs tangents qui sont des perturbations, en un sens qu'on précisera, d'une paire de cercles tangents. Dans le § 3.3, nous montrerons (avec les notations introduites plus haut) que :

*Si une paire $(A,B)$ est équivalente à une paire de cercles tangents, il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que*

– *$A_n$ et $B_n$ sont des courbes analytiques compactes lisses ;*
– *un isomorphisme (de Riemann) du domaine de bord $A_n$ sur le disque unité envoie localement $B_n$ sur un arc de cercle ou de droite.*

Nous construirons aussi (voir le Théorème 3.2 et le Corollaire 3.4) une famille nombreuse de paires d'arcs, formellement équivalentes, deux à deux non équivalentes. Cette famille est paramétrée par l'ensemble des fonctions holomorphes et injectives sur le disque unité qui s'annulent à l'ordre 3 en 0. Birkhoff [**6**] et Elizarov [**13**] exhibent des familles à un paramètre de difféomorphismes non conjugués. Notre construction est tout à fait différente et très élémentaire.

Dans le Chapitre 4, nous esquissons une description des invariants géométriques que la méthode de la réflexion permet, dans les cas favorables, d'obtenir. Je ne sais

pas dans quelle mesure les cas favorables sont « le cas général ». Par exemple, *peut-on toujours associer, par réflexions, une « figure asymptotique » à une paire d'arcs algébriques ?* Je n'en sais rien.

Dans le Chapitre 5, nous énonçons et nous commentons le théorème suivant :

*Soit $B$ et $B'$ des droites tangentes aux ellipses $A$ et $A'$ respectivement. Si les paires $(A, B)$ et $(A', B')$, considérées au voisinage des points de contact, sont équivalentes, elles sont semblables, i.e. on peut passer de l'une à l'autre par une similitude. En particulier, les deux ellipses ont la même excentricité.*

Nous ne démontrons pas ce théorème, mais nous en présentons des cas particuliers.

Avec le souci d'être complet, nous rappelons dans l'Appendice la classification formelle des paires d'arcs analytiques dans le cas général, due à Kasner [**15**] et Pfeiffer [**22**], et la relation entre leur classification analytique et celle des difféomorphismes, étudiée par Nakai [**19**].

**Les figures : légendes et notations.** — Les figures de ce texte ont été obtenues en utilisant le logiciel Maple, ainsi que le logiciel CorelDraw pour certaines insertions de texte.

La plupart de ces figures concernent des paires $(A, B)$, où $B$ est une tangente à une conique $A$. On utilise les notations suivantes :

– $E[s, t]$ désigne (à une similitude près) la paire $(A, B)$, où $A$ est l'ellipse de foyers les points $\pm 1$ qui passe par le point $\cosh(s + it)$, et où $B$ est sa tangente en ce point. L'excentricité de l'ellipse $A$ (rappelons que c'est le rapport entre la distance entre les foyers et la longueur du grand axe) vaut $1/\cosh s$. On peut montrer que le nombre $\sin 2t/\sinh 2s$ caractérise la classe formelle de la paire $E[s, t]$.

– $P[t]$ désigne la paire $(A, B)$, où $A$ est la parabole d'équation paramétrique $z(t) = (1 - t^2)/2 + it$ et $B$ sa tangente au point $z(t)$ ;

– on note $A_n$ et $B_n$ les germes $(S_A \circ S_B)^{(n)}(A)$ et $(S_A \circ S_B)^{(n)}(B)$, ainsi que leurs prolongements analytiques ;

– les notations $A_n^{\pm}$ et $B_n^{\pm}$ sont introduites dans le § 4.1.

*Remerciements.* — Quand j'ai voulu connaître le reflet d'une droite par une ellipse, j'ai été rebuté par le calcul à faire, pourtant facile ! Je veux remercier Pierre-Vincent Koseleff qui m'a aidé à en obtenir sur Maple la première représentation graphique. Je tiens aussi à remercier Frank Loray, qui m'a appris l'existence de l'article de Nakai [**19**] ; sans cette information, cet article serait réduit à très peu de chose. J'ai aussi tiré profit de la lecture de ses notes de cours [**17**].

## 1. Paires d'arcs analytiques et réflexions

**1.1. Notations.** — Pour la discussion générale, il est commode de fixer un point de base ; on choisit $0 \in \mathbb{C}$ comme point de base.

On note $\mathbf{G}$ le groupe des difféomorphismes analytiques de $(\mathbb{C}, 0)$, c'est-à-dire des séries convergentes de la forme :

$$f(z) = a_1 z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n \qquad (a_1 \neq 0). \tag{1}$$

Deux difféomorphismes $f$, $g \in \mathbf{G}$ sont conjugués s'il existe $h \in \mathbf{G}$ tel que :

$$f \circ h = h \circ g.$$

Le centralisateur $C(f)$ de $f \in \mathbf{G}$ est défini par :

$$C(f) = \{h \in \mathbf{G}, \quad f \circ h = h \circ f\}.$$

On appellera *réflexion* toute involution antiholomorphe, considérée au voisinage d'un point fixe. On note $\mathbf{S}$ l'ensemble des réflexions de $(\mathbb{C}, 0)$, c'est-à-dire des séries convergentes de la forme :

$$S(z) = s_1 \overline{z} + \sum_{n=2}^{+\infty} s_n \overline{z}^n, \tag{2}$$

telles que $S \circ S = I$, l'identité.

**1.2. La réflexion de Schwarz.** — La conjugaison complexe :

$$S_{\mathbb{R}}(z) = \overline{z}$$

est une réflexion dont $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points fixes. C'est la seule transformation antiholomorphe qui ait cette propriété, même localement. En effet, si $S$ est antiholomorphe au voisinage d'un point de $\mathbb{R}$ et laisse fixe tout point de $\mathbb{R}$, $S_{\mathbb{R}} \circ S$ est holomorphe et laisse fixe tout point de $\mathbb{R}$, donc $S_{\mathbb{R}} \circ S$ est l'identité, donc $S = S_{\mathbb{R}}$.

Soit maintenant $C$ une courbe analytique régulière. Si $0 \in C$, en complexifiant une paramétrisation analytique locale :

$$\phi(t) = a_1 t + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n t^n, \qquad (a_1 \neq 0),$$

de $C$, on obtient un élément de $\mathbf{G}$,

$$\phi(z) = a_1 z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n,$$

qui envoie localement $\mathbb{R}$ sur $C$. Alors :

$$S_C = \phi \circ S_{\mathbb{R}} \circ \phi^{-1}$$

est la seule réflexion qui induit l'identité sur $C$ au voisinage de 0. En faisant varier le point de base, on obtient l'existence de la réflexion de Schwarz :

***Définition 1.1***. — Soit $C \subset \mathbb{C}$ une courbe analytique régulière. La réflexion de Schwarz par rapport à la courbe $C$ est la seule involution antiholomorphe, ou *réflexion*, définie au voisinage de $C$, qui induit l'identité sur $C$. On la note $S_C$.

**1.3. Le cas d'une courbe définie implicitement.** — Si la courbe $C$ est définie implicitement près de $0 \in C$ par

$$\sum_{m,n=0}^{+\infty} a_{m,n} z^m \overline{z}^n = 0, \qquad (a_{m,n} = \overline{a_{n,m}}, \quad a_{0,0} = 0, \quad a_{1,0} \neq 0), \tag{3}$$

l'équation :

$$\sum_{m,n=0}^{+\infty} a_{m,n} w^m \overline{z}^n = 0 \tag{4}$$

peut être résolue par rapport à $w$, et définit une fonction antiholomorphe

$$S(z) = s_1 \overline{z} + \sum_{n=2}^{+\infty} s_n \overline{z}^n, \qquad (s_1 \neq 0),$$

au voisinage de 0. Comme (3) est une équation de la courbe $C$, on a $S(z) = z$ pour tout $z \in C$, donc $S$ est la réflexion de Schwarz par rapport à $C$.

Si $C$ est une courbe algébrique, (4) montre que la réflexion $S_C$ est une fonction algébrique de $\overline{z}$.

**1.4. Covariance de la réflexion de Schwarz.** — À tout germe $C$ d'arc analytique régulier en 0, on a associé une réflexion $S_C \in \mathbf{S}$. La correspondance est biunivoque, par exemple parce que $C$ est l'ensemble des points fixes de $S_C$. Il résulte aussi immédiatement de la définition qu'on a, pour tout $\phi \in \mathbf{G}$ et pour tout $\phi \in \mathbf{S}$ :

$$S_{\phi(C)} = \phi \circ S_C \circ \phi^{-1}. \tag{5}$$

D'autre part, si la réflexion $S \in \mathbf{S}$ est donnée par (2), de $S(S(z)) \equiv z$, on tire $|s_1| = 1$. Soit $u$ une racine carrée de $s_1$. La rotation $z \mapsto uz$ conjugue $S$ avec :

$$S_1(z) := \frac{S(zu)}{u} = \overline{z} + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n \overline{z}^n.$$

Si l'on pose $\phi(z) = z + S_{\mathbb{R}} \circ S_1(z)$, on obtient :

$$S_{\mathbb{R}} \circ \phi = \phi \circ S_1.$$

On en déduit que $S$ est holomorphiquement conjuguée à $S_{\mathbb{R}}$. Si $\psi \in \mathbf{G}$ réalise cette conjugaison, $S = \psi \circ S_{\mathbb{R}} \circ \psi^{-1}$, on voit que $S$ est la réflexion de Schwarz par rapport à l'arc $\psi(C)$. On a obtenu :

***Lemme 1.2.*** — *La correspondance $C \mapsto S_C$ induit une bijection entre l'ensemble des germes d'arcs analytiques réguliers de $(\mathbb{C}, 0)$ et l'ensemble $\mathbf{S}$ des réflexions de $(\mathbb{C}, 0)$.*

**1.5. Difféomorphisme, arc, conjugaison... formels.** — On note $\widehat{\mathbf{G}}$ le groupe des *difféomorphismes formels* de $(\mathbb{C},0)$, c'est-à-dire des séries formelles de la forme (1). De même, une involution de la forme (2), sans condition de convergence, est appelée réflexion formelle et l'ensemble des réfexions formelles de $(\mathbb{C},0)$ est noté $\widehat{\mathbf{S}}$.

Les notions de conjugaison, de centralisateur, de germe d'arc régulier... ont leurs pendants dans le cadre formel. Les définitions sont évidentes. On note $\widehat{C}(f)$ le *centralisateur formel* de $f \in \widehat{\mathbf{G}}$. Le Lemme 1.2 est vrai dans le cas formel, avec la même démonstration.

**1.6. Le problème des paires.** — On appelle *paire*, respectivement *paire formelle*, tout couple $(A,B)$ de germes en $0 \in \mathbb{C}$ d'arcs analytiques, respectivement formels, réguliers. Un difféomorphisme $h$ agit sur les paires par :

$$(A,B) \longmapsto h(A,B) = (h(A), h(B)),$$

et sur les réflexions par conjugaison :

$$S \longmapsto h \circ S \circ h^{-1}.$$

***Définition 1.3***. — Deux paires $(A,B)$ et $(C,D)$ sont *équivalentes*, respectivement *formellement équivalentes*, s'il existe $h \in \mathbf{G}$, respectivement $h \in \widehat{\mathbf{G}}$, tel que $h(A,B) = (C,D)$.

Compte tenu des propriétés de la réflexion de Schwarz, le problème de la classification (analytique, formelle) des paires est équivalent au problème de la classification des paires de réflexions pour la conjugaison (analytique, formelle).

*Dans la suite, on confondra la notion de paire d'arcs réguliers de* $(\mathbb{C},0)$ *avec celle de paire de réflexions de* $(\mathbb{C},0)$.

**1.7. L'indicateur d'une paire.** — Ce qui est dit dans ce paragraphe vaut aussi dans le cas formel.

***Définition 1.4***. — *L'indicateur* d'une paire de réflexions $(S,S') \in \mathbf{S} \times \mathbf{S}$ est le difféomorphisme $S \circ S' \in \mathbf{G}$.

Si $f = S \circ S'$ est l'indicateur de la paire $(S,S')$, on a :

$$S' = S \circ f,$$

et :

$$S \circ f = f^{-1} \circ S. \tag{6}$$

Autrement dit, la réflexion $S$ conjugue $f$ à $f^{-1}$.

***Lemme 1.5***. — *Un difféomorphisme $f \in \mathbf{G}$ est l'indicateur d'une paire si et seulement s'il existe une réflexion $S \in \mathbf{S}$ vérifiant (6). Dans ce cas, l'application :*

$$S \longmapsto (S, S \circ f)$$

*induit une bijection entre l'ensemble des réflexions $S \in \mathbf{S}$ qui vérifient (6) et l'ensemble des paires d'indicateur $f$.*

*Démonstration.* — On a déjà vu que si $f$ est l'indicateur de la paire $(S, S')$, $S$ vérifie (6). Réciproquement, si $S \in \mathbf{S}$ vérifie (6), on a :

$$(S \circ f) \circ (S \circ f) = I,$$

donc $S \circ f$ est une réflexion et $f$ est l'indicateur de la paire $(S, S \circ f)$. □

**1.8. La suite des paires engendrées.** — Ce qui est dit dans ce paragraphe vaut aussi dans le cas formel.

***Définition 1.6.*** — Soit $(A, B)$ une paire d'indicateur $f = S_A \circ S_B$. On appelle *suite des paires engendrées* par la paire $(A, B)$ la famille de paires :

$$(A_n, B_n) := (f^{(n)}(A), f^{(n)}(B)), \qquad (n \in \mathbb{Z}). \tag{7}$$

Compte tenu de la covariance de la réflexion de Schwarz, on a :

***Lemme 1.7.*** — *Soit $(u(A), u(B))$ l'image d'une paire $(A, B)$ par un élément $u$ de $\mathbf{G}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$(u(A)_n, u(B)_n) = (u(A_n), u(B_n)).$$

Rappelons encore la formule (5). Comme l'indicateur $f$ de la paire $(A, B)$ « anticommute » avec $S_A$ et avec $S_B$, on a $S_{A_n} \circ S_{B_n} = f$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On a aussi $S_{S_A(B)} = S_A \circ S_B \circ S_A$. On en déduit :

***Lemme 1.8.*** — *L'indicateur de la paire $(A, B)$ est aussi l'indicateur de la paire $(S_A(B), A)$ et des paires $(A_n, B_n)$, $n \in \mathbb{Z}$.*

**1.9. Paires d'indicateur donné.** — Ce qui est dit dans ce paragraphe vaut aussi dans le cas formel.

Soit $(S, S \circ f)$ une paire d'indicateur $f \in \mathbf{G}$. Si $h \in \mathbf{G}$, la paire équivalente $(h \circ S \circ h^{-1}, h \circ S \circ f \circ h^{-1})$ a pour indicateur $h \circ f \circ h^{-1}$. Elle a donc le même indicateur si et seulement si $h \in C(f)$.

D'autre part, si $(S', S' \circ f)$ est une autre paire d'indicateur $f$, $S \circ S'$ commute avec $f$, donc il existe $g \in C(f)$ tel que $S' = S \circ g$. De plus $g$ doit vérifier $S \circ g = g^{-1} \circ S$. La réciproque est claire.

Ces remarques algébriques seront utilisées dans le Chapitre 2 et dans l'Appendice, quand il s'agira de classer les paires d'indicateur donné.

## 2. Classification des paires de type 2

Le but de ce chapitre est de mettre en perspective les résultats présentés dans les chapitres suivants, mais sa lecture n'est pas nécessaire à leur compréhension.

Une paire $(A, B)$, éventuellement formelle, est dite *de type* $q+1$ si les arcs $A$ et $B$ sont tangents à l'ordre $q \geqslant 1$. Son indicateur, qui est tangent à l'ordre $q$ à l'identité, est aussi dit *de type* $q+1$.

Nous allons rappeler quelques résultats classiques sur les difféomorphismes de type 2, et comment ils s'appliquent aux paires de type 2. Des rappels, dans un cadre plus général, seront faits dans l'Appendice.

**2.1. La classification formelle.** — En 1912, Kasner [**15**] a démontré le théorème suivant :

***Théorème 2.1* (Kasner).** — *Toute paire formelle de type* 2 *est formellement équivalente à une et une seule des paires* $(A_l, B)$, $l \in \mathbb{R}$, *où :*

$$A_l = \{y = x^2 + lx^3\}; \qquad B = \{y = 0\}. \tag{8}$$

Un calcul formel donne facilement ce résultat. Plus bas, on le déduira, comme Nakai [**19**], de la classification formelle des difféomorphismes de type 2, qui est mieux connue, et d'intérêt plus général.

Calculons le développement à l'ordre 3 de l'indicateur $f_l = S_{A_l} \circ S_B$ de la paire (8). D'après le § 1.3, il est donné par $f_l(z) = w$, avec :

$$\frac{w-z}{2i} = \left(\frac{w+z}{2}\right)^2 + l\left(\frac{w+z}{2}\right)^3.$$

On en déduit $w = z + 2iz^2 + O(z^3)$, puis :

$$f_l(z) = z + 2iz^2 + (2i)^2(1 - i\frac{l}{2})z^3 + \cdots \tag{9}$$

**2.2. Difféomorphismes formels de type 2.** — Un élément $f \in \widehat{\mathbf{G}}$, de type 2, s'écrit :

$$f(z) = z + az^2 + a^2(1-r)z^3 + \cdots \qquad (a \neq 0). \tag{10}$$

Le nombre $r \in \mathbb{C}$ est invariant par conjugaison formelle et appelé le *résidu*[(3)] de $f$ ; on note :

$$r = \text{rés}(f). \tag{11}$$

C'est le seul invariant formel :

***Lemme 2.2.*** — *Deux éléments de type* 2 *de* $\widehat{\mathbf{G}}$ *sont formellement conjugués si et seulement s'ils ont le même résidu.*

(3) Le résidu d'Écalle est $r - 1$. J'appelle résidu le *résidu normalisé* de [**19**]. L'avantage est qu'on a une formule simple pour rés$(f^{(t)})$.

On a :

$$\text{rés}(f^{(t)}) = \frac{\text{rés}(f)}{t}; \quad \text{rés}(S \circ f \circ S) = \overline{\text{rés}(f)}, \tag{12}$$

pour tout $t \in \mathbb{Z}^*$ (et même $t \in \mathbb{C}^*$, voir ci-dessous) et pour tout $S \in \widehat{\mathbf{S}}$.

En particulier, si $S, S' \in \widehat{\mathbf{S}}$ et $f = S \circ S'$, on a $S \circ f \circ S = f^{(-1)}$ et les formules précédentes montrent que le résidu de $f$ est imaginaire pur. Compte tenu du Lemme précédent et de (9), on a :

***Lemme 2.3.*** — *Un élément de type 2 de $\widehat{\mathbf{G}}$ est un indicateur de paire formelle si et seulement si son résidu est imaginaire pur.*

Si $f(z) = z + az^2 + \cdots$, $a \neq 0$, un calcul formel simple montre que, pour tout $t \in \mathbb{C}$, il existe un et un seul difféomorphisme formel de la forme

$$z + taz^2 + \cdots$$

qui commute avec $f$. C'est *l'itéré d'ordre $t$ de $f$* ; on le note $f^{(t)}$. Il coïncide avec l'itéré au sens usuel quand $t$ est un entier.

En particulier, en choisissant $t = 0$, on obtient que l'identité est le seul élément de $\widehat{\mathbf{G}}$, tangent à un ordre $\geqslant 2$ à l'identité, qui commute avec $f$. Comme le commutateur de deux itérés de $f$ a cette propriété, on obtient que l'application $t \mapsto f^{(t)}$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$ sur le groupe des itérés de $f$. Enfin, un calcul à l'ordre 3 montre que tout $g \in \widehat{C}(f)$ est tangent à l'identité, donc est un itéré de $f$ :

***Lemme 2.4.*** — *Si $f \in \widehat{\mathbf{G}}$ est de type 2, son centralisateur formel $\widehat{C}(f)$ est le groupe commutatif de ses itérés complexes $f^{(t)}$, $t \in \mathbb{C}$.*

On a aussi les formules suivantes :

$$h \circ f^{(t)} \circ h^{-1} = (h \circ f \circ h^{-1})^{(t)}; \quad S \circ f^{(t)} \circ S = (S \circ f \circ S)^{(\bar{t})}, \tag{13}$$

pour tout $h \in \widehat{\mathbf{G}}$, pour tout $t \in \mathbb{C}$ et pour tout $S \in \widehat{\mathbf{S}}$.

*Démonstration du Théorème de Kasner.* — Il suffit de montrer que deux paires formelles de même indicateur $f$, soit $(S, S \circ f)$ et $(S', S' \circ f)$, sont formellement équivalentes. Compte tenu des remarques du § 1.9, on peut écrire $S' = S \circ f^{(t)}$, et (13) donne $S \circ f^{(t)} \circ S \circ f^{(t)} = f^{(t-\bar{t})}$, donc $t$ est réel et $S' = f^{(-t/2)} \circ S \circ f^{(t/2)}$. □

La démonstration montre aussi qu'on a :

***Lemme 2.5.*** — *Soit $f \in \widehat{\mathbf{G}}$ l'indicateur d'une paire formelle de type 2. Si $t$ est imaginaire pur, $f^{(t)}$ conserve cette paire. Le groupe des itérés d'ordre réel de $f$ opère transitivement et simplement sur l'ensemble des paires formelles d'indicateur $f$.*

***Remarque 2.6***. — En particulier, si $f$ est l'indicateur de la paire formelle $(A, B)$, on a :

$$A = f^{(1/2)}(B).$$

Si la paire est analytique, cette égalité est bien sûr correcte, bien que $f^{(1/2)}$ soit en général divergent.

**2.3. Trois théorèmes classiques.** — On les énonce dans le cas général des difféomorphismes tangents à l'identité, pour éviter des redites dans l'Appendice. On trouvera dans cet appendice la définition du résidu et de l'itération d'ordre complexe, dans ce cas général.

***Théorème 2.7* (Écalle, Liverpool)**. — *Si $f \in \mathbf{G}$ est tangent à un ordre fini à l'identité, le sous-groupe des $t \in \mathbb{C}$ tels que $f^{(t)} \in \widehat{\mathbf{G}}$ converge est soit égal à $\mathbb{C}$, soit de la forme $\mathbb{Z}\frac{1}{m}$ pour un $m \in \mathbb{N}^*$.*

Dans le premier cas, on dit que $f$ est *pleinement itérable*, dans le second que $m$ est *l'ordre maximal d'une racine itérative de $f$*. Le résultat suivant (je ne sais pas à qui l'attribuer) est aussi classique :

***Théorème 2.8***. — *Si deux éléments de $\mathbf{G}$, tangents à un ordre fini à l'identité, sont pleinement itérables et formellement conjugués, ils sont conjugués.*

Pour tout $q \geqslant 1$ et tout $r \in \mathbb{C}$, il existe un élément pleinement itérable $f_{q,r} \in \mathbf{G}$, de type $q+1$ et de résidu $r$. Il est unique à conjugaison près d'après le théorème précédent. Des modèles sont déjà dans Birkhoff [**6**]. On peut prendre $f_{q,r} = \exp X_{q,r}$ où $X_{q,r}$ est le champ de vecteurs défini par :

$$X_{q,r} = iz^{q+1}(1 + irz^q)^{-1}\frac{d}{dz}. \tag{14}$$

On calcule facilement $f_{q,0}(z) = z(1 - iqz^q)^{-1/q}$. Si $r \neq 0$, (14) permet de trouver une équation vérifiée par $f_{q,r}$, mais il n'y a pas de modèle algébrique : le résultat suivant est dû à Baker [**4**] si $q = 1$, à Écalle [**10**] dans le cas général :

***Théorème 2.9* (Baker, Écalle)**. — *Soit $f \in \mathbf{G}$, tangent à un ordre fini à l'identité et de résidu non nul. Si $f$ est le germe d'une fonction algébrique, $f$ n'est pas pleinement itérable.*

**2.4. Applications aux paires de type 2.** — On a :

***Théorème 2.10* (Nakai)**. — *Soit $(A, B)$ et $(C, D)$ deux paires de type 2 et de même indicateur $f$. Si $f$ est pleinement itérable, elles sont équivalentes. Sinon $(C, D)$ est équivalente à une et une seule des deux paires $(A, B)$ et $f^{(1/2m)}(A, B)$, où $m$ est l'ordre maximal d'une racine itérative de $f$.*

Notez que, dans le second cas, $f^{(1/2m)}$ n'est pas analytique. Il n'empêche que $f^{(1/2m)}(A, B)$ l'est.

*Démonstration.* — On reprend la démonstration du Théorème de Kasner. On a $S_C = S_A \circ f^{(t)}$, avec $t$ réel et $f^{(t)}$ analytique. Si $f$ est pleinement itérable, on conclut comme dans cette démonstration.

Sinon, on écrit $t = (2p + \varepsilon)/m$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon \in \{0, 1\}$. L'itéré analytique $f^{(p/m)}$ conjugue $(S_C, S_C \circ f)$ à $(S_A \circ f^{(\varepsilon/m)}, S_A \circ f^{(\varepsilon/m)} \circ f)$. Les paires obtenues pour $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = 1$ ne sont pas conjuguées ; elles sont formellement conjuguées par $f^{(1/2m)}$. □

Compte tenu du Lemme 2.5, les Théorèmes de Baker-Écalle et d'Écalle-Liverpool ont aussi la conséquence géométrique suivante :

***Théorème 2.11.*** — *Soit $(A, B)$ une paire de type 2. Si son indicateur n'est pas pleinement itérable, le seul automorphisme de cette paire est l'identité. C'est en particulier le cas si la paire est algébrique de résidu non nul.*

Pour finir, le Théorème de Nakai, compte tenu du Lemme 1.8, a la conséquence suivante :

***Théorème 2.12.*** — *Soit $(A, B)$ une paire de type 2, d'indicateur $f$. Les paires $(A, B)$ et $(S_A(B), A)$ sont équivalentes si et seulement si $f$ est un carré itératif, i.e. $f^{(1/2)}$ converge. Si $f$ n'est pas un carré itératif, toute paire dont l'indicateur est conjugué à $f$ est équivalente à une et une seule de ces deux paires.*

Dans les chapitres suivants, on verra que la méthode de la réflexion permet parfois de discriminer les paires $(A, B)$ et $(S_A(B), A)$, donc de construire des difféomorphismes qui ne sont pas des carrés itératifs. Baker et Bhattacharyya [**5**], et aussi Ahern et Rosay [**1**], ont donné des exemples de difféomorphismes polynômiaux qui ne sont pas des carrés itératifs, ou qui plus généralement ne sont pas des puissances itératives. Notre construction est très différente.

**2.5. Résidu « tangentiel » et aberration.** — Dans le cas particulier où $B$ est la tangente à l'arc $A$ en $P \in A$ (on suppose $A$ strictement convexe, ainsi la paire est de type 2), le résidu de la paire $(A, B)$ est lié à *l'aberration* de la courbe $A$ au point $P$, notion dont j'ai appris l'existence dans un article de Schot [**24**].

Soit $A$ un arc régulier et strictement convexe de classe $C^3$. En un point $P$ de $A$, on définit :

(1) *l'axe d'aberration de $A$* : c'est la position limite de la droite qui passe par $P$ et le milieu d'une corde $P'P''$ parallèle à la tangente en $P$ quand $P'$ tend vers $P$ ;

(2) *l'angle d'aberration de $A$* : c'est l'angle orienté entre la normale et l'axe d'aberration ;

(3) *l'aberration de $A$* : c'est la tangente de cet angle.

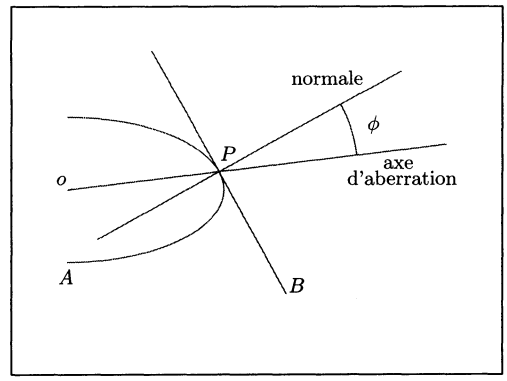


FIGURE 3. Le résidu de la paire (ellipse $A$, tangente $B$) est $i\tan\phi$

Schot donne la formule suivante pour l'aberration $\tan\delta$ d'une courbe définie par $y = y(x)$ :

$$\tan\delta = y' - \frac{1+(y')^2}{3(y'')^2}\, y'''. \tag{15}$$

L'aberration de la courbe $y = x^2 + lx^3$ à l'origine vaut ainsi $\tan\delta = -l/2$.

Comme l'aberration est invariante par similitude, compte tenu de la formule (9) et de la définition (11) du résidu, on obtient :

$$\tan\delta = i\,\text{rés}((A,B)),$$

si $B$ est la tangente en $P$ à $A$ et $\tan\delta$ l'aberration de $A$ au point $P$.

Les courbes d'aberration constante sont les cercles et les spirales logarithmiques [**24**].

Si de plus $A$ est une conique, un théorème classique dit que le milieu d'une corde de direction donnée décrit un diamètre de $A$ (une demi-droite parallèle à son axe si $A$ est une parabole). On en déduit que l'axe d'aberration d'une conique à centre $A$ en $P \in A$ est la droite qui joint $P$ au centre de $A$ ; si $A$ est une parabole, c'est la parallèle issue de $P$ à l'axe de $A$.

On a donc le Lemme suivant (une démonstration directe serait plus rapide !) :

***Lemme 2.13.*** — *Soit $B$ la tangente à une conique $A$ en $P \in A$. Le résidu de $(A,B)$ est $i\tan\phi$, où $\phi$ est l'angle entre la droite qui passe par $P$ et le centre de $A$ (et est parallèle à l'axe de $A$ si $A$ est une parabole), et la normale en $P$ à $A$.*

## 3. Perturbations d'une paire de cercles tangents

**3.1. Figures d'une paire de cercles tangents.** — Commençons par la paire la plus simple : deux cercles (distincts) tangents, ou un cercle et une droite tangents.

Toutes ces paires sont équivalentes par homographie. Le cercle $A$ de centre $a$ et qui passe par 0 est donné par $(z-a)(\overline{z}-\overline{a}) = a\overline{a}$, donc :

$$S_A(z) = \frac{a\,\overline{z}}{\overline{z}-\overline{a}}.$$

On prend l'exemple de la paire $(A, B)$, où $A$ est le cercle de diamètre $[0, 2i]$, et $B = \mathbb{R}$. Son indicateur est l'homographie :

$$f(z) = S_A \circ S_{\mathbb{R}}(z) = \frac{z}{1-iz},$$

un difféomorphisme pleinement itérable, de type 2 et de résidu nul, d'itérés complexes :

$$f^{(t)}(z) = \frac{z}{1-itz}\,, \qquad (t \in \mathbb{C}).$$

On sait (ou on vérifie) que $f^{(t)}$ conserve les cercles (et la droite) du faisceau défini par $A$ et $B$ si $t \in i\mathbb{R}$, tandis que $\{f^{(t)},\ t \in \mathbb{R}\}$ agit transitivement sur ce faisceau. En particulier, si $a > 0$, l'image par $f$ du cercle de diamètre $[0, i/a]$ est le cercle de diamètre $[0, i/(a+1)]$.

On en déduit que, pout tout $n \geqslant 1$, $A_n$ et $B_n$ sont les (germes en $0 \in \mathbb{C}$ des) cercles de diamètres $[0, i/(n+1/2)]$ et $[0, i/n]$. Ces cercles « décroissent » vers 0, avec les relations d'emboîtements :

$$\overline{G_{n+1}} \subset H_{n+1} \cup \{0\}, \qquad \overline{H_{n+1}} \subset G_n \cup \{0\}, \tag{16}$$

entre les disques $G_n$ et $H_n$ de bords $A_n$ et $B_n$.

Compte tenu de la convergence des itérés complexes de $f$, le lemme suivant est une conséquence des résultats du Chapitre 2. On peut aussi le démontrer facilement par un calcul formel.

***Lemme 3.1.*** — *Les automorphismes d'une paire (de germes) de cercles tangents distincts sont les itérés de son indicateur, d'ordres imaginaires purs.*

En voici une autre démonstration, très différente. Il suffit de montrer qu'un automorphisme d'une telle paire est une homographie :

**3.2. Une démonstration géométrique du Lemme 3.1.** — Soit $\Delta$ un voisinage ouvert de 0, et $g$ un isomorphisme $\Delta \to g(\Delta)$ qui conserve 0 et les germes des cercles $A$ et $B$ en 0.

D'après le Lemme 1.7, $g$ conserve les germes de $A_n$ et $B_n$ pour tout $n \geqslant 0$. On choisit $n \in \mathbb{N}$ assez grand pour que le cercle $A_n$ soit contenu dans $\Delta$. Comme $g$ envoie un arc de $A_n$ dans $A_n$, par analyticité (réelle), $g$ envoie le cercle $A_n$ dans, donc sur lui-même. On en déduit que $g$ induit un biholomorphisme du disque de bord $A_n$. C'est donc une homographie.

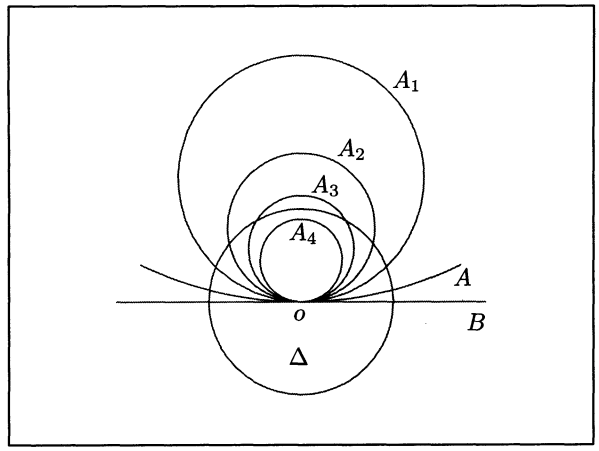


FIGURE 4. $A_n \subset \Delta$ si $n$ est assez grand

### 3.3. Comment savoir si une paire est équivalente à une paire de cercles ?

L'argument précédent enfonçait une porte largement ouverte. Il apporte pourtant *une* réponse, que je crois nouvelle, à la question du titre.

Soit $(C, D)$ une paire équivalente à une paire $(A, B)$ de cercles tangents en $0 \in \mathbb{C}$. Soit $\Delta$ un voisinage ouvert de 0 et :

$$g : \Delta \longrightarrow g(\Delta), \qquad g(0) = 0,$$

un isomorphisme tel que $g(A, B) = (C, D)$. On note $(C_n, D_n)_{n \geqslant 0}$ la suite engendrée par la paire $(C, D)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$g(A_n) = C_n, \qquad g(B_n) = D_n$$

au voisinage de 0. Si $n$ est choisi assez grand, les cercles $A_n$ et $B_n$ sont contenus dans $\Delta$, et donc, en confondant les courbes avec leurs germes, $C_n = g(A_n)$ et $D_n = g(B_n)$ sont des courbes analytiques compactes. Elles bordent respectivement des domaines $K_n$ et $L_n$ qui vérifient des relations analogues à (16), et $g$ induit des isomorphismes de $G_n$ sur $K_n$ et de $H_n$ sur $L_n$. Compte tenu du théorème de Riemann, on a donc :

*Si une paire $(C, D)$ est équivalente à une paire de cercles tangents, il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $C_n$ et $D_n$ sont (les germes de) deux courbes analytiques compactes, et qu'un isomorphisme du domaine de bord $C_n$ sur le disque unité envoie $D_n$ sur un arc de cercle (ou de droite).*

On sent bien que cet énoncé contient le fait que l'équivalence de deux paires formellement équivalentes est exceptionnelle. Bien sûr, c'est une conséquence de la théorie des difféomorphismes tangents à l'identité. Je crois toutefois que la construction suivante, qui précise l'énoncé précédent, en est la démonstration la plus simple.

**3.4. Une famille nombreuse de paires non équivalentes.** — On note $\Delta = D(0,1)$[4] le disque unité et $I = ]-1,+1[$. Rappelons la définition de la classe $\mathcal{S}$ :

$$\mathcal{S} = \{u \in \mathcal{O}(\Delta),\ \text{injective},\ u(0) = 0,\ u'(0) = 1\}.$$

On a :

***Théorème 3.2.*** — *Soit $0 < r < 1/40$ et $A$ le cercle de diamètre $[0, 2ir]$. Quels que soient $u$, $v \in \mathcal{S}$, les paires $(A, u(I))$ et $(A, v(I))$ sont équivalentes en 0 si et seulement si elles sont équivalentes par homographie.*

La démonstration n'utilise que la propriété suivante du cercle $A$ :

(17) $\quad A \setminus \{0\}$ *est contenu dans une composante connexe de* $u(\Delta) \setminus u(I)$.

On montrera plus bas que cette propriété est vérifiée si $r < 1/40$.

*Démonstration.* — Soit $u \in \mathcal{S}$, et notons :

$$(A, B) = (A, u(I))$$

la paire associée. On note aussi $G_0$ le disque de bord $A$. On a :

$$S_B = u \circ S_{\mathbb{R}} \circ u^{-1}.$$

Comme $S_{\mathbb{R}}$ est une involution de $\Delta$, de lieu fixe $I$, $S_B$ est une involution de $u(\Delta)$, qui laisse fixe $B$ et échange les deux composantes connexes de $u(\Delta) \setminus B$.

La réflexion $S_B$ est définie sur $\Delta$, et envoie $\overline{G_0} \setminus \{0\}$ dans son complémentaire, compte tenu de (17). Il en résulte que l'indicateur $f = S_A \circ S_B$ est holomorphe et injectif au voisinage du disque fermé $\overline{G_0}$ et vérifie :

$$f(\overline{G_0}) \subset G_0 \cup \{0\}.$$

De plus, $A_1$ est une courbe analytique compacte, qui borde $G_1 = f(G_0)$.

En itérant, on obtient que, pour tout $n \geqslant 0$, $A_n$ est une courbe analytique compacte, qui borde un domaine $G_n$, avec :

(18) $$\overline{G_{n+1}} \subset G_n \cup \{0\},$$

et que $f$ induit un isomorphisme :

$$f : G_n \setminus \overline{G_{n+1}} \longrightarrow G_{n+1} \setminus \overline{G_{n+2}}.$$

Si $v \in \mathcal{S}$, la même construction peut être appliquée à la la paire $(C, D) = (A, v(I))$, et à son indicateur $g$. On trouve que $C_n$ est une courbe analytique compacte, qui borde un domaine $K_n$, avec des relations d'emboîtement similaires à (18), et que $g$ induit des isomorphismes :

$$g : K_n \setminus \overline{K_{n+1}} \longrightarrow K_{n+1} \setminus \overline{K_{n+2}}.$$

[4] Dans cet article, on note $D(a, r)$ le disque de centre $a$ et de rayon $r > 0$.

Si les paires $(A, B)$ et $(C, D)$ sont équivalentes et si $h \in \mathbf{G}$ réalise cette équivalence, par le même argument que dans le paragraphe précédent, on obtient que si $n \in \mathbb{N}$ est choisi assez grand, $h$ induit un isomorphisme :

$$h : G_n \longrightarrow K_n.$$

Au voisinage de 0, on a la relation de conjugaison :

$$g \circ h = h \circ f.$$

Elle est vérifiée sur $G_n$ par analyticité. Si $n \geqslant 1$, on prolonge $h$ en un isomorphisme :

$$h : G_{n-1} \longrightarrow K_{n-1},$$

en posant, pour tout $z \in G_{n-1} \setminus G_n$, $h(z) = g^{-1} \circ h \circ f(z)$. De proche en proche, on prolonge ainsi $h$ en un automorphisme du disque $G_0 = K_0$ ; $h$ est une homographie. □

***Lemme 3.3***. — *Si $0 < r < 0,03$, la propriété (17) est vérifiée.*

*Démonstration.* — Soit $u \in \mathcal{S}$. Si $0 < R < 1$, le domaine $u(D(0,R))$ contient le disque $D(0, R/4)$ d'après le Théorème de Koebe (voir par exemple [**8**]). On suppose maintenant :

$$r < R/8.$$

Notons $D = D(ir, r)$ le disque de bord $A$. On a donc $\overline{D} \subset u(\Delta)$ et :

$$|z| > R \implies u(z) \notin \overline{D}.$$

Il reste à vérifier que $u(I)$ ne coupe pas $A \setminus \{0\}$ ; D'après ce qui précède, il suffit que :

$$t \in [-R, +R] \setminus \{0\} \implies |\operatorname{Im} u(t)| < \frac{1}{2r}|u(t)|^2.$$

On utilise les inégalités de distorsion suivantes (voir [**8**], page 3) :

$$|u(z)| \geqslant \frac{|z|}{(1+|z|)^2}, \qquad |u''(z)| \leqslant \frac{2(2+|z|)}{(1-|z|)^4}, \qquad (z \in \Delta). \tag{19}$$

Comme $\operatorname{Im} u(0) = \operatorname{Im} u'(0) = 0$, la formule de Taylor donne :

$$|\operatorname{Im} u(t)| \leqslant \frac{t^2}{2} \max_{|s| \leqslant |t|} |u''(s)|.$$

Compte tenu de (19), la condition (17) est donc vérifiée si $r < R/8$ et :

$$r \leqslant \frac{(1-R)^4}{2(2+R)(1+R)^4},$$

pour un $R < 1$. Tout $r < R/8$ convient si :

$$R \leqslant \frac{4}{(2+R)} \frac{(1-R)^4}{(1+R)^4}.$$

On vérifie à la main que $R = 1/5$, à la machine que $R = 0,24$, vérifie cette inégalité. □

Notons :

$$\mathcal{S}^* = \{\, u \in \mathcal{S},\ \ u''(0) = 0 \,\}.$$

***Corollaire 3.4.*** — *Soit $0 < r < 1/40$, et $A = \partial D(ir, r)$. Les paires $(A, u(I))$, $u \in \mathcal{S}^*$, sont deux à deux non équivalentes en 0.*

*Démonstration.* — D'après le théorème, une équivalence $h$ entre deux paires de cette forme est un automorphisme de $D(ir, r)$. Comme il conserve $A$ et 0, il est tangent à l'identité en 0. Comme il envoie $u(I)$ sur $v(I)$, avec $u,\ v \in \mathcal{S}^*$, il est tangent à l'ordre 2 à l'identité. C'est donc l'identité. □

***Corollaire 3.5.*** — *Soit $A$ le cercle de centre $i$ et de rayon 1, $B$ un arc analytique régulier tangent à l'ordre 2 à $\mathbb{R}$ en 0. Les paires $(rA, B)$ sont deux à deux non équivalentes en 0 si $r > 0$ est assez petit.*

*Démonstration.* — Soit $u \in \mathbf{G}$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$, $u''(0) = 0$, un difféomorphisme qui envoie $\mathbb{R}$ sur $B$ au voisinage de 0. L'homothétique $B/r$ est paramétrée par $t \mapsto u(t)/r$, mais aussi par $t \mapsto u_r(t) = u(rt)/r$, avec encore $u_r(0) = 0$, $u_r'(0) = 1$, $u_r''(0) = 0$. Si $r$ est assez petit, $u_r$ appartient à la classe $\mathcal{S}^*$. □

Compte tenu du Théorème 2.10, dans l'un des deux corollaires précédents, si l'on prend trois paires distinctes de la forme prescrite, deux au moins de leurs trois indicateurs ne sont pas conjugués.

**3.5. Les familles de Shcherbakov, Elizarov, Birkhoff.** — L'article de Birkhoff [**6**] n'était pas connu des spécialistes des difféomorphismes analytiques de $(\mathbb{C}, 0)$ dans les années 1960. À cette époque, les premiers exemples de difféomorphismes tangents à l'identité, formellement mais non analytiquement conjugués, sont obtenus en relation avec l'étude de la convergence de leurs itérés complexes. Nous avons cité des résultats importants de Baker [**2**] [**4**], Écalle [**11**], Liverpool [**16**], dans le Chapitre 2. Ces articles contiennent d'autres résultats ; citons aussi Szekeres [**26**], Baker [**3**].

La méthode de Birkhoff est réinventée dans les années 1970 (Kimura, Écalle), complétée vers 1980 (Écalle, Voronin, Malgrange). Les invariants qu'elle décrit sont réputés difficiles à calculer. Il y a une exception notable, celle des perturbations du modèle pleinement itérable $f(z) = z(1 - z)^{-1}$. Shcherbakov [**25**] a démontré le théorème suivant.

Il est commode de se placer au voisinage de l'infini (on pose $z = 1/w$). On considère une fonction holomorphe au voisinage de l'infini, de la forme :

$$F_\varepsilon(w) = w + 1 + \varepsilon G(w); \qquad G(w) = O(w^{-2}). \tag{20}$$

On note :

$$\gamma(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} G(w + n). \tag{21}$$

C'est une fonction holomorphe pour $|\operatorname{Im} w|$ assez grand. On a :

***Théorème 3.6* (Shcherbakov).** — *Si $\gamma \not\equiv 0$, et si $\varepsilon > 0$ est assez petit, le difféomorphisme $F_\varepsilon$ n'est pas conjugué à la translation $T(w) = w + 1$ au voisinage de l'infini.*

Elizarov [**13**] (voir aussi Il'yashenko [**14**]), en reprenant la démonstration de Shcherbakov, a obtenu le résultat plus fort suivant :

***Théorème 3.7* (Elizarov).** — *Si $\gamma \not\equiv 0$, et si $\varepsilon > \varepsilon' \geqslant 0$ sont assez petits, les difféomorphismes $F_\varepsilon$ et $F_{\varepsilon'}$ ne sont pas conjugués au voisinage de l'infini.*

Les deux auteurs donnent l'exemple de $G(w) = 1/w^2$, pour lequel :

$$\gamma(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(w+n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi w}.$$

Le même exemple se trouve en fait dans [**6**].

Il est probable que le Corollaire 3.5 soit aussi un cas particulier du théorème précédent. D'autre part, la méthode de la démonstration de ce théorème permet bien sûr (ce n'est pas forcément facile) de donner une estimation des $\varepsilon$ permis, en fonction de la non petitesse de la fonction $\gamma$. Il n'est donc pas impossible que la famille de paires considérée dans le Théorème 3.2 rentre dans le cadre des théorèmes précédents, convenablement quantifiés. La question est de savoir si une paire est « voisine » du modèle qu'est une paire de cercles tangents.

Quoi qu'il en soit, je pense que certains des exemples qu'on va donner dans les chapitres suivants sont très loin du modèle.

## 4. Invariants géométriques d'une paire

**4.1. Introduction.** — Les paires $(A, B)$ considérées au Chapitre 3 avaient en commun que, pour $n$ assez grand, $A_n$ était une courbe compacte régulière, « décroissant » vers le point de contact. Comme on a vu, cette propriété est invariante par équivalence. C'est *une propriété asymptotique*, ou une *figure asymptotique* de la paire.

On va tenter, en en donnant d'autres exemples, de préciser ces deux notions.

Dans tout ce chapitre, $(A, B)$ désigne une paire d'arcs tangents à l'ordre 1 (ou de type 2) en $0 \in \mathbb{C}$ (bien sûr, dans les exemples, le point de contact pourra être un autre point de $\mathbb{C}$) d'indicateur $f = S_A \circ S_B \in \mathbf{G}$. On note $(A_n, B_n)$, $n \geqslant 0$, les paires engendrées.

Le fait que l'ordre de contact entre $A$ et $B$ est impair permet d'orienter canoniquement $A$ et $B$. L'arc $A$ est situé d'un côté de $B$ au voisinage de 0. On oriente $A$ et $B$, et plus généralement $A_n$ et $B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, par un vecteur tangent $u$ en 0, tel que le vecteur normal $iu$ pointe du côté de $\mathbb{C} \setminus B$ qui contient $A \setminus \{0\}$. Cette orientation est invariante par équivalence.

Par la suite, il sera utile de distinguer les deux brins des arcs $A_n$ et $B_n$ en 0. On pose :

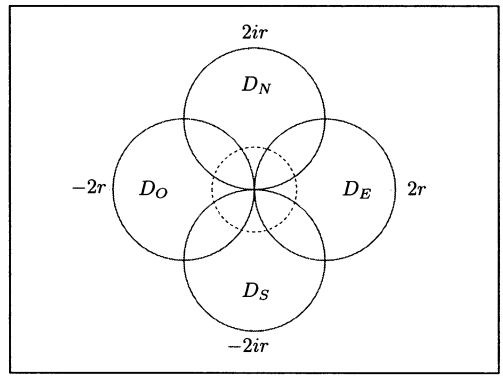


FIGURE 5. Lunule de Leau

***Notation 4.1***. — Le vecteur directeur $u$ de $A$ en 0 étant choisi comme on vient de dire, pour tout $n \geqslant 0$, on note $A_n^+$ et $B_n^+$ (respectivement $A_n^-$ et $B_n^-$) les demi-arcs (ou brins) de $A_n$ et $B_n$, de vecteur directeur $u$ en 0 (respectivement de vecteur directeur $-u$ en 0).

**4.2. Domaine de Leau d'une paire de type 2.** — On choisit la définition suivante :

***Définition 4.2***. — Soit $f \in \mathbf{G}$, de type 2. On appelle *domaine de Leau de $f$* tout ouvert connexe $\Delta \subset \mathbb{C}$ tel que $0 \in \partial\Delta$ et :

(1) il existe un voisinage ouvert $U$ de 0 tel que $\Delta \cap U$ soit un ouvert connexe de classe $C^2$ dans $U$ ;

(2) $f$ est holomorphe sur $\Delta$, injective, et $f(\Delta) \subset \Delta$.

D'autres définitions sont possibles. En particulier, au voisinage de 0, un « pétale de Leau » est plus grand que ce nous appelons un domaine de Leau, voir par exemple [**8**]. L'important pour nous (c'est assuré par le première condition) est que $\Delta$ contienne un disque ouvert dont le bord passe par 0. Il en résulte en effet que les germes de $A_n$ et $B_n$ sont contenus dans $\Delta \cup \{0\}$ pour $n$ assez grand, si $f$ est l'indicateur de $(A, B)$.

L'existence d'un domaine de Leau, aussi petit qu'on veut, est bien connue. On va démontrer :

***Proposition 4.3***. — *Soit $f(z) = z - az^2 + \cdots$ un élément de type 2 de $\mathbf{G}$. Pour tout $r > 0$ assez petit et pour tout $0 < r' < r$, la lunule $D(0, r') \cap D(r\overline{a}, r|a|)$ est un domaine de Leau de $f$. Si $\Delta$ et $\Delta'$ sont deux domaines de Leau de $f$ et si $K \subset \Delta \cup \{0\}$ est compact, $f^{(n)}(K)$ est contenu dans $\Delta' \cup \{0\}$ pour tout $n$ assez grand.*

C'est la conséquence des trois lemmes suivants. Une similitude permet de supposer :

$$f(z) = z - z^2 + \cdots ,$$

donc :

$$\log \frac{f(z)}{z} = -z + O(z^2).$$

On fixe $r > 0$, tel que $f(z)/z$ soit holomorphe sur $D(0, 2r)$ et que :

$$\left|\frac{f(z)}{z} - 1\right| < \frac{1}{2}, \qquad \left|\log \frac{f(z)}{z} + z\right| \leqslant \frac{1}{2r}|z|^2.$$

On a donc, si $z = x + iy \in D(0, 2r)$ :

$$\left|\arg \frac{f(z)}{z}\right| < \frac{\pi}{6}, \tag{22}$$

et

$$\left|\log \frac{|f(z)|}{|z|} + x\right| \leqslant \frac{1}{2r}|z|^2, \qquad \left|\arg \frac{f(z)}{z} + y\right| \leqslant \frac{1}{2r}|z|^2. \tag{23}$$

On introduit les disques suivants, voir Figure 5 :

$$D_E = D(r, r), \quad D_N = D(ir, r), \quad D_O = D(-r, r), \quad D_S = D(-ir, r).$$

La première inégalité de (23) montre que $|f(z)| < |z|$ si $x > |z|^2/2r$, autrement dit si $z \in D_E$. De même, on obtient $|f(z)| > |z|$ si $z \in D_O$, et $|\arg(f(z))| < |\arg(z)|$ si $z \in D_N \cup D_S$. On en déduit d'abord l'existence des domaines de Leau :

***Lemme 4.4***. — *Avec les notations précédentes, pour tout $0 < r' < r$, la lunule $D(0, r') \cap D(r, r)$ est un domaine de Leau de $f$.*

*Démonstration.* — On doit montrer que, si $z$ appartient à $D(0, r') \cap D_E$, $f(z)$ aussi. Comme $z \in D_E$, on a $|f(z)| < |z|$ donc $f(z) \in D(0, r')$. Si de plus $z \in D_N \cup D_S$, on a $|\arg(f(z)| < |\arg(z)|$, donc $f(z) \in D_E$. Si au contraire $z \notin D_N \cup D_S$, alors $|\arg(z)| < \pi/6$, donc $|\arg(f(z))| < \pi/3$, et encore $f(z) \in D_E$. □

***Lemme 4.5***. — *Avec les notations précédentes, pour tout $0 < r' < r$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(D(0, \rho) \setminus \overline{D}_O) \subset D(0, r') \cap D_E$ pour tout $\rho > 0$ assez petit.*

*Démonstration.* — La première inégalité de (23) donne $|\log(|f(z)|/|z|)| < 2|z|$, si $|z|$ est assez petit, donc :

$$f(D(0, \rho)) \subset D(0, \rho(1 - 3\rho)^{-1}) \tag{24}$$

pour tout $\rho > 0$ assez petit.

On fixe $A_0 > 0$ tel que, si $|z| < r$ :

$$z \notin \overline{D}_O \implies x > -A_0 y^2; \quad x > A_0 y^2 \implies z \in D_E.$$

Soit $-A_0 < A < +A_0$, et $z = x + iy$ tel que :

$$|z| < \rho, \qquad Ay^2 < x < A_0 y^2.$$

Si $f(z) = Z = X + iY$, on a :

$$\begin{aligned} X - (A+1/2)Y^2 &= (x - x^2 + y^2) - (A+1/2)(y - 2xy)^2 + O(|z|^3), \\ &= x - (A-1/2)y^2 + O(y^3) \end{aligned}$$

où $|O(y^3)| \leqslant C|y|^3 \leqslant C\rho y^2$ et $C$ ne dépend que de $f$ et $A_0$. On donc :

$$X > (A+1/2)Y^2,$$

si $\rho$ est assez petit. Si $f(z) \in D_E$, comme $D(0,r') \cap D_E$ est stable par le lemme précédent, $f^{(n)}(z) \in D(0,r') \cap D_E$ pour tout $n \geqslant 1$. Sinon, on a :

$$|Z| < \rho(1-3\rho)^{-1}, \qquad (A+1/2)Y^2 < X < A_0 Y^2.$$

On itère $n > 4A_0$ fois, avec $\rho < r'/(12n)$. □

***Lemme 4.6.*** — *Avec les notations précédentes, si $\Delta$ et $\Delta'$ sont deux domaines de Leau de $f$, et si $K \subset \Delta \cup \{0\}$ est compact, $f^{(n)}(K)$ est contenu dans $\Delta' \cup \{0\}$ pour tout $n$ assez grand.*

*Démonstration.* — Compte tenu de la définition des domaines de Leau, on peut supposer $\Delta' = D(0,r) \cap D(r,r)$. La suite $(f^{(n)})_{n\geqslant 0}$ est une famille normale sur $\Delta$, donc $f^{(n)}$ converge vers 0, uniformément sur tout compact de $\Delta$. Si $\varepsilon > 0$ et compte tenu des lemmes précédents, on en déduit que si $K \subset \Delta \cup \{0\}$ est compact, $f^{(n)}(K)$ est contenu dans $D(0,\varepsilon) \cap (\Delta \cup \{0\})$ pour $n$ assez grand. Si on choisit $\varepsilon > 0$ assez petit, le Lemme 4.5 montre que $f^{(m+n)}(K) \subset \Delta' \cup \{0\}$ pour $m$ assez grand. □

**4.3. Préliminaire : prolongement analytique d'arcs.** — Un arc paramétré (respectivement un arc paramétré analytique) est une fonction continue (respectivement analytique) *non constante* $c : I \to \mathbb{C}$, où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle non réduit à un point. Deux arcs paramétrés $c_k : I_k \to \mathbb{C}$, $k = 1, 2$, sont équivalents s'il existe un homéomorphisme *croissant* $\phi : I_2 \to I_1$ tel que $c_2 = c_1 \circ \phi$. Un arc est une classe d'équivalence d'arcs paramétrés. *Il s'agit donc d'arcs orientés.*

Ceci dit, la notation $c : I \to \mathbb{C}$ pourra désigner l'arc dont $c$ est une paramétrisation et aussi une paramétrisation d'un arc $c$ !

***Définition 4.7.*** — Un arc $c : I \to \mathbb{C}$ est localement injectif (respectivement localement analytique) si pour tout $t \in I$, il existe un intervalle $J \subset I$, voisinage de $t$ dans $I$, tel que $c_{|J}$ soit injectif (respectivement soit équivalent à un arc paramétré analytique).

On veut éviter les arcs qui, comme $c(t) = (\cos t)^2$, font des va-et-vient ; on veut aussi éviter la question de la paramétrisation analytique globale des arcs localement analytiques, dont la solution n'est pas élémentaire.

***Proposition 4.8.*** — *Soit $c : [0,\varepsilon[ \to \mathbb{C}$ un arc paramétré analytique. Il existe un arc localement injectif et analytique $\widehat{c} : [0,T[ \to \mathbb{C}$, équivalent à $c$ dans les germes en*

$0 \in \mathbb{R}^+$, *tel que de plus : si* $\widehat{d} : [0, S[ \to \mathbb{C}$ *a aussi ces propriétés, il existe* $T' \in ]0, T]$ *tel que* $\widehat{d}$ *soit équivalent à* $\widehat{c}_{|[0,T'[}$. *Comme arc,* $\widehat{c}$ *est unique.*

On dira que *l'arc* $\widehat{c}$ *est l'extension maximale de l'arc c.* Si $F \subset \mathbb{C}$ contient le germe de $c$ en $0 \in \mathbb{R}^+$ et si $I$ est le plus grand intervalle d'origine 0 tel que $\widehat{c}(I) \subset F$, on dit que *l'arc* $\widehat{c}_{|I}$ *est l'extension maximale de l'arc c dans* $F$.

*Démonstration.* — Un arc localement analytique est (localement) rectifiable. On en déduit facilement qu'il suffit de démontrer que si deux arcs $\widehat{c_k} : [0, T_k[ \to \mathbb{C}$, $k = 1, 2$, paramétrés par la longueur d'arc, sont localement injectifs et analytiques et sont équivalents dans les germes en $0 \in \mathbb{R}^+$, et si $0 < T_0 < T_1 < T_2$, alors $\widehat{c_1} \equiv \widehat{c_2}$ sur $[0, T_0[$ implique $\widehat{c_1} \equiv \widehat{c_2}$ au voisinage de $T_0$. Cela résulte du lemme suivant. □

***Lemme 4.9.*** — *Soit* $u_1, u_2 : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *deux germes analytiques injectifs. Si* $u_{1\,|\mathbb{R}^+}$ *et* $u_{2\,|\mathbb{R}^+}$ *ont le même germe d'image en* 0, *les germes* $u_1$ *et* $u_2$ *sont équivalents en* 0.

*Démonstration.* — Nous noterons $u_1(\mathbb{R}^+)$ et $u_1(\mathbb{R})$ pour les germes des images de $u_{1\,|\mathbb{R}^+}$ et $u_1$ en 0... Si $u_k(t) = a_k t^{p_k} + \cdots$ $(a_k \neq 0)$, $k = 1, 2$, $a_k$ donne la direction de la demi-tangente à $u_k(\mathbb{R}^+)$ en 0, donc $a_1/a_2 > 0$ et on se ramène par rotation et reparamétrisation au cas où :

$$u_k(t) = t^{p_k} + \cdots, \quad (p_k \geqslant 1,\ k = 1,\ 2).$$

Soit $p_k = dq_k$, $k = 1, 2$, avec $q_1, q_2 \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux ; $u_1(\mathbb{R}^+) = u_2(\mathbb{R}^+)$ est aussi paramétré par

$$u_1(t^{q_2}) = t^m + \cdots = h_1(t)^m, \text{ ou } u_2(t^{q_1}) = t^m + \cdots = h_2(t)^m,$$

où $m = dq_1q_2$ ; $h_1(t) = t + \cdots$ et $h_2(t) = t + \cdots$ sont deux arcs réguliers. Comme $h_1(\mathbb{R})$ et $h_2(\mathbb{R})$ sont tangents en 0 et ont même image par $z \mapsto z^m$, $h_1(\mathbb{R}) = h_2(\mathbb{R})$, donc $h_1$ et $h_2$ sont *analytiquement* équivalents : $h_2 = h_1 \circ \phi$, où $\phi$ est un difféomorphisme analytique de $(\mathbb{R}, 0)$. En remontant à $u_1$ et $u_2$, on obtient :

$$u_2(t^{q_1}) \equiv u_1((\phi(t)^{q_2})$$

au voisinage de 0. On peut supposer $q_1$ impair. Si $q_2$ était pair, on aurait $u_1(\mathbb{R}) \subset u_2(\mathbb{R}^+)$. Comme $u_1$ est injective, $q_2$ est impair et $u_1(\mathbb{R}) = u_2(\mathbb{R})$. □

**4.4. Propriétés asymptotiques ; exemples.** — On revient au problème des paires. Soit $\Delta$ un domaine de Leau de la paire $(A, B)$ en $0 \in \mathbb{C}$, $f$ son indicateur et $n \in \mathbb{N}$ un entier assez grand pour que les germes de $A_n^{\pm}$ et $B_n^{\pm}$ soient contenus dans $\Delta \cup \{0\}$.

***Notation 4.10.*** — On note encore $A_n^{\pm}$ et $B_n^{\pm}$ les extensions maximales de ces germes dans $\Delta \cup \{0\}$.

***Notation 4.11.*** — On adopte quelques conventions, à propos des arcs issus de $0 \in \mathbb{C}$.

– Un arc (orienté) $A$ est un ensemble totalement ordonné, « directement » homéomorphe à un intervalle non trivial et muni d'une projection continue $\pi_A : A \to \mathbb{C}$. Dans la suite, quand on parlera d'un point $a \in A$, il faudra l'entendre en ce sens. En particulier, un point $a \in A$ est équipé du *germe de $A$ en $a$*.

– Si $a$ et $b$ sont deux points de $A$, on appellera *arc $[a,b]$ de $A$* l'arc des points de $A$ qui sont compris entre $a$ et $b$ au sens large. L'expression *arc $]a,b[$ de $A$* est définie de façon analogue. On notera $o$ le point initial de $A$, au lieu de $o_A$.

– Une intersection de deux arcs $A$ et $B$ (pris dans cet ordre) est un couple $(a,b) \in A \times B$ tel que $\pi_A(a) = \pi_B(b)$.

Les propriétés suivantes sont des exemples de *propriétés asymptotiques* :

(1) $A_n^+$ est une variété analytique compacte ;
(2) $A_n^+$ a un point double ;
(3) $A_n^+$ a un point stationnaire (singularité analytique locale) ;
(4) $A_n^+$ a un point d'arrêt[(5)] dans $\Delta$, *i.e.* $A_n^+$ a une paramétrisation $u : [0,1[ \to \Delta \cup \{0\}$ et $u(t) \to \alpha \in \Delta$ quand $t \to 1^-$ ;
(5) $A_{n+k}^+$, $k \geqslant 1$ donné, coupe $A_n^+$ en dehors de $(o,o)$ ;
(6) $A_{n+k}^+$, $k \geqslant 1$ donné, coupe $B_n^+$ en dehors de $(o,o)$.

La notion de *propriété asymptotique* est précisée par l'énoncé suivant, dans lequel, pour fixer les idées, on traite la Propriété 5 avec $k = 1$.

***Théorème 4.12***. — *Soit $(A,B)$ et $(C,D)$ deux paires équivalentes de type 2 en $0 \in \mathbb{C}$. Soit $\Delta$ et $\Lambda$ des domaines de Leau associés et $n \in \mathbb{N}$ assez grand. On suppose que l'extension maximale de $A_{n+1}^+$ dans $\Delta \cup \{0\}$ coupe celle de $A_n^+$ en dehors de $(o,o)$. Alors, pour tout entier $k$ assez grand, l'extension maximale de $C_{k+1}^+$ dans $\Lambda \cup \{0\}$ coupe celle de $C_k^+$ en dehors de $(o,o)$.*

*Démonstration.* — On utilise la Notation 4.10. Soit $h \in \mathbf{G}$ un difféomorphisme tel que $h(A,B) = (C,D)$. On peut choisir des lunules de Leau $L$ et $M$ (voir Proposition 4.3) telles que $h$ induise un isomorphisme de $L$ sur $h(L) \subset M$.

Soit $\alpha$ et $\beta$ deux sous-arcs compacts de $A_{n+1}^+$ et $A_n^+$, qui vont de l'origine à une intersection autre que $(o,o)$ (l'un des deux arcs peut être constant). On remarque que $A_{n+k+1}^+$ et $A_{n+k}^+$ sont des prolongements de $f^{(k)}(\alpha)$ et $f^{(k)}(\beta)$.

Compte tenu de la Proposition 4.3, quitte à remplacer $n$ par $n+k$, $k$ assez grand, on se ramène au cas où $\alpha$ et $\beta$ sont contenus dans $L \cup \{0\}$. Alors $h(\alpha)$ et $h(\beta)$ se coupent dans $M \cup \{0\}$ en dehors de $(o,o)$, et ce sont des sous-arcs de $C_{n+1}^+$ et $C_n^+$. □

Au fond, si on se donne un domaine de Leau $\Delta$ de la paire $(A,B)$, $N \in \mathbb{N}$ assez grand, et qu'on ne considère que la famille $\mathcal{F}_N$ des arcs $A_n^\pm$ et $B_n^\pm$ pour $n \leqslant N$, la seule propriété de $A_N^+$ qui ne soit pas *a priori* asymptotique est la suivante :

(5) Compte tenu de la nature de la singularité d'un germe d'ensemble analytique dans $\mathbb{R}^2$ (développements de Puiseux), il s'agit d'une « singularité essentielle ».

*$A_N^+$ quitte $\Delta$ par un point $\neq 0$, sans singularité et sans rencontrer un autre membre de la famille $\mathcal{F}_N$ en dehors de l'origine.*

Cette propriété « inutile » pourrait-elle avoir lieu quel que soit $N$ ?

**4.5. Figures asymptotiques ; exemples.** — On se place encore dans la situation décrite au début du § 4.4, dont on conserve les notations. Reprenons la liste des propriétés asymptotiques qu'on y a donnée.

La Propriété 1 et la Propriété 4 méritent le nom de *figures asymptotiques* de la paire $(A, B)$. Si $(C, D)$ est une paire équivalente à la paire $(A, B)$ et si $(A, B)$ a la Propriété 1 (respectivement la Propriété 4), pour tout entier $k$ assez grand, $A_k^+$ et $C_k^+$ seront des courbes fermées lisses (respectivement auront *un* point d'arrêt). L'équivalence locale entre les paires $(A_k, B_k)$ et $(C_k, D_k)$ (éventuellement pour $k$ plus grand encore) est alors nécessairement la restriction d'un isomorphisme global du domaine de bord $A_k^+$ sur le domaine de bord $C_k^+$ (respectivement transformera *la* singularité essentielle terminale de $A_k^+$ en celle de $C_k^+$).

Les autres propriétés ne définissent pas *a priori* des « figures » : les points doubles de $A_n^+$, ses singularités analytiques, ses intersections avec $A_{n+k}^+$ ou avec $B_n^+$, peuvent croître en nombre avec $n$. Il s'agit alors de dire quel point double... de $C_n^+$ correspond à tel point double... de $A_n^+$ pour tout $n$ assez grand, si les paires $(A, B)$ et $(C, D)$ sont équivalentes, autrement dit de numéroter les points doubles ...

La Figure 6 est censée démontrer qu'il est impossible de numéroter les points doubles de $A_n$ de façon invariante [6]. C'est pour cette raison qu'on a introduit les brins $A_n^\pm$. Pour la même raison, on ne peut pas construire une figure asymptotique à partir de la Propriété 6.

Dans les trois définitions qui suivent, on se place dans la situation décrite au début du § 4.4. Le numérotage des points doubles de $A_n^+$ est évident :

***Définition 4.13.*** — Si $A_n^+$ a un point double, le *premier point double de* $A_n^+$ est le couple $(a, b)$ de points distincts de $A_n^+$, où $b$ est le premier point de $A_n^+$ de même image dans $\mathbb{C}$ qu'un point, soit $a$, de l'arc $[o, b[$ de $A_n^+$.

Le numérotage des points stationnaires est encore plus évident.

En ce qui concerne les intersections autres que $(o, o)$ de $A_n^+$ et $A_{n+k}^+$, $k \geqslant 0$, on utilise le fait que $f^{(k)}$ induit un isomorphisme de $A_n^+$ sur un sous-arc de $A_{n+k}^+$ pour les ordonner. On se contente de le faire pour $k = 1$. Il y a lieu de distinguer deux types d'intersection :

[6] sauf bien sûr en utilisant une figure asymptotique déjà construite comme repère, comme dans la Figure 2 de l'Introduction : le fait que $A_n$ est une courbe fermée lisse, bordant un domaine $\Omega_n$, permet de définir *l'unique point double* du sous-arc maximal de $B_{n+1}$ contenu dans $\Omega_n$ ; voir aussi le § 4.7.

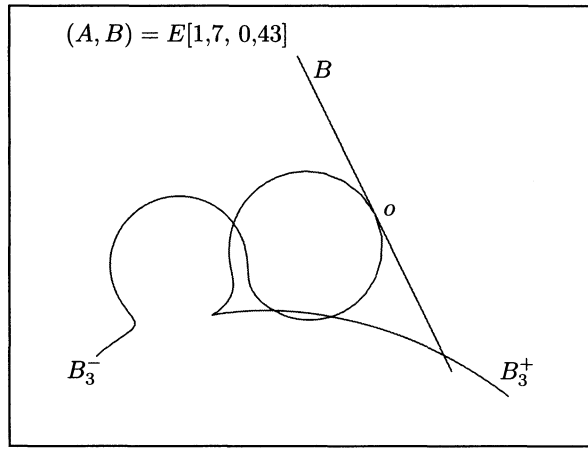


FIGURE 6. Quel est le premier point double de $B_3$ ?

***Définition 4.14***. — Soit $(a, b) \in A_n^+ \times A_{n+1}^+$ une intersection autre que $(o, o)$. On dit que $(a, b)$ est une *intersection de type* I si $f(a)$ appartient à l'arc $[o, b]$ de $A_{n+1}^+$, que c'est une *intersection de type* II dans le cas contraire.

Si $(a, b) \in A_n^+ \times A_{n+1}^+$ est une intersection de type I, autre que $(o, o)$, $(a', b') := (f(a), f(b)) \in A_{n+1}^+ \times A_{n+2}^+$ aussi. Elle vérifie de plus qu'il existe un point $c$ de $A_{n+1}^+$ (à savoir $b$), tel que $f(c) = b' \in A_{n+2}^+$ coïncide dans $\mathbb{C}$ avec un point (à savoir $a'$) de l'arc $[o, c]$ de $A_{n+1}^+$.

On peut numéroter les intersections de type I. Contentons nous de définir la première. Rappelons qu'on utilise la Notation 4.10.

***Définition 4.15***. — On suppose que $A_n^+$ et $A_{n+1}^+$ ont une intersection de type I. Quitte à remplacer $n$ par $n + 1$, il existe un premier point $c \in A_n^+ \setminus \{o\}$ tel que $b := f(c) \in A_{n+1}^+$ ait même image dans $\mathbb{C}$ qu'un point, soit $a$, de l'arc $[o, c]$ de $A_n^+$. La première intersection de type I de $A_n^+$ et $A_{n+1}^+$ est le couple $(a, b)$. C'est aussi la paire au point image formée par les germes de $A_n^+$ en $a$ et de $A_{n+1}^+$ en $b$.

Il est assez clair que la première intersection de type I se comporte bien vis-à-vis de l'action de l'indicateur, et qu'une démonstration analogue à celle du Théorème 4.12 donne le résultat suivant :

***Théorème 4.16***. — *Soit $(A, B)$ et $(C, D)$ deux paires de type 2, équivalentes en $0 \in \mathbb{C}$. Soit $\Delta$ et $\Lambda$ des domaines de Leau associés et $n \in \mathbb{N}$ assez grand. On suppose que les extensions maximales de $A_n^+$ et $A_{n+1}^+$ dans $\Delta \cup \{0\}$ ont une première intersection de type* I *$(a, a')$. Alors, quel que soit $k$ assez grand, les extensions maximales de $C_{n+k}^+$ et $C_{n+k+1}^+$ dans $\Lambda \cup \{0\}$ ont une première intersection de type* I *$(c_k, c_k')$. La paire des*

*germes de $C^+_{n+k}$ en $c_k$ et de $C^+_{n+k+1}$ en $c'_k$ (considérée au point image) est équivalente à la paire des germes de $A^+_n$ en $a$ et de $A^+_{n+1}$ en $a'$ (considérée au point image).*

Le théorème associe à une paire $(A, B)$, sous l'hypothèse que $A^+_n$ a une intersection de type I avec $A^+_{n+1}$, une autre paire $(A', B')$, définie à équivalence près. D'autre part, si l'on introduit (avec les notations de l'énoncé) la réunion $\Omega_n$ des composantes connexes bornées du complémentaire de $\pi_{A^+_n}([o, a]) \cup \pi_{A^+_{n+1}}([o, a'])$, on obtient un ouvert, défini à équivalence *globale* près. Toute équivalence de paire de $(A, B)$ avec $(C, D)$ induit, pour $n$ assez grand, un isomorphisme de $\Omega_n$ sur $\Pi_n$, si $\Pi_n$ est défini de façon analogue avec la paire $(C, D)$.

C'est un autre exemple de ce qu'on entend par « figure asymptotique » de la paire $(A, B)$.

**4.6. Exemples.** — Soit $A$ la parabole d'équation paramétrique

$$z(t) = \frac{1 - t^2}{2} + it, \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{25}$$

et $B$ sa tangente au point $z(t)$. Le résidu de $(A, B)$ est $it$.

Quel que soit $t \in \mathbb{R}$, le tracé sur ordinateur montre que $B^-_n$ a une intersection de type I avec $B^-_{n+1}$ pour $n$ grand : $n = 0$ convient si $t > 1,732\ldots$ (en fait $t > \sqrt{3}$), $n = 1$ convient si $1,732\cdots > t > 0,07$ environ, $n = 2$ convient si $0,07 > t \geqslant 0$. Si $t \leqslant 0$, on a des résultats analogues par symétrie (anti-holomorphe).

La Figure 7[(7)] montre quelques exemples de ce qu'on obtient. Dans chaque cas, avec $n \in \{0, 1, 2\}$ le plus petit possible, on a représenté 1) en pointillé, des arcs arbitraires de $B^-_0, \ldots B^-_{n-1}$, qui n'interviennent pas dans la définition de la figure et 2) en trait plein, l'arc $[o, a]$ de $B^-_n$, et son image par $S_A \circ S_B$, où $a$ est le premier point autre que $o$ tel que $f(a)$ soit sur l'arc $[o, a[$ de $B^-_n$.

On voit que la première intersection de type I peut être précédée par une ou plusieurs intersections de type II ou par une auto-intersection. Si l'on suit pas à pas la figure de la première intersection de type I de $B^-_n$ avec $B^-_{n+1}$ quand $t$ décroît de $+\infty$ à 0 on trouve :

- pour $+\infty > t > \sqrt{3}$, une figure homéomorphe à *a)*; si $t = \sqrt{3}$, $B^-_1$ a un cusp;
- pour $\sqrt{3} > t > 1,2$ environ, une figure homéomorphe à b);

(7) Fin 1998, j'ai cherché à savoir si la paire $(A, B)$ était équivalente à une paire de cercles quand $t = 0$, par le calcul. On se ramène à étudier la convergence d'un champ de vecteurs formel en $0 \in \mathbb{C}$, le générateur du groupe des itérés formels de $f$. Les coefficients sont donnés par une relation de récurrence assez simple. Le calcul sur Maple (je remercie une nouvelle fois P.V. Koseleff) des premiers coefficients montre une croissance Gevrey typique. Guidé par un calcul d'Oshima [**20**], j'ai pu démontrer la divergence. La Figure 7–f donne le résultat et en fait beaucoup plus (sauf la classe de Gevrey du générateur !) ; il est très facile d'en déduire une « démonstration rigoureuse ».

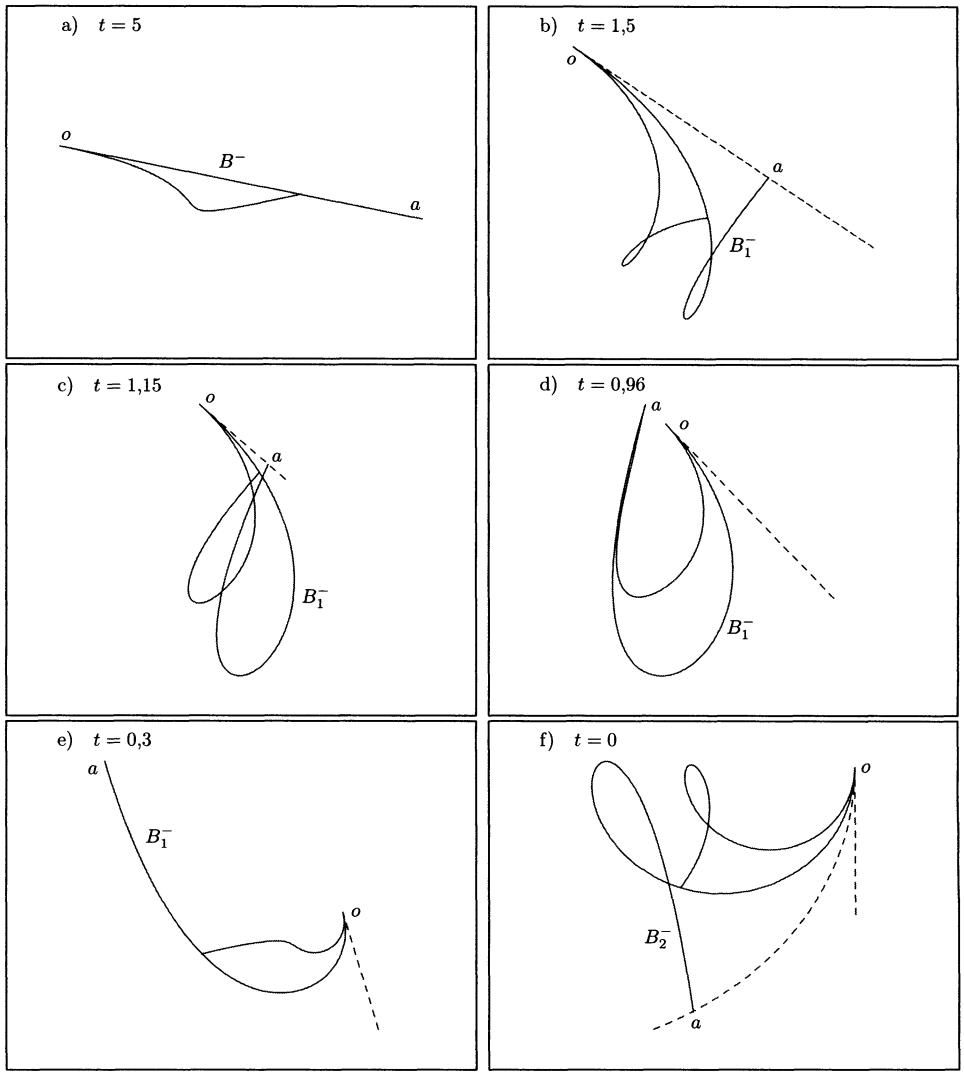


FIGURE 7. Première intersection de type $I$

– pour $1,2 > t > 0,96$ environ, l'évolution est très rapide; des intersections de type II naissent puis disparaissent; l'auto-intersection migre vers le point de contact (si $t = 1$ elle est au point de contact) puis disparaît;

– pour $0,96 > t > 0,07$ environ, on retrouve une figure homéomorphe à a); pour $t = 0,07$ environ, un cusp apparaît;

– pour $0,07 > t \geqslant 0$ on retrouve une figure homéomorphe à b).

Vérifier, dans chaque cas, que la figure est asymptotique, se fait aussi graphiquement, en choisissant un demi-disque $\Delta$ qui la contienne, centré au point de contact et limité d'un côté par un segment de la tangente, et en traçant l'image de son bord par $S_A \circ S_B$.

### 4.7. Application : une démonstration par ordinateur

***« Théorème » 4.17.*** — *Soit $B$ une tangente à une parabole $A$. L'indicateur $f = S_A \circ S_B$ (considéré au point de contact) n'est pas un carré itératif, i.e. l'unique difféomorphisme formel $g$ tel que $g \circ g = f$ (voir § 2.3) diverge.*

*Esquisse d'une démonstration graphique.* — On choisit encore la parabole paramétrée par (25) et on paramètre les paires $(A, B)$ par $t \in \mathbb{R}$, tel que le point de contact soit $z(t)$. Par symétrie, on peut encore se restreindre à $t \in [0, +\infty[$.

Compte tenu du Théorème 2.12, il suffit de montrer que les paires $(A, B)$ et $(C, D) = (S_A(B), A)$ ne sont pas équivalentes. Rappelons qu'elles ont le même indicateur $f$. L'égalité $f = S_A \circ S_B$ donne les relations :

$$C_n^{\pm} = B_{n+1}^{\pm}; \qquad D_n^{\pm} = A_n^{\pm}.$$

On a « montré » dans le paragraphe précédent que $B_n^-$ avait une intersection de type I avec $B_{n+1}^-$ pour $n$ assez grand, quelque soit $t \in \mathbb{R}$. Une étude graphique analogue « montre » qu'il en va de même pour $A_n^-$ et $A_{n+1}^-$.

On compare graphiquement la figure de la première intersection de type I de $B_n^-$ avec $B_{n+1}^-$ à celle de $D_n^- = A_n^-$ avec $D_{n+1}^- = A_{n+1}^-$. On trouve que ces deux figures permettent la discrimination entre les deux paires sauf quand (il s'agit de valeurs approchées) :

$$t \in ]\,0,07\ ,\ 0,247\,[ \cup ]\,0,55\ ,\ 0,96\,[ \cup ]\,1,732\ ,\ 6,5\,[. \tag{26}$$

Plus précisément, quand $t$ n'appartient pas à cette réunion d'intervalles, on observe que l'intersection de type I est précédée par une auto-intersection ou une intersection de type II dans un cas et pas dans l'autre.

Quand $t$ vérifie (26), on observe dans les deux cas que la première intersection de type I n'est précédée par aucune intersection de type II ni aucune auto-intersection. On enrichit alors la figure de la première intersection de type I de la façon suivante. Dans le premier cas, les arcs de $B_n^-$ et de $B_{n+1}^-$, arrêtés au premier point d'intersection de type I, délimitent un domaine $G_n$. Le germe de $A_n^-$ à l'origine rentre dans $G_n$. On regarde comment il en sort. On définit ainsi une figure asymptotique. Par le même procédé, on associe une figure asymptotique *de même construction* à la paire $(C, D)$.

On observe que $A_n^-$ sort de $G_n$ en coupant $B_{n+1}^-$ si $0,07 < t < 0,247$ ou si $1,732 < t < 6,5$, et en coupant $B_n^-$ si $0,55 < t < 0,96$.

Pour chacun des intervalles de (26), on observe pour la paire $(C, D)$ tout le contraire de ce qu'on a observé avec la paire $(A, B)$. Un exemple est illustré par la Figure 8. On obtient donc le résultat. □

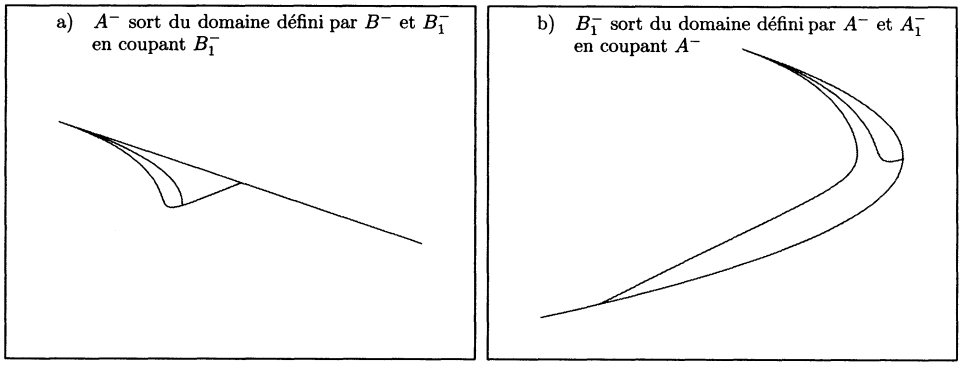


FIGURE 8. $t = 3$ ; les paires $(A, B)$ et $(S_A(B), A)$ ne sont pas équivalentes

***Exercice 4.18.*** — Soit $A$ une parabole, $C = \{x^2 - y^2 = 1\}$ une hyperbole équilatère et $D$ une tangente à $C$.

(1) Quelle est l'image de $(C, D)$ par $z \mapsto z^2$ ?

(2) En déduire qu'il n'existe pas de tangente $B$ à $A$ telle que $(A, B)$ soit équivalente à $(C, D)$. (On a le droit d'utiliser le « Théorème 4.17 ».)

## 5. Des exemples, avec une ellipse et une droite

**5.1. Introduction.** — Dans ce chapitre, les paires $(A, B)$ qu'on considère sont de la forme suivante :

(27) *$A$ est une ellipse et $B$ est une droite tangente à $A$.*

L'équivalence entre deux telles paires signifie toujours l'équivalence analytique dans les germes, au voisinage des points de contact. Je sais démontrer le résultat suivant :

***Théorème 5.1.*** — *Deux paires $(A, B)$ et $(A', B')$ de la forme (27) sont équivalentes si et seulement si elles sont semblables. Si $A$ n'est pas un cercle, le seul automorphisme de la paire $(A, B)$ est l'identité.*

En particulier, si $A$ est un cercle, $A'$ aussi, et les difféomorphismes qui réalisent l'équivalence sont des homographies. Si $A$ n'est pas un cercle, le théorème permet de supposer $A' = A$ ; alors $B'$ est égal à $B$ ou au symétrique de $B$ par rapport au centre de $A$. La deuxième assertion de l'énoncé est plus facile à obtenir que la première par la méthode de la réflexion. Dans le cas où le résidu de la paire n'est pas nul, c'est aussi une conséquence d'un résultat général, le Théorème 2.11.

La démonstration du Théorème 5.1 est basée sur l'existence, pour chaque paire de la forme (27), d'une figure asymptotique qui la discrimine des paires qui ne lui sont pas semblables. Le calcul est pénible, mais possible parce qu'on arrive toujours à construire une telle figure avec $(A, B)$, $(A_1, B_1)$ et $(A_2, B_2)$. Si l'on prend pour $A$ une

hyperbole, une difficulté apparaît quand l'angle entre ses asymptotes tend vers $\pi$ : le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une figure asymptotique tend alors vers l'infini.

D'autre part, il serait plus intéressant de classer les paires $(A, B)$ formées d'une conique $A$ et d'un cercle (ou d'une droite) $B$, car il existe des paires de ce type qui sont équivalentes et qui ne sont pas semblables.

Une paire de paires non équivalentes est une chose aussi merveilleuse qu'un trèfle à trois feuilles, même si le comptage des feuilles est difficile. Je ne donnerai donc pas la démonstration du Théorème 5.1 ici. J'en présenterai un exemple intéressant, le cas où $B$ est une tangente parallèle au grand axe de $A$ ; un argument voisin de celui qu'on a utilisé dans le § 3.4 permet en effet la discrimination, sans calcul. À part cela, je me contenterai de justifier les illustrations de l'Introduction, et de faire quelques commentaires sur le cas plus facile des petites excentricités.

**5.2. La réflexion par rapport à une ellipse.** — La réflexion de Schwarz par rapport à une ellipse échange les ellipses homofocales et conserve les hyperboles homofocales. C'est une propriété remarquable dont j'ai trouvé l'énoncé dans un article de Webster [**29**].

On travaillera avec la famille $E(s)$ des ellipses de foyers $-1$ et $+1$ :

$$E(s) : \qquad \frac{x^2}{\cosh^2 s} + \frac{y^2}{\sinh^2 s} = 1.$$

On a $E(s) = E(-s)$ si $s \neq 0$, et on note aussi $E(0) = [-1, +1]$. En notation complexe, $E(s)$ a pour équation :

$$2(\cosh 2s) z\overline{z} - (z^2 + \overline{z}^2) - \sinh^2 2s = 0. \tag{28}$$

Bien sûr, toute ellipse du plan, autre qu'un cercle, est semblable à une et une seule de ces ellipses. L'excentricité de $E(s)$ vaut $1/\cosh s$.

À partir de l'équation (28), on obtient l'équation de la réflexion par rapport à l'ellipse $E(s)$ comme on a dit au § 1.3 :

$$\zeta^2 - 2(\cosh 2s)\,\overline{z}\zeta + (\overline{z}^2 + \sinh^2 2s) = 0. \tag{29}$$

Cette équation définit $\zeta$ comme fonction algébrique de $\overline{z}$, ramifiée autour des foyers $\pm 1$. En notant $z \mapsto z^{1/2}$ la racine holomorphe sur $\mathbb{C} \smallsetminus ]-\infty, 0]$ qui vaut 1 en 1, on obtient deux branches uniformes sur $\mathbb{C} \smallsetminus [-1, +1]$ :

***Notation 5.2.*** — Pour tout $s > 0$, on note :

$$S_{E(s)}(z) = \overline{z} \cosh 2s - \overline{z}(1 - \frac{1}{\overline{z}^2})^{1/2} \sinh 2s. \tag{30}$$

C'est une fonction antiholomorphe sur $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \smallsetminus [-1, +1]$, qui coïncide au voisinage de $E(s)$ avec la réflexion de Schwarz par rapport à $E(s)$.

Si on remplace $s$ par $-s$ dans le second membre de (30), on obtient l'autre solution de (29). On a $S_{E(s)}(\infty) = \infty$, et le comportement asymptotique :

$$S_{E(s)}(z) = \overline{z}\,\mathrm{e}^{-2s} + \frac{\sinh(2s)}{2\overline{z}} + O(\frac{1}{\overline{z}^2}), \qquad (z \longrightarrow \infty). \tag{31}$$

En particulier, *le reflet d'une tangente par une ellipse (autre qu'un cercle !) a une branche infinie.*

**5.3. Le reflet d'une tangente par une ellipse.** — Fixons $s > 0$ et notons $A = E(s)$. Soit $B$ une tangente à $A$ et $B_1 = S_A(B)$, où $S_A = S_{E(s)}$ est donné par (30). Soit $z(t) = a + bt$ , $t \in \mathbb{R}$, une paramétrisation de $B$. $B_1$ est une courbe analytique paramétrée par $z_1(t) = S_A(a + bt)$. La paramétrisation est régulière, sauf si $B$ passe par un des « cofoyers » $\pm\cosh(2s)$. Dans ce cas $B_1$ a une singularité de type cusp en un des foyers.

En remplaçant $z$ par $z(t)$ dans l'équation de la réflexion (29) et en éliminant $t$, on obtient une équation du quatrième degré en $\zeta$ et $\overline{\zeta}$. Donc $B_1$ est contenu dans une quartique $\mathcal{B}_1$. Selon les cas (on laisse la vérification au lecteur) la quartique a un point double ou un point réel isolé.

La formule (31) montre que $B_1$ est asymptote aux deux bouts de la droite $\mathrm{e}^{-2s}S_{\mathbb{R}}(B)$. On suppose maintenant que $B$ n'est parallèle ni à $\mathbb{R}$ ni à $i\mathbb{R}$. L'asymptote de $B_1$ est alors transverse à $B$. On en déduit que $B_1$, qui est tangente à $B$ au point de base $A \cap B$, recoupe $B$ au moins une fois, éventuellement encore au point de base. Mais $B$ coupe aussi l'autre branche de la quartique $\mathcal{B}_1$ pour la même raison : elle est asymptote aux deux bouts de la droite $\mathrm{e}^{2s}S_{\mathbb{R}}(B)$ qui est parallèle à l'asymptote de $B_1$, mais distincte. On a obtenu quatre points intersections de la droite $B$ avec $\mathcal{B}_1$. Il ne peut pas y en avoir d'autre. En résumé :

***Lemme 5.3.*** — *Soit $s > 0$ et $B_1 = S_{E(s)}(B)$ le reflet d'une tangente $B$ par rapport à $E(s)$. $B_1$ est une courbe analytique fermée dans $\mathbb{C}$, asymptote aux deux bouts de la droite $\mathrm{e}^{-2s}S_{\mathbb{R}}(B)$. Elle est régulière, sauf si $B$ passe par un des points $\pm\cosh(2s)$. Elle a au plus un point double. Enfin, si $B$ n'est pas parallèle à un des axes de $E(s)$, elle recoupe $B$ une et une seule fois.*

Pour montrer que les illustrations de l'Introduction ont un caractère général, il reste à déterminer la nature de l'intersection de $B_1$ avec $E(s)$ ; c'est le contenu du Corollaire 5.7 ci-dessous.

**5.4. La réflexion en coordonnées elliptiques.** — Tout point $z \in \mathbb{C}$ peut s'écrire sous la forme :

$$z = \cosh(s + it), \qquad s \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}/2\pi.$$

On se réfère au couple $[s, t]$ comme aux coordonnées elliptiques de $z$. Un point $z$ de coordonnées elliptiques $[s, t]$ a aussi les coordonnées elliptiques $[-s, -t]$. À ceci près, elles sont uniques.

Si on fixe $s \neq 0$, $t \mapsto \cosh(s+it)$ est une paramétrisation de $E(s)$ par $\mathbb{R}/2\pi$. Si on fixe $t \in ]0, \frac{\pi}{2}[$, $\mathbb{R} \ni s \mapsto \cosh(s+it)$ est une paramétrisation de la branche de l'hyperbole :

$$H(t) : \qquad \frac{x^2}{\cos^2 t} - \frac{y^2}{\sin^2 t} = 1,$$

située dans le demi-plan $x > 0$. On obtient l'autre branche en remplaçant $t$ par $\pi - t$.

Soit $s > 0$. Le reflet d'un point par rapport à l'ellipse $E(s)$ est donné par une formule remarquablement simple en coordonnées elliptiques. Comme $h : w \mapsto \cosh w$ envoie la droite $L := \{\mathrm{Re}\, w = s\}$ sur $E(s)$, on obtient par conjugaison :

$$S_{E(s)}(\cosh w) = \cosh(2s - \overline{w}),$$

quand $\mathrm{Re} w$ est voisin de $s$. Si l'on prend en compte la définition (30) de $S_{E(s)}$ qu'on a choisie, on obtient :

***Lemme 5.4.*** — *Soit $s > 0$. Pour tout $t \in [0, \pi]$, on a :*

$$\begin{aligned} S_{E(s)}(\cosh(s'+it)) &= \cosh(-s'+2s+it), \quad \text{si} \quad s' > 0, \\ &= \cosh(-s'-2s+it), \quad \text{si} \quad s' < 0. \end{aligned}$$

Cette formule a l'interprétation géométrique suivante : $S_{E(s)}$ envoie $E(s')$ sur $E(2s - s')$ pour tout $s' > 0$ et l'image d'un point non réel d'une branche d'une hyperbole homofocale $H(t)$ est situé sur cette même branche.

***Notation 5.5.*** — Si $s \neq 0$, on note $\widehat{E}(s)$ le domaine de bord $E(s)$. On appelle parfois $\widehat{E}(s)$ une *ellipse pleine.*

Le Lemme 5.4 implique, voir la Figure 9 :

***Lemme 5.6.*** — *Quel que soit $s > 0$, $S_{E(s)}$ induit une involution de $\widehat{E}(2s) \setminus [-1, +1]$. De plus :*

$$S_{E(s)}(\widehat{E}(3s) \setminus \overline{\widehat{E}(s)}) \subset \widehat{E}(s). \tag{32}$$

Une tangente $B$ à $E(s)$ coupe l'ellipse $E(3s)$ en deux points distincts, transversalement. Le Lemme 5.6 a donc la conséquence suivante :

***Corollaire 5.7.*** — *Quel que soit $s > 0$ et la tangente $B$ à $E(s)$, chacun des deux brins $B_1^{\pm} = S_{E(s)}(B^{\pm})$ recoupe $E(s)$ en un et un seul point, transversalement.*

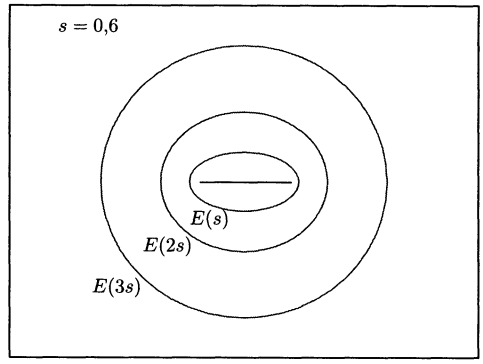


FIGURE 9

**5.5. Petites excentricités.** — Les invariants qu'on utilise pour démontrer le Théorème 5.1 proviennent des angles aux intersections de $B_1 = S_A(B)$ avec $A$, avec $B$ et avec soi-même. Ceci ne signifie pas que ces intersections soient toutes et toujours contenues dans un domaine de Leau, mais que, dans tous les cas, on parvient à définir une figure asymptotique avec $A$, $B$, $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$, et qu'au moins un des angles décrits ci-dessus peut être réinterprété dans le cadre de cette figure, et fournir un invariant numérique de la paire.

Le cas des petites excentricités est plus facile. On a en effet :

***Lemme 5.8.*** — *Si $s \geqslant 1,2$ — si l'excentricité est $< 0,55$ — l'ellipse pleine $\widehat{E}(s)$ est un domaine de Leau de la paire $(E(s), B)$, quelle que soit la tangente $B$.*

Ce n'est pas toujours le cas. La Figure 10–d montre un exemple où l'ellipse pleine, sans être un domaine de Leau, est contenue dans un domaine de Leau. La Figure 10–b montre un exemple où $A_1$ a une singularité asymptotique ; l'ellipse pleine n'est donc pas contenue dans un domaine de Leau. La Figure 10–c suggère (sans le démontrer) qu'il est possible qu'aucun $A_n$ ne soit contenu dans un domaine de Leau.

*Démonstration.* — Remarquons d'abord que :

$$D(0, \sinh s) \subset \widehat{E}(s) \subset D(0, \cosh s)$$

quel que soit $s > 0$. Comme $S_{E(s)}$ envoie injectivement $\widehat{E}(2s) \smallsetminus \overline{\widehat{E}(s)}$ dans $\widehat{E}(s)$, il suffit que $S_B(\widehat{E}(s)) \subset \widehat{E}(2s)$ pour que $\widehat{E}(s)$ soit un domaine de Leau. Puisque

$$S_B(\widehat{E}(s)) \subset S_B(D(0, \cosh s) \subset D(0, 3\cosh s),$$

c'est vrai dès que $3\cosh s < \sinh 2s$ ; $s > 1,2$ convient. □

Si $s$, $s' > 1,2$, toute équivalence $(E(s), B) \to (E(s'), B')$ entre paires du type (27) se prolonge en un isomorphisme $\widehat{E}(s) \to \widehat{E}(s')$, par le même argument qu'on a employé dans le § 3.4. D'une certaine façon, la méthode de la réflexion a rempli son

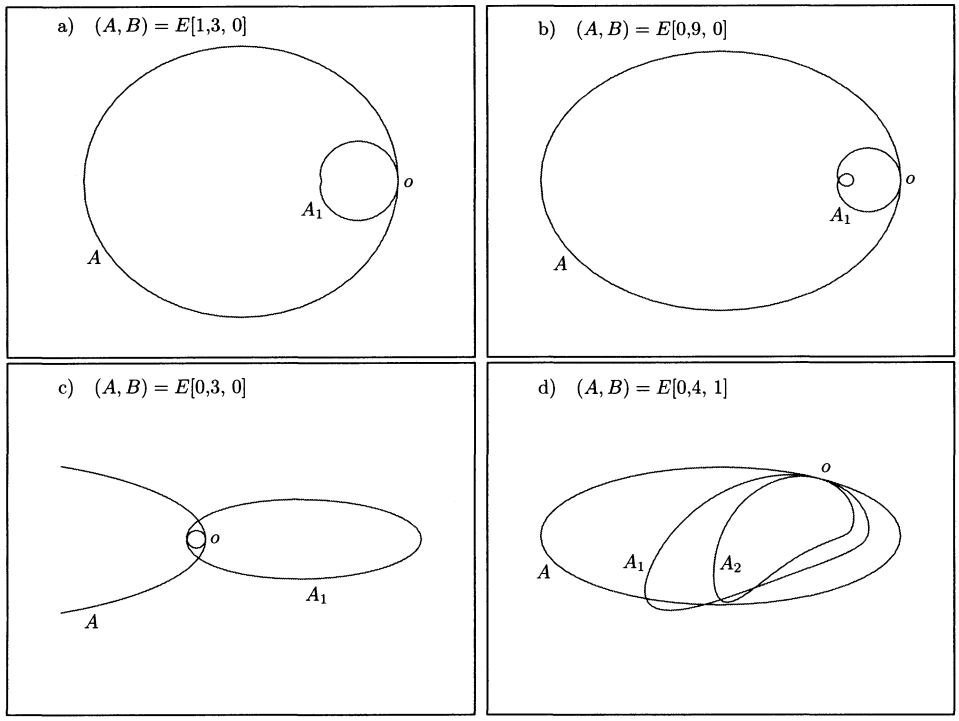


FIGURE 10

rôle. Il reste toutefois à montrer qu'un isomorphisme d'ellipses pleines, qui envoie *une* tangente de la première ellipse sur *une* tangente de la deuxième, est une similitude. Il peut exister des méthodes plus souples que celle de la réflexion pour traiter des problèmes de ce type !

Quoi qu'il en soit, sous l'hypothèse précédente, les intersections de $B_1^{\pm}$ avec $A$ et le point double de $B_1$ définissent des figures asymptotiques, au sens du Chapitre 4. On obtient donc une démonstration du Théorème 5.1, *restreint aux petites excentricités*, en montrant que l'application

$$]1, 2, +\infty[\times[0, \pi/2] \ni (s, t) \longmapsto (\text{rés}(s, t), \beta^+(s, t), \beta^-(s, t), \gamma(s, t))$$

est injective, où $\cosh(s + it)$ est le point de contact de $B$ avec $A = E(s)$. On a noté $\text{rés}(s, t)$ le résidu de la paire (le seul invariant formel, voir le Chapitre 2), $\beta^{\pm}(s, t)$ l'angle à l'intersection de $B_1^{\pm}$ avec $A$, et $\gamma(s, t)$ l'angle au point double de $B_1$ s'il existe, $\gamma = \varnothing$ s'il n'existe pas. C'est vrai, mais la vérification est pénible.

**5.6. Quand l'excentricité tend vers 0.** — Le fait que le reflet de Schwarz d'une droite par une ellipse soit si différent du reflet d'une droite par un cercle, aussi petite soit l'excentricité de l'ellipse, a quelque chose de fascinant.

Fixons $t \in [0, \pi/2]$. Pour tout $s > 0$, notons $(A(s), B(s))$ la paire de la forme (27) définie par :

$$A(s) = \mathrm{e}^{-s} E(s); \qquad B(s) \cap A(s) = \mathrm{e}^{-s} \cosh(s + it). \tag{33}$$

Quand $s \to +\infty$, l'ellipse $A(s)$ tend vers le cercle unité $C$ et la droite $B(s)$ vers la tangente $\beta = \beta(t)$ au cercle en $\mathrm{e}^{it}$. Notons $g$ l'indicateur de la paire $(C, \beta)$ et $\rho$ la rotation de centre 0 et d'angle $-2t$.

En utilisant la formule (31), on calcule facilement la limite :

$$\beta_1 = \lim_{s \to +\infty} B_1(s).$$

C'est la réunion du cercle $g(\beta)$ et de la droite $\lambda_1 \ni 0$ d'angle polaire $-2t$.

En itérant, on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\beta_n = \lim_{s \to +\infty} B_n(s)$$

est la réunion du bouquet (ou chapelet, ou grappe) de cercles $g(\beta_{n-1})$ et de la droite $\rho(\lambda_{n-1})$.

La configuration dépend de $t$ ; par exemple, si $t/\pi$ est rationnel, la droite $\lambda_n$ est périodique (en $n$).

La Figure 11 montre comment $B_n$ « approxime » une droite et un bouquet de $n$ cercles pour $n = 1 \ldots 4$ quand $s = 2$ (l'excentricité vaut $0,266...$) et $t = 0,6$. La Figure 12 montre mieux $B_4$. Il est peut-être intéressant de préciser que, si l'on prend le grand axe de l'ellipse comme unité, on a représenté l'image d'un segment de la tangente $B$, de longueur 80 unités pour $B_1$, 5 000 pour $B_2$, 300 000 pour $B_3$ et 12 millions pour $B_4$ !

**5.7. Le cas d'une tangente parallèle au grand axe.** — C'est un cas exceptionnel. Le lemme suivant n'est vrai que quand $B$ est une tangente parallèle au grand axe de $A$ :

***Lemme 5.9.*** — *Soit $s > 0$, $A = E(s)$ et $B$ la tangente à $A$ au point $m = i \sinh s$. Le demi-plan $\Delta$ de bord $B$ qui contient $A \smallsetminus \{m\}$ est un domaine de Leau de $(A, B)$ ; $\overline{\Delta} \smallsetminus \{m\}$ est contenu dans un domaine de Leau de $(A, B)$.*

*Démonstration.* — La formule du Lemme 5.4 montre que $S_A$ est injective sur $S_B(\overline{\Delta})$, et que l'image $S_A(z)$ d'un point $z \in S_B(\overline{\Delta})$ est située strictement au-dessous de $B$, sauf si $z = m$. Autrement dit $S_A \circ S_B(\overline{\Delta} \smallsetminus \{m\}) \subset \Delta$. □

On considère $\Delta$ comme un disque de la sphère de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. L'indicateur $f = S_A \circ S_B$ est holomorphe au voisinage du disque fermé $\overline{\Delta}$ et a deux points fixes $\in \partial\Delta$ :

$$f(m) = m; \qquad f(\infty) = \infty.$$

La démonstration précédente montre que $f$ est injective sur $\overline{\Delta}$ et que :

$$f(\overline{\Delta}) \subset \Delta \cup \{m, \infty\}.$$

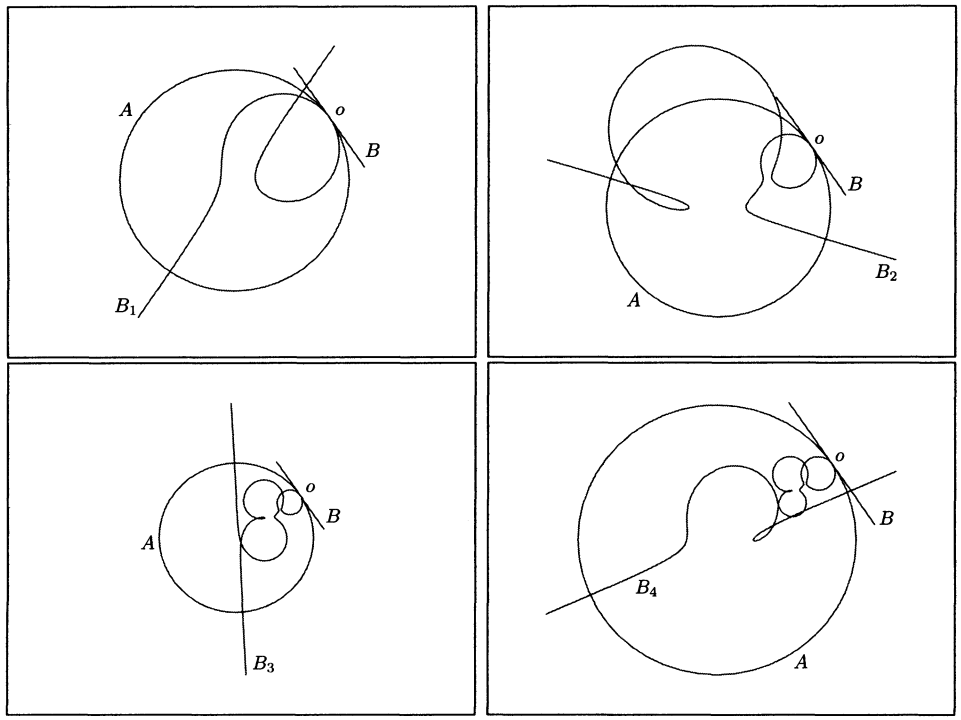


FIGURE 11. $(A, B) = E[2,\ 0, 6]$

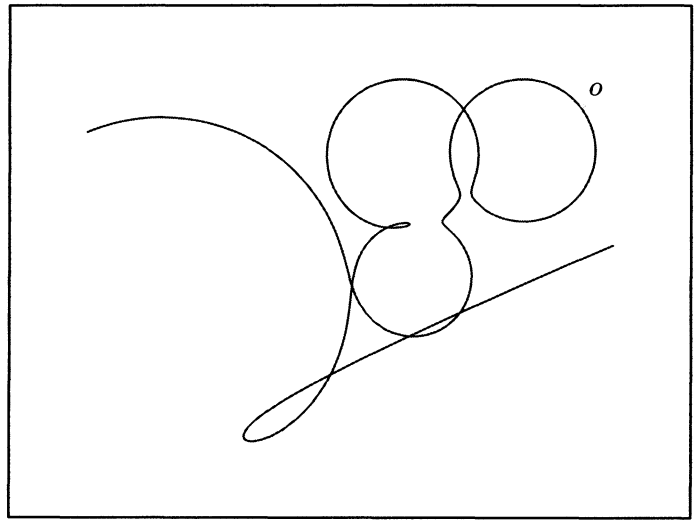


FIGURE 12. Un détail de $B_4$

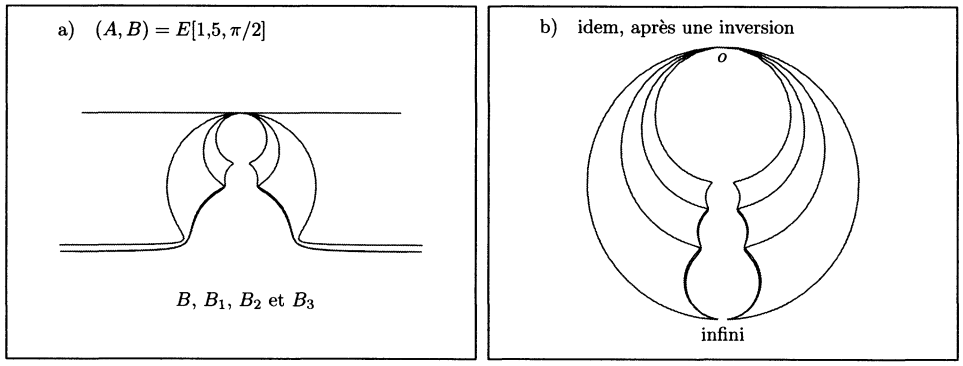


FIGURE 13

Considérons maintenant l'extension maximale de $B_n$, $n \geqslant 1$, dans $\overline{\Delta}$. C'est une courbe compacte lisse, contenue dans $\Delta$, sauf pour les points $m$ et $\infty$, où elle est tangente au cercle $\partial\Delta$. Notons $G_n \subset \Delta$ le domaine de bord $B_n$. On a les relations d'emboîtement :

$$\overline{G_{n+1}} \subset G_n \cup \{m, \infty\},$$

et $f$ induit un isomorphisme :

$$f : G_n \smallsetminus \overline{G_{n+1}} \longrightarrow G_{n+1} \smallsetminus \overline{G_{n+2}}. \tag{34}$$

Si $A' = E(s')$ et si $B'$ est la tangente en $i \sinh s'$ à $A'$, la même construction s'applique : on obtient des domaines emboîtés $G'_n \subset \Delta'$, de bords $B'_n$, avec des propriétés analogues de l'indicateur $f'$.
On a alors facilement le cas très particulier suivant du Théorème 5.1 :

***Lemme 5.10.*** — *Soit $B$ et $B'$ les tangentes à $A = E(s)$ et $A' = E(s')$, en $i \sinh s$ et $i \sinh s'$ respectivement. Si $\phi$ est une équivalence $(A, B) \to (A', B')$, $\phi$ est l'identité.*

*Démonstration.* — C'est une variante de la démonstration du § 3.4. On conserve les notations qui précèdent l'énoncé. En utilisant le fait que $\Delta$ est contenu dans le bassin d'attraction du point fixe $m = i \sinh s$ de $f$, la propriété analogue de $\Delta'$ et le fait qu'une équivalence $\phi$ de $(A, B)$ sur $(A', B')$ envoie, sur un voisinage fixé de $m$, les courbes $B_n$ sur les courbes $B'_n$, on montre que $\phi$ se prolonge en un isomorphisme

$$\phi : \Delta \longrightarrow \Delta'.$$

Une dernière réflexion par rapport aux cercles $\partial\Delta$ et $\partial\Delta'$ permet de prolonger $\phi$ en un automorphisme de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, qui conserve $\mathbb{C}$ : $\phi$ est une similitude, donc l'identité. □

***Exercice 5.11.*** — Avec les notations du Lemme 5.10, montrer que l'indicateur de la paire $(A, B)$ n'est pas un carré itératif. En déduire que les indicateurs des paires $(A, B)$ et $(A', B')$ ne sont pas conjugués si $A \neq A'$.

## Appendice : complément au Chapitre 2

**A.1. Introduction.** — Dans cet appendice, nous faisons un bilan des résultats connus sur la classification des paires d'arcs analytiques. C'est peut-être utile, car la classification formelle donnée par Kasner [**15**] et Pfeiffer [**22**] comporte (je crois) une (légère) erreur, et Nakai [**19**] ne traite qu'en quelques mots le cas des paires transverses, résonnantes ou non. La présentation, qui consiste à se ramener à la classification bien établie des difféomorphismes, via les indicateurs, est empruntée [**19**][(8)]. Antérieurement, Voronin [**28**] avait utilisé une méthode analogue pour classer les paires d'involutions *holomorphes* de $(\mathbb{C}, 0)$.

**A.2. Classification formelle des difféomorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$.** — On la rappelle sans démonstration ; voir [**6**], [**14**], [**17**], [**19**].

Soit $f \in \widehat{\mathbf{G}}$. Le *multiplicateur* $\mu(f)$ de $f$ est le coefficient $a_1 \in \mathbb{C}^*$ dans le développement :

$$f(z) = a_1 z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n.$$

C'est un invariant formel. On a :

$$\mu(f \circ g) = \mu(f)\mu(g); \qquad \mu(S \circ f \circ S) = \overline{\mu(f)} \quad \text{si } S \in \widehat{\mathbf{S}}. \tag{35}$$

On dit que $f$ est *résonnant* si $\mu(f)$ est une racine de l'unité, *non résonnant* sinon.

Si $f \in \widehat{\mathbf{G}}$ est résonnant et n'est pas d'ordre fini, son multiplicateur $\mu(f)$ est une racine primitive $m$-ième de l'unité, $m \in \mathbb{N}^*$, et $f^{(m)}$ est tangent à l'identité à un ordre fini $q \geqslant 1$. Le *type* $\tau(f)$ de $f$ est défini par $\tau(f) = q + 1$ ; c'est un invariant formel. On remarque que $q$ est un multiple de $m$, donc que $\mu(f)$ est une racine $q$-ième, pas forcément primitive, de l'unité.

On montre que tout $f \in \widehat{\mathbf{G}}$, de type $q + 1 \geqslant 2$, est formellement conjugué à un difféomorphisme de la forme :

$$f(z) = \mathrm{e}^{i2\pi k/q} z(1 + z^q - \kappa z^{2q} + \cdots) \tag{36}$$

Le nombre $\kappa \in \mathbb{C}$ est invariant par conjugaison formelle. J'appellerai *résidu* de $f$ le nombre :

$$\text{rés}(f) = \frac{q+1}{2} + \kappa. \tag{37}$$

C'est le résidu normalisé de [**19**]. On a :

$$\text{rés}(S \circ f \circ S) = \overline{\text{rés}(f)} \quad \text{si } S \in \widehat{\mathbf{S}}. \tag{38}$$

***Théorème A.1.*** — *Deux éléments de $\widehat{\mathbf{G}}$ sont formellement conjugués si et seulement si 1) ils ont le même multiplicateur et 2) dans le cas où ils sont résonnants et d'ordre infini, ils ont le même type et le même résidu.*

---

(8) L'exposé de [**19**] comporte plusieurs énoncés « évidemment faux ». D'autre part, je n'ai pas repris sa notion de « relation associative » qui ne me semble pas simplifier les choses.

**A.3. Paires d'ordre fini.** — C'est un cas qu'il vaut mieux écarter d'emblée. Ce qui est dit dans ce paragraphe vaut aussi dans le cas formel.

***Proposition A.2.*** — *Toute paire d'ordre fini est équivalente à une paire de droites.*

*Démonstration.* — Soit $(A, B)$ une paire d'ordre $q$, de multiplicateur $v = \mathrm{e}^{i2\pi k/q}$, $k \in \{0, \dots, q-1\}$. Soit $u$ son indicateur. On peut supposer $A = \mathbb{R}$. La méthode classique pour linéariser $u$ consiste à introduire :

$$h = \frac{1}{q} \sum_{l=0}^{q-1} v^{-l} u^{(l)}.$$

En effet, on a $\mu(h) = 1$ et $h \circ u = vh$. Compte tenu de $S_{\mathbb{R}} \circ u = u^{-1} \circ S_{\mathbb{R}}$, on a :

$$S_{\mathbb{R}} \circ h \circ S_{\mathbb{R}} = \frac{1}{q} \sum_{l=0}^{q-1} v^{l} u^{(-l)} = h,$$

donc $h$ est réelle et $(h(A), h(B)) = (\mathbb{R}, h(B))$ a pour indicateur $vI$ : $h(B)$ est la droite qui fait l'angle $-\pi p/q$ modulo $\pi$ avec $\mathbb{R}$. □

Une paire d'ordre fini a un « gros » groupe d'automorphismes. Toutes les transformations réelles de la forme $h(z) = z(1 + \sum_{k \geqslant 1} h_k z^{kq})$ conservent la paire de droites $(\mathbb{R}, \mathrm{e}^{-i\pi p/q}\mathbb{R})$. C'est un cas exceptionnel.

**A.4. Difféomorphismes modèles.** — Chaque classe formelle a des représentants analytiques, mais certains sont distingués par le fait qu'ils ont le maximum de « symétries » analytiques. On donne ci-dessous les modèles les plus couramment cités.

Un difféomorphisme formel non résonnant, ou résonnant et d'ordre fini, est formellement conjugué à la similitude :

$$f_u(z) := uz$$

de même multiplicateur. Pour $q \in \mathbb{N}^*$, on notera :

$$\omega_q = f_{\mathrm{e}^{i2\pi/q}}.$$

Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et tout $r \in \mathbb{C}$, on introduit le champ de vecteurs :

$$X_{q,r} := iz^{q+1}(1 + irz^q)^{-1} \frac{d}{dz}.$$

On vérifie que :

$$(f_u)_* X_{q,r} = u^{-q} X_{q, ru^{-q}}. \tag{39}$$

Un difféomorphisme formel, tangent à l'ordre $q \geqslant 1$ à l'identité et de résidu $r$, est formellement conjugué à :

$$f_{q,r} := \exp X_{q,r}.$$

Compte tenu de (39), on a $\omega_q^{(k)} \circ f_{q,r} = f_{q,r} \circ \omega_q^{(k)}$ quel que soit $k \in \mathbb{Z}$. Un difféomorphisme formel de type $q+1$, de multiplicateur $e^{i2\pi k/q}$ et de résidu $r$, est formellement conjugué à :

$$f_{q,k,r} := \omega_q^{(k)} \circ f_{q,r} = f_{q,r} \circ \omega_q^{(k)}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{C}$, on définit l'itéré d'ordre $t$ de $f_{q,r}$ par :

$$f_{q,r}^{(t)} = \exp(tX_{q,r}).$$

En posant $t = u^{-q}$ dans (39), on obtient $f_{q,rt}^{(t)} = f_u \circ f_{q,r} \circ f_u^{-1}$, donc :

$$\text{rés}(f_{q,rt}^{(t)}) = \text{rés}(f_{q,r}), \quad (t \in \mathbb{C}^*).$$

Si $f \in \widehat{\mathbf{G}}$ est tangent à l'identité, de type $q+1$ et de résidu $r$, on peut écrire $f = \phi \circ f_{q,r} \circ \phi^{-1}$, $\phi \in \widehat{\mathbf{G}}$. Pour tout $t \in \mathbb{C}$, on définit *l'itéré d'ordre t* de $f$ par

$$f^{(t)} = \phi \circ f_{q,r}^{(t)} \circ \phi^{-1};$$

c'est indépendant du choix de $\phi$. L'avant-dernière formule donne :

$$\text{rés}(f^{(t)}) = \frac{\text{rés}(f)}{t}, \quad (t \in \mathbb{C}^*). \tag{40}$$

Si $f \in \mathbf{G}$ est tangent à l'identité, on dit que $f$ est *pleinement itérable* si $f^{(t)} \in \widehat{\mathbf{G}}$ converge pour tout $t \in \mathbb{C}$. On a rappelé dans le § 2.3 trois théorèmes importants à ce sujet.

Le lemme suivant complète le Théorème A.1 :

***Lemme A.3.*** — *Si $u$ n'est pas une racine de l'unité, $\widehat{C}(f_u) = C(f_u)$ ; c'est le groupe des similitudes. Pour tout $q \geqslant 1$, tout $k \in \{0, \ldots, q-1\}$ et tout $r \in \mathbb{C}$, $\widehat{C}(f_{q,k,r}) = C(f_{q,k,r})$ ; c'est le produit direct du groupe cyclique engendré par $\omega_q$ et du groupe des itérés d'ordre complexe de $f_{q,r}$.*

**A.5. Classification formelle des paires.** — On utilise les notations du § A.4. Remarquons que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, tout $r \in \mathbb{C}$, tout $t \in \mathbb{C}$ :

$$(S_{\mathbb{R}})_* tX_{q,r} = -\bar{t}X_{q,-\bar{r}}.$$

On a donc les formules :

$$S_{\mathbb{R}} \circ f_u \circ S_{\mathbb{R}} = f_{\bar{u}}\,; \quad S_{\mathbb{R}} \circ \omega_q^{(k)} \circ f_{q,r}^{(t)} \circ S_{\mathbb{R}} = \omega_q^{(-k)} \circ f_{q,-\bar{r}}^{(-\bar{t})}\,. \tag{41}$$

***Lemme A.4.*** — *Un élément $f$ de $\widehat{\mathbf{G}}$ est un indicateur de paire formelle si et seulement 1) $|\mu(f)| = 1$ et 2) le cas échéant* $\text{rés}(f) \in i\mathbb{R}$.

Ce résultat est faux dans le cas analytique ; voir [**19**] pour les paires tangentes, et les remarques du § A.7.

*Démonstration.* — Les formules (35), (38) et (40) montrent que les conditions sont nécessaires.

Les formules (41) donnent la réciproque. En effet, si $|u| = 1$, si $r$ est imaginaire pur et pour $t = 1$, on obtient :

$$S_{\mathbb{R}} \circ f_u \circ S_{\mathbb{R}} = f_u^{-1}; \quad S_{\mathbb{R}} \circ f_{q,k,r} \circ S_{\mathbb{R}} = f_{q,k,r}^{-1}.$$

Il en résulte que, pour $f = f_u$ ou $f = f_{q,k,r}$, $f$ est l'indicateur de la paire $(S_{\mathbb{R}}, S_{\mathbb{R}} \circ f)$. □

Deux paires formelles formellement équivalentes ont des indicateurs formellement conjugués. La réciproque est seulement presque vraie :

***Théorème A.5.*** — *Les paires formelles dont les indicateurs appartiennent à une classe de conjugaison formelle donnée forment une classe d'équivalence formelle, sauf si elles sont résonnantes de type impair. Dans ce cas-ci, elles se répartissent en deux classes d'équivalence formelle.*

*Démonstration.* — On utilise les remarques du § 1.9 et le Lemme A.3. On écarte le cas des paires d'ordre fini, déjà traité. Il suffit de classer formellement les paires d'indicateur donné $f$, quand $f$ est un des difféomorphismes modèles du § A.4.

Supposons d'abord $f = f_{e^{i2\pi t}}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Compte-tenu de (41), les paires formelles d'indicateur $f$ sont les paires $(S, S \circ f)$ avec $S = S_{\mathbb{R}} \circ f_{e^{it'}}$, $t' \in \mathbb{R}$. Les paires formellement équivalentes à $(S_{\mathbb{R}}, S_{\mathbb{R}} \circ f)$ sont les paires $(S, S \circ f)$ avec

$$S = f_u \circ S_{\mathbb{R}} \circ f_u^{-1} = f_{\overline{u}/u}.$$

Autrement dit, les rotations opèrent simplement et transitivement sur l'ensemble des paires d'indicateur $f$ et les homothéties les conservent.

Soit maintenant $q \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{0, \dots, q-1\}$, $r \in i\mathbb{R}$ et :

$$f = f_{q,k,r} = \omega_q^{(k)} \circ g; \quad g = f_{q,r}.$$

Comme $r$ est imaginaire pur, (41) donne, si $l \in \{0, \dots, q-1\}$ et $t \in \mathbb{C}$ :

$$S_{\mathbb{R}} \circ \omega_q^{(l)} \circ g^{(t)} \circ S_{\mathbb{R}} = \omega_q^{(-l)} \circ g^{(-\overline{t})}.$$

Les paires formelles d'indicateur $f$ sont donc les paires $(S, S \circ f)$ avec

$$S = S_{\mathbb{R}} \circ \omega_q^{(l)} \circ g^{(t)}, \quad (l \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}).$$

Les paires formellement équivalentes à cette paire sont les paires :

$$\omega_q^{(m)} \circ g^{(s)} \circ S_{\mathbb{R}} \circ \omega_q^{(l)} \circ g^{(t)} \circ \omega_q^{(-m)} \circ g^{(-s)} = S_{\mathbb{R}} \circ \omega_q^{(l-2m)} \circ g^{(t-(s+\overline{s}))},$$

où $m$ décrit $\mathbb{Z}$ et $s$ décrit $\mathbb{C}$.

Étant donnés $l' \in \mathbb{Z}$ et $t' \in \mathbb{R}$, l'équation $t - (s + \overline{s}) = t'$ est résoluble en $s \in \mathbb{C}$. L'équation $l - 2m = l'$ modulo $q$ est résoluble en $m$ si $q$ est impair. Si $q$ est pair, elle n'est résoluble que si $l - l'$ est pair. □

La démonstration montre de plus que le groupe des automorphismes formels d'une paire formelle d'indicateur $f$ est indépendant de cette paire. Il est engendré par les itérés de $g$, d'ordres imaginaires purs, et *dans le cas où $q$ est pair*, l'unique involution de $\widehat{C}(f)$.

Les modèles de paires qu'on vient de décrire ne sont pas tous explicites, mais ils ont le plus de symétries analytiques possibles. Les modèles plus simples suivants n'ont pas cette propriété :

***Théorème A.6* (Kasner, Pfeiffer).** — *Toute paire formelle est formellement équivalente à une paire de droites ou à une et une seule des paires suivantes :*

$$A := \{y = \varepsilon x^{q+1} + l x^{2q+1}\}, \quad B := \{\sin(k\pi/q)\, x - \cos(k\pi/q)\, y = 0\},$$

*où $q \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{0, \dots, q-1\}$, $l \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon = 1$ si $q$ est impair, $\varepsilon = \pm 1$ si $q$ est pair.*

Je n'ai pas repéré dans [**15**] ni [**22**] l'invariant $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ quand l'ordre de contact est pair .

*Démonstration.* — Un calcul analogue à celui du § 2.1 montre que :

$$S_A(z) = \overline{z}\left(1 + 2i\varepsilon\overline{z}^q + (2i\varepsilon)^2\left(\frac{q+1}{2} - i\frac{l}{2}\right)\overline{z}^{2q} + \cdots\right).$$

On a $S_B(z) = \mathrm{e}^{-2i\pi k/q} S_{\mathbb{R}}$, d'où l'indicateur

$$f(z) = \mathrm{e}^{-2i\pi k/q} z\left(1 + 2i\varepsilon z^q + (2i\varepsilon)^2\left(\frac{q+1}{2} - i\frac{l}{2}\right)z^{2q} + \cdots\right).$$

Si $\varepsilon = \pm 1$ est fixé, on obtient bien tous les indicateurs de type fini possibles, à conjugaison formelle près, une et une seule fois.

Notons, $q$, $k$ et $l$ étant fixés, $(A_\pm, B)$ la paire correspondant à $\varepsilon = \pm 1$ ; elles ont des indicateurs différents mais formellement conjugués. Si $q$ est impair, $z \mapsto -z$ induit une équivalence entre $(A_+, B)$ et $(A_-, B)$. Supposons maintenant $q$ pair et soit

$$z = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n Z^n$$

une substitution qui transforme $(A_+, B)$ en $(A_-, B)$. La conservation de $B$ donne :

$$\mathrm{Im}(a_n \mathrm{e}^{i(n-1)\pi k/q}) = 0 \tag{42}$$

pour tout $n$. En particulier, $\mathrm{Im}\, a_1 = \mathrm{Im}\, a_{q+1} = 0$. On calcule maintenant l'équation de l'image de $A_+$. Modulo $o(Y)$ et $o(X^{q+1})$, on obtient :

$$a_1 Y + \sum_{n=2}^{q+1} \mathrm{Im}(a_n) X^n = a_1^{q+1} X^{q+1} + \cdots.$$

On a donc $\mathrm{Im}(a_n) = 0$ puis, compte tenu de (42), $a_n = 0$ pour $n = 2 \dots q$. Comme $\mathrm{Im}(a_{q+1}) = 0$, l'équation se réduit à $Y = a_1^q X^{q+1} + \dots$ ; comme $q$ est pair, $a_1^q > 0$ et la substitution cherchée n'existe pas. □

**A.6. Classification des paires de type fini.** — Les Théorèmes 2.7 et 2.8 ont la conséquence suivante :

***Théorème A.7* (Nakai).** — *Soit $f \in \mathbf{G}$ un indicateur de paire de type $q+1$ et $N(f) \geqslant 1$ le nombre des classes d'équivalence des paires d'indicateurs conjugués à $f$. Si $f^{(q)}$ est pleinement itérable, $N(f) = 1$ si $q$ est impair et $N(f) = 2$ si $q$ est pair. Si $f^{(q)}$ n'est pas pleinement itérable, $N(f) = 2$ si $q$ est impair ; si $q$ est pair $N(f) = 2$ ou $4$ selon les cas.*

*Démonstration.* — Si $f^{(q)}$ est pleinement itérable, $f^{(q)}$ est conjugué à l'un des modèles du § A.4 d'après le Théorème 2.8, donc aussi $f$. Alors $C(f) = \widehat{C}(f)$ et le Théorème A.5 donne le résultat.

On suppose maintenant que $f^{(q)}$ n'est pas pleinement itérable. D'après le Théorème d'Écalle-Liverpool, le sous-groupe des éléments de $C(f)$ tangents à l'identité est engendré par un élément $h$ de type $q+1$. L'ensemble $M(f) = \{\mu(\phi),\ \ \phi \in C(f)\}$ est un groupe cyclique d'ordre $\rho$, un diviseur de $q$. Soit $\psi \in C(f)$ de multiplicateur $\mathrm{e}^{i2\pi/\rho}$. Le groupe $C(f)$ est engendré par $\psi$ et $h$.

Soit $(S, S \circ f)$ une paire d'indicateur $f$. Tout élément $\phi$ de type fini de $C(f)$ a un résidu $\in i\mathbb{R}$. On en déduit (la vérification est formelle, voir alors la démonstration du Théorème A.5) que $S \circ \phi \circ S = \phi^{-1}$ pour tout $\phi \in C(f)$, donc que

$$P(\phi) = (S \circ \phi, S \circ \phi \circ f)$$

est une paire, qu'on obtient ainsi toutes les paires d'indicateur $f$, et que $\phi_1$ et $\phi_2$ définissent des paires équivalentes si et seulement si $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ est un carré dans $C(f)$.

Tout $\phi \in C(f)$ s'écrit $\phi = \psi^{(m)} \circ h^{(n)}$, $m, n \in \mathbb{Z}$. En réduisant modulo les carrés, selon la parité de $m$ et $n$, on voit que toute paire d'indicateur $f$ est équivalente à l'une des suivantes :

$$P(I),\quad P(h),\quad P(\psi),\quad P(\psi \circ h)\,.$$

Si $\rho$ est impair (c'est le cas si $q$ est impair), $\mu \mapsto \mu^2$ est un automorphisme de $M(f)$. En particulier $\mu(\psi)$ est un carré dans $M(f)$ et on peut écrire $\psi = \phi^{(2)} \circ h^{(n)}$ ; selon la parité de $n$, $\psi$ ou $\psi \circ h$ est un carré. La liste se réduit à $P(I)$, $P(h)$. Mais $h$ n'est un carré dans $C(f)$ puisqu'il n'a pas de racine itérative et que $-1 \notin M(f)$ : $N(f) = 2$, les deux classes provenant de la même classe formelle.

Si $q$ et $\rho$ sont pairs, $-1 \in M(f)$. Si $h$ est un carré de $C(f)$, $N(f) = 2$ ; sinon $N(f) = 4$. □

**A.7. Remarques sur les paires non résonnantes.** — Il s'agit des paires $(A, B)$ de multiplicateur $\mathrm{e}^{i2\pi t}$ où $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ; les deux arcs $A$ et $B$ font un angle $-\pi t$ modulo $\pi$, et c'est le seul invariant formel de ces paires.

Le problème de la classification analytique est bien plus délicat. Pfeiffer [**23**] a montré le premier l'existence de difféomorphismes non résonnants qui ne sont pas linéarisables, *i.e.* qui ne sont pas conjugués à une similitude. Il a montré dans le

même article qu'il en existait qui étaient des indicateurs de paires. La théorie des difféomorphismes non résonnants a fait depuis de grands progrès, mais il ne semble pas qu'on l'ait appliquée aux paires. On se contentera de quelques commentaires.

Si $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est un nombre de Bruno, un difféomorphisme de multiplicateur $e^{i2\pi t}$ est linéarisable (Théorème de Bruno, voir [**30**]), donc une paire de multiplicateur $e^{i2\pi t}$ est équivalente à une paire de droites.

Si $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas un nombre de Bruno, l'ensemble des difféomorphismes de multiplicateur $e^{i2\pi t}$ se scinde en une infinité non dénombrable de classes de conjugaison analytique (Théorème de Yoccoz, voir [**30**]).

Soit encore $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f \in \mathbf{G}$, de multiplicateur $e^{i2\pi t}$. Supposons que $f$ n'est pas linéarisable, et notons :

$$\mathrm{M}(f) = \{\mu(g), \quad g \in C(f)\}.$$

C'est une partie du cercle unité car, si $g \in C(f)$ et $|\mu(g)| \neq 1$, $g$ est linéarisable (en vertu du Théorème de Koenigs, voir par exemple [**8**]), donc aussi $f$. C'est un sous-groupe propre du cercle unité car il ne contient aucun nombre de Bruno (irrationnel). Si de plus $f$ est l'indicateur d'une paire $(S, S \circ f)$, on voit facilement, selon un raisonnement qu'on a fait plusieurs fois et compte-tenu du fait que $|\mu(g)| = 1$ si $g \in C(f)$, que $(S \circ g, S \circ g \circ f)$ est une paire pour tout $g \in C(f)$, qu'on obtient ainsi toutes les paires d'indicateur $f$, et que $g_1, g_2 \in C(f)$ définissent des paires équivalentes si et seulement si $g_1 \circ g_2^{-1}$ est un carré dans $C(f)$. L'ensemble des classes d'équivalence des paires dont l'indicateur est conjugué à $f$ est donc en bijection avec :

$$\mathrm{M}(f) \,/\, \{u^2, \quad u \in \mathrm{M}(f)\}.$$

Pérez-Marco [**21**] a montré qu'il existe $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f \in \mathbf{G}$ de multiplicateur $e^{i2\pi t}$ tel que $\mathrm{M}(f)$ ne soit pas dénombrable.

Les résultats de Yoccoz et de Pérez-Marco qu'on a cités suggèrent que les questions suivantes ont des réponses positives ; les spécialistes des méthodes de [**30**] et [**21**] devraient pouvoir se prononcer.

(1) *Si $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas un nombre de Bruno, existe-t-il $f \in \mathbf{G}$, de multiplicateur $e^{i2\pi t}$, qui ne soit pas un indicateur de paire ?*

(2) *Si $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas un nombre de Bruno, existe-t-il une infinité non dénombrable de paires de multiplicateur $e^{i2\pi t}$, deux à deux non équivalentes ?*

(3) *Existe-t-il $f \in \mathbf{G}$ et une infinité non dénombrable de paires d'indicateur $f$, deux à deux non équivalentes ?*

**A.8. Remarque historique.** — Le problème de la classification formelle des paires a été étudié d'abord par Kasner, voir [**15**] dans les comptes rendus du 5ème Congrès International des Mathématiciens (1912). Il traite le cas non résonnant et le cas des paires tangentes, qu'il nomme « horn angles ». Il considère aussi le cas résonnant général, mais sans le résoudre. Dans tous les cas, il pose le problème de la convergence

des transformations normalisantes. Le cas transverse résonnant est traité par Pfeiffer [**22**].

Birkhoff connaissait et appréciait les travaux de Kasner, voir [**7**], pages 309 et 310, voir aussi Davis [**9**], pages 212 et 213. On peut aussi remarquer que le premier exemple de difféomorphisme formellement mais non analytiquement linéarisable a été donné par Pfeiffer [**23**] en 1915, à propos d'un des problèmes posés par Kasner. Cet article est cité dans la plupart des livres de dynamique holomorphe. Dans cet article, Pfeiffer dit suivre une suggestion de Birkhoff!

Finalement, en 1939, Birkhoff résout le problème de la classification analytique des difféomorphismes résonnants, comme en passant, dans un article dont le titre « Sur les fonctions auto-équivalentes ... » n'évoque ni la géométrie conforme, ni la dynamique, ni la classification des difféomorphismes. Ni Birkhoff, ni Kasner, ni personne n'appliquera les résultats de cet article au problème des paires d'arcs tangents. En 1995, Nakai [**19**] applique la théorie d'Écalle-Voronin au problème.

Qui a lu l'article de Birkhoff avant 1995 ? En tout cas, il n'a pas trouvé son lecteur avant cette date.

## Références

[1] P. Ahern, J.-P. Rosay – Entire functions, in the classification of differentiable germs tangent to the identity, in one or two variables, Trans. Amer. Math. Soc., 347 (1995), 543–572.

[2] I. N. Baker – Permutable power series and regular iteration, J. Australian Math. Soc., 2 (1962), 265–294.

[3] I. N. Baker – Fractional iteration near a fixpoint of multiplier 1, J. Australian Math. Soc., 4 (1964), 143–148.

[4] I. N. Baker – Non-embeddable functions with a fixpoint of multiplier 1, Math. Zeitschr., 99 (1967), 377–384.

[5] I. N. Baker, P. Bhattacharyya – On a class of non-embeddable entire functions, J. Ramanujan Math. Soc., 3 (2) (1988), 151–159.

[6] G. D. Birkhoff – Déformations analytiques et fonctions auto-équivalentes, Annales de l'Inst. H. Poincaré, 9 (1939), 51–122.

[7] G. D. Birkhoff – *Collected Mathematical Papers,* vol. iii, Dover (1968).

[8] L. Carleson, T. W. Gamelin – *Complex Dynamics,* Universitext, Springer 1993.

[9] P. J. Davis – *The Schwarz function and its applications* – the Carus Mathematical Monographs n° 17, the Mathematical Association of America 1974.

[10] J. Écalle – Quelques résultats nouveaux en théorie de la $\mathbb{C}$-itération, C. R. Acad. Sc. Paris, 272 (1971), 225–227.

[11] J. Écalle – Théorie itérative : introduction à la théorie des invariants holomorphes, J. Math. Pures et App., 54 (1975), 183–258.

[12] J. Écalle – Les fonctions résurgentes, tomes I, II, III, Publ. Math. d'Orsay, 1981, 1985.

[13] P. M. Elizarov – Orbital analytic nonequivalence of saddle resonant vector fields in $\mathbb{C}^2$, Math. USSR-Sb. 51 (1985), 533–547.

[14] Y. S. IL'YASHENKO – Nonlinear Stokes phenomena, Adv. in Soviet. Math. 14, A. M. S. 1993, 1–55.

[15] E. KASNER – Conformal geometry, Proc. Fifth Int. Cong. Math., Cambridge 1912, vol 2, p. 81.

[16] L. S. O. LIVERPOOL – Fractional iteration near a fixpoint of multiplier 1, J. London Math. Soc. 2, 9 (1975), 599–609.

[17] F. LORAY – Cinq leçons sur la structure transverse d'une singularité de feuilletage holomorphe en dimension 2 complexe, Cours d'intégration et monographies du Réseau Européen Red TMR Sing. Ec. Dif. et Feuilletages, 1 (1998).

[18] B.MALGRANGE – Travaux d'Écalle et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques, Séminaire Bourbaki, exposé n° 582 (1981), Astérisque 92–93, 1982, 59–73.

[19] I. NAKAI – The classification of curvilinear angles in the complex plane and the groups of $\pm$ holomorphic diffeomorphisms, Ann. Fac. Sc. Toulouse, Vol VII, n° 2 (1998), 313–334.

[20] T. OSHIMA – On analytic equivalence of glancing hypersurfaces, Sci. Papers College Ed. Univ. Tokyo, 28 (1978), 51–57.

[21] R. PÉREZ-MARCO – Non linearizable holomorphic dynamics having an uncountable number of symmetries, Invent. Math., 119 (1995), 67–127.

[22] G. A. PFEIFFER – On the conformal geometry of analytic arcs, Amer. J. Math., 37 (1915), 395–430.

[23] G. A. PFEIFFER – On the conformal mapping of curvilinear angles. The functional equation $\phi(f(x)) = a_1\phi(x)$, Trans. Amer. Math. Soc., 18 (1917), 185–198.

[24] S. H. SCHOT – Aberrancy : geometry of the third derivative, Math. Mag., 51 (1978), 259–275.

[25] A.A. SHCHERBAKOV – Germs of maps, analytically not equivalent with their formal normal form, Funct. Anal. Appl., 16 (1982), 155–157.

[26] G. SZEKERES – Fractional iteration of entire and rational functions, J. Australian Math. Soc., 4 (1964), 129–142.

[27] S. M. VORONIN – Analytic classification of germs of conformal mappings $(\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ with identity linear part, Funct. Anal. Appl., 15 (1981), 1–13.

[28] S. M. VORONIN – Analytic classification of pairs of involutions and its applications, Funct. Anal. Appl., 16 (1982), 94–100.

[29] S. M. WEBSTER – Double valued reflection in the complex plane, L'Ens. Math., 42 (1996), 25–48.

[30] J.-C. YOCCOZ – *Petits diviseurs en dimension* 1, Astérisque, 231, Soc. Math.de France 1995.

---

J.-M. TRÉPREAU, UMR 7586 du CNRS, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris
*E-mail :* trepreau@math.jussieu.fr