

Astérisque

LUC ILLUSIE

**Exposé IV (appendice) : Réduction semi-stable ordinaire,
cohomologie étale p -adique et cohomologie de de Rham**

Astérisque, tome 223 (1994), Séminaire Bourbaki, exp. n° 4
- appendice, p. 209-220

http://www.numdam.org/item?id=AST_1994__223__209_0

© Société mathématique de France, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Appendice

**RÉDUCTION SEMI-STABLE ORDINAIRE,
COHOMOLOGIE ÉTALE p -ADIQUE ET
COHOMOLOGIE DE DE RHAM
D'APRÈS BLOCH-KATO [BK] ET HYODO [H]**

par **Luc Illusie**

1. Réduction semi-stable ordinaire.

1.0. Soient A un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions K de caractéristique zéro et de corps résiduel k parfait de caractéristique $p > 0$. On note $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de k , σ son automorphisme de Frobenius. Soit $X \rightarrow S = \text{Spec } A$ un morphisme propre, à *réduction semi-stable* (ce qui signifie que, localement pour la topologie étale sur X et sur S , il existe des entiers $1 \leq r \leq n$ tels que X soit isomorphe au sous-schéma fermé de $S[t_1, \dots, t_n]$ d'équation $t_1 \dots t_r = \pi$, où π une uniformisante de A). Le schéma X est régulier, plat sur S , sa fibre générique X_K est lisse, et sa fibre spéciale $Y = X \otimes_A k$ est un diviseur à croisements normaux dans X . On sait alors définir (cf. [HK, 2.5, 1.1, 4.1]) un *complexe de de Rham*

$$(1.1) \quad \omega_{X/S}$$

et un *complexe de de Rham-Witt*

$$(1.2) \quad W\omega_Y = \lim \text{proj } W_n\omega_Y$$

qui, dans le cas où X est lisse, coïncident respectivement avec le complexe de de Rham usuel de X/S et le complexe de de Rham-Witt usuel de Y . Les composantes de (1.1) sont localement libres de type fini, et $\omega_{X/S}^i = \Lambda^i \omega_{X/S}^1$;

pour X d'équation $t_1 \dots t_r = \pi$ dans $S[t_1, \dots, t_n]$, $\omega_{X/S}^1$ est le \mathcal{O}_X -module engendré par les dt_i/t_i ($1 \leq i \leq r$) et dt_i ($i > r$) soumis à l'unique relation $\sum_{1 \leq i \leq r} dt_i/t_i = 0$. On a $\omega_{X/S} = u_* \Omega_{U/S}$ où $u : U \longrightarrow X$ est l'ouvert de lissité de X/S . En particulier, $\omega_{X/S}$ induit sur la fibre générique le complexe de de Rham usuel. D'autre part, la composante de degré zéro de $W_n \omega_Y$ est $W_n \mathcal{O}_Y$, et

$$(1.3) \quad W_1 \omega_Y = \omega_Y$$

où $\omega_Y := \omega_{X/S} \otimes_A k$. Toutefois, contrairement à ce que la notation peut suggérer, le complexe (1.2) ne dépend pas uniquement de Y , mais de Y muni de sa "log structure naturelle" [HK]. Comme dans le cas usuel (Y lisse), il est muni d'opérateurs F et V en chaque degré vérifiant $FV = VF = p$ et $FdV = d$.

Le W -module gradué $H^*(Y, W\omega^\bullet)$ est de type fini sur W ; il s'identifie à la cohomologie cristalline du log schéma Y relativement aux vecteurs de Witt du log point $\text{Spec } k$ (loc. cit.). Il est muni d'un endomorphisme σ -linéaire Φ , le *Frobenius*, tel que $\Phi \otimes \mathbf{Q}_p$ soit bijectif; cet endomorphisme est induit par l'endomorphisme de $W\omega^\bullet$ défini par $p^i F$ en degré i . Il est également muni d'un endomorphisme W -linéaire N , appelé *monodromie*, qui est relié à Φ par la formule $N\Phi = p\Phi N$ (et est donc tel que $N \otimes \mathbf{Q}_p$ soit nilpotent). La monodromie jouera peu de rôle dans cet appendice.

DÉFINITION 1.4. — *Sous les hypothèses de (1.0), on dit que X a réduction ordinaire si*

$$H^j(Y, B\omega^i) = 0$$

pour tout i et tout j .

Quand X/S est lisse, cette condition ne dépend que de Y et signifie que Y est *ordinaire* au sens de [BK, 7.3] ou [IR, 4.13], i.e. vérifie $H^j(Y, B\Omega^i) = 0$ pour tout i et tout j .

PROPOSITION 1.5. — *Sous les hypothèses de 1.0 :*

- (a) *les conditions suivantes sont équivalentes :*
 - (i) *X a réduction ordinaire ;*

(ii) pour tout i et tout j l'endomorphisme F de $H^j(Y, W\omega^i)$ est bijectif. Si de plus $H^n(Y, W\omega^\cdot)$ est sans torsion pour tout n , elles sont aussi équivalentes à chacune des conditions suivantes :

(iii) pour tout n , le F -cristal $(H^n(Y, W\omega^\cdot), \Phi)$ est ordinaire, i. e. a mêmes polygones de Newton et de Hodge ;

(iv) pour tout n , le polygone de Newton du F -cristal $(H^n(Y, W\omega^\cdot), \Phi)$ coïncide avec le polygone de Hodge construit sur les nombres $\dim H^{n-i}(Y, \omega^i)$, $0 \leq i \leq n$.

(b) Si X a réduction ordinaire, alors, pour tout n , le F -module $(H^n(Y, W\omega^\cdot), F)$ admet une décomposition canonique

$$(1.5.1) \quad H^n(Y, W\omega^\cdot) \simeq \bigoplus_{i+j=n} H^j(Y, W\omega^i)(-i),$$

où, pour un F -module M , $M(-i)$ désigne le F -module $(M, p^i F)$.

La démonstration est analogue à celle de [BK, 7.3] ou [IR, 4.13].

Le critère ci-après, dû à Hyodo [H] (cf. [I2] pour quelques détails sur la démonstration), est souvent commode pour reconnaître une réduction ordinaire :

PROPOSITION 1.6. — *Sous les hypothèses de 1.0, supposons que le diviseur Y dans X soit somme de composantes Y_i lisses sur k , $1 < i < n$. Si I est une partie de $[1, n]$, notons Y_I l'intersection des Y_i pour $i \in I$. C'est un schéma propre et lisse sur k . Si, pour tout I , Y_I est ordinaire, alors X a réduction ordinaire.*

En particulier, si $\dim X/S = 1$, et si les composantes irréductibles de Y sont lisses, X a réduction ordinaire si la normalisée Y^\sim de Y est ordinaire (en fait, l'hypothèse de lissité sur les composantes est inutile, et l'ordinarité de Y^\sim équivaut au fait que X ait réduction ordinaire, [I2, loc. cit.]). Par exemple, si X est une courbe elliptique à mauvaise réduction de type multiplicatif, X a réduction ordinaire.

A partir du critère 1.6, ou plutôt de sa variante en égale caractéristique, on peut montrer [I2] qu'une intersection complète générique de multidegré donné dans un espace projectif fixé sur un corps est ordinaire.

2. Les résultats de Bloch-Kato [BK] et Hyodo [H].

Dans la situation de 1.0, avec X à réduction ordinaire, Hyodo [H], généralisant des résultats de Bloch-Kato [BK], met en relation la cohomologie de de Rham de X/S , $H^*(X, \omega_{X/S})$, la cohomologie de de Rham-Witt $H^*(Y, W\omega_Y)$, et la cohomologie étale p -adique de la fibre générique géométrique de X , au moyen des *cycles évanescents p -adiques* et des *faisceaux de Hodge-Witt logarithmiques*. Expliquons d'abord ce que sont ces objets.

2.1. Commençons par les cycles évanescents. Soient \bar{K} une clôture algébrique de K , \bar{A} le normalisé de A dans \bar{K} , qui est donc un anneau de valuation, dont le corps résiduel \bar{k} est une clôture algébrique de k . Soit X/S un schéma à réduction semi-stable, qu'on ne suppose pas propre pour l'instant. Posons

$$X_{\bar{K}} = X \otimes \bar{K}, \quad \bar{X} = X \otimes \bar{A}, \quad \bar{Y} = \bar{X} \otimes \bar{k} = Y \otimes \bar{k},$$

notons $\bar{i} : \bar{Y} \rightarrow \bar{X}, \bar{j} : X_{\bar{K}} \rightarrow \bar{X}$ les immersions canoniques. Les *cycles évanescents p -adiques* (mod p^n) sont les faisceaux étales sur \bar{Y} définis par

$$(2.1.2) \quad \Psi_n^s := \bar{i}^* R^s \bar{j}_*(\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}).$$

Ce sont les faisceaux de cohomologie du complexe des cycles évanescents

$$R\Psi_n := \bar{i}^* R\bar{j}_*(\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}).$$

Si X/S est propre, on a un isomorphisme naturel

$$H^*(\bar{Y}, R\Psi_n) \simeq H^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}),$$

d'où une suite spectrale, dite *suite spectrale des cycles évanescents*,

$$(2.1.3) \quad E_2^{ij} = H^i(\bar{Y}, \Psi_n^j) \Rightarrow H^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}).$$

Le groupe de Galois

$$G = \text{Gal}(\bar{K}/K)$$

opère sur $H^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})$. Il opère aussi sur les Ψ_n^s de manière compatible à son action sur \bar{Y} , et la suite spectrale des cycles évanescents est équivariante.

Contrairement à ce qui se passe dans le cadre ℓ -adique ($\ell \neq p$), si X/S est lisse, les faisceaux Ψ_n^s , pour $s \geq 1$, ne sont pas nuls en général. Bloch et Kato [BK] ont été les premiers à étudier leur structure. Leurs résultats ont ensuite été généralisés par Hyodo au cas semi-stable [H].

Un point essentiel est la construction de *générateurs* locaux des Ψ_n^s . Si x est une section locale de $\bar{i}^* \bar{j}_* \mathcal{O}^*$, il lui est associé, par la suite exacte de Kummer, une section $\{x\}$ de $\Psi_n^1(1)$ ($= \bar{i}^* R^1 \bar{j}_*(\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})(1)$). Si x_1, \dots, x_s sont des sections locales de $\bar{i}^* \bar{j}_* \mathcal{O}^*$, le cup-produit $\{x_1\} \dots \{x_s\}$ est une section locale de $\Psi_n^s(s)$, notée

$$\{x_1, \dots, x_s\}$$

et appelée *symbole*. Hyodo montre que $\Psi_n^s(s)$ est localement engendré par les symboles (il établit même le résultat analogue à chaque cran fini, \bar{K} étant remplacé par une extension finie de K). Il en résulte notamment que la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

induit des suites exactes

$$(2.1.4) \quad 0 \longrightarrow \Psi_1^s \longrightarrow \Psi_n^s \longrightarrow \Psi_{n-1}^s \longrightarrow 0.$$

Il découle de ces suites exactes et d'un dévissage délicat de $\Psi_1^s(s)$ [H 1.7] que, si X/S est propre, les $H^i(\bar{Y}, \Psi_n^j)$ sont de longueur finie, et que, par conséquent, la limite projective des suites spectrales (2.1.3) est une suite spectrale (G -équivariante), notée

$$(2.1.5) \quad E_2^{ij} = H^i(\bar{Y}, \Psi^j) \Rightarrow H^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_p).$$

2.2. Bien que \bar{X}/\bar{S} (où $\bar{S} = \text{Spec } A$) n'ait plus en général réduction semi-stable, \bar{X} , muni de sa log structure naturelle, est log lisse sur \bar{S} , et la fibre spéciale \bar{Y} (munie de la log structure induite) est de type de Cartier, cf. [HK]. On sait donc encore définir un complexe de de Rham-Witt [HK, n° 4]

$$(2.2.1) \quad W\omega_{\bar{Y}} = \lim \text{proj } W_n \omega_{\bar{Y}}.$$

On a

$$W_1 \omega_{\bar{Y}} = \omega_{\bar{Y}} = \omega_{\bar{Y}} \otimes_k \bar{k},$$

et plus généralement,

$$W_n\omega_{\bar{Y}} = W_n\omega_Y \otimes_{W_n} W(\bar{k}).$$

On dispose d'un homomorphisme canonique [HK, 4.6]

$$(2.2.2) \quad \text{dlog} : \bar{i}^* \bar{j}_* \mathcal{O}^* \longrightarrow W_n\omega_Y^1$$

(dans le langage des log structures, la source est M_Y^{gp}). On note

$$(2.2.3) \quad W_n\omega_{Y,\log}^i \subset W_n\omega_Y^i$$

le sous-faisceau étale de $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ -modules de $W_n\omega_Y^i$ localement engendré par les $d\log x_1 \dots d\log x_i$. Ces faisceaux sont les *faisceaux de Hodge–Witt logarithmiques* de \bar{Y} . On a une définition analogue pour Y , ou pour Y' , fibre spéciale de $X' = X \otimes A'$, A' l'anneau des entiers d'une extension finie K' de K . Dans le cas où X est lisse, on retrouve la notion étudiée dans [I1], [IR], [BK]. Ces faisceaux jouissent de propriétés analogues à celles développées dans (loc. cit.)¹. Pour n variable, les faisceaux $W_n\omega_{\log}^i$ forment un système projectif, le pro-objet correspondant $W.\omega_{\log}^i$ est sans p -torsion, coïncide avec le noyau de $1 - F$ sur le pro-objet $W.\omega^i$, et $W_n\omega_{\log}^i = W.\omega_{\log}^i \otimes \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. On a le résultat suivant (cf. [IR] ou [BK] dans le cas lisse) :

PROPOSITION 2.3. — *Si X/S est propre et a réduction semi-stable ordinaire, alors, pour tout i , l'homomorphisme*

$$(2.3.1) \quad H^*(\bar{Y}, W_n\omega_{Y,\log}^i) \otimes W_n(\bar{k}) \longrightarrow H^*(\bar{Y}, W_n\omega_Y^i)$$

déduit de (2.2.3) est un isomorphisme.

On a même un résultat un peu plus précis. Les inclusions (2.2.3) définissent un homomorphisme de complexes

$$(2.2.4) \quad \oplus W_n\omega_{Y,\log}^i[-i] \longrightarrow W_n\omega_Y.$$

¹ La théorie n'est toutefois pas écrite, elle mériterait de l'être.

Sous les hypothèses de 2.3, l'homomorphisme correspondant

$$(2.3.2) \quad \oplus H^{*-i}(\bar{Y}, W_n \omega_{\bar{Y}, \log}^i) \otimes W_n(\bar{k}) \longrightarrow H^*(\bar{Y}, W_n \omega_{\bar{Y}})$$

est compatible aux filtrations naturelles des deux membres (à gauche, par le degré, et à droite, par les tronqués naïfs), et induit un isomorphisme sur les gradués associés. Par passage à la limite projective, les isomorphismes (2.3.2) fournissent un isomorphisme

$$(2.3.3) \quad \oplus H^{*-i}(\bar{Y}, W \omega_{\bar{Y}, \log}^i) \otimes W(\bar{k}) \longrightarrow H^*(\bar{Y}, W \omega_{\bar{Y}}),$$

où $H^{*-i}(\bar{Y}, W \omega_{\bar{Y}, \log}^i) := \lim \text{proj } H^{*-i}(\bar{Y}, W_n \omega_{\bar{Y}, \log}^i)$, qui n'est autre que celui déduit, par extension des scalaires, de la décomposition (1.5.1) et de (2.3.1).

2.4. *Les deux homomorphismes fondamentaux.* Généralisant [BK], Hyodo [H] montre que, sous les hypothèses de 2.1 :

(a) Il existe un homomorphisme

$$(2.4.1) \quad \alpha : \Psi_n^i(i) \longrightarrow W_n \omega_{\bar{Y}, \log}^i$$

tel que $\alpha(\{x_1, \dots, x_i\}) = d \log x_1 \dots d \log x_i$ pour toutes sections locales x_1, \dots, x_i de $\bar{i}^* \bar{j}_* \mathcal{O}^*$, avec les notations de 2.1 et (2.2.2). Comme $\Psi_n^i(i)$ est engendré par des symboles, cet homomorphisme est donc unique, et il est surjectif par définition de $W_n \omega_{\bar{Y}, \log}^i$. Les homomorphismes α forment un homomorphisme de systèmes projectifs.

(b) Il existe un homomorphisme

$$(2.4.2) \quad \beta : \Psi_n^i(i) \longrightarrow \omega_{\bar{X}/\bar{S}}^i \otimes \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$$

tel que $\beta(\{x_1, \dots, x_i\}) = d \log x_1 \wedge \dots \wedge d \log x_i$ pour toutes sections locales x_1, \dots, x_i de $\bar{i}^* \bar{j}_* \mathcal{O}^*$. Pour la même raison qu'en (a), cet homomorphisme est unique, et les homomorphismes β forment un morphisme de systèmes projectifs. Noter que l'image de β est contenue dans le noyau de la différentielle d du complexe de de Rham, de sorte que les homomorphismes β définissent un homomorphisme de complexes

$$(2.4.3) \quad \oplus \Psi_n^i(i)[-i] \otimes \bar{A}_n \longrightarrow \omega_{\bar{X}/\bar{S}} \otimes \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}.$$

Les homomorphismes α et β , étant uniques, sont compatibles à Galois; il en est de même de (2.4.3).

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de Hyodo [H] :

THÉOREME 2.5. — *Soit X/S propre, à réduction semi-stable ordinaire. Alors :*

(i) *Pour tout n et tout i , l'homomorphisme*

$$(2.5.1) \quad H^*(\bar{Y}, \Psi_n^i(i)) \longrightarrow H^*(\bar{Y}, W_n \omega_{\bar{Y}, \log}^i)$$

induit par α est un isomorphisme.

(ii) *Posons $\bar{A}_n = \bar{A}/p^n \bar{A}$, $\bar{S}_n = \text{Spec } \bar{A}_n$, $\bar{X}_n = \bar{X} \otimes_{\bar{A}} \bar{A}_n$ (de sorte que $\omega_{\bar{X}_n/\bar{S}_n} = \omega_{\bar{X}/\bar{S}} \otimes \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$). Pour tout n et tout i , l'homomorphisme*

$$(2.5.2) \quad H^*(\bar{Y}, \Psi_n^i(i)) \otimes \bar{A}_n \longrightarrow H^*(\bar{X}_n, \omega_{\bar{X}_n/\bar{S}_n}^i)$$

déduit de β est un isomorphisme.

Par les suites exactes (2.1.4), on se ramène à $n = 1$. L'assertion (i) résulte d'un dévissage délicat de $\Psi_1^i(i)$. L'assertion (ii) se ramène alors à l'assertion (i) grâce à (2.3) pour $n = 1$.

COROLLAIRE 2.6. — *Sous les hypothèses de 2.5 :*

(a) *Pour tout n , la suite spectrale de Hodge vers de Rham de X_n/S_n , où $X_n = X \otimes A_n$, $A_n = A/p^n A$,*

$$E_1^{ij} = H^j(X_n, \omega_{X_n}^i) \Rightarrow H^*(X_n, \omega_{X_n})$$

dégénère en E_1 .

(b) *L'homomorphisme*

$$(2.6.1) \quad \oplus H^{*-i}(\bar{Y}, \Psi_n^i(i)) \otimes \bar{A}_n \longrightarrow H^*(\bar{X}_n, \omega_{\bar{X}_n/\bar{S}_n})$$

déduit de (2.4.3) est compatible aux filtrations naturelles des deux membres (à gauche, par le degré, et à droite, par les tronqués naïfs), et induit sur les gradués associés l'isomorphisme (2.5.2) (compte tenu de (a)).

(c) Il existe un unique isomorphisme A -linéaire

$$(2.6.2) \quad H^*(Y, W\omega_{\bar{Y}}) \otimes_W A \xrightarrow{\sim} H^*(X, \omega_{\bar{X}/S}),$$

caractérisé par la propriété suivante : pour tout n , l'isomorphisme déduit de (2.6.2) par extension des scalaires à $\hat{A} = \lim \text{proj } \bar{A}_n$ rend commutatif le carré

$$\begin{array}{ccc} H^*(Y, W\omega_{\bar{Y}}) \otimes_W \hat{A} & \longrightarrow & H^*(X, \omega_{\bar{X}/S}) \otimes_{\hat{A}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(\bar{Y}, W\omega_{\bar{Y}}) \otimes_W \bar{A}_n & \longrightarrow & H^*(\bar{X}_n, \omega_{\bar{X}_n/\bar{S}_n}) \end{array}$$

où la flèche horizontale inférieure est l'isomorphisme défini par les décompositions (2.3.2) et (2.6.1), au moyen de l'isomorphisme (2.5.1). L'isomorphisme (2.6.2) induit un isomorphisme sur les suites spectrales (des pentes, et de Hodge) correspondantes, associées aux filtrations naïves. En particulier, il munit $H_{DR}^*(X_K/K)$ d'une structure de Φ -module filtré ordinaire au sens de [PR, 1.2], i. e. la filtration de Hodge Fil^i de $H_{DR}^*(X_K/K)$ est opposée à la filtration par les pentes croissantes U_j de $H_0^* := H^*(Y, W\omega_{\bar{Y}}) \otimes_W K_0$ (où $K_0 = \text{Frac}W$) :

$$(U_{i-1} \otimes K) \oplus \text{Fil}^i = H_{DR}^*(X_K/K)$$

pour tout i , où $\text{Fil}^i = H^*(X_K, \Omega_{\bar{X}_K}^{\geq i})$, et U_j est la partie de pente $\leq j$ de H_0^* , i.e. $(\oplus_{r \leq j} H^{*-r}(Y, W\omega^r)) \otimes K_0$.

Les homomorphismes (2.4.3) induisent un homomorphisme de suites spectrales, qui, d'après 2.5 (ii), est un isomorphisme au niveau E_1 , d'où (a) et (b). Dans (c), l'unicité est claire. Les isomorphismes inférieurs du carré définissent, par passage à la limite projective, l'isomorphisme supérieur. Ce dernier est G -équivariant, où $G = \text{Gal}(\bar{K}/K)$. Comme, d'après Tate [T, 3.3], $\hat{A}^G = A$, on en déduit (2.6.2) en prenant les invariants sous G . La dernière assertion est immédiate.

COROLLAIRE 2.7. — *Sous les hypothèses de (2.5) :*

(a) *La suite spectrale des cycles évanescents (2.1.5) dégénère en E_2 modulo torsion. Si F^\cdot désigne la filtration correspondante de $H^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$, on a des isomorphismes canoniques, G -équivariants,*

$$(2.7.1) \quad \text{gr}_F^{*-i} H^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) \simeq H^{*-i}(\bar{Y}, W\omega_{\log}^i) \otimes \mathbb{Q}_p(-i).$$

En particulier, la représentation p -adique $H^(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$ est ordinaire au sens de [PR, 1.2].*

(b) *Soit $C = \hat{K}$. Il existe un isomorphisme C -linéaire, G -équivariant*

$$(2.7.2) \quad \bigoplus H^{*-i}(X_K, \Omega_{X_K}^i) \otimes_K C(-i) \simeq H^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes C$$

“décomposition de Hodge-Tate”.

Posons $b_m = \dim_K H_{DR}^m(X/K)$, $h^{ij} = \dim_K H^j(X_K, \Omega^i)$. On a $b_m = \sum_{i+j=m} h^{ij}$ (dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham, qui, ici, est d'ailleurs conséquence de 2.6 (a)). D'autre part, par le théorème de comparaison d'Artin-Grothendieck entre cohomologie de Betti et cohomologie étale, on a $b_m = \dim_{\mathbb{Q}_p} H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$. D'après 2.5, $h^{ij} = \dim H^j(\bar{Y}, W\omega_{\log}^i) \otimes \mathbb{Q}_p = \dim H^j(\bar{Y}, \Psi^i) \otimes \mathbb{Q}_p$. L'assertion de dégénérescence en résulte. L'isomorphisme (2.7.1) se déduit alors de (2.5.1). Le théorème de Tate [T, 3.3] entraîne l'existence d'un scindage G -équivariant de la filtration de $H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes C$ déduite par extension des scalaires, d'où (b), grâce à 2.5 (ii).

Remarque 2.8. La décomposition (2.7.2) n'est pas canonique : chaque scindage G -équivariant de la filtration de $H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes C$ envisagée ci-dessus fournit une telle décomposition, i.e. un isomorphisme entre $\bigoplus H^{*-i}(X_K, \Omega_{X_K}^i) \otimes_K C(-i)$ et le facteur (canonique) de $H^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes C$ correspondant au caractère χ^{-i} , où χ est le caractère cyclotomique. Toutefois, Faltings [Fa] a construit une décomposition de Hodge-Tate canonique pour tout schéma propre et lisse Z sur K .

Problème 2.9. Dans [HK], Hyodo et Kato définissent, pour X/S propre, à réduction semi-stable (non nécessairement ordinaire) (et même sous des hypothèses plus générales), un isomorphisme canonique

$$\rho_\pi : K \otimes_{K_0} H^*(Y, W\omega^\cdot) \xrightarrow{\sim} H_{DR}^*(X_K/K),$$

dépendant d'une uniformisante π de A . Quand X a, de plus, réduction ordinaire, comment se compare cet isomorphisme à celui déduit de (2.6.2)?

Problème 2.10. Sous les hypothèses de 2.5, la structure de (ϕ, N) -module filtré (ordinaire) définie sur $H_{DR}^*(X_K/K)$ par (2.6.2) est-elle associée à la représentation p -adique (ordinaire) $H^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$ par la correspondance de Fontaine [F] (cf. aussi [PR])? Si ρ (resp. ρ') désigne la représentation $H^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$ (resp. la représentation associée à $H_{DR}^*(X_K/K)$), on dispose sur ρ (resp. ρ') de la filtration de la suite spectrale des cycles évanescents (resp. de la filtration associée à la filtration par les pentes), et tout au moins peut-on affirmer que les gradués associés sont (canoniquement) isomorphes. Par ailleurs, si $\dim X/S < (p-1)/2$, Kato montre dans [K], sans hypothèse d'ordinarité, que la structure de (ϕ, N) -module filtré déduite de ρ_π est associée à la représentation p -adique, donc une réponse positive à 2.10 permettrait de répondre à 2.9 sous les mêmes restrictions de dimension. On espère, bien entendu, que, sans hypothèse d'ordinarité ni restriction de dimension, la structure de (ϕ, N) -module filtré définie par ρ_π est associée à la représentation p -adique (conjecture C_{st}).

Bibliographie

- [BK] S. BLOCH and K. KATO. — *p-adic etale cohomology*, Pub. Math. IHES **63**, 107-152 (1986).
- [F] J.-M. FONTAINE. — *Représentations p-adiques semi-stables*, ce séminaire.
- [Fa] G. FALTINGS. — *p-adic Hodge theory*, J. of the AMS **1**, 255-299 (1988).
- [H] O. HYODO. — *A note on p-adic etale cohomology in the semi-stable reduction case*, Invent. math. **91**, 543-557, 1988.

- [HK] O. HYODO and K. KATO. — *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles*, ce séminaire.
- [I1] L. ILLUSIE. — *Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline*, Ann. Scient. ENS 4ème série, t. 12, 501-661 (1979).
- [I2] L. ILLUSIE. — *Ordinarité des intersections complètes générales*, The Grothendieck Festschrift Vol. II, 375-405, Birkhäuser 1991.
- [IR] L. ILLUSIE et M. RAYNAUD. — *Les suites spectrales associées au complexe de de Rham-Witt*, Pub. Math. IHES 57, 73-212 (1983).
- [K] K. KATO. — *Semi-stable reduction and p -adic étale cohomology*, ce séminaire.
- [PR] B. PERRIN-RIOU. — *Représentations p -adiques ordinaires*, ce séminaire.
- [T] J. TATE. — *p -divisible groups*, Proc. Conf. local fields, Driebergen, 158-183, Springer-Verlag 1967.

Luc Illusie
URA D0752 du CNRS
Mathématiques, Bât. 425
Université de Paris-Sud
91405 ORSAY CEDEX
FRANCE