

Astérisque

VALÉRIE BERTHÉ

**De nouvelles preuves « automatiques » de transcendance
pour la fonction zêta de Carlitz**

Astérisque, tome 209 (1992), p. 159-168

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1992__209__159_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1992__209__159_0)

© Société mathématique de France, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

De nouvelles preuves “automatiques” de transcendance pour la fonction zêta de Carlitz

Valérie BERTHÉ

1 Introduction

Soit $\mathbf{F}_q$ le corps à q éléments, q étant une puissance entière strictement positive de p premier. On note $\mathbf{F}_q[x]$ l’anneau des polynômes à une indéterminée sur $\mathbf{F}_q$ et $\mathbf{F}_q(x)$ le corps des fractions rationnelles en x . Le complété de $\mathbf{F}_q(x)$ pour la valuation $(1/x)$ -adique, définie par $v(E) = -d^\circ E$, est le corps $\mathbf{F}_q((1/x))$ des séries formelles de Laurent, c’est-à-dire

$$\mathbf{F}_q((1/x)) = \{a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0 + \frac{a_{-1}}{x} + \dots ; a_n \in \mathbf{F}_q\}.$$

En 1935, Carlitz a défini une fonction ζ , à valeurs dans $\mathbf{F}_q((1/x))$, de la façon suivante :

$$\zeta(m) = \sum_{G \in \mathbf{F}_q[x] \text{ et } G \text{ unitaire}} 1/G^m, \quad m \geq 1.$$

La fonction ζ de Carlitz est l’analogue en caractéristique finie de la fonction ζ de Riemann. Carlitz a ainsi établi dans [4] que, pour s divisible par $(q-1)$, $\zeta(s)/\Pi^s \in \mathbf{F}_q(x)$, avec

$$\Pi = \prod_{j=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^{q^j} - x}{x^{q^{j+1}} - x}\right).$$

Cette propriété est l’équivalent du résultat d’Euler sur les valeurs paires de la fonction ζ de Riemann, à savoir $\zeta(2n)/\pi^{2n}$ est rationnel pour n non nul. Notons que le groupe des unités de $\mathbf{F}_q[x]$ est $\mathbf{F}_q^*$, d’ordre $q-1$, alors que le groupe multiplicatif de $\mathbf{Z}$ est de cardinal 2. Les congruences modulo 2 dans le cas complexe sont remplacées ici par des congruences modulo $q-1$.

En 1941, Wade prouve dans [12] la transcendance de Π sur $\mathbf{F}_q(x)$. On en déduit la transcendance de $\zeta(s)$ pour $s \equiv 0 \pmod{q-1}$, (valeurs “paires” de s). En 1986-87, Thakur établit dans [11] des résultats d’irrationalité pour $1 \leq s \leq q^2$ alors que Dammame montre l’irrationalité de $\zeta(s)$ pour $1 \leq s \leq q$, ([7]). En 1988, Dammame et Hellegouarch prouvent la transcendance de $\zeta(s)$ pour $1 \leq s \leq q^2$ par la méthode de Wade, ([10]). Enfin, en 1989, Dammame établit dans [8], voir aussi [9], la preuve de la transcendance de $\zeta(s)$ pour tout s . Parallèlement, Yu prouve en 1988, par une méthode utilisant les modules de Drinfeld, que pour tout entier s non nul, $\zeta(s)$ est transcendant et pour tout entier s non divisible par $q-1$, $\zeta(s)/\Pi^s$ est transcendant, (la preuve est parue dans [13]).

Par ailleurs, en 1989, Allouche donne dans [2] une preuve “élémentaire” de la transcendance de Π , c’est-à-dire qui utilise le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, (voir [5]), énoncé ci-dessous :

THÉORÈME 1 (Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy)

Soit $(u(n))_{n \in \mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbf{F}_q$. Il y a équivalence entre les trois conditions suivantes :

- 1) *la série formelle $\sum_{n \geq 0} u(n)x^{-n}$ est algébrique sur $\mathbf{F}_q(x)$,*
- 2) *l’ensemble E des sous-suites de la suite $(u(n))_{n \in \mathbf{N}}$ défini par*

$$E = \{(u(q^k n + r))_{n \in \mathbf{N}}; \quad k \geq 0; \quad 0 \leq r \leq q^k - 1\}$$

est fini,

- 3) *la suite $(u(n))_{n \in \mathbf{N}}$ est q -automatique.*

Seule l’équivalence entre les conditions 1 et 2 intervient dans nos preuves de transcendance. La condition 3 montre le lien qui existe entre le critère d’algébricité donné par la condition 2 et les automates. Rappelons, (voir [1] ou [6]), qu’un q -automate est défini par la donnée de :

- un ensemble fini d’états $S = \{i = a_1, a_2, \dots, a_d\}$, dont on a privilégié un élément i , appelé état initial,
- q applications ou “flèches” de l’ensemble des états S dans lui-même, notées $0, 1, \dots, q-1$,
- une application φ de S dans un ensemble Y , dite fonction de sortie.

Une suite $(u(n))_{n \in \mathbf{N}}$ à valeurs dans Y est dite q -automatique si elle est engendrée par un q -automate de la façon suivante: considérons un entier n , écrivons-le en base q en identifiant les chiffres de son développement aux applications $0, 1, \dots, q-1$; en lisant les chiffres de n de droite à gauche, on obtient

une application composée de S dans lui-même. Soit a_f l'image de l'état initial i par cette application, on pose alors: $u(n) = \varphi(a_f)$.

Allouche étudie, en fait, le quotient α/Π , avec

$$\alpha = \prod_{j=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^{q^j}}{x^{q^{j+1}}}\right).$$

Notons que α est algébrique sur $\mathbf{F}_q(x)$, il suffit de considérer α^q pour s'en convaincre.

M'inspirant du résultat d'Allouche, je donne ici une preuve "automatique" de la transcendance de $\zeta(s)/\Pi^s$ pour $1 \leq s \leq q-2$. Il est, en effet, intéressant de multiplier $\zeta(s)/\Pi^s$ par α^s . On obtient ainsi une expression simple des coefficients du développement en série formelle de $\frac{\zeta(s)}{\Pi^s} \alpha^s$. L'étude des sous-suites de la forme $(u(q^k n + 1 + s(q + q^2 + \dots + q^{k-1})))_{n \in \mathbf{N}}$, avec $(u(n))_{n \in \mathbf{N}}$ définie par

$$\frac{\zeta(s)}{\Pi^s} \alpha^s = \sum_{n \geq 0} u(n) x^{-n},$$

montre qu'il existe un nombre infini de telles suites. On déduit alors du théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, les transcendances de $\frac{\zeta(s)}{\Pi^s} \alpha^s$ et de $\zeta(s)/\Pi^s$, α étant algébrique sur $\mathbf{F}_q(x)$.

Je vais dans une première partie de cet article me restreindre au cas où $s = 1$, puis j'indiquerai comment généraliser la méthode employée au cas où s est dans l'intervalle $[1, q-2]$.

2 Preuve de la transcendance de $\zeta(1)/\Pi$

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 2 *Pour $q \neq 2$, $\zeta(1)/\Pi$ est transcendant sur $\mathbf{F}_q(x)$.*

Thakur a établi dans [11] que, pour $1 \leq s \leq q$,

$$\zeta(s) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{ks} \prod_{j=1}^k \left(\frac{1}{x^{q^j} - x} \right)^s.$$

On obtient alors:

$$\frac{\alpha}{\Pi} \zeta(1) = \frac{\alpha}{\Pi} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{x} \right)^{q+\dots+q^k} \prod_{j=k+1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{x} \right)^{q^j-1} \right).$$

2.1 Quelques développements en série formelle

Pour appliquer le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, nous avons besoin du développement en série formelle de $\frac{\alpha}{\Pi}\zeta(1)$. On remarque que le produit

$$\prod_{j=k+1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{x}\right)^{q^j-1}\right)$$

intervient à la fois dans les expressions de $\frac{\alpha}{\Pi}(\zeta(1) - 1)$ et de $\frac{\alpha}{\Pi}$, pour $k = 0$. Considérons donc le développement en série formelle de

$$\prod_{j=k+1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{x}\right)^{q^j-1}\right)$$

On note que, si n s'écrit sous la forme

$$n = \sum_{i=k+1}^{+\infty} \varepsilon_i (q^i - 1) \text{ avec } \varepsilon_i = 0 \text{ ou } 1, \varepsilon_i = 0 \text{ pour } i \text{ assez grand,}$$

une telle décomposition est unique.

Par conséquent, soit $(a_k(n))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\prod_{j=k+1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{x}\right)^{q^j-1}\right) = \sum_{n \geq 0} a_k(n) x^{-n}$$

Si n s'écrit :

$$n = \sum_{i=k+1}^{+\infty} \varepsilon_i (q^i - 1) \text{ avec } \varepsilon_i = 0 \text{ ou } 1, \varepsilon_i = 0 \text{ pour } i \text{ assez grand,}$$

$$\text{alors } a_k(n) = (-1)^{\sum_{i=k+1}^{+\infty} \varepsilon_i},$$

sinon $a_k(n) = 0$.

La proposition suivante correspond au cas où $k = 0$:

PROPOSITION 1 Soit $(a(n))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\frac{\alpha}{\Pi} = \sum_{n \geq 0} a(n) x^{-n}$$

Si n s'écrit :

$$n = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_i (q^i - 1) \text{ avec } \varepsilon_i = 0 \text{ ou } 1, \varepsilon_i = 0 \text{ pour } i \text{ assez grand,}$$

$$\text{alors } a(n) = (-1)^{\sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon_i},$$

sinon $a(n) = 0$.

On a, en outre,

$$\frac{\alpha}{\prod}(\zeta(1) - 1) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{x}\right)^{q+\dots+q^k} \sum_{n \geq 0} a_k(n) \left(\frac{1}{x}\right)^n.$$

Par conséquent,

$$\frac{\alpha}{\prod}(\zeta(1) - 1) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{x}\right)^n \sum_{\substack{1 \leq k \text{ tq} \\ q+\dots+q^k \leq n}} (-1)^k a_k(n - (q + \dots + q^k)).$$

Or on montre le lemme suivant :

LEMME 1 *Si n s'écrit sous la forme*

$$n = q + \dots + q^i + \sum_{j=i+1}^{+\infty} \varepsilon_j (q^j - 1) \quad (1)$$

avec $i \geq 1, \varepsilon_j = 0$ ou $1, \varepsilon_j = 0$ pour j assez grand,

une telle décomposition est unique.

On en déduit la proposition 2 :

PROPOSITION 2 *Soit $(b(n))_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par*

$$\frac{\alpha}{\prod}(\zeta(1) - 1) = \sum_{n \geq 0} b(n) x^{-n}$$

On a :

$b(n) \neq 0$ si et seulement si n s'écrit sous la forme

$$n = q + \dots + q^i + \sum_{j=i+1}^{+\infty} \varepsilon_j (q^j - 1),$$

avec $i \geq 1, \varepsilon_j = 0$ ou 1 , et $\varepsilon_j = 0$ pour j assez grand.

2.2 Schéma de la preuve du théorème 2

Soit $(c(n))_{n \in \mathbf{N}}$ définie par

$$\frac{\alpha}{\prod} \zeta(1) = \sum_{n \geq 0} c(n) x^{-n}$$

On a

$$(c(n))_{n \in \mathbf{N}} = (a(n))_{n \in \mathbf{N}} + (b(n))_{n \in \mathbf{N}}$$

Nous allons considérer les sous-suites $(c(q^k n + 1 + q + \dots + q^{k-1}))_{n \in \mathbf{N}}$ pour $k \geq 3$ et démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 3 Soit $k \geq 3$. Soit $f(k) = q^k - 1 - (1 + q + \dots + q^{k-1})$. L'indice du premier terme non nul de la sous-suite $(c(q^k n + 1 + q + \dots + q^{k-1}))_{n \in \mathbf{N}}$ est $n = q + q^2 + \dots + q^{f(k)}$.

Cette proposition résulte de deux lemmes concernant les sous-suites $(a(q^k n + 1 + q + \dots + q^{k-1}))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b(q^k n + 1 + q + \dots + q^{k-1}))_{n \in \mathbf{N}}$, énoncés ci-dessous :

LEMME 2 Soit $k \geq 2$. Soit $f(k) = q^k - 1 - (1 + q + \dots + q^{k-1})$. L'indice du premier terme non nul de la sous-suite $(a(q^k n + 1 + q + \dots + q^{k-1}))_{n \in \mathbf{N}}$ est $n = q + q^2 + \dots + q^{f(k)}$.

LEMME 3 Soit $k \geq 3$. Soit $g(k) = q^k - 2 - (q^2 + \dots + q^{k-1})$. L'indice du premier terme non nul de la sous-suite $(b(q^k n + 1 + q + \dots + q^{k-1}))_{n \in \mathbf{N}}$ est $n = q + q^2 + \dots + q^{g(k)}$.

On a $f(k) < g(k)$, $\forall k \geq 3$. On rappelle, de plus, que la suite $(c(n))_{n \in \mathbf{N}}$ est définie comme la somme des suites $(a(n))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b(n))_{n \in \mathbf{N}}$. La proposition 3 résulte donc des lemmes 2 et 3.

Par ailleurs, si $q \neq 2$, la suite $(f(k))_{k \geq 3}$ est strictement croissante. Les sous-suites $(c(q^k n + 1 + q + \dots + q^{k-1}))_{n \in \mathbf{N}}$ diffèrent alors par l'indice de leur premier terme non nul. Elles sont donc distinctes et l'ensemble

$$\{(c(q^k n + 1 + q + \dots + q^{k-1}))_{n \in \mathbf{N}}\}$$

est infini. L'ensemble $\{(c(q^k n + r))_{n \in \mathbf{N}}; k \geq 0; 0 \leq r \leq q^k - 1\}$ est, à plus forte raison, infini. Selon le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, on en déduit la transcendance de $\frac{a}{\Pi} \zeta(1)$ sur $\mathbf{F}_q(x)$ pour $q \neq 2$ et, par conséquent, celle de $\frac{\zeta(1)}{\Pi}$, ce qui achève la preuve du théorème 2.

2.3 Preuve du lemme 2

Nous donnons ici la preuve du lemme 2; on démontre le lemme 3 de manière analogue.

On pose $(\alpha_k(n))_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par :

$$\alpha_k(n) = a(q^k n + 1 + q + \dots + q^{k-1}) \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Soit $k \geq 2$. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\alpha_k(n) \neq 0$. Selon la proposition 1,

$\exists (\varepsilon_j)_{j \in \mathbf{N}}$ avec $\varepsilon_j = 0$ ou 1, $\varepsilon_j = 0$ pour j assez grand, tels que

$$q^k n + 1 + q + \dots + q^{k-1} = \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_j (q^j - 1),$$

c'est-à-dire

$$q^k n + 1 + q + \dots + q^{k-1} = \sum_{1 \leq j \leq k-1} \varepsilon_j (q^j - 1) + \sum_{l \geq k} \varepsilon_l (q^l - 1).$$

On pose $\sigma = \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_j$. On a

$$q^k n + 1 + q + \dots + q^{k-1} = \sum_{1 \leq j \leq k-1} \varepsilon_j q^j + \sum_{l \geq k} \varepsilon_l q^l - \sigma.$$

Par conséquent,

$$\exists \lambda \geq 1 \text{ tel que } \sigma = \lambda q^k + \sum_{1 \leq j \leq k-1} (\varepsilon_j - 1) q^j - 1.$$

On en déduit que

$$n = (-\lambda + \varepsilon_k) + \sum_{l > k \text{ et } \sum_{l > k} \varepsilon_l = \mathcal{S}} \varepsilon_l q^{l-k}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \mathcal{S} &= \sigma - \sum_{j \leq k} \varepsilon_j \\ &= \lambda q^k + \sum_{j=1}^{k-1} (\varepsilon_j - 1) q^j - \sum_{j \leq k} \varepsilon_j - 1. \end{aligned}$$

On vérifie réciproquement que si n s'écrit sous la forme (2), on a alors, selon la proposition 1, $\alpha_k(n) \neq 0$.

Soit $m(k)$ le plus petit m tel que $\alpha_k(m) \neq 0$, c'est-à-dire le plus petit m pouvant s'écrire sous la forme (2). On vérifie que $m(k)$ est obtenu pour

$$\lambda = 1$$

$$\varepsilon_j = 0 \text{ pour } 1 \leq j \leq k-1$$

$$\varepsilon_k = 1$$

$$\varepsilon_l = 1 \text{ pour } k+1 \leq l \leq k + q^k - 1 - (1 + \dots + q^{k-1})$$

$$\varepsilon_l = 0 \text{ pour } l > k + q^k - 1 - (1 + \dots + q^{k-1})$$

On a alors $m(k) = q + \dots + q^{f(k)}$ avec $f(k) = q^k - 1 - (1 + \dots + q^{k-1})$, ce qui achève la preuve du lemme 2.

3 Preuve de la transcendance de $\zeta(s)/\Pi^s$

THÉORÈME 3 *Pour $q \neq 2$ et $1 \leq s \leq q-2$, $\zeta(s)/\Pi^s$ est transcendant sur $\mathbf{F}_q(x)$.*

Nous nous contenterons ici d'esquisser la preuve de ce théorème, qui est faite sur le modèle de la preuve du théorème 2. On peut en trouver une démonstration détaillée dans [3]. On a vu que, pour $1 \leq s \leq q$,

$$\frac{\zeta(s)\alpha^s}{\Pi^s} = \frac{\alpha^s}{\Pi^s} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{ks} \left(\frac{1}{x}\right)^{s(q+\dots+q^k)} \prod_{j=k+1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{x}\right)^{q^j-1}\right)^s.$$

Le produit $\prod_{j=k+1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{x}\right)^{q^j-1}\right)^s$ joue ici encore un rôle déterminant. On a ainsi la proposition suivante:

PROPOSITION 4 *Soit $(A(n))_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par*

$$\frac{\alpha^s}{\Pi^s} = \sum_{n \geq 0} A(n)x^{-n}.$$

Si n s'écrit

$$n = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j(q^j - 1) \text{ avec } \mu_j \in \{0, 1, \dots, s\}, \mu_j = 0 \text{ pour } j \text{ assez grand,}$$

$$\text{alors } A(n) = (-1)^{\sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j} \prod_{j=1}^{+\infty} \binom{s}{\mu_j} \text{ modulo } p,$$

sinon $A(n) = 0$.

Rappelons que p désigne la caractéristique de $\mathbf{F}_q$.

Les propriétés d'unicité de décomposition sont conservées pour $1 \leq s \leq q-2$.

Néanmoins, la présence du terme $\prod_{j=1}^{+\infty} \binom{s}{\mu_j}$ modulo p apporte une difficulté supplémentaire. Ce terme peut être, en effet, éventuellement nul. La proposition 3 devient alors:

PROPOSITION 5 *Soit $(C(n))_{n \in \mathbf{N}}$ définie par*

$$\frac{\alpha^s}{\Pi^s} \zeta(s) = \sum_{n \geq 0} C(n)x^{-n}$$

Soit $k \geq 3$. Soit $F(k) = q^k - 1 - s(1 + q + \dots + q^{k-1})$. Soient $u(k)$ et $v(k)$ les reste et quotient de la division euclidienne de $F(k)$ par s .

Soit $M(k) = s - 1 + s \sum_{1 \leq l \leq u(k)} q^l + v(k)q^{u(k)+1}$.

On a: $\forall n < M(k)$, $C(q^k n + 1 + s(q + \dots + q^{k-1})) = 0$.

On ignore donc, a priori, si $C(q^k M(k) + 1 + s(q + \dots + q^{k-1}))$ est nul ou non.

Notons que les termes $u(k)$ et $v(k)$ apparaissent lors de la minimisation de $\sum_{l>k} \mu_l$ (voir la preuve du lemme 2, section 2.3), les μ_l pouvant prendre au plus la valeur s . Selon la proposition 5, chacune des sous-suites

$$(C(q^k n + 1 + s(q + \dots + q^{k-1})))_{n \in \mathbb{N}}$$

début par au moins $M(k)$ zéros, avec $(M(k))_{k \geq 2}$ strictement croissante. Il suffit alors que les suites

$$(C(q^k n + 1 + s(q + \dots + q^{k-1})))_{n \in \mathbb{N}}$$

soient toutes non nulles pour former un ensemble infini. Or on a la proposition suivante:

PROPOSITION 6

Supposons $s \not\equiv 0 \pmod{p}$. Soit $k \geq 3$. Soit $Q(k) = -1 + s \sum_{1 \leq l \leq q^k - k} q^l$. On a

$$C(q^k Q(k) + 1 + s(q + \dots + q^{k-1})) \neq 0.$$

Par conséquent, si $s \not\equiv 0 \pmod{p}$, l'ensemble

$$\{(C(q^k n + r))_{n \in \mathbb{N}}; \quad k \geq 0; \quad 0 \leq r \leq q^k - 1\}$$

est infini. On déduit alors du théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, les transcendances de $\frac{\alpha'}{\Pi'} \zeta(s)$ et de $\frac{\zeta(s)}{\Pi^s}$ sur $\mathbb{F}_q(x)$, (pour $1 \leq s \leq q - 2$ et $q \neq 2$).

Il reste alors à traiter le cas où $s \equiv 0 \pmod{p}$.

Écrivons $s = p^t r$ avec r non divisible par p . En appliquant le morphisme de Frobenius à $\zeta(r)/\Pi^r$, on obtient que $(\frac{\zeta(r)}{\Pi^r})^{p^t} = \zeta(s)/\Pi^s$. Or $\zeta(r)/\Pi^r$ est transcendant sur $\mathbb{F}_q(x)$.

On a donc démontré le théorème 3, à savoir: $\zeta(s)/\Pi^s$ est transcendant sur $\mathbb{F}_q(x)$ pour tout s tel que $1 \leq s \leq q - 2$.

Notons qu'en appliquant le morphisme de Frobenius à $\zeta(1)/\Pi$, on obtient que $\zeta(q^t)/\Pi^{q^t}$ est transcendant sur $\mathbb{F}_q(x)$ pour $q \neq 2$ et pour tout $t \geq 0$.

Il reste à montrer que $\zeta(s)/\Pi^s$ est transcendant sur $\mathbb{F}_q(x)$ pour tout s non divisible par $q - 1$. La plus grande complexité de l'expression de $\zeta(s)/\Pi^s$ pour $s > q$ pose alors des problèmes combinatoires. Il semble néanmoins raisonnable d'espérer que la méthode exposée dans cet article puisse permettre de traiter le cas général.

Bibliographie

- [1] J. -P. ALLOUCHE *Automates finis en théorie des nombres*, Expo. Math. **5** (1987), 239-266.
- [2] J. -P. ALLOUCHE *Sur la transcendance de la série formelle II*, Sémin. de Théorie des Nombres de Bordeaux **2** (1990), 103-117.
- [3] V. BERTHÉ *Fonction zêta de Carlitz et automates*, Actes du colloque Thémate, Luminy (mai 1991), à paraître.
- [4] L. CARLITZ *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*, Duke Math. J. , **1** (1935), 137-168.
- [5] G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDÈS FRANCE et G. RAUZY *Suites algébriques, automates et substitutions*, Bull. Soc. Math. France **108** (1980), 401-419.
- [6] A. COBHAM *Uniform tag sequences*, Math. Systems Theory **6** (1972), 164-192.
- [7] G. DAMMAME *Irrationalité de $\zeta(s)$ dans le corps des séries formelles $\mathbb{F}_q((\frac{1}{t}))$* , C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **9**, **5** (1987), 207-212.
- [8] G. DAMMAME *Transcendance de la fonction zêta de Carlitz par la méthode de Wade*, Thèse , Caen, 1990.
- [9] G. DAMMAME et Y. HELLEGOUARCH *Transcendence of the values of the Carlitz zeta function by Wade's method*, J. Number Theory, **39**, **3** (1991), p. 257- 278.
- [10] G. DAMMAME et Y. HELLEGOUARCH *Propriétés de transcendance des valeurs de la fonction zêta de Carlitz*, C.R. Acad. Sci. Paris **307**, Série I (1988), 635-637.
- [11] D. S. THAKUR *Gauss functions and Gauss sums for function fields and periods of Drinfeld modules*, Ph. D. thesis, Harvard (Avril 1987).
- [12] L. J. WADE *Certain quantities transcendental over $GF(p^n, x)$* , Duke Math. J. , **8** (1941), 701-720.
- [13] J. YU *Transcendence and Special Zeta Values in Characteristic p* , Annals of Mathematics, **134** (1991), 1-23.

Valérie BERTHÉ
 E. N. S.
 45 rue d'Ulm
 75005 Paris