

# Astérisque

JEAN MARTINET

**Remarques sur la bifurcation nœud-col dans  
le domaine complexe**

*Astérisque*, tome 150-151 (1987), p. 131-149

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1987\\_\\_150-151\\_\\_131\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__150-151__131_0)

© Société mathématique de France, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

REMARQUES SUR LA BIFURCATION NOEUD-COL DANS LE  
DOMAINE COMPLEXE.

Jean Martinet

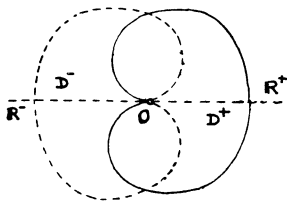
L'étude des difféomorphismes analytiques locaux de  $\mathbb{C}$  en  $O$ , de la forme:

$$(1) \quad f(x) = x + ax^2 + \dots \quad (a \neq 0)$$

fait apparaître, au delà d'une classification très simple à conjugaison *formelle* près, un espace de dimension *infinie* d'invariants de conjugaison analytique. Cette étude a été faite d'abord par ECALLE [1] puis, avec des points de vue un peu différents, par MALGRANGE [3] et VORONIN [7]. Leur théorie peut se résumer ainsi:

1) Tout  $f$  de la forme (1) appartient, *formellement*, à un groupe à un paramètre; ceci signifie qu'on peut trouver une (unique) série formelle  $\widehat{X}(x) = b_2x^2 + \dots$  telle que le groupe à un paramètre  $(f_t)$  défini par l'équation différentielle  $dx/dt = \widehat{X}(x)$  vérifie  $f_1 = f$ . De plus, le champ de vecteurs  $\widehat{X}.d/dx$  est conjugué à une forme normale  $X_0.d/dx$  où  $X_0(x) = x^2/(1 + \lambda x)$  ( $\lambda \in \mathbb{C}$ ), et  $f$  est donc conjugué à  $\exp X_0.d/dx$ .

2) (analyse) En général  $\widehat{X}$  diverge, mais est toujours *sommable* au sens de RAMIS [5], et plus précisément *résurgente* au sens d'ECALLE. Concrètement,  $\widehat{X}$  se somme sur deux domaines  $D^+$  et  $D^-$  (figurés ci-contre, en supposant  $a = 1$ ), en deux fonctions  $X^+$  et  $X^-$  analytiques sur  $D^+ \setminus \{0\}$  et  $D^- \setminus \{0\}$ ,  $C^\infty$  en  $0$  et  $y$  admettant  $\widehat{X}$  comme série de Taylor commune. Sur  $D^+$  (resp.  $D^-$ ),  $f$  se plonge dans le groupe à un paramètre  $(f_t^+)$  (resp.



( $f_t^-$ )) défini par l'équation différentielle  $dx/dt = X^+(x)$  (resp.  $X^-(x)$ ). En d'autres termes,  $f$  est conjugué à la forme normale formelle  $f_0$  sur  $D^+$  et  $D^-$ , au moyen de difféomorphismes  $C^\infty$  en  $0$  et analytiques en dehors de  $0$ . La divergence de  $\widehat{X}$  se traduit

dans le fait que  $X^+$  et  $X^-$  diffèrent sur  $D^+ \cap D^-$  (phénomène de Stokes), et donc aussi les deux transformations conjugant  $f$  à  $f_0$ . Cette "monodromie" caractérise le type analytique de  $f$ .

3) (synthèse) L'espace des monodromies possibles (pour la normalisation) se laisse caractériser comme l'ensemble des paires de difféomorphismes (sur les deux composantes de  $D^+ \cap D^-$ ) commutant à  $f_0$ , analytiques en dehors de  $0$ , et infiniment tangents à l'identité en  $0$ . Cet espace est de dimension *infinie*.

La situation naturelle où apparaissent les difféomorphismes (1) est celle des familles génériques à un paramètre de difféomorphismes. Par exemple

$$f(x) = x + x^2(a + a_1x + \dots)$$

correspond à  $\varepsilon = 0$  dans la famille

$$f_\varepsilon(x) = F(\varepsilon, x) = x + (x^2 - \varepsilon)(a + a_1x + \dots).$$

Pour  $\varepsilon$  petit non nul,  $f_\varepsilon$  a deux points fixes  $\pm \sqrt{\varepsilon}$ , qui *confluent* pour  $\varepsilon = 0$  en le point fixe double de  $f$ ; ce phénomène de confluence le long d'une courbe lisse ( $x^2 - \varepsilon = 0$ ) est stable par petites perturbations.

Il m'a paru naturel de chercher à éclairer les phénomènes rappelés plus haut à partir de cette confluence, et j'espère montrer que ce point de vue conduit à des questions bien intéressantes. Je remercie d'ailleurs J.P. ECKMANN qui a cristallisé mon intérêt pour ce problème en me posant une question très voisine.

Revenons donc à la famille  $F$  considérée ci-dessus. Envisageons, pour simplifier, le cas où  $a = 1$ , et choisissons une valeur de  $\varepsilon$  réelle *positive* petite; le difféomorphisme  $f_\varepsilon$  admet alors deux points fixes *hyperboliques*: la partie linéaire de  $f_\varepsilon$  en  $\sqrt{\varepsilon}$  est approximativement  $1 + 2\sqrt{\varepsilon}$ , et on a donc un point source; elle est environ  $1 - 2\sqrt{\varepsilon}$  en  $-\sqrt{\varepsilon}$ , qui est un point attractif. Le théorème de linéarisation analytique de Koenigs-Poincaré permet donc de plonger  $f_\varepsilon$ , au voisinage de chacun de ces points, dans un groupe à un paramètre, respectivement  $(f_{\varepsilon, t}^+)$  et  $(f_{\varepsilon, t}^-)$  et correspondant à des champs de vecteurs  $X_\varepsilon^+$  et  $X_\varepsilon^-$ ; c'est un théorème *local* qui n'assure l'existence et l'analyticité de ces champs que sur des disques de rayon inférieur à  $2\sqrt{\varepsilon}$ . On s'attend évidemment, au vu des résultats rappelés au début, à ce qu'ils se prolongent analytiquement à des domaines  $D_\varepsilon^+$  et  $D_\varepsilon^-$  voisins de  $D^+$  et  $D^-$ , en des champs proches de  $X^+$  et  $X^-$ . C'est essentiellement ce que nous démontrons dans cet article. D'autre part, pour de "mauvaises" valeurs de  $\varepsilon$  (très proches de  $\mathbf{R}^-$ ), le germe de  $f_\varepsilon$  en ses points fixes peut ne pas être linéarisable (petits dénominateurs), et il y a donc lieu de préciser le domaine des valeurs de  $\varepsilon$ , dans  $\mathbf{C}$ , pour lesquelles "tout se passe bien"; c'est ce que nous faisons aussi.

Ces résultats sont à rapprocher de ceux de MATHER [4] et YOCCOZ ([8], ch. V et VI): dans notre cas, si  $f_0$  n'appartient *pas* à un groupe à un paramètre analytique, alors les champs  $X_\varepsilon^+$  et  $X_\varepsilon^-$  vont différer de manière *non infiniment petite* sur un domaine de  $\mathbf{C}$  séparant les deux points fixes de  $f_\varepsilon$ ; dans les références rappelées, on voit des difféomorphismes (différentiables) de l'intervalle  $[0, 1]$ , dont les seuls

points fixes sont 0 et 1, qui se plongent dans des groupes à un paramètre globaux distincts, issus de l'analyse du difféomorphisme au voisinage de 0 et de 1.

Cet article est organisé comme une étude de la bifurcation noeud-col, pour les champs de vecteurs (groupes continus) puis pour les difféomorphismes (groupes discrets).

Je montre d'abord que tout (germe de) famille d'équations analytiques

$$dx/dt = X(\varepsilon, x) \quad \text{où} \quad X(0, x) = ax^2 + \dots \quad (a \neq 0) \quad \text{et} \quad \partial X/\partial \varepsilon \neq 0$$

se normalise analytiquement en

$$dx/dt = (x^2 - \varepsilon)/(1 + \lambda(\varepsilon)x) = Z \quad (\lambda : \text{fonction analytique de } \varepsilon)$$

Cette observation avait déjà été faite par KOSTOV [2].

J'étudie le difféomorphisme local  $F_0 : (\varepsilon, x) \rightarrow (\varepsilon, x')$  de  $\mathbb{C}^2$  en 0 obtenu par intégration au temps 1 de cette forme normale; je mets en évidence deux domaines fermés  $D^+$  et  $D^-$ , invariants par  $F_0$  et  $F_0^{-1}$  respectivement, et dans lesquels l'orbite (positive ou négative respectivement) de tout point converge assez vite vers la courbe des points fixes  $x^2 - \varepsilon = 0$ . Ces domaines se projettent dans  $\mathbb{C}(\varepsilon)$  selon un secteur de sommet l'origine et évitant le demi-axe réel négatif (attention aux petits dénominateurs); dans les plans  $\varepsilon = \text{cste}$ , ils découpent des domaines voisins des  $D^+$  et  $D^-$  dessinés au début.

Je considère ensuite les bifurcations noeud-col de difféomorphismes analytiques ( $x' = F(\varepsilon, x)$  où  $F(0, x) = x + ax^2 + \dots$ ,  $a \neq 0$  et  $\partial F/\partial \varepsilon \neq 0$ ), qui se ramènent facilement, à conjugaison analytique près, à des perturbations  $F = F_0 + (x^2 - \varepsilon)^2 u(\varepsilon, x)$  du difféomorphisme  $F_0$  précédent (donc 1-tangentes à  $F_0$  le long de son lieu de points fixes). On montre facilement que  $F$  est, du point de vue formel, dans le groupe à un paramètre engendré par un champ de vecteurs  $\hat{X}$ , coïncidant à l'ordre 1 avec  $Z$  sur  $x^2 - \varepsilon = 0$ .

Enfin, je montre l'existence de domaines  $D^+$  et  $D^-$  (du même type que pour  $F_0$ ) invariants par  $F$  et  $F^{-1}$  respectivement, et où les orbites positives de ces difféomorphismes convergent rapidement vers les points fixes; ceci permet facilement, en suivant la même démarche que MALGRANGE dans [3], d'obtenir des champs  $X^+$  et  $X^-$ , continus sur  $D^+$  et  $D^-$  et analytiques sur les intérieurs, asymptotes à  $\hat{X}$ , et qui sont des "logarithmes" du difféomorphisme  $F$ . Je n'ai cependant pas su encore prouver, ce qui paraît naturel, que ces champs sont  $C^\infty$  au sens de Whitney sur ces domaines.

Je tiens à remercier J.P. RAMIS pour d'utiles conversations.

1. Familles universelles de champs ou de formes analytiques en une variable.

Nous considérons les germes de champs de vecteurs analytiques :

$$(1) \quad x = dx/dt = X(\mu, x) \quad x \in (\mathbb{C}, 0) \quad \mu \in (\mathbb{C}^p, 0) \quad (\text{espace de paramètres})$$

(où  $X$  est un germe de fonction holomorphe à l'origine de  $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}$ ).

À tout champ (1) nous associons la forme duale :

$$\omega = dx/X(\mu, x) \quad \text{telle que} \quad \omega(X.d/dx) = 1.$$

Deux champs  $X$  et  $X'$  (avec des espaces de paramètres de même dimension) sont équivalents si l'on peut trouver un difféomorphisme local analytique :

$$\begin{aligned} \Phi : (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}, 0) \\ (\mu, x) &\rightarrow (\mu, \phi(\mu, x)) \end{aligned}$$

(préservant donc la fibration sur l'espace des paramètres) tel que :

$$\Phi_*(X) = X'$$

ou, ce qui revient au même, avec les formes duales :

$$\Phi^*(\omega') = \omega.$$

Nous nous intéressons ici plus particulièrement aux champs vérifiant la condition suivante (stable pour les familles à un paramètre) : le germe de champ  $X_0$  ( $\mu = 0$ ) à l'origine de  $\mathbb{C}$  a un zéro d'ordre deux, soit :

$$X(0, x) = x^2 \cdot h(x) \quad \text{avec} \quad h(0) \neq 0.$$

En d'autres termes, la fonction  $X_0$  est régulière d'ordre deux en  $x$ , et la forme  $\omega$  a, pour  $\mu = 0$ , un pôle d'ordre deux en  $0 \in \mathbb{C}$ .

**Proposition (1.1)** (cf. [2]) *Tout champ d'ordre deux est équivalent à un champ de la forme :*

$$Z = \frac{x^2 - \varepsilon(\mu)}{1 + \lambda(\mu)x} \cdot \frac{d}{dx} \quad (\text{forme duale : } \alpha = \frac{1 + \lambda(\mu)x}{x^2 - \varepsilon(\mu)} \cdot dx)$$

où  $\varepsilon$  et  $\lambda$  sont des germes de fonctions holomorphes à l'origine de  $\mathbb{C}^p$ , avec  $\varepsilon(0) = 0$ .

Cet énoncé signifie simplement que le champ  $Z$  à deux paramètres ( $\varepsilon \in (\mathbb{C}, 0)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ) est un *déploiement universel* pour les germes de champs d'ordre deux en une variable.

**Démonstration.**

Par le théorème de préparation de Weierstrass et la théorie (très élémentaire dans ce

cas) du déploiement universel des fonctions, la variété  $X(\mu, x) = 0$  des singularités du champ  $X$  (ou des pôles de  $\omega$ ) peut être supposée, à équivalence près, de la forme:

$$x^2 - \varepsilon(\mu) = 0$$

où  $\varepsilon$  est holomorphe au voisinage de  $O \in \mathbb{C}P$ ,  $\varepsilon(0) = 0$ .

La forme duale du champ s'écrit alors  $\omega = g(\mu, x) dx / (x^2 - \varepsilon(\mu))$  où  $g(0, 0) \neq 0$ .

Le théorème de division donne:

$$g(\mu, x) = (x^2 - \varepsilon(\mu)) \cdot q(\mu, x) + \lambda(\mu)x + a(\mu)$$

où  $q, \lambda, a$  sont holomorphes, et  $a(0) \neq 0$ .

Il vient ainsi :

$$\omega = \frac{a(\mu) + \lambda(\mu)x}{x^2 - \varepsilon(\mu)} dx + q(\mu, x) dx$$

On introduit alors la famille de formes à un paramètre  $s \in [0, 1]$  :

$$\alpha_s = \frac{a(\mu) + \lambda(\mu)x}{x^2 - \varepsilon(\mu)} dx + s \cdot q(\mu, x) dx$$

Selon la classique méthode des chemins, on cherche un champ de vecteurs dépendant du paramètre  $s$ , soit  $Y(s, \mu, x) \cdot d/dx$  tel que:

$$L_{Y_s}(\alpha_s) = - \frac{d\alpha_s}{ds} = - q(\mu, x) dx = - dQ \quad \text{où} \quad Q(\mu, x) = \int_0^x q(\mu, u) du$$

où  $L$  désigne la dérivée de Lie; on sait qu'alors la famille de difféomorphismes  $\Phi_s$  (qui laisse  $\mu$  invariant) obtenue par intégration de l'équation différentielle:

$$dx/ds = Y(s, \mu, x) \quad \Phi_0 = \text{Identité}$$

trivialise la famille  $\alpha_s$ , c'est à dire que  $\Phi_s^*(\alpha_s) = \alpha_0$ .

La détermination de la fonction  $Y$  est immédiate; il suffit en effet de résoudre l'équation linéaire:

$$\left( \frac{a + \lambda x}{x^2 - \varepsilon} + sq \right) \cdot Y = - Q \quad \text{d'où} \quad Y = - \frac{(x^2 - \varepsilon) Q(\mu, x)}{a + \lambda x + sq(\mu, x)(x^2 - \varepsilon)}$$

qui est une fonction holomorphe, car  $a$  est non nulle en zéro. Tout ceci prouve que la forme  $\omega$  est équivalente à  $\alpha_0 = (a + \lambda x) dx / (x^2 - \varepsilon)$ ; le changement de coordonnées linéaire  $x \rightarrow a(\mu) \cdot x$  ramène cette dernière forme à celle de la proposition  $\diamond$

**Remarque 1.1.** Les fonctions  $\varepsilon(\mu)$  et  $\lambda(\mu)$  sont des invariants de  $X$ ; elles admettent une interprétation géométrique, particulièrement claire pour les champs (génériques) dont la

variété des zéros  $X(\mu, x) = 0$  est lisse: c'est un revêtement à deux feuillets ramifié de l'espace  $(\mathbb{C}^p, 0)$  des paramètres. En chaque point de cette variété, on considère la partie linéaire du champ  $X$ , soit  $dX/dx$ . Si  $\mu$  n'est pas un point de ramification (on exclut donc une hypersurface lisse de  $(\mathbb{C}^p, 0)$ ), il lui correspond deux valeurs de cette fonction: ce sont les inverses des résidus de la forme  $\omega$ . Un calcul immédiat montre que  $\lambda(\mu)$  est la somme de ces résidus; leur produit est la fonction (méromorphe)  $[\lambda^2(\mu)\varepsilon(\mu) - 1]/4\varepsilon(\mu)$ . Noter que dans le cas considéré la fonction  $\varepsilon(\mu)$  est régulière en 0, c'est à dire que  $\varepsilon$  peut être prise comme l'une des coordonnées de l'espace des paramètres.

**Remarque 1.2.** Comme il a été dit plus haut, ce qui précède est une théorie du déploiement universel des germes de champs de vecteurs holomorphes sur  $(\mathbb{C}, 0)$ , ayant un zéro double à l'origine. Elle se généralise immédiatement au cas des singularités d'ordre quelconque  $k + 1$  ( $k$  entier  $\geq 1$ ); on démontre exactement de la même façon que la famille à  $2k$  paramètres:

$$Z = \frac{x^{k+1} + \varepsilon_1 x^{k-1} + \dots + \varepsilon_k}{1 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_k x^k} \cdot \frac{d}{dx}$$

est universelle pour les champs  $dx/dt = X(\mu, x)$ , où  $X$  est régulière d'ordre  $k+1$  par rapport à  $x$ , en 0 (voir [2]).

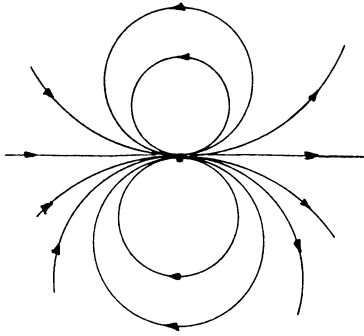
**Remarque 1.3.** Tout ce qui vient d'être dit reste vrai, mutatis mutandis, pour les champs de vecteurs formels, considérés du point de vue de l'équivalence formelle.

**Remarque 1.4.** Le résultat de normalisation donné par la proposition 1.1 contient évidemment la forme normale  $[x^2/(1+\lambda x)].d/dx$  ( $\lambda \in \mathbb{C}$ ) des champs singuliers sans paramètre, d'ordre deux à l'origine (cf. [3] par exemple).

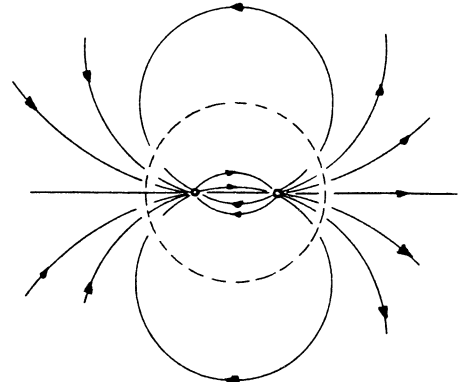
Les figures ci-dessous illustrent la dynamique de la famille universelle:

$$Z = \frac{x^2 - \varepsilon}{1 + \lambda x} \cdot \frac{d}{dx}$$

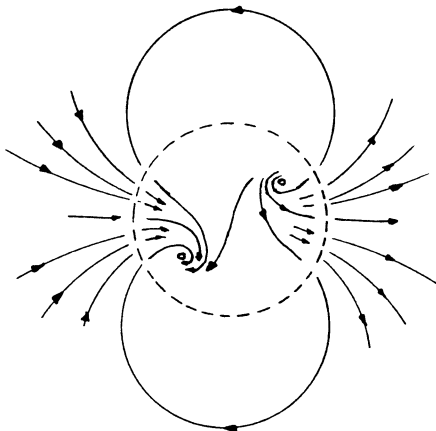
pour quelques valeurs de  $\varepsilon$  (le paramètre  $\lambda$  joue un rôle secondaire). Les courbes en trait plein sont les orbites du champ correspondant aux valeurs *réelles* du temps. Les valeurs de  $|\varepsilon|$  considérées sont très petites. Le cercle en pointillés, centré en 0, a lui-même un rayon très petit, mais grand par rapport à  $\sqrt{|\varepsilon|}$ : en dehors de ce cercle, la dynamique reste très voisine de celle du champ  $Z_0$  ( $\varepsilon = 0$ ); c'est à l'intérieur de ce cercle que l'influence des points fixes  $\pm\sqrt{\varepsilon}$ , de valeurs propres  $\pm 2\sqrt{\varepsilon}$ , se fait sentir de manière appréciable.



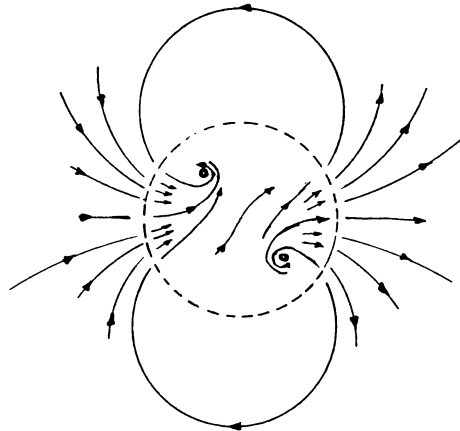
$\varepsilon = 0$



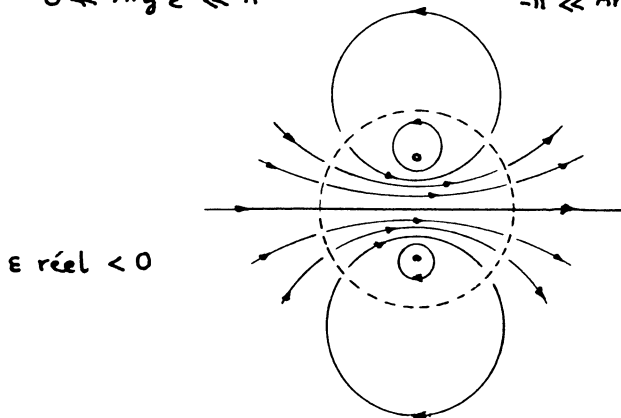
$\varepsilon \text{ réel } > 0$



$0 \ll \text{Arg } \varepsilon \ll \pi$



$-\pi \ll \text{Arg } \varepsilon \ll 0$



$\varepsilon \text{ réel } < 0$



## 2. Intégration explicite et étude géométrique.

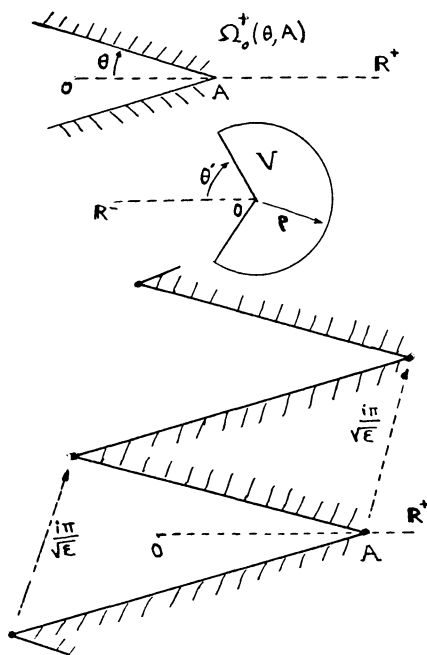
Le but de ce paragraphe est de préciser la dynamique de la famille de difféomorphismes:

$$F = \exp \frac{x^2 - \varepsilon}{1 + \lambda x} \cdot \frac{d}{dx}$$

(obtenue en intégrant la famille universelle du temps 0 au temps 1) au voisinage de  $x = 0$ . Plus exactement, nous allons définir, dans l'espace  $\mathbb{C}^3$  (coordonnées  $\varepsilon, \lambda, x$ ), deux familles de domaines fermés  $D^+$  et  $D^-$ , invariants par  $F$  et  $F^{-1}$  respectivement, et sur lesquels ces deux difféomorphismes ont un comportement essentiellement "hyperbolique".

### 2.1. Notations et remarques préliminaires.

Dans le plan de la variable complexe  $z$ , désignons par  $\Omega_0^+(\theta, A)$  le domaine représenté ci-dessous. L'angle  $\theta$  sera considéré comme *petit*, et le nombre  $A$  est tel que  $A \sin \theta$  soit *grand*.



On désigne par  $\Omega_0^-(\theta, A)$  le symétrique de  $\Omega_0^+$  par rapport à l'origine 0 de  $\mathbb{C}$ .

Dans le plan de la variable complexe  $\varepsilon$ , désignons par  $V(\theta', \rho)$  un secteur fermé de sommet 0 (figuré ci-contre), tel que:

$$(2.1) \quad 0 < \rho < 1/A^4 \\ \theta' \text{ petit et } \geq 4\theta$$

Les nombres  $\theta, A, \theta', \rho$  étant fixés, nous simplifierons les notations précédentes en  $\Omega_0^+, \Omega_0^-, V$ .

Pour  $\varepsilon \in V, \varepsilon \neq 0$ , définissons:

$$\Omega_\varepsilon^+ = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \left( \Omega_0^+ + n \cdot \frac{i\pi}{\sqrt{\varepsilon}} \right)$$

Par définition de  $V, \Omega_\varepsilon^+$  est topologiquement un demi-plan, dont le bord est une ligne brisée définie par deux séries de sommets parallèles de même période  $i\pi/\sqrt{\varepsilon}$ .

On définit de manière analogue  $\Omega_\varepsilon^-$ .

Dans l'espace  $\mathbb{C}^2$  des variables  $\varepsilon, z$  définissons enfin  $\Omega^+ = \{(\varepsilon, z) \mid \varepsilon \in V \text{ et } z \in \Omega_\varepsilon^+\}$  (même définition pour  $\Omega^-$ ). Les ensembles  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  sont des fermés connexes.

Considérons à présent la fonction:

$$(\varepsilon, z) \rightarrow d(\varepsilon, z) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\operatorname{sh} z\sqrt{\varepsilon}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{e^{z\sqrt{\varepsilon}} - e^{-z\sqrt{\varepsilon}}}, \quad d(0, z) = 1/z$$

C'est une fonction holomorphe de  $\varepsilon, z$  en dehors de l'ensemble  $z\sqrt{\varepsilon} = ni\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), car elle est insensible au choix de la détermination de  $\sqrt{\varepsilon}$ . Si les constantes  $\theta, A, \theta', \rho$  sont choisies convenablement, cette fonction est *bornée* sur  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$ , et sa dérivée y est uniformément *petite*. Plus précisément, les deux faits suivants sont à retenir pour la suite:

1) La translation  $z \rightarrow z+1$  envoie  $\Omega^+$  dans lui-même; on désigne par  $\Omega^{++n}$  le  $n$ -ème itéré de  $\Omega^+$  par cette translation ( $n \geq 0$ ). Si:

$$\delta_n = \sup_{(\varepsilon, z) \in \Omega^{++n}} |d^2(\varepsilon, z)|$$

la série  $\sum_{n \geq 0} \delta_n$  est convergente. (Remarque analogue avec  $\Omega^-$  et la translation  $z \rightarrow z-1$ .)

2) Si  $|z' - z| \leq r$  et les deux points  $(\varepsilon, z)$  et  $(\varepsilon, z')$  sont dans  $\Omega^+$  (ou  $\Omega^-$ ) on a:

$$|d^2(\varepsilon, z')| \leq \alpha \cdot |d^2(\varepsilon, z)|$$

où  $\alpha$  est une constante ne dépendant que de  $\theta, A, \theta', \rho$ .

## 2.2. Application au difféomorphisme $\exp(x^2 - \varepsilon)d/dx$ .

Le champ de vecteurs  $(x^2 - \varepsilon)d/dx$  se prolonge en un champ holomorphe sur la droite projective  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  et définit donc, pour tout  $\varepsilon$ , un groupe à un paramètre  $(F_\varepsilon)$  d'homographies (paraboliques pour  $\varepsilon = 0$ , hyperboliques pour  $\varepsilon \neq 0$ ). Les constructions et remarques de 2.1 permettent aisément de préciser, pour le difféomorphisme  $F_1$ , des domaines d'hyperbolicité; voici comment.

L'équation différentielle:

$$\frac{dx}{x^2 - \varepsilon} = d \left[ \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{Log} \frac{x - \sqrt{\varepsilon}}{x + \sqrt{\varepsilon}} \right] = dt$$

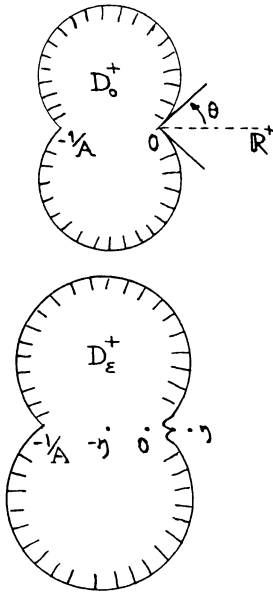
se transforme, par le changement de variable:

$$x = S(\varepsilon, z) = S_\varepsilon(z) = -\sqrt{\varepsilon} \frac{\operatorname{ch} z\sqrt{\varepsilon}}{\operatorname{sh} z\sqrt{\varepsilon}} = \sqrt{\varepsilon} \frac{1 + e^{2z\sqrt{\varepsilon}}}{1 - e^{2z\sqrt{\varepsilon}}} \quad (S(0, z) = -\frac{1}{z})$$

en l'équation triviale  $dz = dt$ , qui définit le groupe à un paramètre de translations  $F_t(z) = z + t$ . D'après 2.1 :

$$F_1(\Omega^+) \subset \Omega^+ \quad \text{et} \quad F_1^{-1}(\Omega^-) \subset \Omega^-$$

( $\theta, A, \theta', \rho$  sont fixés, tels que  $A \sin \theta$  soit assez grand).



La transformation  $S_0(z) = -1/z$  (inversion) est un difféomorphisme de  $\Omega_0^+$  sur son image (figure ci-contre). Pour  $\epsilon \in V, \epsilon \neq 0$ , la transformation  $S_\epsilon$  est un revêtement de  $\Omega_\epsilon^+$  sur son image, voisinage épointé du point  $-\eta$  ( $\eta =$  racine carrée de  $\epsilon$ , de partie réelle positive); on a :

$$-\eta = \lim_{\text{Re } z \rightarrow +\infty} S_\epsilon(z)$$

La figure ci-contre indique l'allure du domaine  $D_\epsilon^+ = S_\epsilon(\Omega_\epsilon^+) \cup \{-\eta\}$ , qui évolue continûment à partir de  $D_0^+ = S_0(\Omega_0^+) \cup \{0\}$ . Les inégalités (2.1) montrent, par un calcul simple, que le point anguleux de gauche de  $D_\epsilon^+$  reste très voisin de  $-1/A$ ; celui de droite reste voisin de  $\eta$  (à une distance de l'ordre de  $|\eta| e^{-\pi/\text{tg}\theta}$  si  $\epsilon \in \mathbf{R}^+$ ).

On définit de même les domaines  $D_\epsilon^-$ , symétriques de  $D_\epsilon^+$  par rapport à  $0$ , et images de  $\Omega_\epsilon^-$  par  $S_\epsilon$ .

La réunion  $D_\epsilon^+ \cup D_\epsilon^-$  ( $\epsilon \in V$ ) contient alors un voisinage fixe de  $0$ , dont le rayon est de l'ordre de  $1/A$ .

On pose finalement  $D^+ = \{(\epsilon, x) \mid \epsilon \in V \text{ et } x \in D_\epsilon^+\}$  (définition analogue de  $D^-$ )

Comme  $S$  conjugue le difféomorphisme  $F = F_1$  à la translation  $F_1(z \rightarrow z+1)$ , il résulte de ce qui précède que :

$$F(D^+) \subset D^+ \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(\epsilon, x) = -\eta$$

(énoncé analogue avec les itérés *negatifs* de  $F$ )

Plus précisément, en remarquant que la fonction  $x^2 - \epsilon$  (dont le module mesure la "distance" de  $x$  à la parabole  $x^2 - \epsilon = 0$  des points fixes de  $F$ ) devient, composée par  $S$ , la fonction  $d^2(\epsilon, z)$ , on obtient, comme conséquence de 2.1 :

La série  $\sum_{n \geq 0} \delta_n$ , où  $\delta_n = \sup_{F^n(D^+)} |x^2 - \epsilon|$ , est convergente.

(résultat analogue sur  $F^{-n}(D^-)$ .)

**2.3. Généralisation.**

Les observations que nous venons de faire sur le comportement de  $\exp(x^2 - \epsilon)d/dx$ , dans les domaines  $D^+$  et  $D^-$ , restent vraies pour les difféomorphismes:

$$F = \exp \frac{x^2 - \epsilon}{1 + \lambda x} \cdot \frac{d}{dx}$$

à condition que, le paramètre  $\lambda$  restant dans un domaine borné, on ait choisi  $A \sin \theta$  assez grand. Indiquons rapidement pourquoi. La forme  $\omega$  se relève, via  $S$ , en:

$$S^* \omega = (1 - \lambda \sqrt{\epsilon} \frac{\operatorname{ch} z \sqrt{\epsilon}}{\operatorname{sh} z \sqrt{\epsilon}}) dz = d(z - \lambda \operatorname{Log} \frac{\operatorname{sh} z \sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon}}) = d\tilde{z}$$

soit, pour  $\epsilon = 0$ ,  $S_0^* \omega = (1 - \lambda/z)dz = d(z - \lambda \operatorname{Log} z)$ . Il est alors facile de voir que, pour  $\lambda$  appartenant à un compact fixé, et si les constantes  $\theta, A$  sont telles que  $A \sin \theta$  soit assez grand:

- 1) La transformation  $(\epsilon, z) \rightarrow (\epsilon, \tilde{z})$  est un difféomorphisme de  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  sur leurs images  $\tilde{\Omega}^+$  et  $\tilde{\Omega}^-$ .
- 2) La translation  $(\epsilon, \tilde{z}) \rightarrow (\epsilon, \tilde{z} + 1)$  (resp.  $\tilde{z} \rightarrow \tilde{z} - 1$ ) envoie  $\tilde{\Omega}^+$  (resp.  $\tilde{\Omega}^-$ ) dans lui-même. De plus, si l'on définit  $z_n$  ( $n \geq 0$ ) par  $\tilde{z}_n = \tilde{z} + n$ , alors la quantité  $z_n - (z + n)$  est uniformément bornée en module sur  $\Omega^+$  (par rapport à  $n$ ). On a un énoncé analogue avec  $z_n$  ( $n \leq 0$ ) sur  $\Omega^-$ .

Nous laissons au lecteur la vérification de ces points. Résumons le résultat obtenu dans la

**Proposition (2.4).** *Soit  $F$  le difféomorphisme, dans  $\mathbb{C}^3$  (coordonnées  $\epsilon, \lambda, x$ ), défini par l'intégration au temps 1 de l'équation  $dx/dt = (x^2 - \epsilon)/(1 + \lambda x)$ . Pour tout compact  $K$  du plan des  $\lambda$ , il existe des constantes  $\theta, A$  telles que:*

- (i)  $F(K \times D^+) \subset K \times D^+$  et  $F^{-1}(K \times D^-) \subset K \times D^-$ .
  - (ii) Si  $\delta_n = \sup_{F^n(K \times D^+)} |x^2 - \epsilon|$ , la série  $\sum_{n \geq 0} \delta_n$  est convergente.
- (même résultat avec  $D^-$ ).

**2.5. Une autre méthode d'intégration.**

Le groupe à un paramètre  $F_t$  défini par l'intégration du champ universel peut être obtenu sans recours au changement de variable singulier  $S$ . Il suffit pour cela de chercher

les éléments de  $F_t$  sous la forme  $F_t(\varepsilon, \lambda, x) = (x - \varepsilon u)/(1 - xu)$  où  $u(t, \varepsilon, \lambda, x)$  est une fonction à déterminer. Pour calculer  $u$ , on remarque d'abord que  $T^*\omega = \omega + dK$  où  $\omega = (1 + \lambda x)dx/(x^2 - \varepsilon)$ , et  $T(\varepsilon, x, u) = (x - \varepsilon u)/(1 - xu)$  ( $T^*\omega$  est une forme en les seules variables  $x, u$  avec paramètres  $\varepsilon, \lambda$ ), et enfin:

$$K(\varepsilon, \lambda, x, u) = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{Log} \frac{1 + u\sqrt{\varepsilon}}{1 - u\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\lambda}{2} \operatorname{Log} \frac{1 - \varepsilon u^2}{(1 - xu)^2}$$

La fonction  $K$  est holomorphe en ses quatre variables sur un voisinage du plan  $\varepsilon = x = 0$  dans  $\mathbb{C}^4$ ; on a de plus  $K(0, \lambda, 0, u) = u$ . Ainsi le groupe  $F_t$  est déterminé par la solution  $u$  de l'équation  $K(\varepsilon, \lambda, x, u) = t$ , qui s'obtient en utilisant le théorème des fonctions implicites.

**Remarques.** L'intégration de l'équation perturbée:

$$\left( \frac{1 + \lambda x}{x^2 - \varepsilon} + q(\varepsilon, \lambda, x) \right) dx = dt$$

se fait de manière analogue, en résolvant en  $u$  l'équation implicite:

$$K(\varepsilon, \lambda, x, u) + Q(\varepsilon, \lambda, T(\varepsilon, x, u)) - Q(\varepsilon, \lambda, x) = t$$

où  $Q$  désigne une primitive de  $q$  par rapport à  $x$ .

D'autre part, l'équivalence de cette équation avec la forme universelle s'obtient explicitement, sous la forme  $\Phi(\varepsilon, \lambda, x) = (x - \varepsilon v)/(1 - xv)$ , en résolvant en  $v$  l'équation:

$$K(\varepsilon, \lambda, x, v) = Q(\varepsilon, \lambda, x).$$

### 3. Familles de difféomorphismes en dimension un: étude formelle.

#### 3.1. Préliminaires.

Pour la simplicité de l'exposé, nous considérons les (germes de) familles à un paramètre de difféomorphismes:

$$(2) \quad x' = F(\varepsilon, x) \quad \varepsilon \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{C}$$

où  $F$  est un germe de fonction holomorphe à l'origine de  $\mathbb{C}^2$  (ou une série formelle en les variables  $\varepsilon, x$ ) telle que:

$$(i) \quad F(0, x) = F_0(x) = x + ax^2 + \dots \quad \text{avec } a \neq 0$$

(cette condition signifie que  $F_0$  admet l'origine comme point fixe double)

(ii) La courbe des points fixes de  $F$ :  $F(\varepsilon, x) = x$  est lisse, c'est à dire que  $F$  vérifie la condition générique  $\partial F / \partial \varepsilon(0, 0) \neq 0$ .

Il est commode d'interpréter une telle donnée comme le difféomorphisme local (ou formel) de  $\mathbb{C}^2$  en  $(0,0)$  défini par  $(\epsilon, x) \rightarrow (\epsilon, F(\epsilon, x))$ , que nous notons aussi  $F$ .

Deux tels difféomorphismes  $F$  et  $G$  sont dits *équivalents*, ou *conjugués*, si l'on peut trouver un difféomorphisme local (ou formel):

$$\begin{aligned} \Phi : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0) &\rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0) \\ (\epsilon, x) &\rightarrow (h(\epsilon), \phi(\epsilon, x)) \end{aligned}$$

tel que  $F = \Phi \circ G \circ \Phi^{-1}$  (Noter que  $\Phi$  préserve la fibration sur l'espace du paramètre  $\epsilon$ .) On parlera de conjugaison analytique ou formelle selon que  $\Phi$  est analytique ou formel.

Il est facile de voir que tout difféomorphisme (2) peut être ramené, par conjugaison analytique (ou formelle s'il est formel) à la forme suivante:

$$(3) \quad F(\epsilon, x) = \frac{x - \epsilon v(\epsilon, x)}{1 - xv(\epsilon, x)} = x + (x^2 - \epsilon) \frac{v}{1 - xv}$$

où  $v$  vérifie la condition:

$$(4) \quad K(\epsilon, \lambda(\epsilon), x, v(\epsilon, x)) - 1 \text{ s'annule sur l'ensemble } x^2 - \epsilon = 0$$

$\lambda(\epsilon)$  étant un germe de fonction analytique (une série formelle si  $F$  est formel) caractéristique de  $F$ .

Tout ceci signifie simplement que:

- La courbe des points fixes de  $F$  est la parabole  $x^2 - \epsilon = 0$ .
- Le long de cette courbe  $F$  est tangent, à l'ordre un, au difféomorphisme:

$$\exp \frac{x^2 - \epsilon}{1 + \lambda(\epsilon)x} \cdot \frac{d}{dx}$$

défini par la famille universelle des champs de vecteurs. La série  $\lambda(\epsilon)$  est déterminée simplement en utilisant la partie linéaire de  $F$  le long de la courbe des points fixes et la remarque 1.1. La condition (4) utilise les remarques faites en 2.5.

Dans la suite, nous ne considérerons donc que des difféomorphismes de la forme (3). De plus, comme il est naturel, nous y considérerons  $\lambda$  comme indépendant de  $\epsilon$ , et  $v$  comme une fonction (ou une série formelle) dépendant analytiquement de  $\lambda$ . Autrement dit, nous envisageons les *difféomorphismes*  $F$ , dans  $\mathbb{C}^3(\epsilon, \lambda, x)$ , qui coïncident à l'ordre un, le long de  $x^2 - \epsilon = 0$ , avec l'exponentielle du champ universel  $\exp Z$ .

Nous cherchons à déterminer un champ de vecteurs:

$$\hat{X} = \frac{x^2 - \epsilon}{1 + \lambda x + (x^2 - \epsilon)q} \cdot \frac{d}{dx}$$

où  $q$  est une série formelle en  $(\epsilon, x)$ , à coefficients analytiques en  $\lambda$  ( $\hat{X}$  est donc 1-tan-

gent à  $Z$  sur  $x^2 - \varepsilon = 0$ ), tel que  $F = \exp \widehat{X}$ .

En vertu des remarques faites en 2.5, si  $q$  répond à la question, et si  $Q$  désigne une primitive de  $q$  par rapport à  $x$ , on doit avoir:

$$Q(\varepsilon, \lambda, F(\varepsilon, \lambda, x)) - Q(\varepsilon, \lambda, x) + K(\varepsilon, \lambda, x, v) = 1$$

Comme, par hypothèse,  $K - 1$  appartient à l'idéal engendré par  $(x^2 - \varepsilon)$ , on est ramené à résoudre l'équation aux différences :

$$(5) \quad Q(\varepsilon, \lambda, x) - Q(\varepsilon, \lambda, F(\varepsilon, \lambda, x)) = (x^2 - \varepsilon) h(\varepsilon, \lambda, x)$$

où  $h$  est une série formelle en  $\varepsilon, x$  à coefficients analytiques en  $\lambda$ . La résolution de cette équation est conséquence du résultat un peu plus général que voici:

**Proposition (3.2)** Soit  $x' = F(\varepsilon, x) = x + (x^2 - \varepsilon) f(\varepsilon, x)$ , où  $f \in C[[\varepsilon, x]]$ ,  $f(0) \neq 0$  et  $h \in C[[\varepsilon, x]]$ . L'équation aux différences

$$(6) \quad \Delta Q = Q(\varepsilon, x') - Q(\varepsilon, x) = (x^2 - \varepsilon) h(\varepsilon, x)$$

admet une unique solution  $Q \in C[[\varepsilon, x]]$  telle que  $Q(\varepsilon, 0) = 0$ .

**Démonstration.**

1) Pour  $\varepsilon = 0$ , on vérifie très facilement (et c'est bien connu) que l'équation

$$\Delta_0(Q) = Q \cdot F_0 - Q = R \quad (F_0(x) = F(0, x), Q \text{ et } R \in C[[x]])$$

admet, à condition que le second membre  $R$  soit 1-plat ( $R \in m^2$ ), une unique solution  $Q$  sans terme constant ( $Q \in m$ ). Plus précisément,  $Q$  est  $k$ -plate si  $R$  l'est à l'ordre  $k+1$ .

2) On résout maintenant (6) en cherchant  $Q$  sous la forme:

$$Q(\varepsilon, x) = \sum_{p \geq 0} \varepsilon^p Q_p(x) \quad Q_p \in m$$

Posons par définition, pour  $Q \in C[[x]]$  (attention:  $Q$  est ici indépendante de  $\varepsilon$ ):

$$Q \cdot F - Q = \sum_{p \geq 0} \varepsilon^p \Delta_p Q$$

L'opérateur  $\Delta_0$  est celui qui a été introduit en 1). Ecrivons aussi le second membre de (6) sous la forme:

$$(x^2 - \varepsilon) h = \sum_{p \geq 0} \varepsilon^p R_p(x)$$

Par identification en  $\varepsilon$ , (5) définit la suite d'équations :

$$\Delta_0 Q_p = R_p - \sum_{i=1}^{i=p} \Delta_i Q_{p-i} \quad p = 0, 1, \dots$$

qui détermine de proche en proche les  $Q_p \in \mathfrak{m}$ , si nous montrons que les seconds membres sont toujours dans l'idéal  $\mathfrak{m}^2$ . D'abord,  $R_0(x) = x^2 h(0,x)$  appartient à  $\mathfrak{m}^2$  par définition, et ceci permet de calculer  $Q_0$ . Supposons par récurrence avoir pu déterminer  $Q_0, \dots, Q_p$  et considérons la série

$$Q_{(p)} = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \dots + \varepsilon^p Q_p \in C[[\varepsilon, x]].$$

On a par définition de  $Q_{(p)}$ :

$$Q_{(p)} = R_0 + \varepsilon R_1 + \dots + \varepsilon^p R_p + \varepsilon^{p+1} \sum_{i=1}^{p+1} \Delta_i Q_{p-i} + \dots$$

Comme  $F$  fixe la courbe  $x^2 - \varepsilon = 0$ , cette série est identiquement nulle pour  $\varepsilon = x^2$ ; il en est de même de  $R_0 + \varepsilon R_1 + \dots$ , et donc de la différence; on obtient finalement:

$$x^{2(p+1)} (R_{p+1} - \Delta_1 Q_p - \dots - \Delta_{p+1} Q_0) + x^{2(p+2)} \dots = 0$$

Il en résulte que le premier terme de cette somme est dans  $\mathfrak{m}^{2(p+2)}$ ; par conséquent, l'expression entre parenthèses est bien dans  $\mathfrak{m}^2$ .

**Remarque.** Si dans (6)  $h$  est  $k$ -plate en  $\varepsilon, x$ , on vérifie facilement que la solution  $Q$  est de la forme  $x \times$  une série  $k$ -plate.

### 3.3. Conclusion.

Nous avons ainsi montré que tout difféomorphisme  $F$  de la forme (3) se plonge dans un groupe à un paramètre, du moins formellement. Il revient au même de dire, en vertu de la Proposition 1.1, que  $F$  est équivalent à l'exponentielle du champ universel  $Z$ , au moyen d'un difféomorphisme formel. Celui-ci s'obtient explicitement, en utilisant la remarque 2.5, en résolvant l'équation:

$$K(\varepsilon, \lambda, x, w) = Q(\varepsilon, \lambda, x)$$

où  $Q$  est la solution de (5), et en posant  $\Phi(\varepsilon, \lambda, x) = (x - \varepsilon w)/(1 - xw)$ .

En fait, on sait bien (voir par exemple STERNBERG [6]) que tout difféomorphisme tangent à l'identité, en toute dimension, est plongeable dans un groupe à un paramètre. Ce qui précède n'est donc pas surprenant; mais le calcul explicite que nous avons fait resservira dans la suite.

### 4. Incarnation du logarithme formel.

**Théorème (4.1).** Soit  $F$  un difféomorphisme analytique (3), et  $\widehat{X}$  le champ de vecteurs formel tel que  $F = \exp \widehat{X}$ . Si  $A \cdot \sin \theta$  est assez grand, on a, sur le domaine



$D^+$  (resp.  $D^-$ ):

$$F = \exp X^+ \quad (\text{resp. } F = \exp X^-)$$

où  $X^+$  et  $X^-$  sont des champs de vecteurs continus sur  $D^+$  et  $D^-$ , analytiques sur  $D^+ \setminus D_0^+$  et  $D^- \setminus D_0^-$  respectivement, et tous deux asymptotes, à l'origine de  $C^2(\varepsilon, x)$ , au champ formel  $\hat{X}$ .

(Comme  $\hat{X}$ , les champs  $X^+$  et  $X^-$  dépendent analytiquement de  $\lambda$ : ceci ne présente aucune difficulté; c'est pourquoi, dans la suite, nous travaillerons à  $\lambda$  fixé, pour la commodité des notations.)

Rappelons qu'une fonction  $f : D^+ \rightarrow \mathbb{C}$  est *asymptote en*  $(0,0)$  à une série formelle  $\hat{f} \in C[[\varepsilon, x]]$  si, pour tout entier  $k \geq 0$ ,  $f - f_k$  est un  $o(|\varepsilon|^k + |x|^k)$ , où  $f_k$  désigne le polynôme de degré  $k$  obtenu en troncant la série  $\hat{f}$  à l'ordre  $k$ .

Montrons d'abord comment le théorème se déduit de la

**Proposition (4.2)** *Les conclusions de la Proposition 2.4 restent vraies pour tout difféomorphisme analytique (3).*

Il s'agit de résoudre, dans  $D^+$  par exemple, l'équation aux différences (5) avec second membre analytique. Considérons la série:

$$Q^+(\varepsilon, x) = \sum_{n \geq 0} (x_n^2 - \varepsilon) h(\varepsilon, x_n)$$

où  $x_n = F^n(\varepsilon, x)$  ( $F^n =$  itéré  $n$ -ème de  $F$ ). Soit:

$$\|h\|_{D^+} = M = \sup_{D^+} |h(\varepsilon, x)| \quad \text{et} \quad \delta_n = \sup_{F^n(D^+)} |x^2 - \varepsilon|$$

On a, pour tout  $(\varepsilon, x) \in D^+$ :  $|(x_n^2 - \varepsilon) h(\varepsilon, x_n)| \leq \delta_n M$

Il en résulte que la série considérée converge normalement sur  $D^+$ , et définit donc une fonction continue sur  $D^+$ , holomorphe sur  $D^+ \setminus D_0^+$  ( $D_0^+$  est un "coin" du bord de  $D^+$ ), et clairement solution de (5). Sur  $D_0^+ \setminus \{0\}$  elle est analytique en  $x$ . De plus:

$$\|Q^+\|_{D^+} \leq \left( \sum_{n \geq 0} \delta_n \right) \cdot \|h\|_{D^+}$$

Montrons maintenant que  $Q^+$  est asymptote, à l'origine de  $C^2$ , à la solution formelle  $Q$  de (5) (modulo une fonction de  $\varepsilon$  seul, évidemment). Soit  $Q_k$  ( $k$  entier  $\geq 0$ ) le polynôme de Taylor à l'ordre  $k$  de  $Q$  en 0 (ne pas confondre avec les  $Q_k$  introduits dans

la démonstration de la proposition 3.2). On vérifie immédiatement que:

$$\Delta(Q^+ - Q_k) = (x^2 - \epsilon) h_k(\epsilon, x)$$

où  $h_k$  est une fonction analytique  $k$ -plate en 0. Par l'argument précédent, on a:

$$\|Q^+ - Q_k\|_{D^+} \leq \left(\sum_{n \geq 0} \delta_n\right) \cdot \|h_k\|_{D^+}$$

ce qui établit le résultat.

Reste à voir l'unicité: elle est évidente car, pour  $\epsilon \in V$ ,  $\epsilon \neq 0$ , l'équation  $\Delta Q = 0$  n'admet que les solutions  $Q = \text{cst}$  sur  $D_\epsilon^+$ ; en effet,  $Q$  doit être constante sur toute suite  $x_n = F^n(\epsilon, x)$ , qui converge vers un point intérieur à  $D_\epsilon^+ \cap \phi$

### 4.3. Preuve de la Proposition (4.2).

Selon une méthode classique, on écrit  $F$  sous la forme

$$F = F_0 \circ G$$

où  $F_0 = \exp Z$  est la "forme normale" étudiée au §2, et  $G$  est 1-plat par rapport à l'identité le long de la courbe  $x^2 - \epsilon = 0$ . De même, on écrit les itérés de  $F$  sous la forme:

$$F^n = F_0^n \circ G_n \quad (G_1 = G)$$

Il suffit alors de montrer que, pour un  $D^+$  convenable, et  $n \geq 1$ , on a:

$$(7) \quad G_n(D^+) \subset F_0^{-1}(D^+)$$

En effet, on aura dans ce cas, pour  $n \geq 1$ :

$$F^n(D^+) = F_0^{n-1} \circ F_0 \circ G_n(D^+) \subset F_0^{n-1}(D^+)$$

et la démonstration de 4.2 est ramenée à celle de 2.4.

L'inclusion (7) revient à une estimation de la distance de  $G_n$  à l'identité. Pour l'obtenir, on remarque que  $G_n$  peut être exprimé comme un composé des conjugués de  $G$  par les itérés de  $F_0$ ; exactement:

$$G_n = G'_{n-1} \circ G'_{n-2} \circ \dots \circ G'_1 \circ G'_0 \quad \text{où} \quad G'_i = F_0^{-i} \circ G \circ F_0^i \quad (G'_0 = G)$$

Fixons maintenant un domaine  $D^+ = D^+(\theta, A)$  contenu dans le domaine de définition de  $F(\epsilon, x) = (x - v)/(1 - xv)$ . Rappelons que, par définition:

$$(8) \quad L(\epsilon, x) = K(\epsilon, \lambda, x, v) = 1 + (x^2 - \epsilon) h(\epsilon, x) \quad (\text{cf. 3.1.})$$

et posons:

$$C = \sup_{D^+} |h(\epsilon, x)|$$

On a donc, avec les notations de la proposition 2.4 :

$$\|L - 1\|_{F_0^n(D^+)} \leq C \cdot \delta_n$$

Remontons de  $D^+$  à  $\Omega^+$ , en passant de la coordonnée  $x$  à la coordonnée  $z$  introduite au § 2 (c'était  $\tilde{z}$  pour  $\lambda \neq 0$ , mais nous la désignons maintenant par  $z$ ); par 2.5,  $F$  se remonte en  $F(\varepsilon, z) = z + L$  alors que  $F_0$  se trivialise en la translation  $F_0(\varepsilon, z) = z + 1$ . Il en résulte que l'on a  $F = F_0 \cdot G$  avec:

$$G_0(\varepsilon, z) = z + g_0(\varepsilon, z) \quad \text{et} \quad \left\| g_0 \right\|_{F_0^n(\Omega^+)} \leq C \cdot \delta_n$$

et donc:

$$G'_n(\varepsilon, z) = z + g'_0(\varepsilon, z+n) = z + g'_n(\varepsilon, z) \quad \left\| g'_n \right\|_{\Omega^+} \leq C \cdot \delta_n$$

Les domaines  $\Omega^+$ ,  $\Omega_1^+ = F_0(\Omega^+)$ , ... s'emboîtent régulièrement par la translation  $F_0$ , et la distance de chacun d'eux au bord du précédent est une constante  $d > 0$ . Quitte à remplacer  $\Omega^+$  par  $\Omega_r^+$  tel que  $C \cdot \sum_{n \geq r} \delta_n < d$ , il est clair que pour tout point  $(\varepsilon, z) \in \Omega^+$ , la suite des points  $G'_0(\varepsilon, z)$ ,  $G'_1 \cdot G'_0(\varepsilon, z)$ , ... restera à une distance de  $(\varepsilon, z)$  inférieure à  $d$ , et sera donc tout entière contenue dans  $F_0^{-1}(\Omega^+)$ . Ceci établit le résultat cherché. Pour obtenir l'énoncé correspondant avec  $D^-$  et les itérés négatifs de  $F$ , on procède évidemment de la même façon, en remplaçant  $F$  et  $F_0$  par  $F^{-1}$  et  $F_0^{-1}$   $\diamond$

#### 4.4. Remarque.

La démonstration qui précède prouve en fait que le produit de composition infini:

$$G^+ = \dots G'_n \cdot G'_{n-1} \cdot \dots \cdot G'_0$$

converge sur  $D^+$  et définit un difféomorphisme tel que  $G^+(D^+) \subset F_0^{-1}(D^+)$ . Comme  $G^+ = \text{Lim } F_0^{-n} \cdot F^n$ , on a  $G^+ \cdot F = F_0 \cdot G^+$  c'est à dire que  $G^+$  *conjugue*, sur  $D^+$ ,  $F$  à la forme normale  $F_0$ .

Il est facile de voir que  $G^+$  s'obtient, plus explicitement, en utilisant 2.5, sous la forme :

$$G^+(\varepsilon, x) = \frac{x - \varepsilon w}{1 - x w}$$

en résolvant l'équation en  $w$ :  $K(\varepsilon, \lambda, x, w) = Q^+(\varepsilon, \lambda, x)$ .

Le difféomorphisme normalisant  $G^+$  est donc, à l'origine, asymptote au difféomorphisme normalisant formel obtenu en 3.3.

#### 4.5. Conclusion et problème.

Le théorème 4.1 établit bien les résultats annoncés dans l'introduction: quand  $\varepsilon \in V$  tend vers 0, le champ  $X_{\varepsilon^+}$ , analytique sur  $D_{\varepsilon^+}$  et "logarithme" de  $F_{\varepsilon}$ , tend (au sens  $C^0$ )

vers le champ  $X_0^+$ .

Notre résultat est cependant encore incomplet : on attend que les champs  $X^+$  et  $X^-$  soient en fait  $C^\infty$  au sens de Whitney sur  $D^+$  et  $D^-$ . On dispose déjà du candidat série de Taylor à l'origine, c'est à dire  $\hat{X}$ . La probable série de Taylor aux autres points de  $D_0^+$  apparaît en revenant à la résolution formelle de l'équation aux différences (5) de 3.2, et qui est obtenue sous la forme d'une série en  $\varepsilon$ , à coefficients  $\hat{X}_i \in C[[x]]$ ; un argument simple montre que ces séries sont les jets en  $x = 0$  de fonctions  $X_i$  analytiques à l'intérieur de  $D_0^+$ , la série  $\sum_{i \geq 0} \varepsilon^i X_i$  (formelle en  $\varepsilon$ ) restant une solution de (5): elle représente sans doute le jet (en  $\varepsilon$ ) de  $X^+$  le long de  $D_0^+$ . En fait, les séries formelles  $\hat{X}_i$  sont toutes probablement résurgentes.

## RÉFÉRENCES

- [1] J. ECALLE, *Théorie itérative. Introduction à la théorie des invariants holomorphes*; J. Math. Pures Appl. 54 (1975) 183-258. *Les fonctions résurgentes*, Vol. I, II, III, Publ. Math. Orsay, 1981, 1985.
- [2] V.P KOSTOV, *Versal deformations of differential forms of degree  $\alpha$  on a line*; Funk. Anal. i Ego Pril. 18, 4 (1984), 81-82 (en russe); Func. Anal. App 18, 4 (1985) 335-337.
- [3] B. MALGRANGE, *Travaux d'Ecalles et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques*; Sémin. Bourbaki, Exposé 582, Novembre 1981.
- [4] J. MATHER, *Commutators of diffeomorphisms*, Comm. Math. Helv. 48 (1973) 195-233.
- [5] J.P RAMIS, *Les séries k-sommables et leurs applications*; Springer Lect. Notes in Physics, 126 (1980).
- [6] S. STERNBERG, *Infinite Lie groups and the formal aspects of dynamical systems*; J. Math. Mech. 10, 3 (1961), 451-474.
- [7] S.M VORONIN, *Analytic classification of germs of conformal mappings  $(C,0) \rightarrow (C,0)$  with identity linear part*; Funct. Anal. Appl. 15, 1 (1981).
- [8] J.C YOCCOZ, *Centralisateurs et conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle*; Thèse, Université d'Orsay, 1985.

Jean Martinet, Institut de Mathématiques

7, Rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex (France)