

# *Astérisque*

ALBERT FATHI

## **Les feuilletages mesurés (suite)**

*Astérisque*, tome 66-67 (1979), p. 93-119

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1979\\_\\_66-67\\_\\_93\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__93_0)

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LES FEUILLETAGES MESURÉS

( suite )

par Albert FATHI

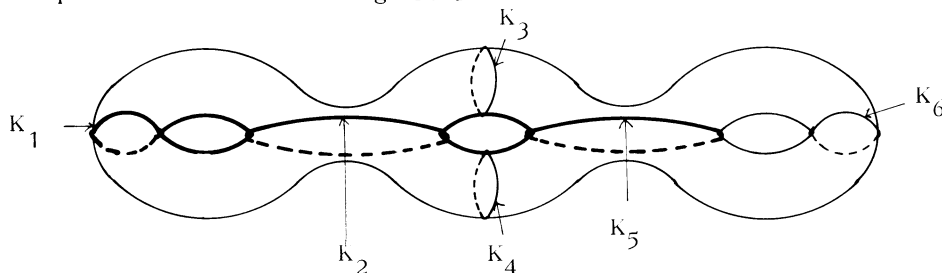
- § I . - Classification des feuilletages de l'anneau
- § II . - Classification des feuilletages du pantalon
- § III . - Les arcs jaunes
- § IV . - Forme normale d'un feuilletage
- § V . - Classification des feuilletages mesurés
- § VI . - Retour sur les courbes comme fonctionnelles
- § VII . - Minimalité de l'action de  $\pi_0(\text{Diff } M)$  sur  $P(\mathfrak{F})$
- § VIII . - Existence de feuilletages mesurés supplémentaires
- Appendice . - Formules explicites sur les feuilletages mesurés

Le but de cet exposé est de classier les feuilletages mesurés sur une surface compacte (ici, elle sera fermée et orientable). Comme pour les courbes, on va se ramener au cas des feuilletages dans les pantalons. Pour cela, on se donne des courbes  $K_1, \dots, K_{3g-3}$ , qui décomposent la surface en pantalons.

Si  $(\mathfrak{F}, \mu)$  est un feuilletage tel que, pour tout  $j$ ,  $I(\mathfrak{F}, \mu; [K_j]) \neq 0$ , on peut par des isotopies et des modifications de Whitehead se ramener au cas où les  $K_j$  sont transverses à  $\mathfrak{F}$ . Un tel feuilletage est classifié par les mesures des courbes  $K_j$  et par des twists autour de ces courbes qui eux aussi s'expriment en fonctions des mesures

de certaines courbes (voir l'appendice).

Dans le cas où les longueurs de certains des  $K_i$  sont nulles, on peut espérer modifier  $\mathfrak{F}$  pour que ces courbes soient toutes des cycles de feuilles et ensuite classifier les feuilletages comme plus haut. Ceci n'est malheureusement pas vrai. En voici un exemple sur une surface  $M$  de genre 3.



Le feuilletage que l'on considère admet pour feuilles les courbes dessinées en gras et toutes les autres feuilles sont des courbes isotopes à  $K_6$ . Il est impossible de modifier ce feuilletage (par des opérations de Whitehead et des isotopies) pour que les courbes  $K_3$  et  $K_4$  apparaissent comme des cycles de feuilles. Ce feuilletage est obtenu en fait à partir d'un feuilletage sur un anneau  $A$  autour de  $K_6$  en collapsant  $\overline{M-A}$  sur un spine. Dans cette opération, les deux pantalons qui touchent  $K_1$  sont écrasés sur la réunion de trois courbes fermées.

On est alors obligé de tenir compte de ce genre de phénomène. C'est pourquoi on a introduit dans l'exposé précédent l'opération d'élargissement : un feuilletage  $\mathfrak{F}$  d'une surface  $M$  est obtenu par élargissement à partir d'un feuilletage  $\mathfrak{F}_0$  d'une sous-surface  $M_0$  (à bord), si  $\mathfrak{F}$  est l'image de  $\mathfrak{F}_0$  par l'application  $M \rightarrow M$  obtenue en étendant un collapse de  $\overline{M-M_0}$  sur un spine. Un tel feuilletage est "porté" essentiellement par  $M_0$  puisque les longueurs transverses des courbes contenues dans  $M - M_0$  sont nulles.

Utilisant cette opération, on peut trouver des formes canoniques ("normales") des feuilletages et procéder à la classification.

§ I. - CLASSIFICATION DES FEUILLETAGES DE L'ANNEAU

I. 1. D'après la formule d'Euler-Poincaré, un feuilletage mesuré sur  $S^1 \times [0, 1]$  n'a pas de singularité. Si  $S^1 \times \{0\}$  est une feuille, alors, par stabilité, toutes les feuilles sont des courbes fermées. Si  $S^1 \times \{0\}$  est transversal au feuilletage, toute feuille va d'un bord à l'autre. Donc, si  $(\theta, x)$  désignent des coordonnées de  $S^1 \times [0, 1]$ , tout feuilletage mesuré de l'anneau est isotope à celui associé à  $\lambda d\theta$  ou à  $\lambda dx$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ .

I.2. On veut donner une classification des feuilletages mesurés de l'anneau  $A$  modulo l'action du groupe  $\text{Diff}^0(A \text{ rel } \partial A)$  des difféomorphismes qui sont isotopes à  $\text{Id}$  rel le bord. On choisit une fois pour toutes un arc  $\gamma$  joignant les deux bords et un arc  $\bar{\gamma}$  se déduisant de  $\gamma$  par un twist d'un tour dans le sens positif (figure 1).

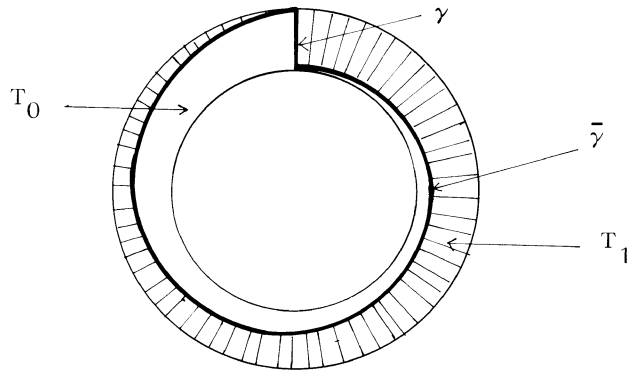


Figure 1

Si  $(\mathfrak{F}, \mu)$  est un feuilletage mesuré sur  $A$ , on pose :

$$m = \mu(S^1 \times \{0\}) = \mu(S^1 \times \{1\}) = I(\mathfrak{F}, \mu ; [S^1 \times \{0\}]) ;$$

$$s = \inf \{ \mu(\gamma') \mid \gamma' \text{ isotope à } \gamma \text{ à extrémités fixées} \} ;$$

$$t = \inf \{ \mu(\gamma') \mid \gamma' \text{ isotope à } \bar{\gamma} \text{ à extrémités fixées} \} .$$

I. 3. Lemme. Un triplet  $(m, s, t)$  de trois nombres positifs est associé à un feuilletage mesuré de  $A$  si et seulement si  $(m, s, t)$  appartient à  $\partial(\leq \nabla)$  (bord des inégalités

du triangle).

Démonstration. Considérons le triangle  $T_1$  hachuré sur la figure 1. Ayant fait une isotopie pour que  $\gamma$  et  $\bar{\gamma}$  soient transversales au feuilletage, toute feuille entrant par une arête du triangle sort par l'un des deux autres. Dans cette situation, il est clair que les trois mesures des arêtes forment un triplet appartenant à  $\partial(< \nabla)$ . Il est clair aussi que cette condition est la seule à vérifier pour qu'un triplet soit associé à un feuilletage mesuré.  $\square$

Si  $m = 0$ , alors chaque courbe du bord est une feuille et, avec les coordonnées  $(\theta, x)$ , le feuilletage est isotope (rel  $\partial A$ ) à  $t dx = s dx$ . Ce cas étant exclu, le feuilletage est transverse au bord.

I. 4. Proposition. Soient  $\mathfrak{F}$  et  $\mathfrak{F}'$  deux feuilletages mesurés transverses au bord de l'anneau et coïncidant sur le bord (égalité des mesures induites ; en particulier,  $m(\mathfrak{F}) = m(\mathfrak{F}')$ ). Alors  $\mathfrak{F}$  et  $\mathfrak{F}'$  sont isotopes par une isotopie constante sur le bord si et seulement si  $(s, t)(\mathfrak{F}) = (s, t)(\mathfrak{F}')$ .

Démonstration (suffisance). On déforme  $\mathfrak{F}$  et  $\mathfrak{F}'$  jusqu'à ce que

$$\begin{aligned} s &= \mu(\gamma) = \mu'(\gamma) \\ t &= \mu(\bar{\gamma}) = \mu'(\bar{\gamma}) . \end{aligned}$$

Alors  $\gamma$  et  $\bar{\gamma}$  sont transverses aux deux feuilletages, à moins que l'un de ces arcs soit une feuille. Dans le cas de transversalité, une deuxième isotopie fait coïncider les mesures induites sur  $\gamma$  (resp.  $\bar{\gamma}$ ). Alors, les feuilletages coïncident sur le bord de chacun des triangles  $T_0$  et  $T_1$ . On sait qu'une telle donnée au bord d'un disque a un unique prolongement (par exemple d'après  $\Gamma_3 = 0$ , exposé 2 théorème 1).  $\square$

## § II. - CLASSIFICATION DES FEUILLETAGES DU PANTALON

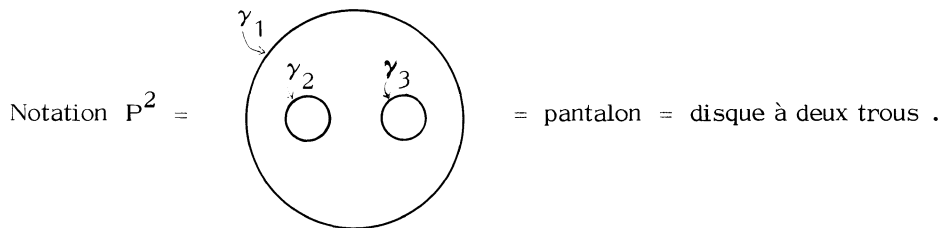


Figure 2

II. 1. Lemme. Pour un feuilletage de  $P^2$  avec singularités permises (exposé 5) ou bien il n'y a qu'une singularité (4 séparatrices) ou bien il y a deux singularités, chacune à 3 séparatrices.

(Preuve par la formule d'Euler-Poincaré).

II. 2. Définition. On dit que  $\mathfrak{F}$  est un bon feuilletage de  $P^2$  si aucune composante de  $\partial P^2$  n'est une feuille lisse de  $\mathfrak{F}$ .

Lemme. Soit  $\mathfrak{F}$  un feuilletage mesuré de  $P^2$ . Alors :

1° Toute feuille est fermée dans le complémentaire des singularités.

2° Si, en plus,  $\mathfrak{F}$  est un bon feuilletage, il n'existe pas de cycle de feuilles intérieur à  $P^2$ .

Démonstration. 1° Supposons que  $L$  soit une feuille non fermée de  $\mathfrak{F}$  dans  $P^2 - \text{sing}(\mathfrak{F})$ ; elle présente de la récurrence et on peut trouver sur  $L$  un arc  $\beta$  dont les extrémités sont joignables par une transversale  $\alpha$  de sorte que  $\alpha \cup \beta$  constitue une courbe simple. On a deux configurations possibles (figure 3).

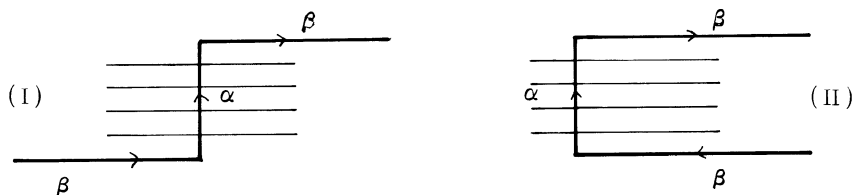


Figure 3

D'après le corollaire du théorème de récurrence de Poincaré (exposé 5, I.5),  $L$  coupe  $\alpha$  une infinité de fois; puisque  $\alpha \cup \beta$  disconnecte  $P^2$ , la configuration II se ramène à la configuration I. On peut alors approcher  $\alpha \cup \beta$  par une courbe  $\gamma$  fermée transverse à  $\mathfrak{F}$  et coupant  $L$  une infinité de fois; d'après I.7 (exposé 5)  $\gamma$  ne borde pas un disque; donc  $\gamma$  borde avec une composante  $\gamma_1$  de  $\partial P^2$  un anneau. Toute feuille qui coupe  $\gamma$  coupe aussi  $\gamma_1$ . Ceci interdit que  $L$  coupe  $\gamma$  une infinité de fois.

2° Si  $\gamma$  est un cycle intérieur,  $\gamma \cup \gamma_1$  borde un anneau  $A$ ; au voisinage de  $\gamma$  dans  $A$  les feuilles sont fermées lisses et, par stabilité,  $\gamma_1$  est une feuille fermée lisse, ce qui est interdit.  $\square$

Corollaire. Toute feuille d'un bon feuilletage va : - soit du bord au bord,  
 - soit du bord à une singularité,  
 - soit d'une singularité à une singularité.

II. 3. Bon feuilletage réduit : c'est un bon feuilletage de  $P^2$  vérifiant les conditions suivantes :

- (i) si une composante du bord est transversale, elle évite les singularités,
- (ii) les singularités du bord sont simples (3 séparatrices) ,
- (iii) il n'y a pas de liaisons entre deux singularités dont l'une au moins est intérieure.

Soit  $\mathfrak{M}_0(P^2)$  l'ensemble des classes d'équivalence de bons feuilletages mesurés de  $P^2$  .

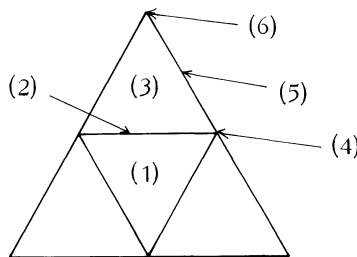
Lemme. Dans chaque classe de  $\mathfrak{M}_0(P^2)$  , il existe un bon feuilletage réduit unique à isotopie près.

Preuve. On assure (i) immédiatement. Alors, d'après II.2, si un feuilletage admet deux singularités simples liées par deux arcs distincts  $\alpha_1, \alpha_2$  , on a :  $\alpha_1 \cup \alpha_2$  est une composante du bord. C'est dire que pour un feuilletage non réduit, il n'existe, à isotopie près, qu'une façon de le réduire.  $\square$

II. 4. Classification.

Théorème. L'application  $\mathfrak{M}_0(P^2) \rightarrow \mathbb{R}_+^3$  , qui à un bon feuilletage mesuré  $(\mathfrak{F}, \mu)$  associe le triplet  $(m_1, m_2, m_3) = (\mu(\gamma_1), \mu(\gamma_2), \mu(\gamma_3))$  , induit une bijection de  $\mathfrak{M}_0(P^2)$  sur  $\mathbb{R}_+^3 - \{0\}$  .

Démonstration. On commence par décrire un inverse à droite ; la construction dépend de la position du triplet par rapport à l'inégalité triangulaire ; à chaque simplexe, on n'associe qu'une configuration topologique. Elles sont données ci-dessous pour les 6 simplexes typiques.



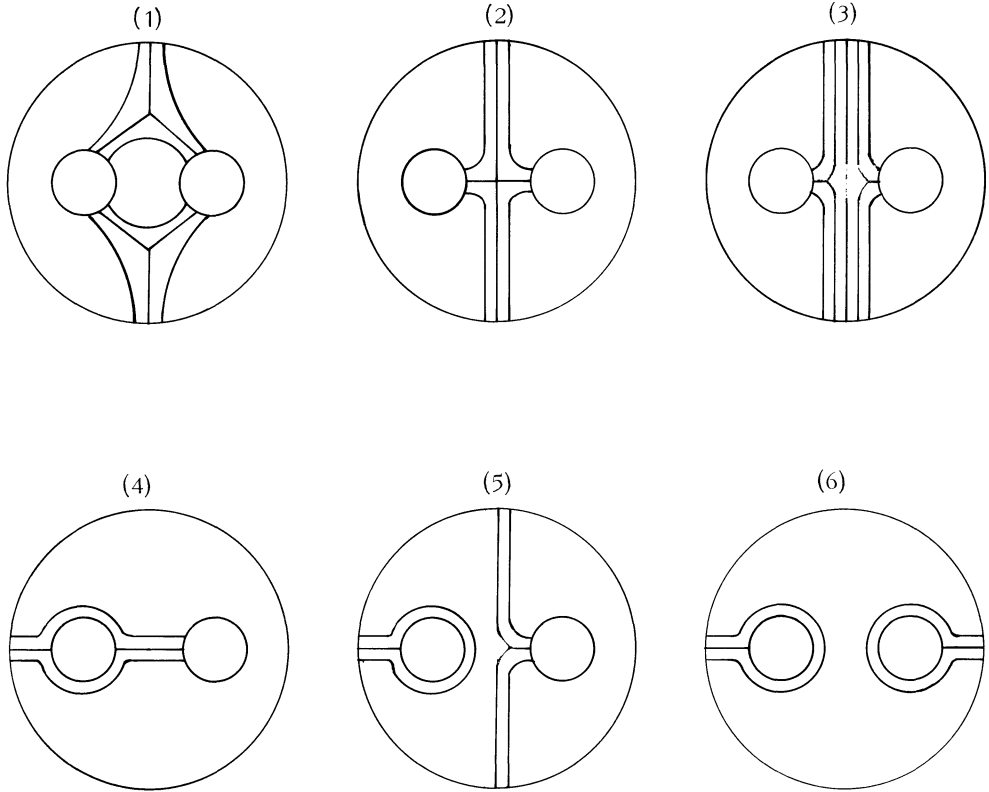


Figure 4

Remarquons que si l'on découpe ces figures le long des séparatrices, on obtient quelques rectangles feuilletés dont les épaisseurs (= plus grande mesure d'une transversale) sont déterminés par le triplet. Par exemple dans la configuration (1), les épaisseurs des 3 rectangles sont :

$$a_{12} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 - m_3)$$

$$a_{13} = \frac{1}{2}(m_1 + m_3 - m_2)$$



$$a_{23} = \frac{1}{2}(m_2 + m_3 - m_1) .$$

Dans la configuration (3) , on a les formules :

$$a_{11} = \frac{1}{2} [ m_1 - (m_2 + m_3) ]$$

$$a_{12} = m_2$$

$$a_{13} = m_3 .$$

Il est facile de voir qu'à renumérotation près, ces figures représentent toutes les possibilités à isotopie près pour les séparatrices d'un feuilletage réduit ; toutes les autres configurations sont interdites par la formule d'Euler-Poincaré. On en déduit tout de suite que deux feuilletages donnant le même triplet sont isotopes.  $\square$

II. 5. On envisage maintenant le cas où certaines courbes du bord sont des feuilles lisses. On a la proposition générale suivante :

Proposition. Soit  $\mathfrak{F}$  un feuilletage mesuré de  $P^2$ . Alors  $\mathfrak{F}$  s'obtient par élargissement d'un feuilletage  $\mathfrak{F}_0$  d'une sous-variété  $P_0$  ayant les propriétés suivantes :

Chaque composante connexe  $C$  de  $P_0$  est :

1° Soit un pantalon et le feuilletage  $\mathfrak{F}_0|_C$  est un bon feuilletage ;

2° Soit un voisinage collier d'une courbe de  $\partial P^2$  et dans ce cas  $\mathfrak{F}_0|_C$  est un feuilletage par cercles.

Démonstration. Si aucune composante du bord n'est lisse, on prend  $P_0 = P^2$ . Sinon, on considère une feuille lisse  $\gamma_1$  dans  $\partial P^2$ . On considère l'"anneau" maximal  $A$  associé à  $\gamma_1$  par stabilité (lemme II.4 de l'exposé 5). Si  $A = P^2$ , on prend pour  $P_0$  un voisinage collier de  $\gamma_1$  feuilleté par cercles, dont la  $\mathfrak{F}_0$ -épaisseur est la  $\mathfrak{F}$ -épaisseur de  $A$ .

Si  $A \neq P^2$ , il existe une feuille  $L$  de  $\mathfrak{F}$  dans l'intérieur de  $P^2$  qui appartient à la frontière topologique de  $A$  ; la feuille  $L$  va d'une singularité  $s_0$  à une singularité  $s_1$ .

Si  $s_0 = s_1$ ,  $\bar{L}$  est un cycle de feuilles formant une courbe de Jordan qui limite un vrai anneau  $A'$  feuilleté par cercles. Le domaine  $\overline{P^2 - A'}$ , qui est un pantalon, éventuellement pincé si  $s_0$  appartient à  $\partial P^2$ , est feuilleté avec moins de feuilles lisses dans son bord. On exécute de la même façon les autres composantes lisses.

Si  $s_0 \neq s_1$ , les singularités sont simples (figure 5) et de  $s_0$  part une autre feuille  $L'$  dans la frontière de  $A$ . Si  $L'$  revient en  $s_0$ ,  $\overline{L'}$  est un cycle plongé. Sinon  $L'$  va à  $s_1$  et  $\overline{L \cup L'}$  est un cycle de Jordan. Dans les deux cas, on poursuit comme plus haut.  $\square$

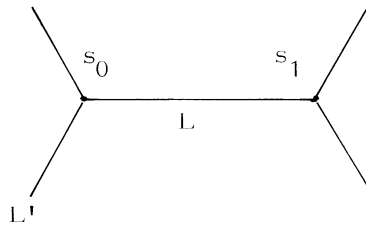


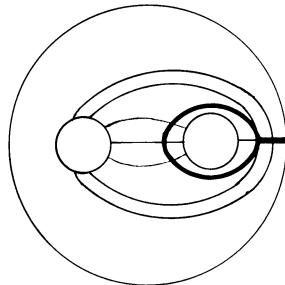
Figure 5

### III. - LES ARCS JAUNES

III. 1. Il s'agit d'un ingrédient technique qui sert au repérage d'un feuilletage mesuré par sa trace sur chaque morceau d'une décomposition en pantalons de la surface donnée.

Pour chaque composante  $C$  du bord du pantalon  $P^2$  et pour chaque type de bon feuilletage sur  $P^2$ , on choisit un arc quasi-transverse, à extrémités dans  $C$ , et essentiel (c'est-à-dire non homotope à un arc du bord). On l'appelle l'arc jaune. Pour  $C = \gamma_1$  et pour chaque type de bon feuilletage, on choisit l'arc indiqué en gras sur les figures ci-dessous.

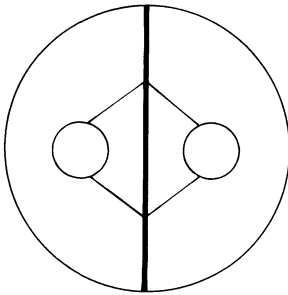
Cas génériques :



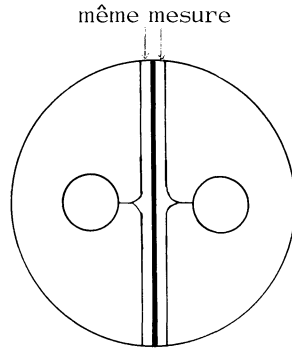
$$m_2 > m_1 + m_3$$

(ou  $m_3 > m_1 + m_2$ )

EXPOSÉ 6



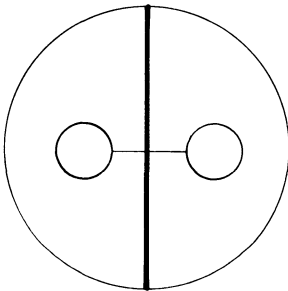
$$(m_1, m_2, m_3) \in (\leq \nabla)$$



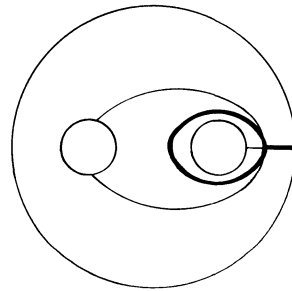
$$m_1 > m_2 + m_3$$

-----

Cas où  $(m_1, m_2, m_3) \in \partial(< \nabla)$ , avec  $m_1 \neq 0$ ,  $m_2 \neq 0$ ,  $m_3 \neq 0$  :



$$m_1 = m_2 + m_3$$

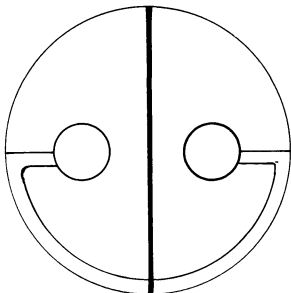


$$m_2 = m_1 + m_3$$

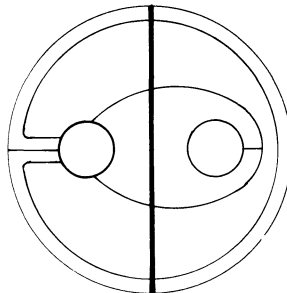
(ou  $m_3 = m_1 + m_2$ )

-----

Cas où  $m_1 = 0$  :

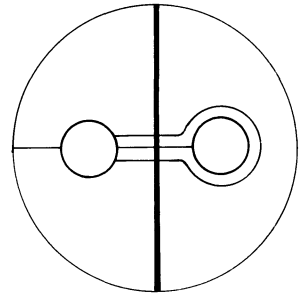


$$m_2 = m_3$$



$$m_2 > m_3 > 0$$

(ou  $m_3 > m_2$ )



$$m_3 = 0$$

(ou  $m_2 = 0$ )

Cas où  $m_2 = 0$  (ou  $m_3 = 0$ ) :

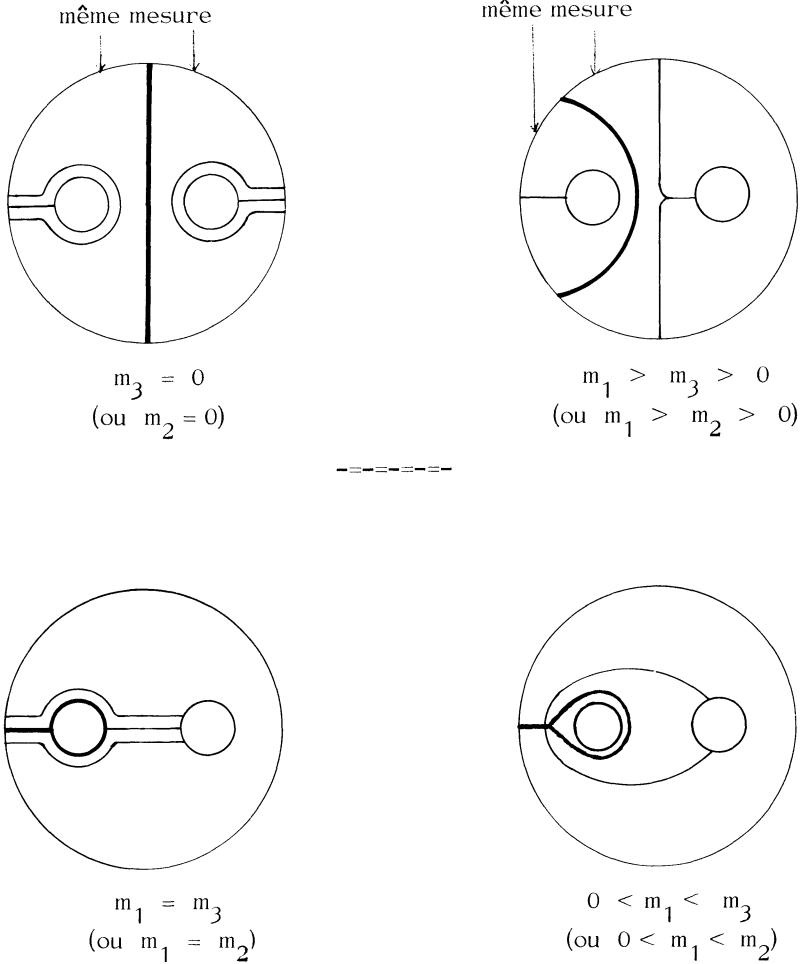


Figure 6

III. 2. Longueur de l'arc jaune.

Remarquons que l'arc jaune réalise le minimum de la longueur des arcs essentiels allant de  $\gamma_1$  à  $\gamma_1$  (quasi-transversalité). Sa longueur (au sens de la mesure transverse) est donnée par la formule :

$$\ell_1 = \sup \left( \frac{m_2 + m_3 - m_1}{2}, 0 \right) + \sup \left( \frac{m_2 - m_1 - m_3}{2}, 0 \right) + \sup \left( \frac{m_3 - m_1 - m_2}{2}, 0 \right)$$

la vérification se fait en examinant tous les cas de figure.

III. 3. Définition de l'arc A .

L'arc jaune délimite sur  $\gamma_1$  deux arcs, l'un d'eux étant éventuellement réduit à un point. On appelle A celui qui est du même côté que  $\gamma_2$  par rapport à l'arc jaune (il faudrait noter A par  $A_{12}$ , mais il n'y aura pas d'ambiguïté plus tard). Sa longueur a est donnée par la formule :

$$a = \sup \left( \frac{m_2 + m_1 - m_3}{2}, 0 \right) - \sup \left( \frac{m_2 - m_1 - m_3}{2}, 0 \right) .$$

§ IV. - FORME NORMALE D'UN FEUILLETAGE

IV. 1. Soit M une surface fermée de genre  $g \geq 2$  ; soit  $K_1, \dots, K_{3g-3}$  une famille de courbes qui sépare M en pantalons. On désigne par  $\{R_j\}$  les  $2g-2$  pantalons ; chaque  $R_j$  est l'adhérence d'une des composantes de  $M - \cup K_i$  .

On aura besoin plus tard de la condition technique suivante : chaque  $R_j$  doit être l'image d'un pantalon plongé ; autrement dit, chaque  $K_i$  n'adhère pas au même pantalon par ses deux côtés.

Avec cette condition, on dit qu'on a une décomposition permise de M .

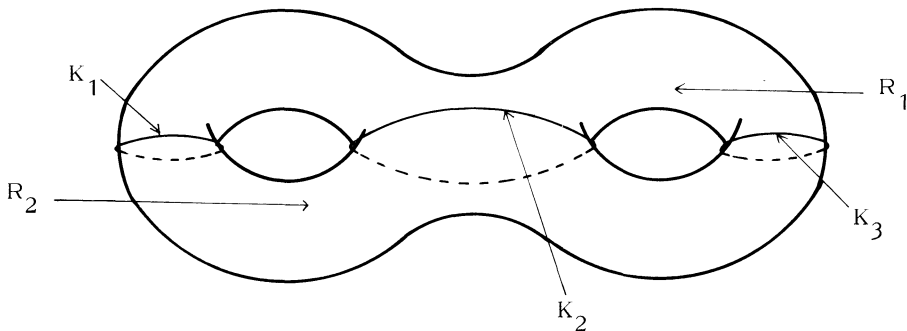


Figure 7

Pour chaque  $i = 1, \dots, 3g-3$  , on choisit un voisinage tubulaire  $K_i \times [-1, +1] \subset M$  de  $K_i$  ; si  $i \neq j$  , les voisinages de  $K_i$  et  $K_j$  sont disjoints. On désigne par  $\{R_j^i\}_{1 \leq j \leq 2g-2}$  les composantes connexes de  $M - \cup (K_i \times ]-1, +1[)$  .

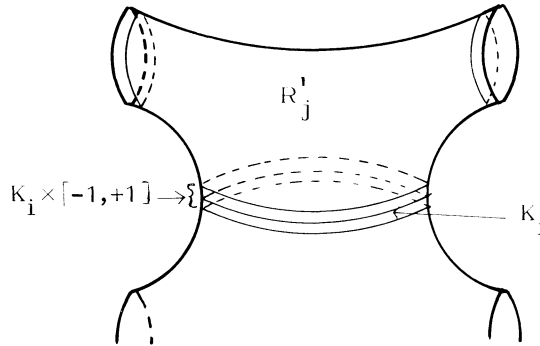


Figure 8

IV. 2. Définition. Soient  $M_0$  une sous-variété compacte de dimension 2 de  $M$  et  $\mathfrak{F}_0$  un feuilletage mesuré de  $M_0$ . On dit que  $(M_0, \mathfrak{F}_0)$  est en forme normale (par rapport aux données du paragraphe précédent) si les conditions ci-dessous sont satisfaites.

- 1) Toute composante de  $\partial M_0$  est un cycle de feuilles ;
- 2)  $M_0 \cap R_j^1$  est vide ou égal à  $R_j^1$  ; dans ce dernier cas  $\mathfrak{F}_0|_{R_j^1}$  est un bon feuilletage ;
- 3)  $M_0 \cap K_i \times ]-1, +1[$  est :
  - soit vide ;
  - soit  $K_i \times ]-1, +1[$  ; dans ce cas,  $\mathfrak{F}_0$  est transversal aux cercles  $K_i \times \{t\}$ ,  $t \in ]-1, +1[$  ; remarquons qu'ici  $M_0$  contient les pantalons adjacents à l'anneau ;
  - soit  $K_i \times [-1/2, +1/2]$  ; dans ce cas, le feuilletage a pour feuilles les  $K_i \times \{t\}$ ,  $t \in [-1/2, +1/2]$  .

Soit  $\mathfrak{F}$  un feuilletage mesuré de  $M$ . On dit que  $(M_0, \mathfrak{F}_0)$  est une forme normale de  $\mathfrak{F}$ , si  $(M_0, \mathfrak{F}_0)$  est en forme normale et si  $\mathfrak{F}$  est obtenu par élargissement de  $(M_0, \mathfrak{F}_0)$ .

IV. 3. Proposition. Tout feuilletage mesuré sur  $M$  a une forme normale.

Démonstration. Soit  $(\mathfrak{F}, \mu)$  un feuilletage mesuré sur  $M$ . Quitte à changer la numérotation, on peut supposer que :

$$I(\mathfrak{F}, \mu ; [K_1]) \neq 0, \dots, I(\mathfrak{F}, \mu ; [K_\ell]) \neq 0,$$

et que

$$0 = I(\mathfrak{F}, \mu ; [K_{\ell+1}]) = \dots = I(\mathfrak{F}, \mu ; [K_{3g-3}]).$$

Alors, d'après II.6 (exposé 5), en changeant  $\mathfrak{F}$  dans sa classe, on obtient que  $\mathfrak{F}$  soit transversal à  $K_i \times \{t\}$  pour tout  $t \in [-1, +1]$  et  $i = 1, \dots, \ell$ .

Soit  $M'$  le complémentaire des anneaux  $K_i \times ]-1, +1[$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ . On a un feuilletage mesuré induit  $(\mathfrak{F}', \mu)$ , transverse au bord; les courbes  $K_i$ ,  $i \geq \ell + 1$ , sont incluses dans  $\text{int } M'$ .

Pour  $i \geq \ell + 1$ , on a  $I(\mathfrak{F}', \mu; [K_i]) = 0$ . En effet, en cas contraire, il existe  $\mathfrak{F}''$ , feuilletage mesuré de  $M'$  équivalent à  $\mathfrak{F}'$ , coïncidant avec  $\mathfrak{F}'$  près du bord, et transversal à  $K_i$ . Mais alors, on a :

$$I(\mathfrak{F}, \mu; [K_i]) = I(\mathfrak{F}'', \mu; [K_i]) \neq 0,$$

ce qui est interdit par la numérotation.

Appliquant la proposition II.6 de l'exp. 5 à  $\mathfrak{F}'$ ,  $M'$  et  $K_{\ell+1}$ , quitte à changer  $\mathfrak{F}'$  dans sa classe, on peut dire qu'il existe une homotopie  $f_t: K_{\ell+1} \rightarrow M'$  telle que  $f_0 = (K_{\ell+1} \hookrightarrow M')$  et que  $f_1(K_{\ell+1})$  soit un ensemble invariant  $\Sigma_1$  de  $\mathfrak{F}'$ . Lorsqu'on applique la proposition à  $K_{\ell+2}$ , on fait des opérations de Whitehead sur  $\mathfrak{F}'$  qui induisent des glissements de  $\Sigma_1$ , en sorte que  $K_{\ell+1}$  continue d'être homotopé sur un ensemble invariant etc... Ainsi on peut construire  $\mathfrak{F}'$  et une homotopie  $f_t: K_{\ell+1} \cup \dots \cup K_{3g-3} \rightarrow M'$  telle que  $f_0$  soit l'inclusion et que l'image de  $f_1$  soit un ensemble invariant  $\Sigma$  de  $\mathfrak{F}'$ .

Soit  $N \subset M'$  un voisinage régulier de  $\Sigma$ ; alors  $\mathfrak{F}'$  est obtenu par élargissement d'un feuilletage  $\mathfrak{F}'_1$  sur  $M'_1 = \overline{M' - N}$ . Par construction, aucune composante de  $N$  n'est un disque. Comme  $M'_1$  a un feuilletage mesuré, aucune composante de  $M'_1$  n'est un disque. Au total, aucune composante de  $\partial M'_1$  n'est homotope à zéro.

On peut supposer (par engouffrement) que  $\text{int } N$  contient tous les  $K_i$ ,  $i \geq \ell + 1$ . En effet, l'application singulière  $f_1$  est proche d'une immersion  $f'_1$ ; il existe un "disque de Whitney"  $\Delta$  à travers lequel on peut faire une homotopie dont l'effet est de diminuer le nombre des points doubles de  $f'_1$ . Mais, d'après ce qu'on vient de voir de  $\partial N$ , dès que  $\partial \Delta$  est contenu dans  $N$ ,  $\Delta$  est contenu dans  $N$ . Par récurrence sur le nombre de points doubles, on voit que l'on peut déformer, par homotopie,  $f'_1$  en un plongement, dont l'image est contenue dans  $N$  et qui, d'après Epstein (voir références de l'exposé 3), sera isotope à  $f_0$ .

On voit que  $R_j \cap M'_1$  est constitué d'au plus un pantalon ("concentrique à  $R_j$ ") et d'un certain nombre d'anneaux parallèles aux composantes du bord de  $R_j$ . Le bord d'une composante de  $R_j \cap M'_1$  peut être de l'un ou l'autre type :

- $K_i \times \{\pm 1\}$  pour  $i \leq \ell$ ; courbe transversale à  $\mathfrak{F}'_1$ ;
- cycle de feuilles de  $\mathfrak{F}'_1$ , parallèle à l'un des  $K_i$ ,  $i \geq \ell + 1$ .

Alors une composante de  $M_1^1 \cap R_j$ , qui est un anneau, ne peut être feuilletée que par cercles. Mais une composante de  $M_1^1 \cap R_j$  qui est un pantalon ne peut-être être pas un bon feuilletage ; on lui applique II.5, ce qui permet de remplacer  $(M_1^1, \mathfrak{F}_1^1)$  par  $(M_0^1, \mathfrak{F}_0^1)$  vérifiant :

- $\mathfrak{F}_0^1 = \mathfrak{F}_1^1$  au voisinage de  $\partial M^1$  ;
- $(M_1^1, \mathfrak{F}_1^1)$  s'obtient par élargissement de  $(M_0^1, \mathfrak{F}_0^1)$  ;
- si  $V$  est une composante de  $R_j \cap M_0^1$  qui est un pantalon,  $\mathfrak{F}_0^1|_V$  est un bon feuilletage.

Par une isotopie évidente de  $(M_0^1, \mathfrak{F}_0^1)$ , faisant par exemple coïncider le  $V$  ci-dessus avec  $R_j^1$ , on obtient la forme normale cherchée.  $\square$

#### IV. 4. Définition de $h\mathfrak{F}$ .

Deux couples  $(M_0, \mathfrak{F}_0)$  et  $(M_0^1, \mathfrak{F}_0^1)$  sont équivalents si  $M_0 = M_0^1$  et si  $\mathfrak{F}_0^1$  peut être obtenu à partir de  $\mathfrak{F}_0$  par une suite finie d'opérations élémentaires des types suivants :

- opération de Whitehead à support dans un des  $R_j^1$  ;
- isotopie à support dans  $K_i \times [-1, +1] \cap M_0$  ;
- isotopie à support dans  $R_j$  .

L'ensemble des classes d'équivalence est noté  $h\mathfrak{F}$  (ou  $h\mathfrak{F}(M)$ ) . L'élargissement induit une application  $h\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{M}\mathfrak{F}$ , qui est surjective d'après la proposition précédente ; on verra plus loin qu'elle est en fait bijective.

#### IV. 5. Classification des feuilletages en forme normale.

On se réfère ici à la décomposition permise de  $M$  donnée en IV. 1. :

$$M = \left( \bigcup_{j=1}^{2g-2} R_j^1 \right) \cup \left( \bigcup_{i=1}^{3g-3} K_i \times [-1, +1] \right) .$$

Pour chaque  $R_j^1$ , on se donne une fois pour toutes un difféomorphisme avec le pantalon standard, respectant l'orientation. De plus, pour chaque  $i = 1, \dots, 3g-3$ , on choisit des courbes  $K_i^1$  et  $K_i''$  ; si  $R_{j_1}$  et  $R_{j_2}$  sont les deux pantalons (distincts, car la décomposition est permise) qui touchent  $K_i$ ,  $K_i^1$  est une courbe fermée simple (+), essentielle, qui n'est parallèle à aucune des courbes de  $\partial R_{j_1} \cup \partial R_{j_2}$ . La courbe  $K_i''$  est obtenue à partir de  $K_i^1$  par twist d'un tour dans le sens positif autour de  $K_i$  (figure 9).

---

(+) Si les deux côtés de  $K_i$  adhéraient au même pantalon,  $K_i^1$  ne serait pas plongeable.



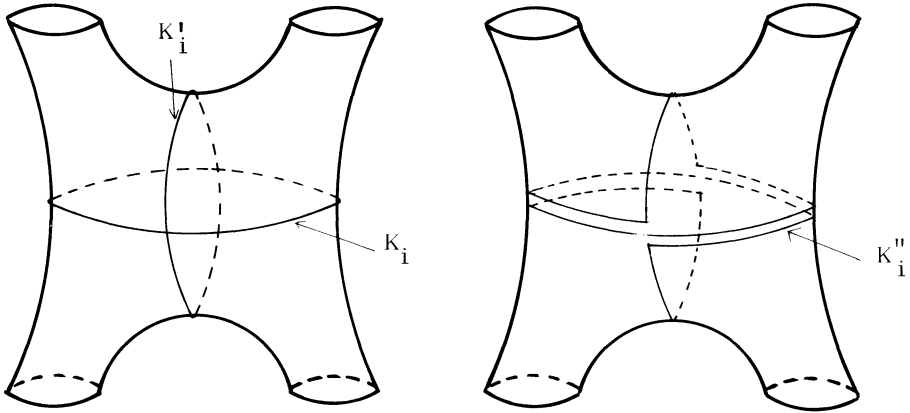


Figure 9

On pose  $B = \{(m_i, s_i, t_i) \mid i = 1, \dots, 3g-3, m_i, s_i, t_i \geq 0, (m_i, s_i, t_i) \in \partial(\leq \nabla)\}$   
 $C$  est un cône de  $\mathbb{R}_+^{9g-9}$  qui est homéomorphe à  $\mathbb{R}^{6g-6}$ . On va construire une application :

$$n \mathfrak{F} \longrightarrow B - 0 .$$

Soit  $(M_0, \mathfrak{F}_0)$  le représentant d'un élément de  $n \mathfrak{F}$  ; sans changer sa classe, on peut supposer que  $\mathfrak{F}_0 \mid R_j^1$  est une forme canonique pour tout  $j$  tel que  $M_0 \cap R_j^1 \neq \emptyset$ . L'invariant  $m_i$  est la mesure de  $K_i$ , nulle si  $K_i \cap M_0 = \emptyset$ . Les invariants  $s_i$  et  $t_i$  dépendent de la forme du feuilletage induit sur l'anneau  $K_i \times [-1, +1]$  ; il y a trois cas.

1er cas.  $K_i \times [-1, +1] \cap M_0 \subset K_i \times \{-1\} \cup K_i \times \{+1\}$ . On pose alors  $s_i = t_i = 0$ .

2e cas.  $K_i \times [-1/2, +1/2] = K_i \times ]-1, +1[ \cap M_0$ . Dans ce cas, l'anneau est feuilleté par cercles ; alors  $s_i = t_i$  est l'épaisseur de l'anneau, c'est-à-dire la mesure d'une transversale. Noter que, dans ces deux premiers cas,  $m_i = 0$  ; donc il est clair que  $(m_i, s_i, t_i)$  appartient à  $\partial(\leq \nabla)$ .

3e cas.  $M_0 \cap K_i \times [-1, +1] = K_i \times [-1, +1]$ . Dans ce cas, le feuilletage est transverse aux cercles  $K_i \times \{x\}$  pour tout  $x \in [-1, +1]$ , et  $M_0$  contient les deux pantalons  $R_k^1$  et  $R_\ell^1$  adjacents à  $K_i \times [-1, +1]$ . On a un arc jaune  $J_k$  et un arc jaune  $J_\ell$ . Il existe alors deux arcs  $S_i$  et  $S_i^1$  dans  $K_i \times [-1, +1]$  tels que  $J_k \cup S_i \cup J_\ell \cup S_i^1$  soit une courbe fermée homotope à  $K_i^1$  ; leurs classes d'homotopie à extrémités fixes dans  $K_i \times [-1, +1]$  sont complètement déterminées. On convient de choisir pour  $S_i$

et  $S_i^1$  des arcs de longueurs minimales. Avec une convention d'orientation, on distingue  $S_i$  et  $S_i^1$ . On pose :

$$s_i = \mu_0(S_i), \quad s_i^1 = \mu_0(S_i^1)$$

où  $\mu_0$  est la mesure accompagnant le feuilletage  $\mathfrak{F}_0$ .

De la même façon, on construit des arcs  $T_i$  et  $T_i^1$  tels que  $J_k \cup T_i \cup J_{\frac{1}{2}} \cup T_i^1$  soit homotope à  $K_i''$ . On pose :

$$t_i = \mu_0(T_i), \quad t_i^1 = \mu_0(T_i^1).$$

En résumé, les invariants  $(m_i, s_i, t_i)$  sont dans ce cas les invariants classifiant le feuilletage induit sur l'anneau  $K_i \times [-1, +1]$ , au sens de la classification du § I. En particulier, on a :  $(m_i, s_i, t_i) \in \partial(\leq \nabla)$ .

Il est très facile de voir que les invariants  $m_i, s_i, t_i$  ne dépendent que de la classe de  $(M_0, \mathfrak{F}_0)$  dans  $n\mathfrak{F}$ .

Lemme. L'image de  $n\mathfrak{F}$  dans  $B$  ne contient pas 0.

Preuve. Soit  $(M_0, \mathfrak{F}_0)$  donné. Comme  $M_0$  n'est pas vide, on a l'une des situations suivantes :

- 1) Pour un certain  $i$ ,  $M_0 \cap K_i \times ]-1, +1[ = K_i \times [-1/2, +1/2]$  ; alors  $(s_i, t_i) \neq 0$ .
- 2) Pour un certain  $j$ ,  $R_j^1$  est contenu dans  $M_0$  ; comme le feuilletage induit est un bon feuilletage, l'une des courbes du bord a une mesure non nulle.  $\square$

Etant donné ce qui a été dit de la classification des feuilletages mesurés sur l'anneau et le pantalon, on peut laisser en exercice les détails de la proposition suivante.

Proposition. L'application construite ci-dessus

$$n\mathfrak{F} \longrightarrow B - 0$$

est une bijection.

## § V. - CLASSIFICATION DES FEUILLETAGES MESURÉS

On considère toujours une surface  $M$  fermée orientable de genre  $g > 1$ . Pour les autres cas, on renvoie à l'exposé 11.

V. 1. Proposition. Il existe une application continue  $\theta : I_{\times}(n\mathfrak{F}) \rightarrow B$ , positivement

homogène de degré 1 (i.e.  $\theta(\lambda x) = \lambda \theta(x)$ , pour  $\lambda > 0$ ), qui rend commutatif le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc}
 h\mathfrak{F} & \longrightarrow & \mathfrak{M}\mathfrak{F} & \xrightarrow{I_*} & I_*(\mathfrak{M}\mathfrak{F}) \subset \mathbb{R}_+^{\mathfrak{A}} \\
 & \searrow & & & \downarrow \theta \\
 & & & & B
 \end{array}$$

Démonstration. Puisque  $h\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{M}\mathfrak{F}$  est une surjection, il s'agit de montrer que, pour un feuilletage en forme normale  $(M_0, \mathfrak{F}_0)$ , les invariants  $m_1, s_1, t_1$  ne dépendent que des mesures de courbes simples. Il est tout de suite clair que  $m_1 = I(\mathfrak{F}_0, \mu_0; [K_1])$ .

On montrera en appendice que  $s_1$  et  $t_1$  sont déterminés par  $I(\mathfrak{F}_0, \mu_0; [K_1^1])$  et  $I(\mathfrak{F}_0, \mu_0; [K_1^2])$ , via des formules continues homogènes.  $\square$

Puisque  $h\mathfrak{F} \rightarrow B$  est une injection, on tire tout de suite les corollaires suivants.

V. 2. Théorème. Deux feuilletages mesurés  $(\mathfrak{F}, \mu)$  et  $(\mathfrak{F}', \mu')$  sur une surface  $M$  sont équivalents au sens de Whitehead si et seulement si, pour toute courbe simple  $\gamma$  de  $M$ , on a :

$$I(\mathfrak{F}, \mu; [\gamma]) = I(\mathfrak{F}', \mu'; [\gamma]) .$$

V. 3. Proposition. L'application d'élargissement  $h\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{M}\mathfrak{F}$  est une bijection.

V. 4. Maintenant, on peut identifier  $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$  à son image par  $I_*$ , munir  $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$  de la topologie induite par  $\mathbb{R}_+^{\mathfrak{A}}$  et le compléter en  $\overline{\mathfrak{M}\mathfrak{F}} = \mathfrak{M}\mathfrak{F} \cup 0$ .

Théorème. L'application  $\theta$  est un homéomorphisme de  $\overline{\mathfrak{M}\mathfrak{F}}$  sur  $B \approx \mathbb{R}^{6g-6}$ , positivement homogène de degré 1. Par conséquent,  $P\mathfrak{M}\mathfrak{F}$  est homéomorphe à  $S^{6g-7}$ .

Démonstration. On sait déjà que l'application classifiante  $\theta$  est une bijection continue. Si l'on montre que  $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$  est une variété topologique, le théorème de l'invariance du domaine assure que  $\theta$  est aussi ouverte ; le théorème est alors démontré.

Pour prouver que  $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$ , avec la topologie de  $\mathbb{R}_+^{\mathfrak{A}}$ , est une variété topologique, on utilise les lemmes suivants.

Lemme 1 (changement de décomposition).

Soit  $\kappa$  une décomposition permise de  $M$  en pantalons et  $(M_0, \mathfrak{F}_0, \mu_0)$  un

feuilletage mesuré en forme normale par rapport à  $\mathfrak{K}$  . Il existe une autre décomposition permise  $\hat{\mathfrak{K}}$  , par un système de courbes  $\hat{\mathfrak{K}}_i$  ,  $i = 1, \dots, 3g-3$  , telles que  $\hat{m}_i = I(\mathfrak{F}_0, \mu_0 ; [\hat{K}_i])$  soit non nul quel que soit  $i$  .

N.B. Il n'est pas dit que  $(\mathfrak{F}_0, \mu_0)$  est en forme normale par rapport à cette décomposition.

Démonstration. Supposons d'abord que, pour tout  $i$  , on ait :

$$I(\mathfrak{F}_0, \mu_0 ; [K_i]) = 0 .$$

En particulier, le support de  $M_0$  est concentré dans des anneaux  $K_i \times [-1/2, +1/2]$  . On regarde un tel  $i$  et les deux pantalons  $R_k^i$  et  $R_\ell^i$  qui touchent  $K_i \times [-1, +1]$  (figure 10) .

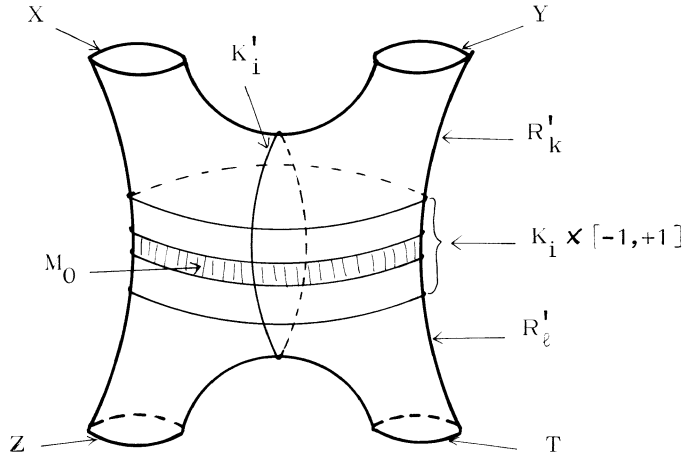


Figure 10

Si la situation est celle suggérée par la figure, où ni la paire  $(X, Z)$  ni la paire  $(Y, T)$  ne borde un anneau, on remplace  $K_i$  par  $K_i^I$  ; cela donne une décomposition permise où  $I(\mathfrak{F}_0, \mu_0 ; [K_i^I]) \neq 0$  . Au contraire, si  $(X, Z)$  borde un anneau, on construit la courbe simple  $K_i^{III}$  , qui est obtenue à partir de  $K_i^I$  par un demi-twist de Dehn le long de  $K_i^I$  et on remplace  $K_i$  par  $K_i^{III}$  (figure 11) . La décomposition obtenue est permise car la paire  $(Y, Z)$  ne borde pas un anneau (sinon  $(Y, X)$  en borderait un et  $\mathfrak{K}$  ne serait pas permise).

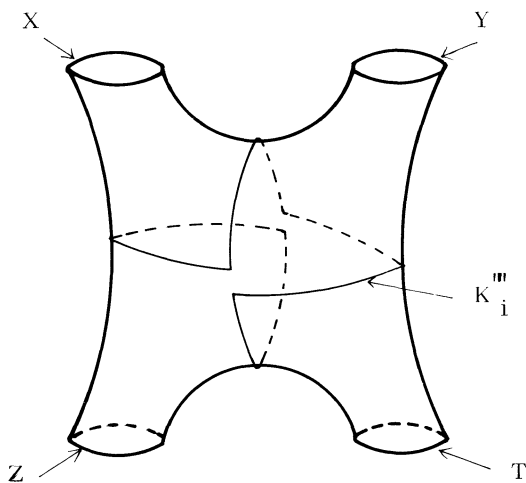
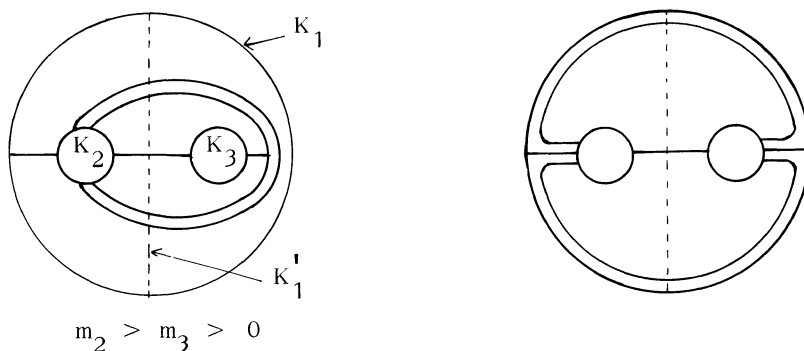


Figure 11

On est ramené à la situation suivante :

- si  $m_i = 0$ ,  $K_i$  évite  $M_0$  ou est un cycle de feuilles de  $\mathfrak{F}_0$  ;
- si  $m_i \neq 0$ ,  $K_i \cap M_0$  est transversal à  $\mathfrak{F}_0$  ;
- au moins un des  $m_i$  est non nul.

Disons alors qu'on a un pantalon  $R$ , bordé par  $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ , avec  $m_1 = 0$  et  $m_2 \neq 0$ . Pour l'élargissement du feuilletage induit sur  $R$ , on a les trois possibilités de la figure 12.



(En échangeant les lettres  $K_2$  et  $K_3$ ,  
on obtient le cas :  $m_3 > m_2 > 0$ )

Figure 12

Comme avant, on construit  $K_1^I$  (ou  $K_1^{III}$ ) qui est transversale à  $\mathfrak{F}_0$  et qui donne une nouvelle décomposition permise où l'on gagne  $m_1 \neq 0$ .  $\square$

**Lemme 2.** Soit  $(\mathfrak{F}_0, \mu_0)$  un feuilletage mesuré en position normale par rapport à une décomposition permise  $\mathcal{K}$ . On suppose que, pour tout  $i = 1, \dots, 3g-3$ , on a :

$$m_i^0 = m_i(\mathfrak{F}_0, \mu_0) \neq 0 .$$

Alors l'application  $\theta^{-1} : B - 0 \rightarrow I_{\times}(\mathfrak{m}\mathfrak{F}) \subset \mathbb{R}_+^{\mathcal{J}}$  est continue au point de coordonnées  $(m_i^0, s_i^0, t_i^0)_{i=1, \dots, 3g-3}$ .

**Remarques.** 1) Ceci prouve que  $I_{\times}(\mathfrak{m}\mathfrak{F})$  est une variété topologique au voisinage de  $(\mathfrak{F}_0, \mu_0)$  ; donc, si on applique le lemme 1,  $I_{\times}(\mathfrak{m}\mathfrak{F})$  est une variété topologique globalement.

2) Le lemme 2 serait trivial si l'on disposait de formules explicites qui, pour tout  $\gamma \in \mathcal{J}$ , expriment  $I(\mathfrak{F}, \mu ; \gamma)$  en fonction de  $(m, s, t)(\mathfrak{F}, \mu)$  et de  $(m, s, t)(\gamma)$ .

**Démonstration.** Notons ici  $E$  l'ensemble des feuilletages mesurés transverses à toutes les courbes  $K_i$  de la décomposition  $\mathcal{K}$ , sans relation d'équivalence. Si  $B^0 = \{(m_i, s_i, t_i)_i \in B \mid m_i \neq 0, \text{ pour tout } i = 1, \dots, 3g-3\}$ , il existe une section de  $\theta$ ,  $\sigma : B^0 \rightarrow E$ , avec les propriétés suivantes :

1) Un feuilletage de l'image de  $\sigma$  est en forme normale par rapport à  $\mathcal{K}$  et, pour tout  $i$ ,  $\mathfrak{F}|_{K_i \times [-1, +1]}$  varie continûment au sens de la topologie des 1-formes.

2) Si  $\alpha$  est un arc de  $R_j^1$ , allant du bord au bord, transversalement à  $(\mathfrak{F}_0, \mu_0) = \sigma((m_i^0, s_i^0, t_i^0)_i)$ , alors  $\alpha$  est transversal à  $(\mathfrak{F}, \mu) = \sigma((m_i, s_i, t_i)_i)$ , pour  $(m_i, s_i, t_i)$  assez voisin de  $(m_i^0, s_i^0, t_i^0)$  ; de plus,  $\mu(\alpha)$  varie continûment.

3) Soit  $\alpha_0 * \beta_0$  un arc de  $R_j^1$ , allant du bord au bord, où  $\alpha_0$  est transversal à  $\mathfrak{F}_0$ , où  $\beta_0$  est dans une feuille et où  $\alpha_0 * \beta_0$  est quasi-transverse à  $\mathfrak{F}_0$ . Alors, pour  $(m_i, s_i, t_i)$  assez voisin de  $(m_i^0, s_i^0, t_i^0)$ , il existe un arc  $\alpha * \beta \subset R_j^1$ , allant du bord au bord, tel que :

- a)  $\alpha * \beta$  soit  $C^0$ -voisin de  $\alpha_0 * \beta_0$  ;
- b)  $\alpha \cap \mathfrak{F}$ , où  $(\mathfrak{F}, \mu) = \sigma((m_i, s_i, t_i)_i)$  ;
- c) le recollement de  $\alpha$  et  $\beta$  soit quasi-transverse à  $\mathfrak{F}$  ;
- d)  $\mu(\beta)$  et  $|\mu(\alpha * \beta) - \mu_0(\alpha_0)|$  soient petits.

4) Même condition pour des arcs de la forme  $\beta_0 * \alpha_0 * \beta_0'$ .

[ Dans un certain sens, ces conditions signifient que  $\sigma$  est continue. Mais y a-t'il une bonne topologie sur  $E$  ? ] .

On va se contenter d'une brève esquisse pour l'existence de  $\sigma$ . Puisqu'on ne définit  $\sigma$  que sur  $B_0$ , on n'utilise dans chaque pantalon que les modèles (1), (2) et (3) de II. 4. Tant que l'on reste à l'intérieur du triangle fondamental, on peut faire varier "continûment" les réalisations effectives de ces modèles ainsi que les "arcs jaunes" correspondants. Ceci donne la possibilité de recoller les morceaux de façon à avoir une section  $\sigma$ , continue dans la topologie des champs de droites (en dehors des singularités). La figure 13 illustre le point 3).

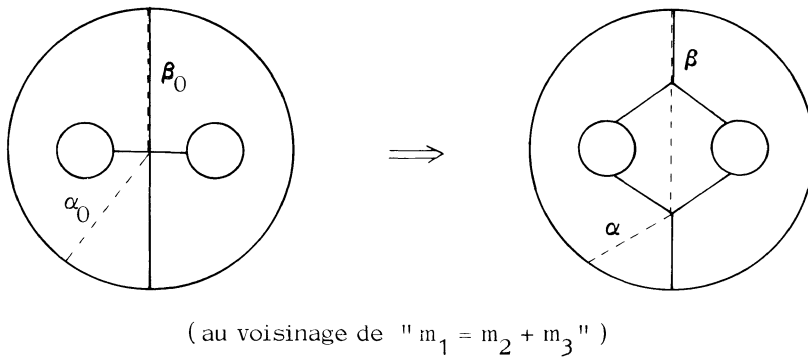


Figure 13

Connaissant  $\sigma$ , on finit facilement la démonstration du lemme 2. Soit  $\gamma \in \mathcal{A}$  et  $\sigma_\gamma$  la composante correspondante de  $\sigma$  :

$$\sigma_\gamma : B_0 \longrightarrow \mathbb{R}_+ .$$

On veut montrer que cette fonction est continue en  $(m_i^0, s_i^0, t_i^0)_i$ . Comme on l'a remarqué en II. 6 (exposé 5), on trouve une immersion  $\gamma_0^1$ , quasi-transverse à  $\mathfrak{F}_0$ , qui est limite de plongements et dont la classe d'homotopie est  $\gamma$ . Disons que :

$$\gamma_0^1 = \alpha_1^0 * \beta_1^0 * \alpha_2^0 * \dots ,$$

où  $\alpha_i^0$  est transversal à  $\mathfrak{F}_0$  et où  $\beta_i^0$  est dans les feuilles (et points singuliers). On remarque tout de suite que la  $\mu$ -longueur de  $\gamma_0^1$  varie continûment ; il s'en suit que  $\sigma_\gamma$  est semi-continue supérieurement.

D'après les propriétés 3) et 4) de  $\sigma$ , on construit pour  $(m_1, s_1, t_1)$  voisin de  $(m_1^0, s_1^0, t_1^0)$  une autre courbe immergée :

$$\gamma^1 = \alpha_1 * \beta_1 * \alpha_2 * \dots$$

homotope à  $\gamma_0^1$ , avec les propriétés suivantes :

- 1)  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  se recollent quasi-transversalement à  $\mathfrak{F}$ , où  $(\mathfrak{F}, \mu) = \sigma((m_1, s_1, t_1))$  ;
- 2)  $\alpha_i$  est transverse à  $\mathfrak{F}$  et  $\mu(\alpha_i)$  est proche de  $\mu_0(\alpha_i^0)$  ;
- 3)  $\mu(\beta_i)$  est petit.

A extrémités fixes,  $\beta_i$  est isotope à  $\bar{\beta}_i$  qui est quasi-transverse à  $\mathfrak{F}$  ; on a  $\mu(\bar{\beta}_i) \leq \mu(\beta_i)$ . En utilisant les propriétés 3) de  $\sigma$ , on voit facilement que  $\bar{\gamma}^1 = \alpha_1 * \bar{\beta}_1 * \alpha_2 * \dots$ , qui est quasi-transverse par morceaux à  $\mathfrak{F}$ , est en réalité globalement quasi-transverse à  $\mathfrak{F}$ . On a donc :

$$I(\mathfrak{F}, \mu ; [\gamma]) = \mu(\alpha_1) + \mu(\bar{\beta}_1) + \dots ,$$

somme qui, terme à terme, est proche de :

$$I(\mathfrak{F}_0, \mu_0 ; [\gamma]) = \mu_0(\alpha_1^0) + \mu_0(\beta_1^0) + \dots = \sum_i \mu_0(\alpha_i^0) . \quad \square$$

## § VI. - RETOUR SUR LES COURBES COMME FONCTIONNELLES

VI. 1. On a le diagramme commutatif ci-dessous (III. 3, exposé 5) :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{S} & & \\
 \text{élargissement} \longrightarrow \downarrow & \searrow i_* & \\
 n\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{m}\mathfrak{F} & \xrightarrow{I_*} & \mathbb{R}_+^* \mathcal{S}
 \end{array}$$

La flèche  $\mathcal{S} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathfrak{m}\mathfrak{F}$  se factorise naturellement par  $n\mathfrak{F}$ . En effet, si on représente un élément de  $\mathcal{S}$  par une courbe  $\gamma$  ayant une intersection minimale avec chaque  $K_j$ , alors un élargissement partiel de  $\gamma$  fournit un feuilletage en forme normale, comme on le voit en regardant chaque pantalon.

En utilisant l'application  $\theta : I_* (\mathfrak{m}\mathfrak{F}) \rightarrow B$  de la proposition V.1, on obtient donc :

$$\bar{\Phi} : \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{S} \text{ (resp. } \mathcal{S}' \text{)} \rightarrow B$$



qui à  $\beta \in \mathcal{S}^1$  associe  $\{\bar{m}_j(\beta), \bar{s}_j(\beta), \bar{t}_j(\beta) \mid j = 1, \dots, 3g-3\}$ . On rappelle que, dans l'exposé 4, pour  $\beta \in \mathcal{S}^1$ , on a défini  $\Phi(\beta) = \{m_j(\beta), s_j(\beta), t_j(\beta)\}$ . Malheureusement  $\bar{\Phi}(\beta)$  ne coïncide pas avec  $\Phi(\beta)$ ; il est vrai que  $m_j(\beta) = \bar{m}_j(\beta) = i(\beta, K_j)$ , mais les autres coordonnées diffèrent parce que l'arc jaune n'est pas choisi de la même façon dans la théorie des courbes et dans celle des feuilletages. D'ailleurs  $\bar{\Phi}(\beta)$  n'est pas toujours à coordonnées entières.

Pour discuter cette différence d'arcs jaunes dans les deux théories, il faut observer de nouveau les modèles sur le pantalon standard  $P^2$ . On observe que l'arc jaune d'un arc multiple, associé à  $\partial_1 P^2$ , coïncide toujours avec celui du feuilletage obtenu par élargissement, sauf si

$$(*) \quad m_1 > m_2 + m_3 \quad .$$

En revanche, l'arc jaune de la théorie des courbes convient pour les feuilletages. Evidemment, la longueur de l'arc  $A$ , qui lui est associé, ne reste donnée par la formule III. 3 que si  $(*)$  n'est pas satisfaite. Sinon on prend :

$$\text{long } A = m_2 \quad .$$

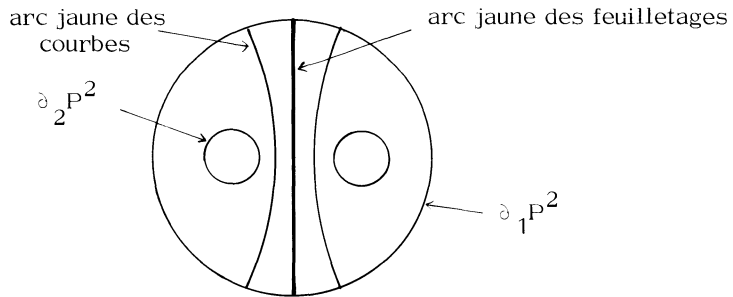
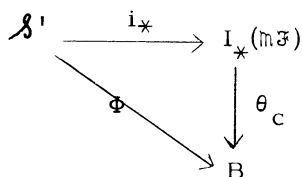


Figure 14

En répercutant ce changement au travers des formules de l'appendice, on obtient une nouvelle classification des feuilletages, par un homéomorphisme

$$\theta_C : \overline{I_*}(\overline{m\vec{x}}) \longrightarrow B \quad ,$$

qui, cette fois-ci, rend commutatif le diagramme :



Donc  $i_*(\mathcal{S}')$  est un "réseau" dans  $I_*(\mathfrak{M}\mathfrak{F})$  ; comme on sait que  $i_*(\mathcal{S}')$  est contenu dans  $\overline{i_*(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S})}$ , on voit que  $i_*(\mathbb{R}_+^* \times \mathcal{S})$  est dense dans  $I_*(\mathfrak{M}\mathfrak{F})$ . On a donc démontré à la fois le théorème 9 de l'exposé 4 et la proposition VI. 2.

VI. 2. Proposition. Dans  $P(\mathbb{R}_+^* \mathcal{S})$ , l'ensemble  $\pi i_*(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$  est dense dans  $\pi I_*(\mathfrak{M}\mathfrak{F})$ . Donc  $I_*(\mathfrak{M}\mathfrak{F}) \cup \{0\} = \overline{i_*(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S})}$ .

§ VII. - MINIMALITÉ DE L'ACTION DE  $\pi_0(\text{Diff}M)$  SUR  $P\mathfrak{M}\mathfrak{F}$

VII.1. Soit  $M$  une surface compacte connexe orientable sans bord, de genre  $\geq 1$ . Nous notons toujours par  $\pi$  la projection  $\mathbb{R}_+^* \setminus \{0\} \rightarrow P(\mathbb{R}_+^* \mathcal{S})$ , et par  $P\mathfrak{M}\mathfrak{F}$  l'image de  $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$  par  $\pi$ . L'action naturelle de  $\pi_0(\text{Diff}M)$  sur  $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$  donne par passage au quotient une action naturelle de  $\pi_0(\text{Diff}M)$  sur  $P\mathfrak{M}\mathfrak{F}$ .

VII.2. Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant :

Théorème. L'action de  $\pi_0(\text{Diff}M)$  sur  $P\mathfrak{M}\mathfrak{F}$  est minimale.

Rappelons que l'action d'un groupe sur un espace topologique est dite minimale si l'orbite de chaque point est dense.

VII.3. Si  $\alpha$  est une courbe simple dans  $M$ , on note par  $t_\alpha : M \rightarrow M$  un twist d'un tour autour de  $\alpha$ .

Proposition. Soient  $\alpha$  une courbe simple et  $\mathfrak{F}$  un feuilletage mesuré. Pour toute courbe  $\beta$  et pour tout entier  $n \geq 0$ , on a l'inégalité :

$$|I(t_\alpha^n \mathfrak{F}, [\beta]) - nI(\mathfrak{F}, [\alpha])i([\beta], [\alpha])| \leq I(\mathfrak{F}, [\beta])$$

Démonstration. Si  $\mathfrak{F}$  est un feuilletage défini par une courbe, la proposition est un cas particulier de la proposition 1 de l'appendice de l'exposé 4. Vu que l'inégalité est homogène en  $\mathfrak{F}$ , la proposition est encore vraie pour  $\mathfrak{F}$  dans  $i_*(\mathbb{R}_+^* \times \mathcal{S})$ .

Comme  $i_*(\mathbb{R}_+^* \times \mathcal{K})$  est dense dans  $\mathfrak{m}\mathfrak{F}$ , l'inégalité est vraie pour tout feuilletage  $\mathfrak{F}$ .  $\square$

Corollaire. Soit  $\mathfrak{F}$  un feuilletage mesuré et  $\alpha$  une courbe, tels que  $I(\mathfrak{F}, [\alpha]) \neq 0$ .

On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(t_\alpha^n \mathfrak{F}) = \pi([\alpha]) .$$

Démonstration. On a, comme conséquence de la proposition précédente :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{ni(\alpha, \mathfrak{F})} t_\alpha^n \mathfrak{F} = [\alpha] \text{ dans } \mathfrak{m}\mathfrak{F} . \quad \square$$

VII.4. On démontre le cas particulier suivant du théorème VII.2 :

Lemme. Si  $\gamma$  est une courbe qui ne sépare pas  $M$ , l'orbite de  $\pi([\gamma])$  par  $\pi_0(\text{Diff}M)$  est dense dans  $P\mathfrak{m}\mathfrak{F}$ .

Démonstration. Commençons par remarquer que l'orbite de  $\gamma$  par  $\pi_0(\text{Diff}M)$  consiste en les (classes d'isotopie de) courbes qui ne séparent pas  $M$ . Puisque  $\mathcal{K}$  est dense dans  $P\mathfrak{m}\mathfrak{F}$ , il suffit de montrer que l'adhérence de l'orbite de  $\gamma$  contient aussi les courbes qui séparent  $M$ . Soit  $\bar{\gamma}$  une telle courbe ; on peut trouver une courbe  $\gamma'$  qui ne sépare pas  $M$  et telle que  $i(\gamma', \bar{\gamma}) \neq 0$ . Par le corollaire VII.3, on a :  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{\bar{\gamma}}^n \gamma' = \bar{\gamma}$  dans  $P\mathfrak{m}\mathfrak{F}$ . Donc  $\bar{\gamma}$  est dans l'adhérence de l'orbite de  $\gamma'$  et aussi dans celle de  $\gamma$ , puisque ces deux orbites sont les mêmes.  $\square$

VII.5. Démonstration du théorème VII.2. Soit  $\mathfrak{F}$  un feuilletage mesuré. On peut trouver une courbe  $\gamma$  qui ne sépare pas  $M$  et telle que  $I(\mathfrak{F}, \gamma) \neq 0$ . Par le corollaire VII.3, l'adhérence de l'orbite de  $\mathfrak{F}$  dans  $P\mathfrak{m}\mathfrak{F}$  contient  $\gamma$ , et donc aussi l'orbite de  $\gamma$ . Il résulte du lemme VII.4 que l'orbite de  $\mathfrak{F}$  est dense dans  $P\mathfrak{m}\mathfrak{F}$ .  $\square$

### § VIII. - EXISTENCE DES FEUILLETAGES MESURÉS SUPPLÉMENTAIRES

Par définition un "supplémentaire" d'un feuilletage mesuré  $(\mathfrak{F}, \mu)$  est un feuilletage mesuré  $(\mathfrak{F}', \mu')$  transverse à  $(\mathfrak{F}, \mu)$  (voir exposé 1 § V).

Proposition VIII.1. Si  $(\mathfrak{F}, \mu)$  est un feuilletage mesuré, il existe  $(\mathfrak{F}'', \mu'') \sim_{\text{m}} (\mathfrak{F}, \mu)$  tel que  $(\mathfrak{F}'', \mu'')$  admet un supplémentaire.

Démonstration. D'après le § V ci-dessus, il vient  $(\mathfrak{F}'', \mu'')$ , équivalent à  $(\mathfrak{F}, \mu)$ , et une décomposition en pantalons tels que :

$$\forall j, \quad i(\mathfrak{F}'', K_j) \neq 0 .$$

En élargissant la courbe multiple fournie par les  $K_j$ , on obtient le  $\mathfrak{F}'$  cherché.  $\square$

Remarque. Ce résultat est équivalent au théorème de Hubbard-Masur [1] et Kerckhoff [2], qui affirme que  $\mathfrak{M}\mathfrak{F}(M^2)$  est réalisable par les différentielles quadratiques holomorphes sur  $M^2$ . On renvoie à [3], [1] pour des détails sur la relation entre différentielles quadratiques et feuilletages mesurés.

#### RÉFÉRENCES

- [1] J. HUBBARD and H. MASUR, Quadratic differentials and foliations, à paraître dans Acta Mathematicae.
- [2] S. KERCKHOFF, The asymptotic geometry of Teichmüller space, thèse, Princeton, 1977.
- [3] Séminaire de l'E.N.S. (Douady-Verdier), Sur les formes de Strebel, 1975-76, à paraître.