

Astérisque

V. POÉNARU

**Rappels de géométrie hyperbolique en dimension
2 et généralités sur $i : S \times S \rightarrow \mathbb{R}_+$**

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 33-55

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__33_0>

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EXPOSÉ 3

RAPPELS DE GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE EN DIMENSION 2

ET

GÉNÉRALITÉS SUR $i : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$

par V. POÉNARU

- § I. - Un peu de géométrie hyperbolique
- § II. - L'espace de Teichmüller du disque à deux trous
- § III. - Généralités sur l'intersection géométrique des courbes simples
et sur $i : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$
- § IV. - Systèmes de courbes simples et isométries en géométrie hyperbolique

§ I. - UN PEU DE GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

On considère une surface compacte M , munie d'une métrique riemannienne de courbure -1 , pour laquelle le bord est géodésique, s'il est non vide. Le revêtement universel $\tilde{M}$ est isométrique à un domaine du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$, bordé éventuellement par des géodésiques de $\mathbb{H}^2$.

Lemme 1. Soient α et β deux arcs géodésiques distincts de M , ayant les mêmes extrémités. Alors la courbe fermée $\alpha \cup \beta$ n'est pas homotope à zéro.

Démonstration. Si $\alpha \cup \beta$ était homotope à zéro, elle se relèverait en une courbe fermée de $\tilde{M}$. Mais deux géodésiques de $\mathbb{H}^2$ ne peuvent se couper en deux points.

Cette propriété de $\mathbb{H}^2$ résulte par exemple de la formule de Gauss-Bonnet : pour un disque D muni d'une métrique riemannienne pour laquelle le bord est un polygone géodésique, on a toujours :

$$\iint_D K = 2\pi - \Sigma(\text{angles extérieurs}) ,$$

où K désigne la courbure. $\square$

Lemme 2. Soit V une variété riemannienne compacte à bord totalement géodésique. Dans chaque classe d'homotopie (libre) d'applications $S^1 \rightarrow V$, il existe une immersion géodésique, dont la longueur minore la longueur des lacets de la classe.

Démonstration. On se donne une classe d'homotopie $\alpha \in [S^1, V]$, un nombre $\epsilon > 0$ et un entier N ; on pose $L = N\epsilon$. On choisit ϵ plus petit que le rayon d'injectivité de l'exponentielle et N assez grand pour que α contienne au moins une courbe de longueur $\leq L$.

Soit $I(\alpha, \epsilon, N)$ l'espace des applications continues $S^1 \rightarrow M$ dans la classe α , formées d'au plus N arcs géodésiques de longueur $\leq \epsilon$. Cet espace, muni de la topologie compacte-ouverte, est compact. La fonction longueur y est continue. Soit φ une courbe réalisant le minimum de la longueur dans $I(\alpha, \epsilon, N)$. Il est facile de vérifier que φ est en fait lisse (si $\partial V \neq \emptyset$, l'hypothèse que ∂V est totalement géodésique intervient ici).

Pour voir que la longueur de φ est un minorant pour toute la classe α , il suffit de remarquer que, si C est une courbe rectifiable dans α , de longueur $\leq L$, il existe une courbe appartenant à $I(\alpha, \epsilon, N)$, de longueur inférieure ou égale à celle de C . $\square$

Remarque. Sans compacité, avec la seule hypothèse que la métrique est complète, on voit que chaque élément de $\pi_1(V, x_0)$ est réalisable par une géodésique fermée, qui, en général, n'est pas lisse en x_0 .

Lemme 3. Pour chaque transformation de revêtement T de $\tilde{M}$ au-dessus de M , il existe une unique géodésique invariante par T . Elle relève la géodésique fermée lisse de M qui est dans la classe d'homotopie libre désignée par l'élément α de $\pi_1(M, x_0)$ correspondant à T .

Démonstration.

1) Existence. Voici d'abord une démonstration qui n'utilise pas d'hypothèse

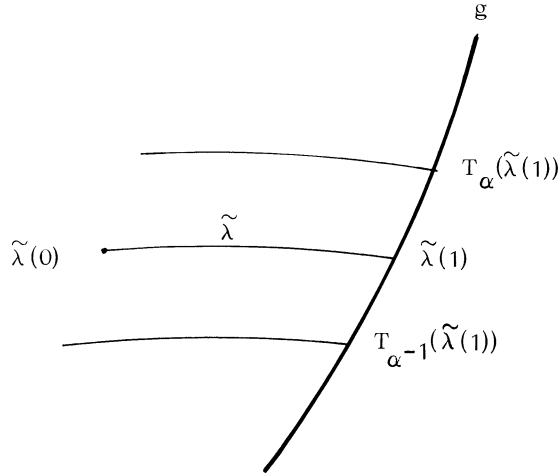
de courbure. On prend comme modèle de $\tilde{M}$ l'ensemble des chemins continus $\{\varphi : [0, 1] \rightarrow M \mid \varphi(0) = x_0\}$ quotienté par la relation : homotopie à extrémités fixées. La projection $p : \tilde{M} \rightarrow M$ est donnée par $\varphi \mapsto \varphi(1)$. Le chemin constant définit le point-base de $\tilde{M}$. Soient $\psi \in \tilde{M}$, $p(\psi) = y$ et χ un chemin de M tel que $\chi(0) = y$; le relevé de χ dans $\tilde{M}$ à partir de ψ est la famille à un paramètre de chemins de M , obtenue en tronquant le chemin $\psi * \chi$; cette famille commence avec ψ et finit avec $\psi * \chi$ lui-même. L'action à gauche de $\pi_1(M, x_0)$ sur $\tilde{M}$ se définit comme suit : pour $\alpha \in \pi_1(M, x_0)$, que l'on représente par un lacet φ , et pour $\psi \in \tilde{M}$, on pose $T_\alpha(\psi) = \varphi * \psi$.

Ceci étant, considérons l'élément α pour lequel $T = T_\alpha$. D'après le lemme 2, sa classe d'homotopie libre contient une géodésique fermée lisse g_1 . Soient x_1 un point de l'image de g_1 et λ un chemin joignant x_0 à x_1 ; celui-ci est choisi en sorte que $\lambda * g_1 * \lambda^{-1}$ appartienne à α . Si $\widetilde{\lambda * g_1}$ est le relevé de $\lambda * g_1$ à partir du point-base de $\tilde{M}$, on a :

$$\widetilde{\lambda * g_1}(1) = \overbrace{\lambda * g_1 * \lambda^{-1} * \lambda}(1) = T_\alpha(\widetilde{\lambda}(1)) .$$

Donc, si on prend dans $\tilde{M}$ l'image de $\widetilde{\lambda * g_1}$ et de tous ses translatées par T_α^n , $n \in \mathbb{Z}$, on fabrique une composante connexe de $p^{-1}(\lambda * g)$, consistant en une géodésique g de $\tilde{M}$ et en segments relevant λ , comme dans la figure 1. Par construction, g est invariante par T_α .

Figure 1



Une seconde démonstration de l'existence qui utilise le fait que M est une surface compacte munie d'une structure hyperbolique est la suivante :

La transformation T_α est une isométrie de $\mathbb{H}^2$. Comme T_α^n n'a pas de point

fixe, elle ne peut être elliptique. D'autre part, si φ est une isométrie parabolique de $\mathbb{H}^2$ (unique point fixe, qui est sur le cercle à l'infini), alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $x \in \mathbb{H}^2$ tel que $d(x, \varphi(x)) < \epsilon$. Si T_α est parabolique, ceci implique l'existence de géodésiques fermées de longueur arbitrairement petite sur M , ce qui est interdit par la compacité. Donc T_α est hyperbolique (deux points fixes sur le cercle à l'infini); la géodésique g de $\mathbb{H}^2$, qui les joint, est donc invariante par T_α . Alors g/T_α est une géodésique fermée lisse dans la même classe d'homotopie libre que α .

2) Unicité. Soient g_1 et g_2 deux géodésiques distinctes de $\tilde{M}$, invariantes par T . Si $g_1 \cap g_2$ est non vide, l'intersection consiste en un point unique, qui doit être invariant par T ; ceci est impossible.

Donc $g_1 \cap g_2 = \emptyset$. Soit $x \in g_1$; par x , on mène la perpendiculaire à g_2 ; on note δ ce segment géodésique. On remarque que $T\delta \cap \delta = \emptyset$, sinon on aurait un triangle géodésique dont la somme des angles (intérieurs) serait $> \pi$.

Maintenant g_1 , g_2 , δ , $T(\delta)$ forment un quadrilatère dont la somme des angles est 2π (voir figure 2), ce qui est impossible d'après la formule de Gauss-Bonnet (ou d'après un raisonnement élémentaire).

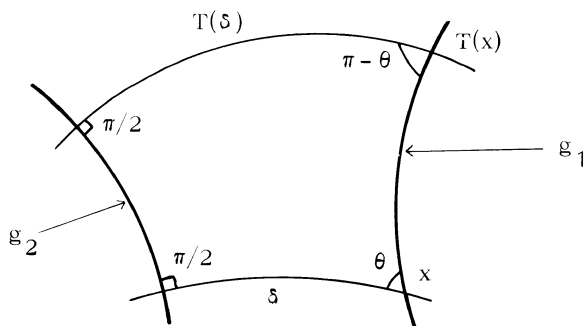


Figure 2

□

Lemme 4. Soit α un élément non trivial de $\pi_1(M, x_0)$. Alors, il existe une unique géodésique fermée lisse dans la classe d'homotopie libre de α .

Démonstration. L'existence est déjà assurée par le lemme 2. Supposons que g_1 et g'_1 soient deux telles géodésiques. La partie "existence" de la démonstration précédente nous fournirait alors deux géodésiques distinctes de $\tilde{M}$, invariantes par T_α .

Mais la partie "unicité" du lemme précédent nous dit justement que cela est impossible (utiliser que $\pi_1(M, x_0)$ n'a pas de torsion).

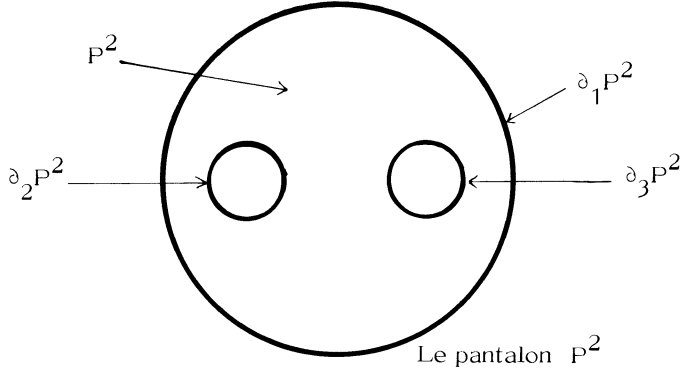
§ II. - L'ESPACE DE TEICHMÜLLER DU DISQUE À DEUX TROUS

Figure 3

Le pantalon P^2 (disque à deux trous) est le "building-block" fondamental de la théorie des surfaces. Je rappelle (exposé 2) que $\text{Diff}_+(P^2, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$ est contractile ; en particulier un difféomorphisme, qui conserve l'orientation et envoie en elle-même chaque composante du bord, est isotope à l'identité.

Si ρ est une métrique de courbure -1 sur P^2 , pour laquelle chaque composante du bord est géodésique, on dit que (P^2, ρ) est une P^2 -surface de Teichmüller. Par définition, deux surfaces (P^2, ρ) et (P^2, ρ') sont équivalentes s'il existe un difféomorphisme φ de P^2 , isotope à l'identité, tel que $\varphi^* \rho = \rho'$. Vu que $\text{Diff}_+(P^2, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$ est connexe, l'ensemble des classes d'équivalence, qui par définition est l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(P^2)$ de P^2 , s'identifie au quotient $\mathcal{H}(P^2)/\text{Diff}_+$, où $\mathcal{H}(P^2)$ est l'espace des métriques riemanniennes de courbure -1 pour lesquelles le bord est géodésique :

$$\mathcal{T}(P^2) = \mathcal{H}(P^2)/\text{Diff}_+.$$

On munira $\mathcal{H}(P^2)$ de la topologie C^∞ et $\mathcal{T}(P^2)$ de la topologie quotient. On a une application naturelle continue

$$L : \mathcal{H}(P^2) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^3 = \{\text{triplets de nombres } > 0\}$$

définie par :

$$L(\rho) = (\ell_\rho(\partial_1 P^2), \ell_\rho(\partial_2 P^2), \ell_\rho(\partial_3 P^2)),$$

où ℓ_ρ désigne la longueur dans la métrique ρ . Ceci induit une application qu'on désigne par la même lettre

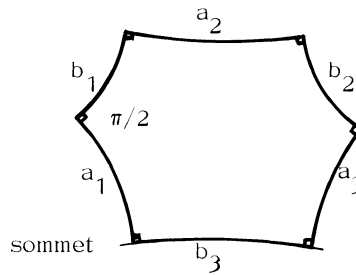
$$L : \mathcal{T}(\mathbb{P}^2) \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^3 .$$

Théorème 5. L'application $L : \mathcal{T}(\mathbb{P}^2) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^3$ est un homéomorphisme. De plus, $L : \mathcal{H}(\mathbb{P}^2) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^3$ admet des sections locales continues.

La classification des $\mathbb{P}^2$ -surfaces de Teichmüller se déduit de la classification des hexagones droits hyperboliques car un pantalon hyperbolique est de façon naturelle obtenu en recollant deux hexagones isométriques comme l'indique le lemme 7. D'autre part, un hexagone hyperbolique "abstrait" X , où chaque angle est droit et où chaque côté est géodésique est isomorphe à un hexagone du plan $\mathbb{H}^2$; pour le voir, on utilise X comme domaine fondamental et on fait des symétries autour des côtés de X pour construire une variété hyperbolique simplement connexe et complète Y ; d'après un théorème classique (Hadamard-Cartan, [2]), Y est isométrique à $\mathbb{H}^2$. On s'intéresse donc en premier lieu à l'ensemble Hex des classes d'isométrie directe d'hexagones de $\mathbb{H}^2$, dont les angles sont droits, dont les côtés sont géodésiques et qui sont équipés d'un sommet privilégié. On notera $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ les côtés, nommés à partir du point base en tournant dans le sens rétrograde (figure 4).

Lemme 6. Les longueurs $\ell(a_1), \ell(a_2), \ell(a_3)$ établissent une bijection de Hex sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$.

Figure 4



Démonstration. 1) Existence. Soient $\ell_1, \ell_2, \ell_3 > 0$. On veut construire un hexagone X dans $\mathbb{H}^2$, tel que $\ell(a_i) = \ell_i$ pour $i = 1, 2, 3$.

On commence par fixer trois géodésiques G, G', G'' comme dans la figure 5; G et G'' sont distantes de ℓ_1 . Soient $x \in G$ et L_x la perpendiculaire à G issue de x ; si x est suffisamment loin de x_0 , L_x ne rencontre pas G'' (On suggère au lecteur de faire ce dessin dans le modèle de Poincaré). Soit $x(\ell_1)$ le point de G le plus proche de x_0 qui vérifie :

$$L_x(\ell_1) \cap G'' = \emptyset .$$

On pose $f(\ell_1) = d(x_0, x(\ell_1))$.

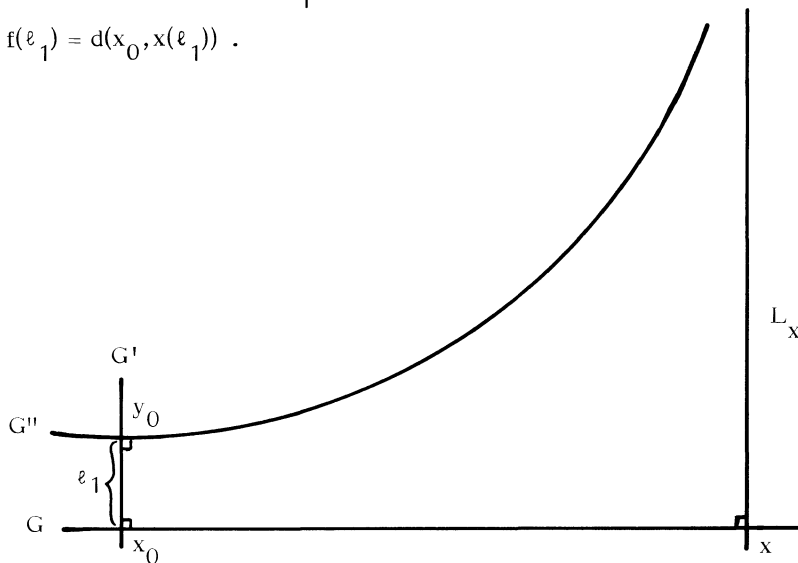


Figure 5

On fait la construction de la figure 6 ; elle est déterminée à isométrie près par les nombres ℓ_1 , ℓ_3 et λ .

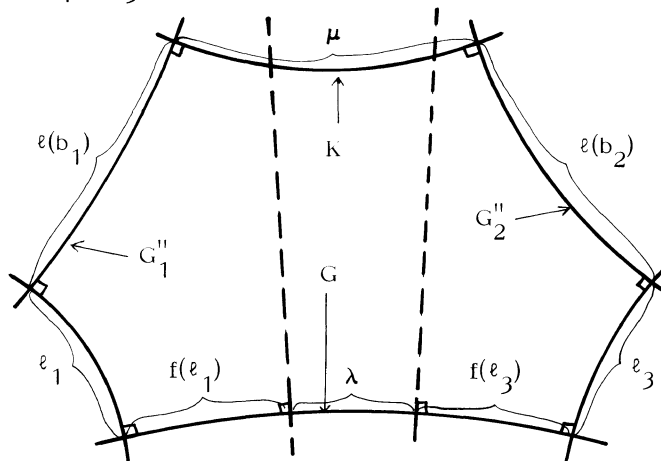


Figure 6

Soit $\mu(\lambda)$ la distance de G''_1 à G''_2 ; c'est une fonction continue de la

longueur λ , telle que $\mu(0) = 0$ et $\mu(+\infty) = +\infty$ (pour faire varier λ , on utilise le fait qu'il existe un groupe à un paramètre d'isométries de $\mathbb{H}^2$, laissant G invariante) ; elle prend donc toute valeur positive. D'où l'existence de X .

2) Unicité. Comme on vient de le voir, la donnée de trois côtés consécutifs d'un hexagone le détermine complètement.

Donc, si les hexagones droits X et X' de la figure 7 vérifient $\ell_1 = \ell(a_1) = \ell(a'_1)$ et ne sont pas isométriques, alors les longueurs $\ell(b_3)$ et $\ell(b'_3)$ ne sont pas égales ; disons que $\ell(b'_3) > \ell(b_3)$.

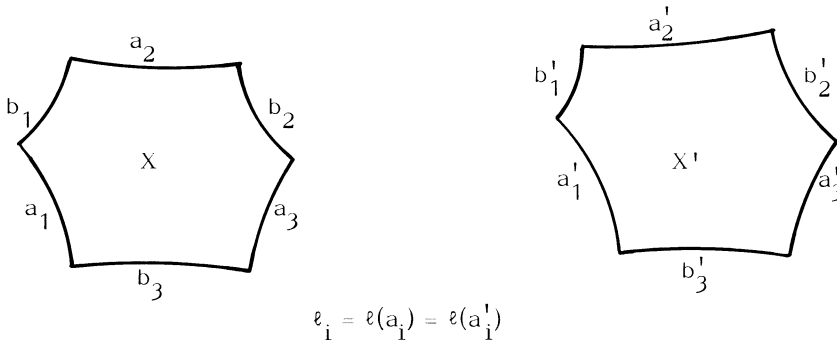


Figure 7

C'est un petit exercice de géométrie hyperbolique de voir qu'il existe une perpendiculaire (unique) de b_3 à a_2 dans X . Elle décompose les longueurs de b_3 et a_2 comme sur la figure 8 : $\ell(b_3) = \alpha + \beta$, $\ell(a_2) = \gamma + \delta$.

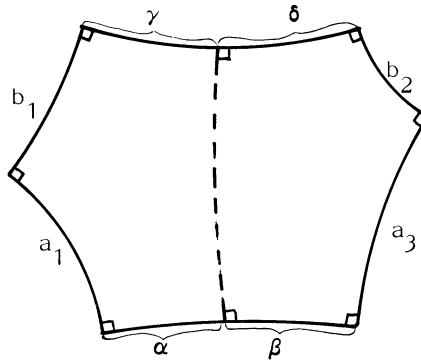


Figure 8

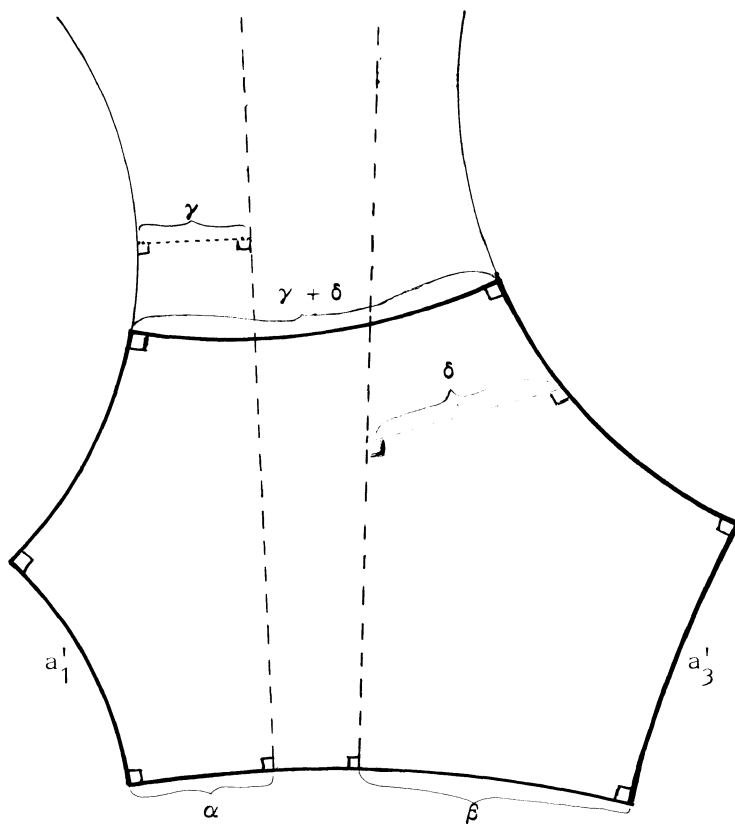


Figure 9

Dans X' , on élève des perpendiculaires à b'_3 à des distances α et β des deux extrémités, comme dans la figure 9. Dans cette figure, tous les angles marqués d'un trait sont égaux à $\pi/2$; les autres ne le sont pas nécessairement.

La figure 9 porte une contradiction puisqu'on y voit $\gamma + \delta > \gamma + \delta$. $\square$

Remarques. 1) L'unicité que nous venons de prouver peut s'interpréter de la façon suivante : $\ell(a_1)$ et $\ell(a_3)$ étant fixées, la fonction $\ell(b_3) \rightarrow \ell(a_2)$ est monotone ; ou encore, la fonction $\lambda \rightarrow \mu(\lambda)$ (figure 6) est un homéomorphisme de $\mathbb{R}_+$.

2) En se référant aux notations de la figure 4, on peut paramétrer l'ensemble Hex par $(\ell(a_1), \ell(a_2), \ell(a_3))$ ou par $(\ell(b_1), \ell(b_2), \ell(b_3))$. Le passage de l'un de ces systèmes de coordonnées à l'autre se fait par un homéomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*)^3$. [En effet, on vient de voir que le passage de $(\ell(a_1), \ell(a_2), \ell(a_3))$ à $(\ell(a_1), \ell(b_3), \ell(a_3))$ se fait par un homéomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*)^3$. Ensuite, on vérifie facilement que la même chose est vraie pour le passage de $(\ell(a_1), \ell(b_3), \ell(a_3))$ à $(\ell(b_3), \ell(a_2), \ell(b_2))$, etc...]

3) Dans la figure 6, on voit que, $\ell_1 = \ell(a_1)$ et $\ell_3 = \ell(a_3)$ étant fixés, si $\mu = \ell(a_2)$ tend vers 0, alors $\ell(b_1)$ et $\ell(b_2)$ tendent vers $+\infty$.

La classification des hexagones droits conduit à la classification des pantalons, car toute P^2 -surface de Teichmüller est le double d'un hexagone, comme l'indique précisément l'énoncé du lemme 7.

Lemme 7. Soit une P^2 -surface de Teichmüller.

1° Il existe une unique géodésique simple g_{ij} de P^2 qui joint $\partial_i P^2$ à $\partial_j P^2$ et qui est perpendiculaire aux deux. Les arcs g_{12} , g_{13} et g_{23} sont mutuellement disjoints (figure 10).

2° Sur $\partial_1 P^2$, les extrémités de g_{12} et g_{13} découpent des segments d'égales longueurs. Idem sur $\partial_2 P^2$ et $\partial_3 P^2$.

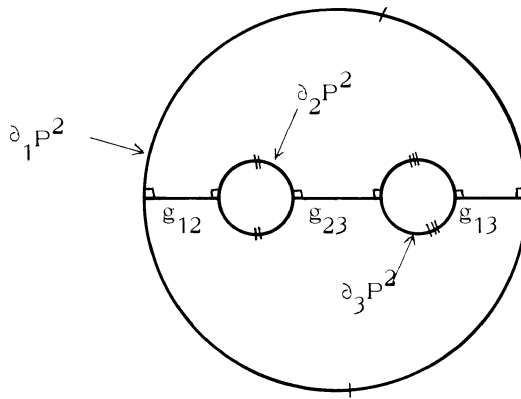


Figure 10

Démonstration. 1) Un chemin de plus petite longueur joignant $\partial_i P^2$ à $\partial_j P^2$ rencontre le bord orthogonalement en ses extrémités (formule de la variation première [2]). On en déduit tout de suite que c'est un arc simple. Pour l'unicité, on remarque que la classe d'homotopie est fixée par la condition d'être simple ; par un argument de courbure négative analogue au lemme 3, on obtient le 1°.

2) Les arcs g_{12} , g_{13} et g_{23} découpent P^2 en deux hexagones droits. Ils sont isométriques car ils ont trois côtés égaux. $\square$

Démonstration du théorème 5.

1) Existence. Etant donnés $\ell_1, \ell_2, \ell_3 > 0$, on peut construire un unique hexagone droit X avec $\ell(a_i) = \ell_i/2$ pour $i = 1, 2, 3$ (lemme 6). Pour former le pantalon, on prend deux exemplaires de X que l'on recolle le long de b_1 , b_2 et b_3 . Ainsi, on a : $\ell(\partial_i P^2) = 2 \ell(a_i) = \ell_i$. Ceci donne la surjectivité de L .

2) Unicité. Soient $\rho', \rho'' \in \mathbb{H}(P^2)$, telles que $\ell_i = \ell_{\rho'}(\partial_i P^2) = \ell_{\rho''}(\partial_i(P^2))$, pour $i = 1, 2, 3$. On va prouver qu'il existe $f \in \text{Diff}_+(P^2, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$, qui transporte ρ' en ρ'' .

D'après le lemme 7, $(P^2, \rho') = X_1' \cup X_2'$ et $(P^2, \rho'') = X_1'' \cup X_2''$, où X_1', X_2', X_1'', X_2'' sont des hexagones droits, paramétrés par $(\frac{\ell_1}{2}, \frac{\ell_2}{2}, \frac{\ell_3}{2})$. Donc, il existe une isométrie positive de X_1' sur X_1'' et de X_2' sur X_2'' ; le f cherché est la "réunion" de ces deux isométries.

3) Continuité. On vient de voir que l'application continue

$$L : \mathfrak{T}(P^2) \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^3$$

est bijjective. Pour prouver que L^{-1} est continue, il suffit de prouver que $L : \mathbb{H}(P^2) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^3$ admet des sections locales continues. Ce sera plus commode de changer de coordonnées dans $(\mathbb{R}_+^*)^3$, en passant des longueurs des courbes du bord aux longueurs $\ell_{12}, \ell_{23}, \ell_{13}$ des géodésiques g_{12}, g_{23}, g_{13} (figure 10). Ceci donne une nouvelle application continue :

$$\Lambda : \mathbb{H}(P^2) \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^3,$$

et il suffira de prouver que Λ possède des sections locales continues.

On commence par quelques préliminaires. Soit E la partie de $\mathbb{R}^2$ qui est réunion de :

$$E_0 = \{-1 \leq y \leq +1, x=0\} \text{ et de } E_1 = \{-1 \leq y \leq 0, 0 \leq x \leq 1\}.$$

On va définir $C^\infty(E)$ comme l'ensemble des fonctions $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$f|_{E_0} \in C^\infty(E_0)$ et $f|_{E_1} \in C^\infty(E_1)$. On a une topologie naturelle sur $C^\infty(E)$ provenant des topologies C^∞ de $C^\infty(E_0)$ et $C^\infty(E_1)$.

Lemme 8. Il existe une application continue $\mathcal{E} : C^\infty(E) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que

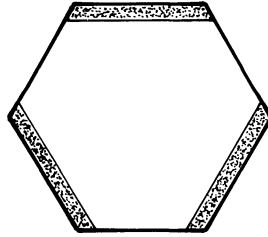
$$\mathcal{E}(f)|_E = f.$$

Démonstration. Soit $f \in C^\infty(E)$. En utilisant un résultat de Seeley [3], on peut étendre les dérivées normales de $f|_{E_0 \cap E_1}$ à E_0 tout entier. Ceci nous donne une première extension de $C^\infty(E)$ dans les jets infinis de Whitney sur E (on utilisera ici le fait que E_0 et E_1 sont régulièrement situés). Ensuite, on applique le théorème d'extension de Whitney [4]. $\square$

Par définition, un hexagone tronqué est un ensemble formé du bord d'un hexagone C^∞ de $\mathbb{R}^2$ et des voisinages colliers de trois côtés alternés (figure 11).

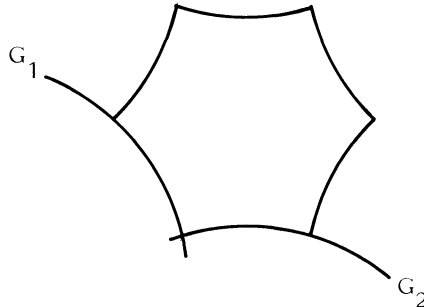
La structure C^∞ de l'hexagone tronqué Z est localement (là où il pourrait y avoir des problèmes) comme celle de E . A partir du lemme 8 et de raisonnements classiques, on établit le lemme suivant.

Figure 11



Z = hexagone tronqué

Figure 12



Lemme 9. Soit $\text{Plgt}(Z, \mathbb{R}^2)$ l'ensemble des plongements C^∞ de Z dans $\mathbb{R}^2$, muni de la topologie C^∞ . Si $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \text{Plgt}(Z, \mathbb{R}^2)$ est un germe d'application C^∞ , on peut relever φ en un germe $\Phi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ tel que $\Phi(0) = \text{Id}$ et $\varphi(t) = \Phi(t)\varphi(0)$.

Soit maintenant $\ell^0 = (\ell_{12}^0, \ell_{23}^0, \ell_{13}^0) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ et $X(\ell^0)$ un hexagone hyperbolique droit de $\mathbb{H}^2$ paramétré par ℓ^0 . Soient G_1 et G_2 deux géodésiques portant deux côtés consécutifs de $X(\ell^0)$. Pour ℓ voisin de ℓ^0 dans $(\mathbb{R}_+^*)^3$, on considère l'hexagone $X(\ell)$ reposant sur $G_1 \cup G_2$ comme $X(\ell^0)$ (figure 12). Pour chaque ℓ , le double de $X(\ell)$ le long des côtés "marqués" (ceux dont les longueurs sont les paramètres ℓ_{ij}) est une variété hyperbolique, notée $2X(\ell)$; elle est difféomorphe à P^2 .

Il s'agit de trouver un difféomorphisme $\bar{\psi}(\ell) : 2X(\ell) \rightarrow 2X(\ell^0)$, de sorte que la métrique $\rho(\ell)$, image de la métrique naturelle de $2X(\ell)$ par $\bar{\psi}(\ell)$, dépende continuellement de ℓ comme élément de $\mathcal{H}(2X(\ell^0))$.

Pour $\epsilon > 0$ petit fixé (indépendamment de ℓ), on considère dans $X(\ell)$ les colliers géodésiques de rayon ϵ le long des côtés marqués; on associe ainsi à $X(\ell)$ un hexagone tronqué $Z(\ell)$. Chaque rectangle de $Z(\ell)$ est feuilleté d'une part par les géodésiques orthogonales au côté de l'hexagone, et d'autre part par les trajectoires orthogonales à ces géodésiques. Il est facile de construire un germe d'application continue

$$\varphi : ((\mathbb{R}_+^*)^3, \ell^0) \longrightarrow \text{Plgt}(Z(\ell^0), \mathbb{R}^2)$$

tel que : 1) $\varphi(\ell^0)$ soit le plongement standard ;

2) $\varphi(\ell)[Z(\ell^0)] = Z(\ell)$;

3) $\varphi(\ell)$ respecte le nom des côtés marqués et les feuilletages des rectangles.

Par le lemme 9, il existe un germe

$$\psi : ((\mathbb{R}_+^*)^3, \ell^0) \longrightarrow \text{Plgt}(X(\ell^0), \mathbb{R}^2)$$

tel que $\psi(\ell)|Z(\ell^0) = \varphi(\ell)$. La condition 3) assure alors que $2\psi(\ell)$ est un difféomorphisme des doubles $2X(\ell^0) \rightarrow 2X(\ell)$. D'autre part, la construction assure que la métrique sur $X(\ell^0)$, déduite de la métrique naturelle de $X(\ell)$ via $\psi(\ell)$, dépend continuellement de ℓ . Ainsi $\bar{\psi}(\ell) = [2\psi(\ell)]^{-1}$ a toutes les propriétés requises. $\square$

§ III. - GÉNÉRALITÉS SUR L'INTERSECTION GÉOMÉTRIQUE
DES COURBES SIMPLES ET SUR $i : \mathcal{J} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}_+$

Dans ce qui suit M est une surface orientable de genre $g > 1$. Pratiquement, on n'explicitera que le cas où M est fermée ; les adaptations au cas à bord non vide sont laissées au lecteur. Je considère l'ensemble $\mathcal{J}$ des classes d'isotopie de courbes simples de M non homotopes à zéro. Pour $\alpha, \beta \in \mathcal{J}$, on définit $i(\alpha, \beta)$ comme le nombre minimal de points d'intersection d'un représentant de α avec un représentant de β . On en déduit une application

$$i_* : \mathcal{J} \longrightarrow \mathbb{R}_+^{\mathcal{J}}.$$

Dans tout cet exposé, on utilisera plusieurs fois le théorème suivant dû à D. Epstein [1] : soit $f_0 : S^1 \rightarrow M$ un plongement à deux côtés (fibré normal trivial) qui n'est pas le bord d'un disque ; si f_1 est un plongement homotope à f_0 , alors f_0 et f_1 sont isotopes. [Avec un point base, la même chose est vraie si f_0 n'est pas non plus le bord d'un ruban de Möbius.]

Dans le même article, on trouve la version relative : si N est une surface à bord et si A, B sont deux arcs plongés avec $\partial A = \partial B = A \cap \partial N = B \cap \partial N$, homotopes à extrémités fixes, alors A et B sont isotopes rel ∂ .

On utilisera aussi les deux faits suivants que l'on peut lire dans [1] :

Toute courbe simple homotope à zéro sur une surface est le bord d'un disque (conséquence du théorème de Jordan-Schönflies).

Sur une surface, un plongement du cercle à deux côtés n'est pas homotope à une application qui revêt k fois, $k > 1$, une courbe simple à deux côtés.

Proposition 10. Soient α'_0 et α'_1 deux courbes simples de M , non homotopes à zéro et se coupant transversalement. On suppose leurs classes d'isotopie α_0 et α_1 distinctes. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.

- 1° $\text{card}(\alpha'_0 \cap \alpha'_1) = i(\alpha_0, \alpha_1)$;
- 2° Toute courbe simple formée d'un arc de α'_0 et d'un arc de α'_1 est non-homotope à zéro dans M .
- 3° Soient $\tilde{\alpha}_0$ et $\tilde{\alpha}_1$ des composantes connexes respectivement de $p^{-1}(\alpha'_0)$ et $p^{-1}(\alpha'_1)$ dans le revêtement universel $p : \tilde{M} \rightarrow M$; on a $\text{card}(\tilde{\alpha}_0 \cap \tilde{\alpha}_1) \leq 1$.
- 4° Il existe sur M une métrique riemannienne ρ de courbure -1 , telle que α'_0 et α'_1 soient des géodésiques.

Démonstration. Le lecteur remarquera que les implications suivantes sont immédiates.

$1^\circ \implies 2^\circ$; en effet, une courbe simple γ de $\alpha'_0 \cup \alpha'_1$, qui est homotope à zéro dans M , est le bord d'un disque D ; de plus, γ est l'union d'un arc de α'_0 et d'un arc de α'_1 ; à travers le disque D , on peut faire une isotopie de α'_1 qui diminue son nombre de points d'intersection avec α'_0 .

$3^\circ \implies 2^\circ$ par la théorie des revêtements.

$4^\circ \implies 2^\circ$ et 3° par le lemme 1.

Lemme 11. Si $\text{card}(\alpha'_0 \cap \alpha'_1) > i(\alpha_0, \alpha_1)$, il existe deux points distincts q_1 et q_2 de $\alpha'_0 \cap \alpha'_1$ et deux chemins (non nécessairement simples) Γ_0 , Γ_1 joignant q_1 à q_2 respectivement sur α'_0 et α'_1 , tels que le lacet singulier $\Gamma_0 * \Gamma_1^{-1}$ soit homotope à zéro dans M . Donc $3^\circ \implies 1^\circ$.

Démonstration. Par hypothèse, il existe une isotopie $h_t : S^1 \rightarrow M$, $t \in [0, 1]$, telle que h_0 paramètre α'_0 et que $h_1(S^1)$ vérifie :

$$\text{card}(h_1(S^1) \cap \alpha'_1) < \text{card}(\alpha'_0 \cap \alpha'_1).$$

On pourra supposer l'isotopie h_t en position générale par rapport à α'_1 , c'est-à-dire que $h : S^1 \times [0, 1] \rightarrow M$ soit transversale à α'_1 . Ainsi $h^{-1}(\alpha'_1)$ est une sous-variété de dimension 1 transverse au bord qui possède quatre type de composantes connexes, représentés sur la figure 13.

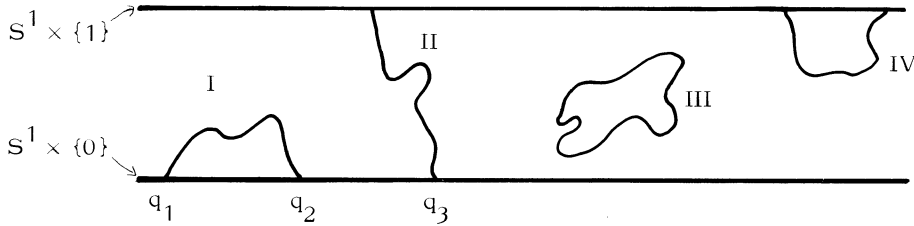


Figure 13

Les points $q_1, q_2, q_3 \dots$ de cette figure sont exactement les préimages, par le plongement h_0 , des points d'intersection $\alpha'_0 \cap \alpha'_1$. L'hypothèse signifie qu'il existe au moins une composante Γ_1 du type I ; on obtient Γ_0 en choisissant l'arc $\widehat{q_1 q_2}$ de $S^1 \times \{0\}$ qui est homotope à Γ_1 , à extrémités fixes, dans $S^1 \times [0, 1]$. $\square$

Lemme. $2^\circ \implies 3^\circ$.

Démonstration. Si des composantes $\tilde{\alpha}_0$ et $\tilde{\alpha}_1$ se coupent en plus d'un point dans $\tilde{M}$,

il est facile de trouver un disque Δ plongé dans $\tilde{M}$ dont le bord est l'union d'un arc de $\tilde{\alpha}_0$ et d'un arc de $\tilde{\alpha}_1$. Sur Δ , on voit $p^{-1}(\alpha_0' \cup \alpha_1')$ comme sur la figure 14, où $p^{-1}(\alpha_0')$ est en pointillés et $p^{-1}(\alpha_1')$ est en traits pleins.

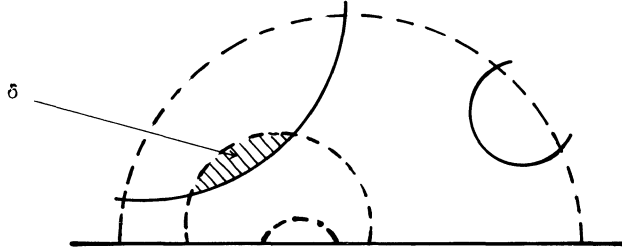


Figure 14

On peut trouver un disque δ (minimal) dont le bord est aussi réunion d'un arc plein et d'un arc pointillé et dont l'intérieur ne rencontre pas $p^{-1}(\alpha_0' \cup \alpha_1')$. L'immersion p plonge le bord de δ à cause de la minimalité. Maintenant, on peut affirmer que p plonge δ , car une immersion en codimension 0 qui plonge le bord et dont l'intérieur ne recoupe pas le bord est un plongement (le nombre de points de la fibre est localement constant). $\square$

Ainsi, on a prouvé l'équivalence des points 1°, 2° et 3° de la propriété 10.

Il reste à prouver 1° $\implies$ 4°. Ceci se déduit immédiatement de la proposition 12 et du théorème 15.

Proposition 12. Soient α_0' , α_0'' et α_1' trois courbes simples de M , non homotopes à zéro. On suppose :

1° α_0' et α_0'' appartiennent à la même classe d'isotopie α_0 , qui est distincte de la classe α_1 de α_1' ;

2° $\text{card}(\alpha_0' \cap \alpha_1') = \text{card}(\alpha_0'' \cap \alpha_1') = i(\alpha_0, \alpha_1)$.

Alors, il existe une isotopie ambiante de la paire (M, α_1') qui pousse α_0' sur α_0'' .

Complément. Selon la même démonstration que ci-dessous, la proposition est encore valable si α_1' est un arc simple représentant un élément non trivial de $\pi_1(M, \partial M)$.

Démonstration. Soit $h : S^1 \times [0, 1] \rightarrow M$ une application transversale sur α_1' , dont la restriction $h|_{S^1 \times \{0\}}$ (resp. $h|_{S^1 \times \{1\}}$) paramètre α_0' (resp. α_1'').

Lemme 13. Les composantes fermées de $h^{-1}(\alpha_1')$ sont homotopes à zéro dans $S^1 \times [0, 1]$.

Démonstration. Soit γ une composante de $h^{-1}(\alpha_1')$, non homotope à zéro dans $S^1 \times [0, 1]$; alors γ est isotope au bord. Soit d le degré de $h : \gamma \rightarrow \alpha_1'$. On ne peut avoir $d = 0$, sinon α_0' serait homotope à zéro.

On ne peut avoir $|d| > 1$; sinon, un multiple non trivial de α_1' serait librement homotope à une courbe plongée, à savoir α_0' . Ceci est connu comme impossible (voir la référence à Epstein citée au début du paragraphe). Si $|d| = 1$, c'est que α_0' est homotope à α_1' , ce qu'on a exclu. $\square$

Fin de la démonstration de la proposition 12.

A partir de là, les composantes de $h^{-1}(\alpha_1')$ sont des types I, II, III, IV de la figure 13. En fait, par la seconde hypothèse, I et IV n'existent pas. Ceci étant, comme $\pi_2(M, \alpha_1') = 0$, il est facile de tuer les composantes du types III. Si, après cela, $h^{-1}(\alpha_1')$ est vide, on conclut que α_0' et α_1'' sont homotopes (donc isotopes) dans $M - \alpha_1'$ et on a la conclusion par extension d'isotopie à support dans $M - \alpha_1'$. Sinon, il reste des composantes du type II, que l'on peut rendre verticales. Mais, en général, l'application h ainsi construite est singulière et ne donne pas une isotopie.

Soient $s_1, \dots, s_n$ les points de $h^{-1}(\alpha_1') \cap S^1 \times \{0\}$; ils découpent le cercle en intervalles $I_1, \dots, I_n$ et, puisque $h^{-1}(\alpha_1') = \{s_1\} \times [0, 1] \cup \dots \cup \{s_n\} \times [0, 1]$, on peut penser que $h|_{I_k \times [0, 1]}$ est une homotopie propre (r.e. : le bord bouge dans le bord) entre deux arcs plongés de la surface N obtenue en coupant M le long de α_1' . Remarquons que, par l'hypothèse 2°, pour tout k , $h|_{I_k \times \{0\}}$ représente un élément non trivial de $\pi_1(N, \partial N)$. La proposition 12 s'obtient donc en appliquant à chacun de ces arcs le lemme 14 ci-dessous, qui généralise la version relative du résultat d'Epstein déjà cité. $\square$

Lemme 14. Soient une surface N , à bord, et γ_0, γ_1 deux arcs proprement plongés dans N . Soit $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow N$ une homotopie propre entre ces deux arcs : $h(t, 0)$ (resp. $h(t, 1)$) paramètre γ_0 (resp. γ_1) et $h(0, u), h(1, u)$ appartiennent à ∂N pour tout u .

Alors h est déformable, rel. $[0, 1] \times \{0, 1\}$, en une isotopie de γ_0 à γ_1 . De plus, si $h(0, u) = h(0, 0)$ pour tout u (resp. et $h(1, u) = h(1, 0)$), alors la défor-

mation peut se faire à travers des applications ayant les mêmes propriétés.

Démonstration. Comme toujours en pareille affaire, le lemme est clair si γ_0 et γ_1 ne se touchent qu'en leurs extrémités ; en effet, γ_0 et γ_1 délimitent un disque dans N , à travers lequel se fait l'isotopie cherchée ; l'isotopie est une déformation de l'homotopie initiale, car N est un espace d'Eilenberg-MacLane.

Pour la disjonction, on regarde le revêtement universel $p : \tilde{N} \rightarrow N$; on y considère une composante $\tilde{\gamma}_0$ de $p^{-1}(\gamma_0)$ et l'union $\tilde{\Gamma}_1$ de toutes les composantes de $p^{-1}(\gamma_1)$. Si on a pris soin de commencer par une première isotopie laissant fixes les extrémités de γ_0 pour rendre $\text{card}(\gamma_0 \cap \gamma_1)$ aussi petit que possible, alors, d'après l'équivalence $1^\circ \iff 3^\circ$ de la proposition 10, $\tilde{\gamma}_0$ rencontre chaque composante de $\tilde{\Gamma}_1$ en au plus un point.

Soit $\tilde{\gamma}_1$ une composante quelconque de $\tilde{\Gamma}_1$; on note $\tilde{\gamma}_1(0)$ et $\tilde{\gamma}_1(1)$ les extrémités de $\tilde{\gamma}_1$. Si $\tilde{\gamma}_0$ et $\tilde{\gamma}_1$ se rencontrent (ailleurs qu'en leurs extrémités), on a les configurations de la figure 15. Sur cette figure, les extrémités des arcs appartiennent à des composantes distinctes de $\partial\tilde{N}$, sauf mention explicite du contraire.

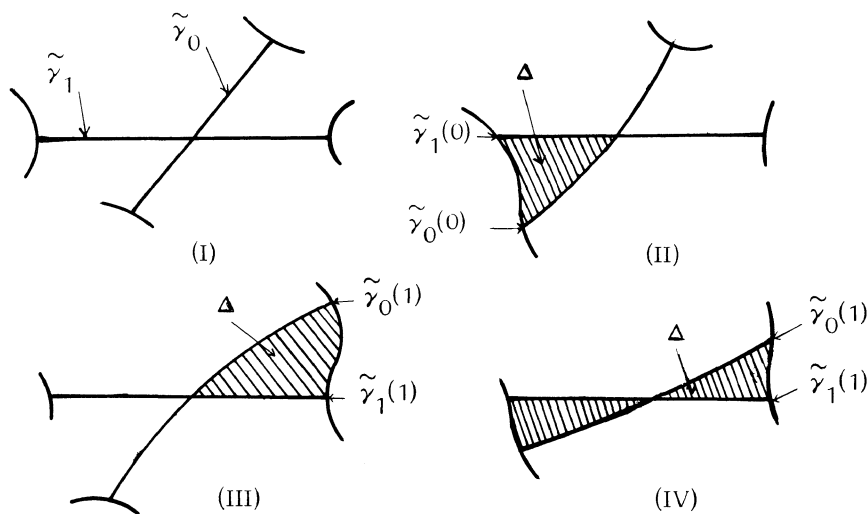


Figure 15

Le (I) est exclu ; en effet, cette configuration interdit l'existence d'une homotopie propre de disjonction. De même, le (II) est exclu dans une théorie où $h(0,u)$ est fixe. Par le même argument, les configurations (III) et (IV) sont exclues si, en plus, $h(1,u)$ est fixe.

Ainsi, dans la théorie où les extrémités sont fixes, le lemme est totalement démontré.

Analysons le cas où l'origine $\tilde{\gamma}_0(0)$ est fixe ; alors on n'a que les configurations (III) et (IV) . On voit dans $\tilde{N}$ un triangle Δ . Quitte à changer de composante $\tilde{\gamma}_1$, on peut supposer que $\text{int } \Delta \cap \tilde{\Gamma}_1 = \emptyset$. Alors, $p|_{\Delta}$ est un plongement ; il y a une isotopie de γ_0 à support dans un voisinage de $p(\Delta)$, qui tue au moins un point d'intersection avec γ_1 . On continue ainsi de suite jusqu'à ce que $\text{int } \tilde{\gamma}_0 \cap \tilde{\Gamma}_1 = \emptyset$. On traite de la même façon le cas où les deux extrémités sont mobiles. $\square$

Théorème 15. La surface M étant munie d'une métrique de courbure -1 , toute courbe simple non homotope à zéro est isotope à une géodésique simple. De plus, deux géodésiques simples se coupent suivant le nombre minimal de points d'intersection dans leurs classes d'isotopie.

Démonstration. La seconde partie de l'énoncé découle de $3^\circ \Rightarrow 1^\circ$ dans la proposition 10.

Soit $f : S^1 \rightarrow M$ un plongement non homotope à zéro ; d'après le lemme 4 , f est homotope à une immersion géodésique g . Soit $p : \tilde{M} \rightarrow M$ le revêtement universel. Soient $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{M}$ deux plongements propres d'images distinctes au-dessus de f ; soient $\tilde{g}_0$ et $\tilde{g}_1$ les applications géodésiques qui leur sont homotopes. D'après le lemme 1, $\tilde{g}_0$ et $\tilde{g}_1$ sont des plongements qui ont au plus un point commun. Montrons que $\tilde{g}_0$ et $\tilde{g}_1$ ne se rencontrent pas.

Si $\tilde{M}$ est regardé comme l'intérieur du disque de Poincaré $\mathbb{D}^2$, pour $i = 0, 1$, $\tilde{g}_i$ a deux points-limites. Puisque l'homotopie de $\tilde{g}_i$ à $\tilde{f}_i$ est obtenue par relèvement d'une homotopie dans M , la distance hyperbolique de $\tilde{g}_i(x)$ à $\tilde{f}_i(x)$ est uniformément bornée pour $x \in \mathbb{R}$. On sait qu'au voisinage de l'infini, le ds^2 euclidien est infiniment petit devant le ds^2 hyperbolique ; donc, pour $x \rightarrow \pm\infty$, la distance euclidienne de $\tilde{g}_i(x)$ à $\tilde{f}_i(x)$ tend vers 0 . Donc $\tilde{f}_i$ a les mêmes points limites sur $\partial\mathbb{D}^2$ que $\tilde{g}_i$. Alors, si $\tilde{g}_0$ et $\tilde{g}_1$ avait un point commun, par un argument d'intersection homologique (ou par l'application du théorème de Jordan) , $\tilde{f}_0$ et $\tilde{f}_1$ devraient se rencontrer. Ceci est impossible puisque f est un plongement.

Ainsi on a prouvé que l'image de g est une courbe simple que g revêt un certain nombre de fois. Pour voir que g est un plongement, on applique le résultat d'Epstein cité au début du paragraphe. $\square$

On peut donner de ce théorème une application qui éclaire la condition 3° de la proposition 10 .

Corollaire. Soient α'_0 et α'_1 deux courbes simples se coupant transversalement.

On suppose qu'elles ont des composantes $\tilde{\alpha}_i$ ($i = 0, 1$) de $p^{-1}(\alpha'_i)$ dans le revêtement universel vérifiant $\text{card}(\tilde{\alpha}_0 \cap \tilde{\alpha}_1) = \infty$. Alors leurs classes α_0 et α_1 dans M sont égales.

Démonstration. Vu l'hypothèse de transversalité, on a $\text{card}(\alpha'_0 \cap \alpha'_1) < \infty$. Ainsi il existe des points $* \in \alpha'_0 \cap \alpha'_1$ et $x, y \in \tilde{\alpha}_0 \cap \tilde{\alpha}_1$, tels que $x \neq y$, $p(x) = p(y) = *$. On oriente chaque arc $\tilde{\alpha}_i$ de x vers y et α'_i comme $\tilde{\alpha}_i$. Pensons à α_0, α_1 comme des éléments de $\pi_1(M, *)$. Le segment de x à y sur $\tilde{\alpha}_0$ (resp. $\tilde{\alpha}_1$) couvre α_0 k fois (resp. α_1 ℓ fois). On a donc dans $\pi_1(M, *)$ l'égalité :

$$\alpha_0^k = \alpha_1^\ell.$$

Maintenant, on munit M d'une métrique de courbure -1 . Si g_i désigne la géodésique (unique) de $\tilde{M}$, invariante par T_{α_i} , on voit que $T_{\alpha_0}^k = T_{\alpha_1}^\ell$ laisse invariante g_0 et g_1 . Donc $g_0 = g_1$, $p(g_0) = p(g_1)$ et α'_0, α'_1 sont homotopes (librement) à la même géodésique de M . $\square$

De l'équivalence $1^\circ \iff 2^\circ$ de la proposition 10, on déduit l'affirmation suivante. Soient α', β', γ' trois courbes simples $\neq 0$ de M , avec $\alpha' \cap \gamma' = \beta' \cap \gamma' = \emptyset$; si $\text{card} \alpha' \cap \beta'$ est minimal dans $M - \gamma'$, alors $\text{card} \alpha' \cap \beta'$ est aussi minimal dans M . Ce critère va être utilisé ci-dessous.

On rappelle de l'exposé 1 que $P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}})$ est l'espace "projectif" associé à $\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}}$ et que

$$\pi : \mathbb{R}_+^{\mathcal{J}} - \{0\} \longrightarrow P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}})$$

désigne la projection naturelle.

Proposition 16.

1° L'image de i_* est contenue dans $\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}} - \{0\}$.

2° L'application πi_* (en particulier i_*) est injective.

Démonstration. Il suffit de prouver que, si $\alpha_1 \neq \alpha_2 \in \mathcal{J}$, il existe $\beta \in \mathcal{J}$ tel que

$$i(\alpha_1, \beta) = 0 \neq i(\alpha_2, \beta).$$

Si $i(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$, il suffit de prendre $\beta = \alpha_1$. Si $i(\alpha_1, \alpha_2) = 0$, il existe des courbes simples $\alpha'_1 \in \alpha_1$ et $\alpha'_2 \in \alpha_2$, telles que $\alpha'_1 \cap \alpha'_2 = \emptyset$. En coupant M le long de α'_1 , on obtient une surface N contenant α'_2 en son intérieur.

Comme α'_2 n'est pas isotope à α'_1 , il existe dans N une courbe β' non disjoignable de α'_2 dans N . Si α'_2 ne sépare pas N , on prend β' avec

$\text{card}(\beta' \cap \alpha_2') = 1$. Si α_2' sépare N en N_1 et N_2 , on prend $\beta' = I_1 \cup I_2$ où I_j est un arc représentant un élément non trivial de $\pi_1(N_j, \alpha_2')$; cela est possible, car ni N_1 ni N_2 ne sont un anneau ou un disque.

Si β est la classe d'isotopie de β' dans M , on a, d'après la proposition 10 : $i(\alpha_2, \beta) \neq 0$. $\square$

§ IV. - SYSTÈMES DE COURBES SIMPLES SUR M ET ISOMÉTRIES EN GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

Je considère un système d'éléments distincts $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathcal{A}$, avec la propriété que $i(\alpha_\ell, \alpha_q) \leq 1$. On définit le complexe $\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ ayant comme sommets les $\alpha_1, \dots, \alpha_k$; les sommets α_ℓ, α_q sont joints par une arête si $i(\alpha_\ell, \alpha_q) = 1$. Je vais supposer dorénavant que $\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ est un arbre.

Lemme 17. Dans les conditions ci-dessus, soient $\alpha_j', \alpha_j'' \in \alpha_j$ tels que $\text{card}(\alpha_\ell', \alpha_q') = \text{card}(\alpha_\ell'', \alpha_q'') = i(\alpha_\ell, \alpha_q)$. Alors, il existe un difféomorphisme de M , isotope à l'identité, qui transforme $\bigcup \alpha_j'$ en $\bigcup \alpha_j''$.

Démonstration. Pour $k = 2$, c'est la proposition 12. Pour une démonstration par récurrence, on suppose que $\alpha_j' = \alpha_j''$ pour $j \leq \ell$, $\ell \geq 2$, la numérotation étant compatible avec la structure d'arbre. Soient p, q tels que $p \leq \ell < q$ et $i(\alpha_p, \alpha_q) = 1$. Soit N la variété obtenue en coupant M le long des α_j' , $j \leq \ell$ et $j \neq p$. Alors α_p' est coupé en un ou plusieurs arcs de N ; soit I celui qui rencontre α_q' (α_q' est une courbe fermée de N parce que Γ est un arbre); comme $\text{card}(\alpha_q' \cap I) = 1$, l'arc I représente un élément non trivial de $\pi_1(N, \partial N)$.

On prouve que α_q'' coupe en un point le même arc I (et non une éventuelle autre composante de $\alpha_p' \cap N$). Sinon, pour l'un des $j \neq p$ tels que $j \leq \ell$ et $i(\alpha_j, \alpha_p) = 1$, on aurait $\alpha_j = \alpha_q$ [regarder, à la source de l'homotopie de α_q' à α_q'' dans M , la préimage des α_j' ; une de ses composantes est nécessairement parallèle au bord de l'anneau]. Maintenant, le complément de la proposition 12 est exploitable : on a, dans N , une isotopie qui pousse α_q'' sur α_q' et qui envoie $\alpha_p' \cap N$ en lui-même. $\square$

Application. Soit ρ une métrique de courbure -1 sur la surface M . On considère des courbes simples $\alpha_1', \dots, \alpha_k'$ comme sur la figure 16 (ici, on raisonne avec M fermée); $M - \bigcup \alpha_j'$ est une cellule. Soit α_j'' la géodésique, pour la métrique ρ , de

la classe d'isotopie de α_j^1 ; on vérifie que $\text{card}(\alpha_\ell'' \cap \alpha_q'') = \text{card}(\alpha_\ell^1 \cap \alpha_q^1)$. D'après le lemme 17, $M - \bigcup_j \alpha_j''$ est une cellule. En particulier, la figure 16 est réalisable par des géodésiques.

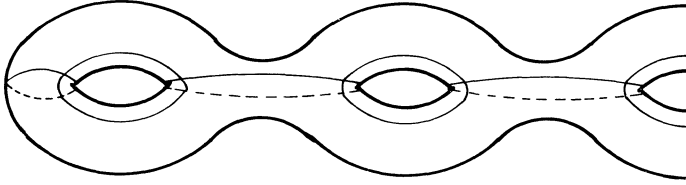


Figure 16

Théorème 18. Soit ρ une métrique de courbure -1 sur la surface compacte M . Le groupe $I(M, \rho)$ des isométries de ρ est fini et toute isométrie isotope à l'identité est l'identité.

Démonstration. Je commence par considérer l'ensemble M^M des applications quelconques $M \rightarrow M$, muni de la topologie de la convergence ponctuelle. Par le théorème de Tychonov, M^M est compact.

On remarque, d'autre part, que sur $I(M, \rho)$ la topologie de la convergence ponctuelle et la topologie de la convergence uniforme coïncident. [En effet, si je considère un ensemble fini X de M , suffisamment dense, une isométrie est complètement caractérisée par ce qu'elle fait sur $X \dots$] On remarque que $I(M, \rho)$ est fermé dans M^M .

D'autre part, je dis qu'une isométrie isotope à l'identité est égale à l'identité. En effet, soit φ une telle isométrie ; l'action de φ sur $\mathcal{J}$ est triviale ; par l'unicité des géodésiques dans une classe d'isotopie donnée, en géométrie hyperbolique, la géodésique g_α de la classe $\alpha \in \mathcal{J}$ est invariante : $\varphi(g_\alpha) = g_\alpha$. On en déduit sans peine que φ est l'identité sur le système de géodésiques de la figure 16 . Alors, φ est aussi l'identité sur la cellule complémentaire.

Donc $I(M, \rho)$ est discret. Mais un fermé discret dans un compact est fini. $\square$

Corollaire 19. Soit $f \in \text{Diff}(M)$ et $\mathfrak{I}(f)$ l'action naturelle de f sur l'espace de Teichmüller de M (voir exposé 7) . Si $\mathfrak{I}(f)$ possède un point fixe, il existe un difféomorphisme périodique de M isotope à f .

RÉFÉRENCES

- [1] D.B.A. EPSTEIN, Curves on 2-manifolds and isotopies, Acta math. 115 (1966), p. 83-107.
- [2] J. CHEEGER & D.G. EBIN, Comparison theorems in Riemannian geometry, North-Holland, 1975.
- [3] R. SEELEY, Extension of C^∞ functions defined in a half space, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), p. 625-626.
- [4] B. MALGRANGE, Ideals of differentiable functions, Oxford University Press, 1966.