

Astérisque

M. CHALEYAT-MAUREL

MARC YOR

**Les filtrations de $|X|$ et X^+ , lorsque X est une
semi-martingale continue**

Astérisque, tome 52-53 (1978), p. 193-196

http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__52-53__193_0

© Société mathématique de France, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES FILTRATIONS DE $|X|$ ET X^+ ,
LORSQUE X EST UNE SEMI-MARTINGALE CONTINUE.

M. CHALEYAT-MAUREL et M. YOR

INTRODUCTION

Le second auteur a montré en (4) que, si $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien réel, issu de $x \in \mathbb{R}$, les filtrations, dûment complétées et rendues continues à droite de $|B|$ et du mouvement brownien $\hat{B} = \int_0^\cdot \text{sgn}(B_s) dB_s$ sont identiques.

On montre ici que ce résultat s'étend à la valeur absolue $|X|$ de toute semi-martingale continue X (jouant le rôle de B). Un résultat analogue - convenablement formulé - est valable pour la partie positive X^+ de X .

1 - PRÉLIMINAIRES

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de probabilité complet, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ constituée de sous-tribus de $\mathcal{F}$, vérifiant les conditions habituelles.

La définition suivante nous sera très utile :

Définition

Si X et Y sont deux processus, on dit que X domine Y si la filtration $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_t, t \geq 0)$ engendrée par X , complétée et rendue continue à droite, contient la filtration $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}_t, t \geq 0)$ associée de la même façon à Y , c'est à dire :

pour tout t , $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{X}_t$.

X et Y sont dits équivalents si X domine Y et Y domine X .

Voici un premier exemple de domination :

Lemme

Toute semi-martingale X domine les processus $[X, X]$ et $\langle X^c, X^c \rangle$.

Démonstration : il est classique que, pour tout t , $[X, X]_t$ est la limite p.s d'une suite de variables $\sum_{i=1}^n (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$, où $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t$.
 X domine donc $[X, X]$. D'autre part, l'égalité $\langle X^c, X^c \rangle_t = \int_0^t 1_{(\Delta X_s = 0)} d[X, X]_s$ implique que X domine $\langle X^c, X^c \rangle$ ■

Voici deux applications de ce lemme :

Proposition

Soit X une semi-martingale, et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont la dérivée seconde, au sens des distributions, est une mesure signée.

Alors, $f(X)$ domine $\int_0^\bullet (f'_g)^2(X_s) d\langle X^c, X^c \rangle_s$.

Corollaire

Si X est une semi-martingale, alors :

- a). $|X|$ domine $\langle X^c, X^c \rangle$.
- b). X^+ domine $\int_0^\bullet 1_{(X_s > 0)} d\langle X^c, X^c \rangle_s$.

Démonstration : d'après la formule d'Ito généralisée (voir (2), chapitre VI, ou, dans ce volume, RPG), on a :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_g(X_{s-}) dX_s + A_t^f,$$

où A^f est un processus à variation bornée.

On en déduit : $\langle f(X)^c, f(X)^c \rangle = \int_0^\bullet (f'_g)^2(X_s) d\langle X^c, X^c \rangle_s$.

La proposition découle alors du lemme.

Pour démontrer le corollaire, prendre $f(x) = |x|$, puis x^+ .

2 - LES FILTRATIONS DE $|X|$ ET X^+

Soit X une semi-martingale continue.

D'après la formule de Tanaka (voir toujours RPG), on a :

$$(1) \quad X_t^+ = X_0^+ + \int_0^t 1_{(X_s > 0)} dX_s + \frac{1}{2} L_t^0,$$

où L^0 est le temps local de X en 0.

D'autre part, la formule suivante a été montrée en (3), formule 8)

$$(2) \quad |X_t| = |X_0| + \int_0^t \overline{\text{sgn}}(X_s) dX_s + \bar{L}_t^0,$$

où $\overline{\text{sgn}}(u) = +1$ si $u > 0$, 0 si $u=0$, -1 si $u < 0$, et

$$\bar{L}_t^0 = \frac{1}{2}(L_t^0 + L_t^{0-})$$

$$\text{Notons} \quad \hat{X}_t = X_0^+ + \int_0^t 1_{(X_s > 0)} dX_s$$

$$\text{et} \quad \bar{X}_t = |X_0| + \int_0^t \overline{\text{sgn}}(X_s) dX_s$$

Voici notre résultat principal :

Théorème :

Soit X une semi-martingale continue. Alors,

a). les processus X^+ et $\hat{X}$ sont équivalents.

b). les processus $|X|$ et $\bar{X}$ sont équivalents.

Démonstration :

a). D'après (1), on a : $\frac{1}{2} L_t^0 = \sup_{s \leq t} [\hat{X}_s]^-$ (on note $x^- = \sup(-x, 0)$),
et donc, d'après la formule (1), $\hat{X}$ domine $\frac{1}{2} L_t^0$.

Inversement, il est montré en (3) (corollaire 2) que

$$\begin{aligned} L_t^0 &= \lim_{(\varepsilon \rightarrow 0)} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{(0 < X_s < \varepsilon)} d \langle X^c, X^c \rangle_s \\ &= \lim_{(\varepsilon \rightarrow 0)} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{0 < X_s^+ < \varepsilon} \{ 1_{(X_s > 0)} d \langle X^c, X^c \rangle_s \} \end{aligned}$$

Si l'on remplace l'indicatrice $1_{]0,\varepsilon[}(x)$ par une fonction continue à support compact f , il découle du corollaire de la proposition que X^+ domine $\int_0^t f(X_s^+) 1_{(X_s > 0)} d\langle X^c, X^c \rangle_s$.

Par un argument de classe monotone, X^+ domine L^0 , et donc $\widehat{X}$, d'après la formule (1).

Finalement, X^+ et $\widehat{X}$ sont équivalents.

b). On fait le même raisonnement qu'en a), à partir de la formule (2), et des expressions suivantes de $\bar{L}^0$:

$$\bar{L}_t^0 = \sup_{s \leq t} (\bar{X}_s)^- \quad (\text{provenant de (1)})$$

$$\text{et} \quad \bar{L}_t^0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{(0 < |X_s| < \varepsilon)} d\langle X^c, X^c \rangle_s \quad (\text{provenant de (3)}).$$

Remarque : en changeant X en $-X$, on déduit du théorème l'équivalence des processus X^- et $\check{X} = X_0^- - \int_0^\cdot 1_{(X_s < 0)} dX_s$.

REFERENCES

- (1) N. EL KAROUI et M. CHALEYAT-MAUREL : Un problème de réflexion et ses applications au temps local, (dans ce volume).
- (2) P.A. MEYER : Un cours sur les intégrales stochastiques.
Séminaire de Proba. Strasbourg X, Lecture Notes in Math. 511,
Springer.
- (3) M. YOR : Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semi-martingales, (dans ce volume).
- (4) M. YOR : Sur les théories du filtrage et de la prédiction.
Séminaire de Proba. Strasbourg XI, Lecture Notes in Math. 581,
Springer.