Astérisque

GEORGES GRAS

Étude d'invariants relatifs aux groupes des classes des corps abéliens

Astérisque, tome 41-42 (1977), p. 35-53

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1977__41-42__35_0>

© Société mathématique de France, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Société Mathématique de France
Astérisque 41-42 (1977) p.35-53

ÉTUDE D'INVARIANTS RELATIFS AUX GROUPES DES CLASSES DES CORPS ABÉLIENS

par

Georges GRAS

-:-:-:-

Le but de cet exposé est d'étudier le problème suivant :

Partant des formules analytiques du nombre de classes des corps abéliens, quelles informations peut-on en déduire sur la structure de ces groupes de classes ?

Le plan de l'exposé est alors le suivant :

(i) la définition et l'étude des φ-objets qui permettent de donner une interprétation arithmétique des formules analytiques, plus complète que celle de Leopoldt ;

(ii) l'interprétation arithmétique en question (classes "réelles" puis classes "relatives") ;

(iii) la définition d'invariants $m_\phi(\mathfrak{H})$ et $m_\phi(\mathfrak{H}')$ puis $m_\phi(h)$ et $m_\phi(h')$, pour tout caractère ℓ-adique ϕ : les $m_\phi(\mathfrak{H})$ et $m_\phi(\mathfrak{H}')$ ("invariants classes") étant des invariants de nature algébrique concernant la structure des groupes de classes ; les $m_\phi(h)$ et $m_\phi(h')$ ("invariants analytiques") étant définis à partir des formules analytiques ;

(iv) l'étude de ces invariants qui conduit à établir certains résultats, notamment :

- une généralisation des congruences de Leopoldt-Fresnel,
- une interprétation du théorème de Stickelberger sur l'annulation des classes relatives,

- une application à l'étude des invariants λ,μ,ν , des Γ-extensions cyclotomiques des extensions abéliennes de $\mathbb{Q}$.

Soit ℓ un nombre premier. Soit $\mathbb{Q}^a$ l'extension abélienne maximale de $\mathbb{Q}$ contenue dans une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$, elle-même contenue dans une clôture algébrique Ω_ℓ de $\mathbb{Q}_\ell$. On fixe un complété $\hat{\Omega}_\ell$ de Ω_ℓ , ce qui donne une valuation bien déterminée sur chaque sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$.

Soit $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^a/\mathbb{Q})$; on appelle $\mathfrak{X}'$ le groupe des caractères de degré 1 de G (à valeurs dans Ω_ℓ) dont le noyau est fermé et d'indice fini dans G et on appelle $\mathfrak{X}$ et Φ les ensembles de caractères rationnels et ℓ-adiques (irréductibles) correspondants ; pour tout sous-corps K de $\mathbb{Q}^a$, on note $\mathfrak{X}'_K$, $\mathfrak{X}_K$ et Φ_K les ensembles de caractères de degré 1 , rationnels et ℓ-adiques de K . Etant donné $\chi' \in \mathfrak{X}'$, on notera χ (resp. ϕ) le caractère rationnel (resp. ℓ-adique) au-dessus de χ' (notations : $\chi'|\chi$, $\chi'|\phi$ et aussi $\phi|\chi$). On rappelle que si $\chi' \in \mathfrak{X}'$, l'ordre de χ' , le sous-corps de $\mathbb{Q}^a$ fixe par $\mathrm{Ker}\,\chi'$, son groupe de Galois et son conducteur ne dépendent que du caractère rationnel χ au-dessus de χ' ; on note respectivement g_χ , K_χ , G_χ et f_χ ces quantités. Enfin, pour tout ensemble Ψ de caractères (de degré 1, rationnels ou ℓ-adiques), on notera Ψ^+ (resp. Ψ^-) le sous-ensemble des caractères pairs (resp. impairs).

I. NOTION DE φ-OBJET.

1) Définition des G-familles et des G'-familles. Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des extensions finies de $\mathbb{Q}$ contenues dans $\mathbb{Q}^a$. On suppose donnée une famille $M = (M(K))_{K\in\mathcal{K}}$ de G-modules tels que pour tout $K \in \mathcal{K}$, $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^a/K)$ opère trivialement sur $M(K)$ (les $M(K)$ sont canoniquement des $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$-modules). Dans ce cas, on dira que M est une G-famille.

Soit alors M une G-famille pour laquelle on dispose de deux familles d'homomorphismes de G-modules $N = (N_{L/K})$ et $j = (j_{L/K})$ indexées par l'ensemble des sous-extensions de $\mathbb{Q}^a$, $L/K, L, K \in \mathcal{K}$ et vérifiant les conditions suivantes :

(i) $N_{L/K}$ (resp. $j_{L/K}$) est un homomorphisme de $M(L)$ dans $M(K)$ (resp. de $M(K)$ dans $M(L)$),

(ii) $N_{L/K}\circ N_{E/L} = N_{E/K}$ et $j_{E/L}\circ j_{L/K} = j_{E/K}$, pour tout $K,L,E \in \mathcal{K}$, $K \subset L \subset E$,

(iii) $j_{L/K} \circ N_{L/K} = \nu_{L/K}$, pour tout $K, L \in \mathcal{K}$, $K \subset L$, où $\nu_{L/K}$ est défini par $\nu_{L/K}(a) = \prod_{s \in Gal(L/K)} a^s$, pour tout $a \in M(L)$.

Lorsqu'on a de telles familles M, N, j vérifiant (i), (ii) et (iii), on dit que M est une G'-famille (les familles N et j étant supposées associées à M sans ambiguité).

Exemples de G'-familles. On aura à utiliser, entre autres, les familles M pour lesquelles $M(K)$ est le groupe des unités de K , le groupe des classes de K et l'algèbre $\mathbb{Z}[Gal(K/\mathbb{Q})]$ (les lois de G-modules étant évidentes). Pour les unités, les applications $N_{L/K}$ sont les normes usuelles et les applications $j_{L/K}$ les injections canoniques ; pour les classes, ce sont les applications déduites, par passage au quotient, des normes et extensions des idéaux ; dans le dernier cas, la "norme" $N_{L/K}$ provient du passage au quotient $Gal(L/\mathbb{Q}) \to Gal(K/\mathbb{Q})$ et $j_{L/K}$ est alors déterminé par la condition (iii).

2) Définition des modules M_χ , M'_χ , M_ϕ , M'_ϕ . Soit M une G'-famille. Soit $\chi \in \mathfrak{X}$, soit P_χ le $g_\chi^{\text{ème}}$ polynome cyclotomique et soit σ_χ un générateur fixé de G_χ ; on pose :

$$M_\chi = \{a \in M(K_\chi) \ , \ P_\chi(\sigma_\chi)a = 1\} \ ;$$

on vérifie que cette définition ne dépend pas du choix de σ_χ .

Soit maintenant ϕ un élément de Φ avec $\phi | \chi$. On vérifie qu'il existe un unique polynome cyclotomique local (irréductible sur $\mathbb{Z}_\ell$) divisant P_χ , dont l'ensemble des racines dans Ω_ℓ est l'ensemble $\{\chi'(\sigma_\chi)\}_{\chi' | \phi}$; on note par abus P_ϕ ce polynome qui dépend du choix de σ_χ . Supposons alors que les $M(K)$ soient des $\mathbb{Z}_\ell$-modules ; on pose :

$$M_\phi = \{a \in M(K_\chi) \ , \ P_\phi(\sigma_\chi)a = 1\} \ .$$

On vérifie que cette définition ne dépend que de ϕ et non du choix de σ_χ .

Si $\varphi = \chi$ ou ϕ , les éléments de M_φ sont appelés les φ-objets relativement à M .

On a ainsi défini des modules M_χ qui sont des $\mathbb{Z}[G_\chi]/(P_\chi(\sigma_\chi))$ modules, donc des modules sur l'anneau des entiers $\mathbb{Z}^{(g_\chi)}$ de $\mathbb{Q}^{(g_\chi)}$; de même, les modules M_ϕ sont des $\mathbb{Z}_\ell^{(g_\chi)}$-modules.

PROPOSITION I. 1. - Soit M une G-famille ; alors on a :

$$M_\chi = \{a \in M(K_\chi) \ , \ \nu_{K_\chi|K} a = 1 \ , \text{ pour tout } K \subsetneq K_\chi\} \ .$$

Ceci résulte d'une propriété générale démontrée par J. Martinet (1968, non publié), à savoir que dans $\mathbb{Z}[G_\chi]$, l'idéal $(P_\chi(\sigma_\chi))$ est égal à l'idéal engendré par les $\nu_{K_\chi/K}$, $K \subsetneq K_\chi$ (cf. [8], Th. I. 1).

Ce résultat généralise un résultat de Leopoldt ([16], Satz 4) qui n'était valable que pour les modules sans torsion.

Cette proposition suscite la définition suivante, dans le cas des G'-familles ; on pose :

$$M'_\chi = \{a \in M(K_\chi)\ ,\ N_{K_\chi/K}\, a = 1\ ,\ \text{pour tout } K \subsetneq K_\chi\}\ .$$

D'un point de vue arithmétique, nous rencontrerons les deux types de modules M_χ et M'_χ ; comme $j_{K_\chi/K} \circ N_{K_\chi/K} = \nu_{K_\chi/K}$, on a $M'_\chi \subset M_\chi$.

La proposition suivante va nous permettre de définir de façon naturelle la famille des M'_ϕ, $\phi \in \Phi$.

PROPOSITION I.2. - <u>Soit</u> M <u>une G'-famille de</u> $\mathbb{Z}_\ell$<u>-modules ; soit</u> $\chi \in \mathfrak{X}$. <u>Alors on a</u> :

$$M_\chi = \bigoplus_{\phi \mid \chi} M_\phi\ .$$

On pose alors :

$$M'_\phi = M'_\chi \cap M_\phi\ .$$

Il en résulte que

$$M'_\chi = \bigoplus_{\phi \mid \chi} M'_\phi\ .$$

<u>Remarque I.1.</u> - Dans le cas "semi-simple" (i.e. $\ell \nmid g_\chi$), on a $M'_\phi = M_\phi$ pour tout $\phi \mid \chi$.

PROPOSITION I.3. - <u>Soit</u> M <u>une G'-famille. Soit</u> $L/\mathbb{Q}$ <u>cyclique ; on suppose que pour</u> $K \subset L$, $M(K)$ <u>est fini et on suppose que pour toute sous-extension</u> K/k <u>de</u> $L/\mathbb{Q}$, $N_{K/k}$ <u>est surjective. Alors l'ordre de</u> $M(L)$ <u>est donné par l'expression</u> :

$$|M(L)| = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}_L} |M'_\chi|\ .$$

II. <u>APPLICATION AUX GROUPES DE CLASSES</u>.

1) <u>Préliminaires</u>. Nous travaillons avec les deux G'-familles suivantes : $\mathbb{H}$ et $\mathcal{H}$; les $\mathbb{H}(L)$ étant les groupes de classes (au sens ordinaire) de $L \in \mathcal{K}$ et les $\mathcal{H}(L)$ les ℓ-Sylow des $\mathbb{H}(L)$. Il se présente alors de façon na-

turelle les familles indexées par $\chi \in \mathfrak{X}$, constituées des $\mathbb{H}_\chi$, $\mathbb{H}'_\chi$, $\mathcal{H}_\chi$ et $\mathcal{H}'_\chi$ et les familles indexées par $\phi \in \Phi$ constituées des $\mathcal{H}_\phi$ et $\mathcal{H}'_\phi$.

Une première réduction est la suivante :

PROPOSITION II.1. - <u>On a</u> $\mathbb{H}'_\chi = \mathbb{H}_\chi$, <u>pour tout</u> $\chi \in \mathfrak{X}^-$.

Ce résultat provient du fait plus général suivant ([8], chap.II, §2) : Soit $L/\mathbb{Q}$ cyclique imaginaire de degré divisible par ℓ et soit $K \subset L$ tel que $[L : K] = \ell$; désignons par $\mathcal{H}(K)^-$ le groupe des ℓ-classes relatives de K (pour $\ell \neq 2$) ; alors $\mathcal{H}(K)^- \cap \mathrm{Ker}\, j_{L/K} = (1)$; pour $\ell = 2$, $\mathrm{Ker}\, j_{L/K} = (1)$ (si $\ell = 2$, K est le sous-corps réel maximal de L). Il en résulte notamment, pour $L/\mathbb{Q}$ cyclique imaginaire, L_0 étant le sous-corps réel maximal de L : $\{h \in \mathbb{H}(L)\, ,\, N_{L/L_0} h = 1\} = \{h \in \mathbb{H}(L)\, ,\, \nu_{L/L_0} h = 1\}$.

Dans le cas $\chi \in \mathfrak{X}^+$, nous pensons que le résultat est faux mais nous n'avons pas d'exemples. Il doit être possible d'en trouver dans le cadre des extensions $K/\mathbb{Q}$ cycliques réelles de degré 4 .

Une seconde réduction est alors la suivante :

PROPOSITION II.2. - <u>Désignons par</u> $\mathbb{H}(L)^+$ (resp. $\mathbb{H}(L)^-$) <u>l'ensemble des classes réelles (resp. relatives) d'un corps</u> L . <u>Si</u> $L/\mathbb{Q}$ <u>est cyclique, alors on a</u> :

$$|\mathbb{H}(L)| = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}_L} |\mathbb{H}'_\chi| \ , \quad |\mathbb{H}(L)^+| = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}_L^+} |\mathbb{H}'_\chi| \quad \text{et} \quad |\mathbb{H}(L)^-| = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}_L^-} |\mathbb{H}_\chi| \ .$$

Cette proposition est une conséquence de la proposition I.3., car dans $L/\mathbb{Q}$ (cyclique) aucune sous-extension ne peut être non ramifiée et, d'après le corps de classes, les applications normes sont surjectives.

2) <u>Interprétation arithmétique des formules analytiques</u>. Cette interprétation consiste à exprimer $|\mathbb{H}(L)|$ au moyen des formules analytiques ([10], §5) en essayant d'écrire celles-ci sous la forme $|\mathbb{H}(L)| = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}_L} A_\chi$, au moyen d'une famille de nombres A_χ ne dépendant que de χ , pour tout L cyclique sur $\mathbb{Q}$; en effet, d'après un argument très simple ([16], § 1.4), on pourra déduire des égalités $|\mathbb{H}(L)| = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}_L} |\mathbb{H}'_\chi| = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}_L} A_\chi$ (prop. II.2), les égalités $|\mathbb{H}'_\chi| = A_\chi$, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}$.

Les A_χ étant de nature très différente selon que χ est pair ou impair, nous allons chercher à écrire séparément :

$$|\mathbb{H}(L)^+| = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}_L^+} A_\chi \quad \text{et} \quad |\mathbb{H}(L)^-| = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}_L^-} A_\chi .$$

Remarque II.1. - Signalons que l'on a sans changement des résultats analogues en remplaçant $\mathbb{H}$ par $\mathfrak{H}$ (il suffit de considérer les ℓ-participations).

a) Classes réelles. Si l'on se reporte à la formule donnée par Leopoldt ([16], Satz 21), on constate qu'elle est encore inadaptée à notre problème puisque les coefficients notés Q_L^+ et Q_G par Leopoldt (et que nous allons noter respectivement $Q(L)$ et $q(L)$) ne sont pas interprétés.

Désignons par $\mathbb{E}$ la G'-famille des unités (considérées modulo la torsion) ; les groupes $\mathbb{E}_\chi$ de χ-unités sont donc bien définis (ils coïncident avec la notion d'unités χ-relatives propres donnée par Leopoldt). Posons :

$$Q(L) = (\mathbb{E}(L) : \bigoplus_{\psi \in \mathfrak{X}_L} \mathbb{E}_\psi) ,$$

pour toute extension réelle L et posons pour tout $\chi \in \mathfrak{X}^+$:

$$Q_\chi = (\mathbb{E}(K_\chi) : \mathbb{E}_0(K_\chi) \oplus \mathbb{E}_\chi) ,$$

où $\mathbb{E}_0(K_\chi)$ est le sous-groupe de $\mathbb{E}(K_\chi)$ engendré par les unités des sous-corps stricts de K_χ .

PROPOSITION II.3. - Pour toute extension $L/\mathbb{Q}$ cyclique réelle, on a :

$$Q(L) = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}_L} Q_\chi .$$

Pour tout L cyclique posons $q(L) = (g^{g-2} / \prod_{\chi \in \mathfrak{X}_L} d_\chi)^{1/2}$, où $g = [L:\mathbb{Q}]$ et où d_χ est le discriminant de $\mathbb{Q}^{(g_\chi)}$. On pose ensuite :

$$q_\chi = \prod_{\substack{p \mid g_\chi \\ p \text{ premier}}} p^{\frac{\varphi(g_\chi)}{p-1}} , \text{ si } g_\chi \text{ n'est pas la puissance d'un nombre premier,}$$

$$q_\chi = p^{\frac{\varphi(g_\chi)}{p-1} - 1} , \text{ si } g_\chi \neq 1 \text{ est une puissance du nombre premier } p ,$$

$$q_1 = 1 .$$

PROPOSITION II.4. - Pour toute extension cyclique L de $\mathbb{Q}$, on a

$$q(L) = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}_L} q_\chi .$$

Explicitons maintenant ce que Leopoldt note h_χ ([16], p.40). Pour tout

$\chi \in \mathfrak{X}^+$, posons $\theta_\chi = \prod_{a \in \mathfrak{a}_\chi} (\zeta_{2f_\chi}^a - \zeta_{2f_\chi}^{-a})$, où $\zeta_{2f_\chi} = \exp(i\pi/f_\chi)$ et où $\mathfrak{a}_\chi$ est un demi-système de représentants de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{(f_\chi)}/K_\chi)$ dans $(\mathbb{Z}/f_\chi\mathbb{Z})^*$ (cf. [16], § 8.1). Si l'on désigne par $\overline{\mathbb{F}}_\chi$ le sous-module de $\mathbb{E}_\chi$ engendré par l'unité cyclotomique $\theta_\chi^{D_\chi}$ (cf. [16], § 8.4) alors la formule de Leopoldt peut s'écrire ([16], Satz 21) : $|\mathbb{H}(L)| = \frac{Q(L)}{q(L)} \prod_{\chi \in \mathfrak{X}_L} (\mathbb{E}_\chi : \overline{\mathbb{F}}_\chi) = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}_L} \frac{Q_\chi}{q_\chi} (\mathbb{E}_\chi : \overline{\mathbb{F}}_\chi)$.

Nous avons trouvé les A_χ, donc :

THÉORÈME II.1. - Pour tout $\chi \in \mathfrak{X}^+$, on a $|\mathbb{H}'_\chi| = \frac{Q_\chi}{q_\chi} (\mathbb{E}_\chi : \overline{\mathbb{F}}_\chi)$.

En utilisant les groupes d'unités cyclotomiques "absolues" qui constituent une G'-famille $\mathbb{F}$ (cf. [16], § 8.3), nous avons prouvé le résultat suivant ([8], Th.III.2) :

THÉORÈME II.1'. - Pour tout $\chi \in \mathfrak{X}^+$, on a $|\mathbb{H}'_\chi| = \ell_\chi(\mathbb{E}(K_\chi) : \mathbb{E}_0(K_\chi)\mathbb{F}(K_\chi))$, où ℓ_χ est égal à 1 sauf, peut-être, si g_χ est puissance d'un nombre premier ℓ et si f_χ est divisible par au moins deux nombres premiers distincts, auquel cas $\ell_\chi = 1$ ou ℓ .

Remarque II.2. - On peut calculer ℓ_χ exactement (cf. [8], Th. III.2) ; lorsque $\ell_\chi = \ell$, on a $|\mathbb{H}'_\chi| \equiv 0 \bmod \ell$, mais ce résultat se retrouve immédiatement au moyen de la formule de Chevalley.

b) Classes relatives. Dans ce cas, la formule analytique est plus facile à interpréter. Soit L une extension abélienne imaginaire de $\mathbb{Q}$. On sait que $|\mathbb{H}(L)^-| = Q_L^- w_L \prod_{\chi \in \mathfrak{X}_L^-} \prod_{\chi' | \chi} (\frac{1}{2} B_1(\chi'^{-1}))$, $B_1(\chi'^{-1})$ désignant le nombre de Bernoulli généralisé, pour le caractère χ'^{-1} (considéré comme caractère de Dirichlet primitif), w_L étant le nombre de racines de l'unité contenues dans L et Q_L^- l'indice des unités. On sait que $Q_L^- = 1$ si $L/\mathbb{Q}$ est cyclique ([10], Satz 24). On trouve donc immédiatement :

THÉORÈME II.2. - Pour tout $\chi \in \mathfrak{X}^-$, on a :

$$|\mathbb{H}'_\chi| = |\mathbb{H}_\chi| = 2^{\alpha_\chi} w_\chi \prod_{\chi' | \chi} (\tfrac{1}{2} B_1(\chi'^{-1})) ,$$

où $\alpha_\chi = 1$ ou 0 selon que g_χ est une puissance de 2 ou non et où $w_\chi = \ell$ si K_χ est un corps cyclotomique de conducteur une puissance de ℓ, $w_\chi = 1$ sinon.

Compte-tenu des relations $\mathfrak{H}_\chi = \bigoplus_{\phi|\chi} \mathfrak{H}_\phi$ et $\mathfrak{H}'_\chi = \bigoplus_{\phi|\chi} \mathfrak{H}'_\phi$, il est probable que l'interprétation des formules analytiques peut être poussée plus loin ; cependant, le principe de Leopoldt n'est valable que pour les caractères rationnels. Nous allons essayer d'aborder ce problème.

III. DÉFINITION D'INVARIANTS.

1) Les invariants "classes" $m_\phi(\mathfrak{H})$ et $m_\phi(\mathfrak{H}')$. Les $\mathfrak{H}_\phi$ sont des $\mathbb{Z}_\ell^{(g_\chi)}$-modules de torsion, donc de la forme :

$$\mathfrak{H}_\phi \simeq \prod_{i\geq 0} \mathbb{Z}_\ell^{(g_\chi)} / \hat{\mathfrak{p}}_\chi^{n_i} ,$$

$\hat{\mathfrak{p}}_\chi$ désignant l'idéal maximal de $\mathbb{Z}_\ell^{(g_\chi)}$ (obtenu à partir d'un idéal $\mathfrak{p}_\chi$ bien déterminé de $\mathbb{Z}^{(g_\chi)}$ résultant du choix du plongement $\overline{\mathbb{Q}} \subset \hat{\Omega}_\ell$). On pose alors :

$$m_\phi(\mathfrak{H}) = \sum_{i\geq 0} n_i .$$

De même, on aura :

$$\mathfrak{H}'_\phi \simeq \prod_{i\geq 0} \mathbb{Z}_\ell^{(g_\chi)} / \hat{\mathfrak{p}}_\chi^{n'_i} ;$$

on pose alors :

$$m_\phi(\mathfrak{H}') = \sum_{i\geq 0} n'_i .$$

2) Les invariants "analytiques" $m_\phi(h')$. Nous distinguons encore les cas $\chi \in \mathfrak{X}^+$ et $\chi \in \mathfrak{X}^-$.

a) Classes réelles. On a (Th. II. 1') : $|\mathbb{H}'_\chi| = \ell_\chi(\mathbb{E}(K_\chi) : \mathbb{E}_0(K_\chi)\mathbb{F}(K_\chi))$. On remarque que le quotient $\mathbb{E}(K_\chi)/\mathbb{E}_0(K_\chi)\mathbb{F}(K_\chi)$ est aussi un $\mathbb{Z}^{(g_\chi)}$-module (car annulé par les $\nu_{K_\chi/K}$, pout tout $K \subsetneq K_\chi$, cf. Prop. I. 1). Pour se ramener à une étude locale, on remplace $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}_0$ et $\mathbb{F}$ par $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_0$ et $\mathfrak{F}$, où l'on définit pour tout K :

$$\mathcal{E}(K) = \mathbb{E}(K) \otimes \mathbb{Z}_\ell , \quad \mathcal{E}_0(K) = \mathbb{E}_0(K) \otimes \mathbb{Z}_\ell \quad \text{et} \quad \mathfrak{F}(K) = \mathbb{F}(K) \otimes \mathbb{Z}_\ell .$$

Posons $\tilde{\mathcal{E}}_\chi = \mathcal{E}(K_\chi)/\mathcal{E}_0(K_\chi)\mathfrak{F}(K_\chi)$; on a alors une décomposition :

$$\tilde{\mathcal{E}}_\chi = \bigoplus_{\phi|\chi} \tilde{\mathcal{E}}_\phi ,$$

où $\tilde{\mathcal{E}}_\phi$ est un $\mathbb{Z}_\ell^{(g_\chi)}$-module (qui est monogène et non trivial pour $\phi \neq 1$). On aura donc :

$$\tilde{\mathcal{E}}_\phi \simeq \mathbb{Z}_\ell^{(g_\chi)} / \hat{\mathfrak{p}}_\chi^{m'} , \quad m' \geq 0 .$$

Tenant compte de la relation $|\mathfrak{H}'_\chi| = \ell_\chi |\tilde{\mathcal{E}}_\chi| = \ell_\chi \prod_{\phi|\chi} |\tilde{\mathcal{E}}_\phi|$, on est amené à poser :

(i) $m_\phi(h') = m'$, dans le cas $\ell_\chi = 1$,

(ii) $m_\phi(h') = m' + 1$, dans le cas $\ell_\chi = \ell$ (dans ce cas, g_χ est nécessairement une puissance de ℓ , donc $\phi = \chi$ et $|\mathfrak{H}'_\phi| = \ell|\tilde{\mathcal{E}}_\phi|$).

Compte-tenu des définitions posées, on a :

$$\sum_{\phi|\chi} m_\phi(\mathfrak{H}') = \sum_{\phi|\chi} m_\phi(h') \text{ , pour tout } \chi \in \mathfrak{X}^+ .$$

Remarque III.1. - Nous n'avons pas défini d'invariants $m_\phi(h)$, pour $\phi \in \Phi^+$. Une définition générale reste à donner ; il faudrait auparavant trouver une expression analytique pour $|\mathfrak{H}_\chi|$. Cependant, dans le cas semi-simple, on peut poser $m_\phi(h) = m_\phi(h')$ (cf. Rem. I.1).

b) Classes relatives. On rappelle (Th. II.2) que l'on a obtenu $|\mathbb{H}_\chi| = |\mathbb{H}'_\chi| = 2^{a_\chi} w_\chi \prod_{\chi'|\chi} (\frac{1}{2}B_1(\chi'^{-1}))$, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}^-$.

Compte-tenu des résultats de Hasse ([10], chap.III) sur les nombres $\frac{1}{2}B_1(\chi'^{-1})$, on peut se convaincre facilement du fait que l'on est conduit à poser la définition suivante, pour tout $\phi \in \Phi^-$:

(i) cas $\ell \neq 2$;

$(i)_1$ K_χ n'est pas de la forme $\mathbb{Q}^{(\ell^n)}$, $n \geq 1$; on pose :

$$(\tfrac{1}{2}B_1(\chi'^{-1}))\mathbb{Z}_\ell^{(g_\chi)} = \hat{\mathfrak{p}}_\chi^{m_\phi(h)} \quad \text{(pour } \chi'|\phi \text{) ;}$$

$(i)_2$ $K_\chi = \mathbb{Q}^{(\ell^n)}$, $n \geq 1$; on a $g_\chi = (\ell-1)\ell^{n-1}$ et on peut écrire de façon unique $\chi' = \theta^\lambda \psi'$, ψ' d'ordre ℓ^{n-1} , $(\lambda, \ell-1) = 1$. On rappelle que λ ne dépend que de ϕ . On pose :

$$(\tfrac{1}{2}B_1(\chi'^{-1}))\mathbb{Z}_\ell^{(g_\chi)} = \hat{\mathfrak{p}}_\chi^{m_\phi(h)} \text{ , pour } \lambda \neq 1 \text{ (avec } \chi'|\phi \text{) ,}$$

$m_\phi(h) = 0$, pour $\lambda = 1$.

(ii) cas $\ell = 2$;

$(ii)_1$ g_χ n'est pas une puissance de 2 ; on pose :

$$(\tfrac{1}{2}B_1(\chi'^{-1}))\mathbb{Z}_2^{(g_\chi)} = \hat{\mathfrak{p}}_\chi^{m_\phi(h)} \quad (\chi'|\phi) \ ;$$

$(ii)_2$ g_χ est une puissance de 2 ; alors $\phi = \chi$ et on pose :

$$(\tfrac{1}{2}B_1(\chi'^{-1}))\mathbb{Z}_2^{(g_\chi)} = \hat{\mathfrak{p}}_\chi^{m_\phi(h)-1} \text{ , si } K_\chi \neq \mathbb{Q}^{(4)} \text{ ,}$$

$m_\phi(h) = 0$, si $K_\chi = \mathbb{Q}^{(4)}$.

On vérifie que $\sum_{\phi|\chi} m_\phi(\mathfrak{H}) = \sum_{\phi|\chi} m_\phi(h)$, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}^-$.

Dans le cas impair, on pose $m_\phi(h') = m_\phi(h)$.

3) Conclusion. On peut conjecturer que $m_\phi(\mathcal{H}') = m_\phi(h')$ pour tout caractère ℓ-adique ϕ . Cette conjecture est à rapprocher de conjectures de Coates et Lichtembaum ([2]) et de Greenberg ([9]).

IV. ÉTUDE DES INVARIANTS ANALYTIQUES.

1) Généralisation et interprétation des congruences de Leopoldt-Fresnel. On sait que les fonctions $L_\ell(s,\chi')$ ℓ-adiques, pour les caractères $\chi' \in \mathfrak{X}'^+$, peuvent s'approcher au moyen des nombres de Bernoulli généralisés ([14], [3]). On connait notamment la formule de Leopoldt-Fresnel pour les caractères pairs ([14], § 5, Th.3) :

$$L_\ell(1,\underline{\chi}') = \left(1-\frac{\underline{\chi}'(\ell)}{\ell}\right)\frac{\tau(\underline{\chi}')}{f_\chi}\sum_{a=1}^{f_\chi}\underline{\chi}'^{-1}(a)\log(1-\zeta_{f_\chi}^a)$$

et les congruences ([3]) :

$$L_\ell(1,\underline{\chi}') \equiv B_1(\underline{\chi}'\underline{\theta}^{-1}) \bmod \ell ,$$

la notation $\underline{\chi}'$ signifiant que l'on considère le caractère de Dirichlet primitif associé à χ' (cf. [3], pour les règles de calcul sur les caractères de Dirichlet).

Nous nous intéressons à ces congruences car elles donnent une information sur les invariants analytiques qui est la suivante (on suppose $\ell \neq 2$) (cf. [7], chap. III) :

Soit $\phi \in \Phi^+$, $\phi \neq 1$; on suppose g_χ premier à ℓ . On a alors (Rem. I. 1) $|\mathcal{H}_\chi| = |\mathcal{H}'_\chi| = (\mathcal{E}_\chi : \mathcal{F}_\chi)$, compte-tenu du fait que si $\ell \nmid g_\chi$, Q_χ/q_χ est premier à ℓ et $(\mathcal{E}(K_\chi) : \mathcal{E}_0(K_\chi)\mathcal{F}(K_\chi)) = (\mathcal{E}_\chi : \mathcal{F}_\chi)$ ([7], chap.I). On note $\bar\phi$ le caractère miroir de ϕ , défini au moyen du caractère θ ([17]; [7], Déf. I. 10). Désignons par $\mathcal{F}_\chi^\circ$ l'image dans $\mathcal{F}_\chi$ des unités cyclotomiques ℓ-primaires ([7], I.2.g) et considérons ([7], Déf. I. 11) :

$$b_\phi = \dim_\phi(\mathcal{F}_\chi^\circ/\mathcal{F}_\chi^\ell) \quad ;$$

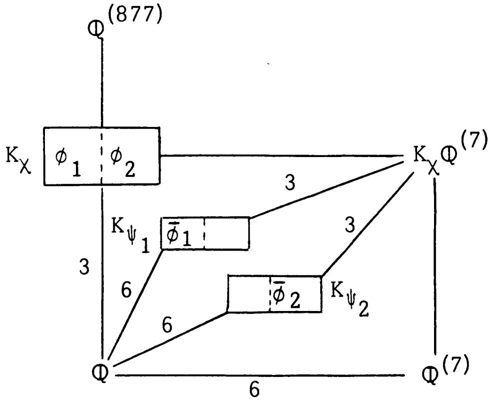
on a $b_\phi = 0$ ou 1 .

Les congruences de Leopoldt-Fresnel se traduisent alors de la façon suivante (avec une hypothèse essentielle) :

Soit $\phi \in \Phi^+$, $\phi \neq 1$, $\ell \nmid g_\chi$; alors si ℓ n'est pas totalement décomposé dans le corps K_ψ , ψ désignant le caractère rationnel au-dessus de $\bar\phi$, on a : $b_\phi = 1$ si et seulement si $m_{\bar\phi}(h) > 0$.

Ce résultat joint au "Spiegelungssatz" de Leopoldt ([17]) permet d'avoir des informations sur certains ensembles $\{m_\phi(h)\}$, ϕ parcourant certains ensembles de caractères ℓ-adiques (cf. [7], chap.V). Donnons un exemple numérique illustrant ce phénomène :

Soit K_χ le sous-corps cubique de $\mathbb{Q}^{(877)}$. Prenons $\ell = 7$ et représentons sur un schéma les caractères 7-adiques intervenant :



Les deux corps K_{ψ_1} et K_{ψ_2} sont imaginaires et on vérifie facilement en calculant les nombres de Bernoulli convenables et en utilisant le théorème de Stickelberger (cf. Prop.IV.3 ci-après) que :

$$m_{\bar\phi_1}(\aleph) = m_{\bar\phi_1}(h) = 1 \quad \text{et que} \quad m_{\bar\phi_1}(\aleph) = m_{\bar\phi_2}(h) = 0 \quad ;$$

en vérifiant ensuite que $\aleph(K_\chi)$ est d'ordre 7 , on obtient $m_{\phi_1}(h) + m_{\phi_2}(h) = 1$. Bien que l'on puisse décider numériquement sur cet exemple quel est l'invariant analytique égal à 1 et quel est l'invariant classe égal à 1 , relativement aux caractères ϕ_1 et ϕ_2 , on veut le "démontrer", de telle sorte qu'on aura établi le résultat pour tous les corps cubiques tels que $|\aleph(K_\chi)| = 7$, $m_{\bar\phi_1}(\aleph) = 1$ et $m_{\bar\phi_2}(\aleph) = 0$; on a a priori les quatre cas suivants :

cas	$m_{\phi_1}(h)$	$m_{\phi_1}(\aleph)$	$m_{\phi_2}(h)$	$m_{\phi_2}(\aleph)$
(i)	1	1	0	0
(ii)	1	0	0	1
(iii)	0	1	1	0
(iv)	0	0	1	1

Le Spiegelungssatz complètement appliqué donne $m_{\phi_2}(\mathfrak{H}) = 0$, ce qui élimine les cas (ii) et (iv).

Le critère déduit des congruences de Leopoldt-Fresnel donne $b_{\phi_1} = 1$ et $b_{\phi_2} = 0$; or $b_{\phi_2} = 0$ entraîne $\mathfrak{F}^{\circ}_{\phi_2} = \mathfrak{F}^{\ell}_{\phi_2}$ soit, nécessairement $(\mathcal{E}_{\phi_2} : \mathfrak{F}_{\phi_2})$ premier à ℓ , soit $m_{\phi_2}(h) = 0$, ce qui élimine les cas (iii) et (iv). Il ne reste que le cas (i) pour lequel la conjecture est vérifiée.

La condition " ℓ non totalement décomposé dans K_ψ (ψ au-dessus de $\bar{\phi}$)" apparaît souvent dans ce type de problème (cf. [2], Th. 2.1, 2.4, par exemple). Cette éventualité sur la décomposition de ℓ , que nous appellerons "cas spécial", est équivalente à la condition suivante (indépendante de $\chi'|\phi$) :

"le caractère χ' est de la forme $\varphi'\theta$, avec $\varphi'(\ell) = 1$ ".

Supposons être dans ce cas et revenons aux fonctions $L_\ell(1,\underline{\chi}')$ approchées par les $B_1(\underline{\chi}'\underline{\theta}^{-1})$; on a $\underline{\chi}'\underline{\theta}^{-1} = \underline{\varphi}'\underline{\theta}\,\underline{\theta}^{-1} = \underline{\varphi}'\underline{\theta}^{\circ}$; or on sait que $B_1(\underline{\varphi}'\underline{\theta}^{\circ}) = (1-\underline{\varphi}'^{-1}(\ell))B_1(\underline{\varphi}'^{-1}) = 0$, si $\underline{\varphi}'(\ell) = 1$; d'où $L_\ell(1,\underline{\chi}') \equiv 0 \mod \ell$. Dans ce cas, les congruences classiques entre nombres de classes et unités sont dégénérées en " $0 \equiv 0 \mod \ell$ " : illustrons ce phénomène sur un exemple à partir des résultats de [15] (Th. 1') :

Soit χ un caractère quadratique pair. On suppose $\ell = 3$. Soit $\bar{\chi} = \chi\theta$ supposé non trivial (donc quadratique) ; on suppose aussi $K_{\bar{\chi}}$ distinct des corps $\mathbb{Q}^{(3)}$ et $\mathbb{Q}^{(4)}$. Avec nos notations, le résultat de Kudo peut s'énoncer :

$$\frac{1}{2}|\mathbb{H}_\chi|(1-\bar{\chi}(3)) \equiv |\mathbb{H}_{\bar{\chi}}| \frac{\log \varepsilon_\chi}{\sqrt{f_\chi}}(1-\frac{\chi(3)}{3}) \mod 3 ,$$

où $\varepsilon_\chi > 1$ est l'unité fondamentale de K_χ ; on sait que si l'on écrit explicitement $\varepsilon_\chi = t + u\sqrt{f_\chi}$, on obtient une congruence simple entre $|\mathbb{H}_\chi|$, $|\mathbb{H}_{\bar{\chi}}|$, t et u ([15], §4 et [8]). Cependant, lorsque 3 est décomposé dans $K_{\bar{\chi}}$, on obtient :

$$0 \equiv |\mathbb{H}_{\bar{\chi}}| \frac{\log \varepsilon_\chi}{\sqrt{f_\chi}} \mod 3 ,$$

et un calcul élémentaire prouve que, dans ce cas, on a aussi toujours :

$$\frac{\log \varepsilon_\chi}{\sqrt{f_\chi}} \equiv 0 \mod 3 .$$

Dans [7] nous avons montré que la dégénérescence en question, dans le cas spécial, provient du fait que la définition des fonctions L_ℓ utilise le logarithme ℓ-adique qui n'est pas adapté à la notion de ℓ-primarité (log $\varepsilon \equiv 0$ mod ℓ n'implique pas toujours ε ℓ-primaire) ; or c'est cette notion qui est à la base des phénomènes étudiés. Nous avons obtenu, par un procédé tenant compte de cette remarque, des congruences qui redonnent celles de Leopoldt-Fresnel et qui donnent, dans le cas spécial, des congruences non triviales : cf. [7], Prop. IV.4 et Chap. IV, § 4 pour l'exemple des corps quadratiques et $\ell = 3$; citons seulement le résultat pour les corps quadratiques dans le cas spécial : si $f_\chi \equiv 0 \mod 3$, $f_\chi/3 \equiv 2 \mod 3$ et si $\varepsilon_\chi = t + u\sqrt{f_\chi} > 1$ est l'unité fondamentale de K_χ, alors :

$$|\mathbb{H}_\chi|ut \equiv -|\mathbb{H}_{\overline{\chi}}| \mod 3 .$$

Naturellement ces congruences donnent dans le cas spécial le critère déjà obtenu dans les autres cas ([7], Chap.IV) :

THÉORÈME IV. 1. - <u>Soit</u> $\phi \in \Phi^+$, $\phi \neq 1$; <u>on suppose</u> g_χ <u>premier à</u> ℓ. <u>Alors on a</u> $b_\phi = 1$ <u>si et seulement si</u> $m_{\overline{\phi}}(h) > 0$.

<u>Remarque IV. 1.</u> - Si la conjecture relative aux invariants classes et analytiques est vraie (au moins pour les caractères impairs), cela entraîne notamment le critère :

$$b_\phi = 1 \quad \text{si et seulement si} \quad m_{\overline{\phi}}(\aleph) > 0 \quad (\phi \in \Phi^+) \quad ;$$

or nous avons eu connaissance, après les Journées Arithmétiques, du fait que ce dernier critère avait été prouvé par Ribet ([16]) dans le cas particulier $\phi = \theta^{2k}$, $1 \leq k < \frac{\ell-1}{2}$, pour tout nombre premier ℓ.

2) <u>Interprétation du théorème de Stickelberger.</u>

a) <u>Etude de l'idéal</u> $\dot{I}(L)$. Soit L une extension abélienne finie de $\mathbb{Q}$, de conducteur f_L et soit $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$. On rappelle que :

$$S_L = \frac{1}{f_L} \sum_{a=1}^{f_L}{}^{*} \left(\frac{L}{a}\right)^{-1} a$$

est appelé l'élément de Stikelberger ($(\frac{L}{a})$ est le symbole d'Artin et Σ^* désigne la sommation sur les a tels que $(a, f_L) = 1$). On sait ([4], [1]) que l'idéal :

$$\dot{I}(L) = S_L \mathbb{Z}[G] \cap \mathbb{Z}[G]$$

annule $\mathbb{H}(L)$.

On peut exprimer $\dot{I}(L)$ sous une forme plus précise ([8], Prop. II.3) :

PROPOSITION IV.1. - Soit $\mathfrak{A}_L$ le $\mathbb{Z}$-module $(\ldots,(\frac{L}{a})-a,\ldots;\Lambda_L)$ où a parcourt un ensemble de résidus mod f_L, $(a,f_L)=1$, représentant $G\backslash\{1\}$ et où Λ_L est le plus petit entier positif tel que $\Lambda_L S_L \in \mathbb{Z}[G]$. Alors $\dot{I}(L) = S_L \mathfrak{A}_L$.

Remarque IV.2. - Le nombre Λ_L est un diviseur de f_L qui peut se calculer très simplement (cf. [8], Corol. II.3, Prop. II.5 et Prop. II.7).

Remarque IV.3. - Dans le cas $L/\mathbb{Q}$ cyclique, $\mathfrak{A}_L$ est égal à l'idéal $((\frac{L}{a})-a,\Lambda_L)$ de $\mathbb{Z}[G]$, où a est choisi tel que $(\frac{L}{a})$ engendre G.

Remarque IV.4. - Dans [1] (Th.3.1), le théorème de Stickelberger est énoncé sous la forme suivante (avec nos notations) : si $L/\mathbb{Q}$ est abélienne, alors l'idéal $\dot{I}'(L)$ engendré par les éléments de $\mathbb{Z}[G]$: $((\frac{L}{c})-c)S'_L$ (où c parcourt l'ensemble des entiers impairs premiers à f_L et où $S'_L = S_L - \frac{1}{2}[\mathbb{Q}^{(f_L)}:L]\nu_{L/\mathbb{Q}}$), annule $\mathbb{H}(L)$. L'idéal $\dot{I}'(L)$ proposé par Coates est "moins bon" que l'idéal de Stickelberger $\dot{I}(L)$ que nous avons étudié. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre pour L le composé de $\mathbb{Q}^{(3)}$ avec le sous-corps cubique de $\mathbb{Q}^{(19)}$.

b) Interprétation du théorème de Stickelberger. Soit $\chi \in \mathfrak{X}^-$. On sait que $\mathbb{H}_\chi$ est un $\mathbb{Z}^{(g_\chi)}$-module, la loi de $\mathbb{Z}^{(g_\chi)}$-mdoule étant réalisée au moyen de l'homomorphisme $\mathbb{Z}[G_\chi] \to \mathbb{Z}^{(g_\chi)}$ défini par $\sigma_\chi \to \chi'(\sigma_\chi)$, $\chi'|\chi$; il en résulte que $\mathbb{H}_\chi$ est annulé (en tant que $\mathbb{Z}^{(g_\chi)}$-module) par l'image de $\dot{I}(K_\chi)$ dans $\mathbb{Z}^{(g_\chi)}$: $\chi'(\dot{I}(K_\chi))$.

Un calcul simple conduit au résultat suivant :

PROPOSITION IV.2. - Soit $\chi \in \mathfrak{X}^-$. Le $\mathbb{Z}^{(g_\chi)}$-module $\mathbb{H}_\chi$ est annulé par l'idéal $(\chi'(a)-a\,,\,\Lambda_{K_\chi})B_1(\chi'^{-1})$ de $\mathbb{Z}^{(g_\chi)}$, a désignant un entier premier à f_χ tel que $(\frac{K_\chi}{a})$ engendre G_χ. L'idéal $(\chi'(a)-a\,,\,\Lambda_{K_\chi})$ est l'idéal unité sauf lorsque K_χ est une extension de degré une puissance de ℓ de $\mathbb{Q}^{(\ell)}$ et que $\Lambda_{K_\chi} \equiv 0 \bmod \ell$, auquel cas c'est l'un des idéaux premiers au-dessus de ℓ dans $\mathbb{Q}^{(g_\chi)}$ (sauf si $K_\chi = \mathbb{Q}^{(4)}$ où l'idéal est l'idéal (4)).

Soit maintenant $\phi \in \Phi^-$; on sait que $\mathfrak{H}_\phi$ est un $\mathbb{Z}_\ell^{(g_\chi)}$-module, la loi de $\mathbb{Z}_\ell^{(g_\chi)}$-module étant réalisée au moyen de l'homomorphisme $\mathbb{Z}_\ell[G_\chi] \to \mathbb{Z}_\ell^{(g_\chi)}$ défini par $\sigma_\chi \to \chi'(\sigma_\chi)$, avec cette fois $\chi'|\phi$. Il en résulte que $\mathfrak{H}_\phi$ est annulé (en tant que $\mathbb{Z}_\ell^{(g_\chi)}$-module) par $\chi'(\dot{I}(K_\chi))$; on obtient alors :

PROPOSITION IV.3. - <u>Soit</u> $\phi \in \Phi^-$. <u>Le</u> $\mathbb{Z}_\ell^{(g_\chi)}$-<u>module</u> $\mathfrak{H}_\phi$ <u>est annulé par l'idéal</u> $(\chi'(a)-a\,,\,\Lambda_{K_\chi})B_1(\chi'^{-1})$ <u>de</u> $\mathbb{Z}_\ell^{(g_\chi)}$, $\chi'|\phi$. <u>L'idéal</u> $(\chi'(a)-a\,,\,\Lambda_{K_\chi})$ <u>de</u> $\mathbb{Z}_\ell^{(g_\chi)}$ <u>est l'idéal unité sauf si</u> K_χ <u>est une extension de degré une puissance de</u> ℓ <u>de</u> $\mathbb{Q}^{(\ell)}$, <u>que</u> $\Lambda_{K_\chi} \equiv 0 \mod \ell$ <u>et que, dans la décomposition</u> $\chi' = \theta^\lambda \psi'$ (ψ' <u>d'ordre puissance de</u> ℓ , $1 \le \lambda \le \ell-1$), $\lambda = 1$, <u>auquel cas</u> $(\chi'(a)-a\,,\,\Lambda_{K_\chi}) = \hat{\mathfrak{p}}_\chi$ (<u>sauf si</u> $K_\chi = \mathbb{Q}^{(4)}$ <u>où l'idéal est l'idéal</u> (4)).

COROLLAIRE IV.1. - <u>Soit</u> $\chi' = \theta\psi'$, ψ' <u>étant un caractère dont l'ordre et le conducteur sont des puissances de</u> ℓ , $\ell \neq 2$; <u>alors pour le caractère</u> ℓ-<u>adique</u> $\phi \in \Phi^-$, <u>au-dessus de</u> χ' , <u>on a</u> $\mathfrak{H}_\phi = (1)$.

En effet, dans ce cas, l'idéal $(\chi'(a)-a\,,\,\Lambda_{K_\chi})B_1(\chi'^{-1})$ de $\mathbb{Z}_\ell^{(g_\chi)}$ est l'idéal unité : il suffit d'utiliser les résultats de Hasse ([10], § 31, formule (12)). Ceci justifie, a posteriori, le fait que nous ayons posé $m_\phi(h) = 0$ dans ce cas (cf. III, 2, b, cas $(i)_2$).

Ce résultat est bien connu lorsque $\psi' = 1$ (cf. [9], Corol. 1 et [2], lemme 2.11, pour le cas général).

<u>Remarque IV.5.</u> - Outre le cas particulier du corollaire précédent, ces interprétations du théorème de Stikelberger (principalement au niveau des $\mathfrak{H}_\phi$) donnent une justification supplémentaire aux définitions que nous avons données pour les invariants $m_\phi(h)$, $\phi \in \Phi^-$.

<u>Remarque IV.6.</u> - Il nous semble que le théorème de Stickelberger est insuffisant en 2 et en ℓ dans certains cas. Pour s'en convaincre, considérons l'exemple suivant : soit $K_\chi = \mathbb{Q}_0^{(7)}\mathbb{Q}^{(3)}$. On vérifie facilement que S_{K_χ} est égal à $\frac{1}{3}(2 + 4\sigma + 5\sigma^2 + 4\sigma^3 + 2\sigma^4 + \sigma^5)$ avec $\sigma = (\frac{K_\chi}{2})$. Le théorème II.2 donne $|\mathbb{H}_\chi| = \prod_{\chi'|\chi} (\frac{1}{2}B_1(\chi'^{-1})) = 1$. Si on applique la proposition IV.3, on trouve que $(\chi'(2)-2,3)B_1(\chi'^{-1}) = 2\mathfrak{p}_\chi$ annule $\mathbb{H}_\chi$.

On peut alors conjecturer le résultat suivant : "pour tout $\phi \in \Phi^-$, $\mathfrak{H}_\phi$ est annulé par $\hat{\mathfrak{p}}_\chi^{m_\phi(h')}$ " (pour un commentaire plus détaillé sur ce choix, cf. [8], Rem. II.6).

3) <u>Applications aux Γ-extensions cyclotomiques</u>. Soit K une extension abélienne de $\mathbb{Q}$; la Γ-extension cyclotomique de K (relativement à un nombre premier ℓ) est l'extension $\bigcup_{i\ge 0} K_i$, où K_i est le composé de K avec

l'unique extension cyclique réelle de degré ℓ^i sur $\mathbb{Q}$, de conducteur puissance de ℓ. On sait que pour i assez grand, $|\mathfrak{H}(K_i)| = \ell^{\lambda i+\mu \ell^i+\nu}$, $\lambda,\mu \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{Z}$, indépendants de n ([11], [12], [13], [14]).

Nous allons montrer que les interprétations arithmétiques précédentes permettent de trouver (ou retrouver) certains résultats sur la Γ-extension cyclotomique de K, sous une forme bien adaptée à l'investigation numérique.

Pour simplifier, nous supposons $K/\mathbb{Q}$ cyclique de degré premier à ℓ. Les extensions $K_i/\mathbb{Q}$ seront alors cycliques ; pour cette raison, nous commençons par donner un résultat général sur les corps K_χ lorsque $g_\chi \equiv 0 \bmod \ell^n$, $n \geq 2$, que nous appliquons ensuite aux corps K_i. Nous décomposons cette étude selon les deux étapes habituelles :

a) Cas réel. Soit $\chi \in \mathfrak{X}^+$. Supposons $g_\chi \equiv 0 \bmod \ell^n$, $n \geq 2$. Appelons K_ψ le corps défini par $[K_\chi : K_\psi] = \ell$. Nous allons voir que l'on peut, en un certain sens, comparer les invariants $m_\phi(h')$ et $m_{\phi_\ell}(h')$ (ϕ et ϕ_ℓ étant ainsi définis : soit $\chi'|\phi$, alors $\phi_\ell|\psi$ est le caractère ℓ-adique au-dessus de χ'^{ℓ}). Posons $\tilde{\tilde{\mathcal{E}}}_\psi = \mathcal{E}(K_\psi)/N_{K_\chi/K_\psi}\mathcal{E}(K_\chi)\mathcal{E}_0(K_\psi)$ et $\tilde{\tilde{\mathcal{E}}}_\psi = \bigoplus_{\phi'|\psi} \tilde{\tilde{\mathcal{E}}}_{\phi'}$; on aura $\tilde{\tilde{\mathcal{E}}}_{\phi'} \simeq \mathbb{Z}_\ell^{(g_\chi)}/\hat{\mathfrak{p}}_\psi^{x_{\phi'}}$, $x_{\phi'} \geq 0$. Supposons pour simplifier que $N_{K_\chi/K_\psi}\mathfrak{F}(K_\chi) = \mathfrak{F}(K_\psi)$ (cf. [8], chap. III, §3) et que, dans la formule du théorème II.1', on ait $\ell_\chi = 1$ (dans le cas contraire, les calculs sont différents) ; on obtient :

PROPOSITION IV.4. - Sous les hypothèses précédentes et pour $\phi|\chi$:

(i) si $m_{\phi_\ell}(h') < \ell^{n-2}(\ell-1)$, alors $m_\phi(h') = m_{\phi_\ell}(h') - x_{\phi_\ell}$,

(ii) si $m_{\phi_\ell}(h') \geq \ell^{n-2}(\ell-1)$, alors $m_\phi(h') \geq \ell^{n-2}(\ell-1) - x_{\phi_\ell}$.

Cette proposition permet de retrouver immédiatement une partie des résultats d'Iwasawa ([11], [12]) :

considérons $K_\infty = \bigcup_{i\geq 0} K_i$; l'ensemble Φ_{K_∞} est de la forme $\{\phi_i\}_{\phi\in\Phi_K,\, i\geq 0}$ de façon évidente (si ϕ_i est défini ($\phi = \phi_0$ fixé), alors il existe un unique caractère ℓ-adique ϕ_{i+1} tel que si $\varphi'_{i+1}|\phi_{i+1}$ alors $\varphi'^{\ell}_{i+1}|\phi_i$) ; pour simplifier notons pour $\phi \in \Phi_K$ fixé, $m_i = m_{\phi_i}(h')$, $i \geq 0$, les invariants analytiques correspondants :

s'il existe $i_\phi \geq 1$ tel que $m_{i_\phi} < \ell^{i_\phi - 1}(\ell - 1)$, alors il existe $i'_\phi \geq i_\phi$ tel que $m_i = c^{te}$, pour tout $i \geq i'_\phi$.

Lorsque cette hypothèse a lieu pour tout $\phi \in \Phi_K$, on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{N}$ et $\nu \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$|\mathfrak{H}(K_n)| = \ell^{\lambda n+\nu} , \text{ pour tout } n \geq \operatorname*{Max}_{\phi}(i'_\phi)$$

(on a donc "$\mu=0$").

Remarque IV.7. - Ce résultat est plus faible que le résultat d'Iwasawa (car on fait une hypothèse, d'ailleurs équivalente à $\mu = 0$), cependant, la méthode par laquelle il est obtenu est mieux adaptée à la pratique : en effet, considérons la conjecture classique " $\mu = 0$ pour les Γ-extensions cyclotomiques" ; alors la proposition IV.4 permet de constater numériquement que $\mu = 0$.

b) Cas relatif. La démarche est analogue. Soit $\chi \in \mathfrak{X}^-$. Supposons $g_\chi \equiv 0 \mod \ell^n$, $n \geq 2$ $(\ell \neq 2)$; on définit K_ψ comme dans a)). On suppose pour simplifier que $S_{K_\psi} \equiv N_{K_\chi/K_\psi} S_{K_\chi}$ modulo $\nu_{K_\psi/\mathbb{Q}}$ (cf. [8], Th. II.3), que S_{K_χ} et S_{K_ψ} sont ℓ-entiers (si ce n'est pas le cas, on peut s'y ramener assez facilement) ; on obtient pour $\phi|\chi$ (cf. [8], Prop. IV.1) :

PROPOSITION IV.5. - Sous les hypothèses précédentes et pour $\phi|\chi$:

(i) si $m_{\phi_\ell}(h) < \ell^{n-2}(\ell-1)$, alors $m_\phi(h) = m_{\phi_\ell}(h)$,

(ii) si $m_{\phi_\ell}(h) \geq \ell^{n-2}(\ell-1)$, alors $m_\phi(h) \geq \ell^{n-2}(\ell-1)$.

Considérons maintenant K_∞ , K imaginaire, et utilisons des notations analogues à celles utilisées dans a) :

s'il existe $i_\phi \geq 1$, tel que $m_{i_\phi} < \ell^{i_\phi - 1}(\ell-1)$, alors $m_i = c^{te}$ pour tout $i \geq i_\phi$.

Lorsque cette hypothèse a lieu pour tout $\phi \in \Phi_K^-$, on en déduit qu'il existe $\lambda^- \in \mathbb{N}$ et $\nu^- \in \mathbb{Z}$, effectivement calculables, tels que :

$$|\mathfrak{H}(K_n)^-| = \ell^{\lambda^- n+\nu^-} , \text{ pour tout } n \geq \operatorname*{Max}_{\phi\in\Phi_K^-}(i_\phi) .$$

Ceci donne immédiatement une méthode de calcul des invariants λ^- , ν^- relatifs à la Γ-extension cyclotomique $\mathbb{Q}_\infty^{(\ell)}$ de $\mathbb{Q}^{(\ell)}$, à partir des nombres de Bernoulli généralisés de la forme $B_1(\theta^{2k-1}\psi'_i)$, $1 < k \leq \frac{\ell-1}{2}$, où ψ'_i est un élément de $\mathfrak{X}'_{\mathbb{Q}_\infty^{(\ell)}}$ d'ordre ℓ^i , $i \geq 0$. On ne considère que les k pour lesquels $B_1(\theta^{2k-1}) \equiv 0 \mod \ell\mathbb{Z}_\ell$ (ou, ce qui revient au même, les k pour lesquels le nombre de Bernoulli ordinaire B_{2k} est divisible par ℓ , puisque $B_{2k} \equiv 2kB_1(\theta^{2k-1})\bmod \ell\mathbb{Z}_\ell$) ; ensuite, on écrit $B_1(\theta^{2k-1}\psi'_1)\mathbb{Z}_\ell^{(\ell)} = (w_1-1)^{m_1}\mathbb{Z}_\ell^{(\ell)}$ (avec $w_1^\ell = 1$) et on regarde si $m_1 < \ell - 1$ ou non ; pour tous les exemples numériques connus, on sait que $m_1 = 1$.

On retrouve aussi très simplement les résultats de Gold ([5], [6]) sans restriction :

PROPOSITION IV.6. - <u>Soit</u> $K_\varphi = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ <u>un corps quadratique imaginaire quelconque ; soit</u> $\ell \neq 2$ (<u>si</u> $\ell = 3$, <u>on suppose</u> $K_\varphi \neq \mathbb{Q}^{(3)}$). <u>Soit</u> K_∞ <u>la Γ-extension cyclotomique de</u> K_φ . <u>Posons</u> $K_i = K_{\varphi_i}$, <u>pour</u> $i \geq 0$, <u>et soit</u> m_i <u>défini par</u> $B_1(\varphi_i'^{-1})\mathbb{Z}_\ell^{(\ell^i)} = \hat{p}_{\varphi_i}^{m_i}$, $i \geq 0$. <u>Alors s'il existe</u> $i_0 \geq 1$ <u>tel que</u> $m_{i_0} < \ell^{i_0-1}(\ell-1)$, <u>on a</u> $\mu = 0$, $\lambda = m_{i_0}$ <u>et</u> $\nu = m_0 + \ldots + m_{i_0-1} - \lambda(i_0-1)$.

<u>Remarque IV.8.</u> - Signalons que les interprétations arithmétiques au moyen des $\mathfrak{H}_\chi$ permettent de donner des informations sur les ℓ-rangs des $\mathfrak{H}(K_i)$ (cf. [8], Rem. IV.4).

En conclusion, on peut dire que l'interprétation arithmétique des formules analytiques du nombre de classes des extensions abéliennes conduit de façon naturelle à l'étude des invariants d'Iwasawa et qu'elle montre de façon assez précise, d'une part le rôle des unités et unités cyclotomiques pour le cas réel et, d'autre part, celui des nombres de Bernoulli généralisés pour le cas relatif. Il est probable qu'un certain nombre d'applications peuvent aussi être trouvées dans des situations autres que celles des Γ-extensions cyclotomiques.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] COATES (J.) - p-adic L-functions and Iwasawa's theory, Durham symposium in algebraic number theory, Sept. 1975.

[2] COATES (J.) and LICHTEMBAUM (S.) - On ℓ-adic Zeta functions, Ann. of Math., 98 (1973), pp. 498-550.

[3] FRESNEL (J.) - Nombres de Bernoulli et fonctions L p-adiques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 17, 2 (1967), pp. 281-333.

[4] GILLARD (R.) - Relations de Stickelberger, Sém. de théorie des Nombres, Grenoble (1974).

[5] GOLD (R.) - Examples of Iwasawa invariants, Acta Arith. XXVI (1974).

[6] GOLD (R.) - Examples of Iwasawa invariants, II, Acta Arith. XXVI (1975).

[7] GRAS (G.) - Classes d'idéaux des corps abéliens et nombres de Bernoulli généralisés, Ann. Inst. Fourier, Grenoble (1977) (à paraître).

[8] GRAS (G.) - Applications de la notion de φ-objet à l'étude du groupe des classes d'idéaux des extensions abéliennes, Pub. Math. Univ. Besançon, Théorie des Nombres (1975-1976) (à paraître).

[9] GREENBERG (R.) - On p-adic L-Functions and cyclotomic Fields, Nagoya Math. J., 56 (1974), 61-77.

[10] HASSE (H.) - Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper, Berlin (1952).

[11] IWASAWA (K.) - On the theory of cyclotomic Fields, Ann. of Math., 70, 3 (1959).

[12] IWASAWA (K.) - On Γ-extension of algebraic number fields, Bul. Amer. Math. Soc., 65 (1959), pp. 183-226.

[13] IWASAWA (K.) - On the μ-invariants of $\mathbb{Z}_\ell$-extensions, Number theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in honor of Y. Akizuki, Kinokuniya, Tokyo (1973), 1-11.

[14] IWASAWA (K.) - Lectures on p-adic L-Functions, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press (1972).

[15] KUDO (A.) - On a class number relation of imaginary abelian fields, J.Math. Soc. Japan, 27, 1 (1975).

[16] LEOPOLDT (H.-W.) - Über Einheitengruppe und Klassenzahl reeller abelscher Zahlkörper, Abh. Deutsche Akad. Wiss. Berlin, Math., 2 (1954).

[17] LEOPOLDT (H.-W.) - Zur Struktur der ℓ-Klassengruppe galoisscher Zahlkörper, Jour. für die reine und ang. Math. 199 (1958), pp. 165-174.

[18] RIBET (K.) - A modular construction of unramified p-extensions of $\mathbb{Q}(\mu_p)$, I.H.E.S., Bures-sur-Yvette (Avril 1976).

-:-:-:-

Georges GRAS
Université de Besançon
Faculté des Sciences - Mathématiques
25030 BESANÇON CEDEX