Astérisque

BERNARD ORIAT

Relations entre les 2-groupes des classes d'idéaux de $k(\sqrt{d})$ et $k(\sqrt{-d})$

Astérisque, tome 41-42 (1977), p. 247-249

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1977__41-42__247_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 41-42 (1977) p.247-249

RELATIONS ENTRE LES 2-GROUPES DES CLASSES D'IDÉAUX DE $k(\sqrt{d})$ ET $k(\sqrt{-d})$

Bernard ORIAT

Notons $\mathcal{H}_L$ le 2-groupe des classes d'idéaux (au sens restreint) du corps de nombres L . Soit a un entier sans facteur carré positif. P.Damey et J.J.Payan ont démontré dans [1] que les 4-rangs des groupes des classes des corps quadratiques $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{-a})$ sont liés par :

$$0 \leqslant \dim_4 \mathcal{H}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-a})} - \dim_4 \mathcal{H}_{\mathbb{Q}(\sqrt{a})} \leqslant 1 .$$

Nous avons démontré le résultat plus général suivant:

<u>Théorème:</u> Soit k un corps de nombres ne contenant pas $\sqrt{-1}$, soit d un élément de k, non carré dans k . Posons $K=k(\sqrt{d})$ et $\overline{K}=k(\sqrt{-d})$. Soit j (resp. $\overline{j}$) l'application canonique de $\mathcal{H}_k$ dans $\mathcal{H}_K$ (resp. $\mathcal{H}_{\overline{K}}$). Posons $\mathcal{D}=\mathcal{H}_K/j(\mathcal{H}_k)$ et $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{H}_{\overline{K}}/\overline{j}(\mathcal{H}_k)$.
Pour toute puissance de 2, notée m, supérieure ou égale à 4 et telle que le sous-corps réel maximal $\mathbb{Q}_0^{(m)}$ du $m^{\text{ème}}$ corps cyclotomique soit inclus dans k , on a les inégalités:

$$\dim_m \mathcal{D} - \dim_m \overline{\mathcal{D}} \leqslant n_1 + n_2 + n_3 \ ;$$

Les quantités n_1, n_2 , n_3 sont liées à l'extension $\overline{K}/k$ et sont définies de la façon suivante :

Soient E_k et $E_{\overline{K}}$ les groupes d'unités de k et $\overline{K}$. Soient E_k^+ et $E_{\overline{K}}^+$ les groupes d'unités totalement positives de k et $\overline{K}$.
On a: $n_1 = \dim_{\mathbb{Z}} E_{\overline{K}} - \dim_{\mathbb{Z}} E_k$ et $n_2 = \dim_2 E_k^+ \cap N_{\overline{K}/k}\overline{K} \ / \ E_k^2 N_{\overline{K}/k} E_{\overline{K}}^+$.
Si enfin, $\mathcal{H}_k^{(2)}$ désigne l'ensemble des éléments h de $\mathcal{H}_k$ tels que $h^2 = 1$ et si P_k est le sous-groupe de $\mathcal{H}_k$ engendré par les idéaux prin-

cipaux au sens ordinaire, on a: $n_3 = \dim_2 \mathcal{H}_k^{(2)} / P_k \mathrm{Ker}\, \bar{j}$.

Cas particulier : Si k est totalement réel et 2-principal, on a : $\mathcal{D} = \mathcal{H}_K$, $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{H}_{\bar{K}}$, $n_2 = n_3 = 0$. En appliquant ce théorème avec $k=\mathbb{Q}$, $d=a$ et $d=-a$, on obtient le résultat de Damey et Payan.

La démonstration repose également sur le corps de classe et la théorie de Kummer. Elle s'inspire du Spiegelungssatz de Leopoldt [3]. On trouvera les détails dans [4].

Application: Soit p un nombre premier congru à 1 modulo 8 et soit h(a) le nombre de classes du corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$. L'utilisation du théorème ci-dessus avec $k = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ et $d = 2$ permet de démontrer l'implication: ([2])

$$h(2p) \equiv 0 \mod 8 \Rightarrow h(-2p) \equiv 0 \mod 8 .$$

Nous avons pu également démontrer l'implication suivante :

$$h(2p) \equiv 0 \mod 16 \Rightarrow h(-2p) \equiv 0 \mod 16 ,$$

à l'aide des mêmes méthodes. toutefois, ce résultet n'a pu être obtenu comme conséquence directe du théorème énoncé ci-dessus. Il faut reprendre la démonstration en précisant certains détails propres à ce cas particulier [5].

Bibliographie.

[1] Damey (P.) et Payan (J.J.) , Existence et construction des extensions galoisiennes et non abéliennes de degré 8 d'un corps de caractéristique différente de 2 , Jour. für die reine und angew. Math. 244 (1970) , p. 37-54 .

[2] Kaplan (P.) , Divisibilité par 8 du nombre des classes des corps quadratiques dont le 2-groupe des classes est cyclique et réciprocité biquadratique , Jour. Math. Soc. Japan ,25-4 ,(1973) , p.596-608 .

[3] Leopoldt (H.W.) Zur Struktur der ℓ-Klassengruppe galoischer Zahlkörper , Jour. für die reine und angew. Math. 199 , (1958) p.165-175.

[4] Oriat (B.), Relations entre les 2-groupes des classes d'idéaux des extensions quadratiques $k(\sqrt{d})$ et $k(\sqrt{-d})$, (à paraitre aux Annales de l'Inst. Fourier , 27, (1977)).

[5] Oriat (B.) , Sur la divisibilité par 8 et 16 des nombres de classes des corps quadratiques $\mathbb{Q}(\sqrt{2p})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{-2p})$, (à paraitre).

Bernard Oriat
Faculté des Sciences
25030 Besançon