Yves Dupain

Intervalles à restes majorés pour la suite $\{n\alpha\}$

Astérisque, tome 41-42 (1977), p. 193-197
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1977__41-42__193_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 41-42 (1977) p.193-197

INTERVALLES A RESTES MAJORÉS POUR LA SUITE $\{n\alpha\}$

par

Yves DUPAIN

-:-:-:-

1. - Introduction - Définitions

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ une suite de points du tore, et I un intervalle du tore. Pour $N \in \mathbb{N}$, posons : $\varphi(I,N) = \mathrm{card}\{n,\ n<N,\ u_n \in I\} - n\,\mu(I)$ (μ désignant la mesure de Lebesgue du tore). Nous dirons que I est à restes bornés (respectivement majorés) pour la suite u, si la suite $N \to \varphi(I,N)$ est bornée (respectivement majorée).

Plus particulièrement, considérons la suite $\{n\alpha\}$ (α désignant un réel irrationnel) et le problème suivant : "Quels sont les intervalles à restes bornés pour la suite $\{n\alpha\}$" ?

En 1909, P. Bohl démontre ([1]) : "Pour un intervalle, la propriété d'être à restes bornés ou non ne dépend que de la longueur de l'intervalle".

En 1922, F. Hecke démontre ([5]) : "Tout intervalle de longueur congrue à $z\alpha$ (mod 1) pour $z \in \mathbb{Z}$ est à restes bornés".

Enfin, en 1966, H. Kesten, utilisant les résultats précédents, obtient la caractérisation suivante ([6]) : "Un intervalle est à restes bornés si et seulement si sa longueur est congrue mod 1 à $z\alpha$ (pour $z \in \mathbb{Z}$)".

Le problème qui se pose alors est le suivant : "Un intervalle à restes non bornés peut-il être à restes majorés" ? En 1972, V. T. Sós cite, sans démonstration, ([9]) : "Il existe des irrationnels α, et des intervalles à restes majorés et à restes non bornés pour la suite $\{n\alpha\}$". Nous nous proposons de préciser ce résultat. (Les démonstrations des théorèmes que nous exposons se trouvent dans [2] et [3].)

2. - Méthodes employées

Soit α un irrationnel, soit β un réel $(0 \leq \beta < 1)$. Nous utilisons le développement de β par rapport à α. Considérons le développement de α en fractions continues, (a_n) la suite des quotients partiels de α, et (q_n) la suite des dénominateurs des réduites de α $(q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1})$. Développer β par rapport à α, c'est associer à β deux suites d'entiers $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant :

$$r_n = \sum_{i=1}^{n} b_i q_i$$

$$\beta = \lim \{r_n \alpha\}$$

$$\begin{cases} 0 \leq b_1 \leq a_1 - 1 \\ 0 \leq b_n \leq a_n \qquad n = 2, 3, \ldots \\ b_n = a_n \Rightarrow b_{n-1} = 0 \\ \text{Il n'existe pas d'indice } u \text{ impair tel que } b_n = a_n,\ b_{n-1} = 0 \\ \text{pour } n = u,\ u+2,\ \ldots \end{cases}$$

un tel développement existe et est unique (J. Lesca [7]).

Pour un intervalle $I = [0, \gamma[$ posons $\varphi(I, N) = \varphi^{-}(\gamma, N)$. Soit $\beta \not\equiv z\alpha \pmod 1$. L'intervalle $[0, \beta[$ peut-il être à restes majorés ? Utilisons le développement de β par rapport à α, (r_n) et une remarque de J. Lesca [7] :

Pour $x < r_n$, $\quad |\varphi^{-}(\beta, x) - \varphi^{-}(\{r_n\alpha\}, x)| \leq 1$.

Il nous suffit de regarder si l'ensemble $\{\varphi^{-}(\{r_n\alpha\}, x),\ n \in \mathbb{N}^*,\ x < r_n\}$ est majoré. Les intervalles considérés ayant des extrémités de la forme $\{k\alpha\}$, $(k \in \mathbb{N})$, nous pouvons alors appliquer les techniques utilisées par J. Lesca dans [8], (en particulier la formule de réciprocité et les formules linéaires), et obtenir le lemme :

LEMME. - __Soient__ $n \in \mathbb{N}^*$ __et__ $x < \in \mathbb{N}^*$, $x < q_{n+1}$, x __s'écrit alors__ $x = y + d q_n$ $(y < q_n,\ 0 \leq d \leq q_n)$ __et__ :

(1) <u>si</u> n <u>impair</u>, $\varphi^-(\{r_n\alpha\}, x) = \varphi^-(\{r_n\alpha\}, y) - \lambda_n(d\, r_{n-1} + b_n x) + A_n(x)$

<u>où</u> $\lambda_n = \|q_n\alpha\|$ et $A_n(x) = \begin{cases} \text{Min}(d+1\ ,\ b_n) & \text{si } y > r_{n-1} \\ \text{Min}(d\ ,\ b_n) & \text{si } y \leq r_{n-1} \end{cases}$

(2) <u>si</u> n <u>pair</u>, $\varphi^-(\{r_n\alpha\}, x) = \varphi^-(\{r_n\alpha\}, y) + \lambda_n(d\, r_{n-1} + b_n x) - B_n(x)$

<u>où</u> $\lambda_n = \|q_n\alpha\|$ <u>et</u> $B_n(x) = \begin{cases} \text{Min}(d, b_n) & \text{si } y > r_{n-1} \\ \text{Min}(d, b_n - 1) & \text{si } 0 < y \leq r_{n-1} \\ \text{Min}(\text{Max}(d-1, 0), b_n) & \text{si } y = 0 \end{cases}$

3. - <u>Intervalles ayant</u> 0 <u>pour extrémité</u>

Du lemme précédent nous pouvons déduire :

THÉORÈME 1. - <u>Si la constante de Markov de</u> α <u>est infinie il existe des intervalles ayant</u> 0 <u>pour extrémité</u>, <u>à restes majorés et à restes non bornés</u>.

THÉORÈME 2. - <u>Si</u> $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, <u>tout intervalle</u>, <u>ayant</u> 0 <u>pour extrémité</u>, <u>à restes majorés est à restes bornés</u>.

Contrairement au cas des intervalles à restes bornés où l'on pouvait appliquer le théorème de Bohl, dans le cas présent, un argument semblable ne peut pas être employé, et le problème des "translations" d'intervalle se pose. Pour l'étudier nous allons utiliser une formulation différente.

4. - <u>Translations d'intervalle</u>

Soit T l'application du tore dans lui-même qui à x associe $x+\alpha$. Soit I un intervalle. Posons :

$$\varphi(x) = \chi_I(x) - \mu(I) \qquad (\chi_I \text{ fonction caractéristique de } I)$$

et

$$\varphi_N(x) = \sum_{i=1}^{N} \varphi(T^i x) \ .$$

Remarquons que $\varphi_N(x) = \varphi(I_{-x}, N)$, où I_{-x} désigne le translaté de I par $-x$.

Supposons $I = [0, \beta[$, posons alors $A_\beta = \{x \mid N \to \varphi_N(x) \text{ soit majorée}\}$ (nous avons : $x \in A_\beta \Leftrightarrow I_{-x}$ est à restes majorés).

En utilisant le fait que T est ergodique, G. Halasz a démontré, en 1976, que $\mu(A_\beta)=0$ ([4]). Peut-on préciser ce résultat ? en particulier, peut-on savoir si A_β est vide ou non ? Introduisons la définition : β est dit distingué par rapport à α si le développement $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de β par rapport à α contient des plages arbitrairement longues de 0 consécutifs.

THÉORÈME 3. - Soit α un irrationnel. Pour tout β distingué par rapport à α, A_β est non vide.

COROLLAIRE. - Pour tout irrationnel α, il existe des intervalles à restes majorés et non bornés pour la suite $\{n\alpha\}$.

Remarquons qu'il est facile de déduire ce corollaire du théorème 1 dans le cas où la constante de Markov de α est infinie, mais que celui-ci n'est pas évident dans le cas où $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (cf. théorème 2).

Notons enfin que la connaissance d'un élément de A_β nous permet de caractériser A_β.

THÉORÈME 4. - Soit x appartenant à A_β. Tous les éléments de A_β sont caractérisés par la relation :

$$x+y\in A_\beta \Leftrightarrow \{\varphi(I_{-x}, R_n),\ n\in\mathbb{N}^*\} \text{ minoré}$$

(où R_n correspond au développement de y par rapport à α, $y=\lim\{R_n\alpha\}$).

5. - Remarque

Tous les résultats obtenus dépendent du développement d'un nombre par rapport à α, et, si l'on sait que ce développement existe, on n'en connaît en général pas les propriétés. Cependant nous avons pu répondre à une question de M. Keame posée aux Journées Ergodiques de Rennes en 1974 : "il existe des irrationnels α tels que $A_{\frac{1}{2}}$ soit non vide". (Notons que les nombres α trouvés sont tels que $\frac{1}{2}$ n'est pas distingué par rapport à α et que le théorème 3 ne s'applique pas.)

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. BOHL, Uber ein inder Theorie der säkularen Störungen vor kommendes Problem, Journ. Reine Math. 135 (1909).

[2] Y. DUPAIN, Intervalles à restes majorés pour la suite $\{n\alpha\}$, à paraître, Acta Mathematika (Hongrie) (1977).

[3] Y. DUPAIN, Intervalles à restes majorés pour la suite $\{n\alpha\}$ II, à paraître.

[4] G. HALASZ, Remarks on the remainder in Birkhoff's ergodic theorem, à paraître.

[5] E. HECKE, Analytische Funktionen und die Verteilnng von Zahlen mod eins, Abh. Math. Semin. Hamburg Univ. I (1922).

[6] H. KESTEN, On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod. 1, Acta Arith. 12 (1966).

[7] J. LESCA, Sur la répartition modulo 1 des suites $n\alpha$, Séminaire Delange-Pisot-Poitou (théorie des nombres) 8e année (1966-67).

[8] J. LESCA, Sur la répartition modulo 1 de la suite $n\alpha$, Acta Arith. 20 (1972).

[9] V. T. SOS, On the distribution of the sequence $\{n\alpha\}$, Oberwolfach 1972, Zahlentheorie.

-:-:-:-

Yves DUPAIN
Laboratoire de Mathématiques
et d'Informatique dépendant
de l'Université de Bordeaux I
associé au C. N. R. S.
351, cours de la Libération
33405 TALENCE